

Die Grundzüge der elektromagnetischen Lichttheorie.

Die Grundzüge der elektromagnetischen Lichttheorie werden im Folgenden aus der Betrachtung der Lichtbewegung in homogenen Nichtleitern der Elektrizität zu entwickeln versucht. Die Theorie des Lichtes für Leiter wird nur flüchtig berührt. Die Arbeit zerfällt in zwei Teile: Betrachtung der Lichtbewegung in isotropen und in anisotropen homogenen Medien. Als über den Rahmen der Arbeit, wie er durch den Titel vorgezeichnet ist, hinausgehend, sind Kapitel der Optik wie die Einführung des Strahlenbegriffes, die Absorption, die Dispersion und so weiter nicht berücksichtigt.*)

I. Die Lichtbewegung in isotropen homogenen Medien.

1.

Die Erscheinungen des Lichtes, insofern sie durch ebene Wellen bedingt sind, können, ohne daß man sich vorläufig über das Wesen des Lichtes eine Vorstellung macht, durch die Annahme eines einzigen Vektors, des sogenannten Lichtvektors, erklärt werden. Die Berechtigung zu dieser Annahme gibt die Betrachtung der Polarisationserscheinungen. Dieser Lichtvektor p ist transversal, d. h. in der Wellenebene gelegen, und ist völlig bestimmt durch seine Projektionen auf die drei Koordinatenachsen, durch seine Komponenten ξ , η , ζ , denen als Zustandsfunktionen folgende Ausdrücke zukommen:

$$(1) \quad \begin{aligned} \xi &= A \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda} \right) + a \right], \\ \eta &= B \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda} \right) + b \right], \\ \zeta &= C \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{r}{\lambda} \right) + c \right]. \end{aligned}$$

Die wesentliche Form dieser Ausdrücke ist einmal durch den Umstand bedingt, daß, wie die Interferenzerscheinungen lehren, der Lichtzustand ein periodischer ist, daß also, wenn wir einen bestimmten Punkt (x, y, z) betrachten, daselbst nach Ablauf der Zeit τ (Schwingungsdauer) die Zustandsfunktionen wieder denselben Wert besitzen, oder daß, wenn wir eine bestimmte Zeit t ins Auge fassen, für diejenigen Wellen, welche sich im Abstände λ (Wellenlänge) von einander befinden, die augenblicklichen Zustände übereinstimmen, dann

*) Benützt wurden bei der Ausarbeitung insbesondere: Volkmann, Vorlesungen über die Theorie des Lichtes; Hertz, Untersuchungen über die Ausbreitung der elektrischen Kraft; Tumlirz, Die elektromagnetische Theorie des Lichtes; Lippichs Vorlesungen über Elektrodynamik und über theoretische Optik.

dadurch, daß wir die Zustandsfunktionen für ein ganz bestimmtes homogenes Licht darstellen wollen und ferner noch dadurch, daß die Zustandsfunktionen, die der Fortpflanzung in ebenen Wellen entsprechen, immer von der Form sein müssen:

Funktion von $\left(t - \frac{r}{\omega}\right)$, wo ω die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ($\omega = \frac{\lambda}{\tau}$)

und r den Abstand der Wellenebene vom Koordinatenanfangspunkte bedeuten. Die zeitlichen Veränderungen des Lichtvektors seiner Größe und Richtung nach lassen uns also von Schwingungen desselben sprechen. A, B, C sind die Amplituden der Schwingungen der Lichtvektorkomponenten und a, b, c die Phasen derselben. Auf Grund dieses Verhaltens des Lichtvektors pflegt man auch von Schwingungen des Lichtes zu sprechen, ohne sich darüber eine Vorstellung zu machen, was schwingt.

Zu den Gleichungen (1) kommt noch eine Gleichung hiezu, welche die Transversalität des Lichtvektors ausdrückt, nämlich:

$$(2) \quad \xi \alpha + \eta \beta + \zeta \gamma = 0,$$

wo α, β, γ die Richtungskosinus der Wellennormale bezeichnen.

Sollen nun die Differentialgleichungen der Lichtbewegung in ebenen Wellen aufgestellt werden, so müssen aus den Gleichungen für den Lichtvektor die Größen, welche die spezielle Form des Vektors bedingen, die sich also auf eine bestimmte Welle beziehen, eliminiert werden. Wir erlangen dies, wenn wir die Gleichungen (1) einerseits je zweimal nach x, y und z differenzieren, wobei wir zu beachten haben, daß

$$(3) \quad r = x \alpha + y \beta + z \gamma$$

ist, und addieren, andererseits noch je zweimal nach der Zeit t differenzieren und dann die so erhaltenen Gleichungen mit einander vergleichen. Es ergibt

sich, wenn wir das Operationszeichen $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ einführen:

$$(4) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta \xi, \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta \eta, \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \omega^2 \Delta \zeta. \end{aligned}$$

Die Gleichung (2) geht durch Elimination der speziellen Werte α, β, γ über in:

$$(5) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Dem Gleichungssysteme (4) und (5) können wir noch andere Formen geben.

Indem wir zunächst einen zweiten Vektor p mit den Komponenten ξ, η, ζ einführen, der mit p durch die Beziehungen:

$$(6) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}, \\ \eta &= \frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ \zeta &= \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \end{aligned}$$

zusammenhängt, erhalten wir aus (4) die Gleichungen:

$$(7) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \omega^2 \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \omega^2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \omega^2 \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem läßt, da bei seiner Ableitung bereits die Transversalitätsbedingung (5) benützt ist, nur Transversalschwingungen als Lösungen zu. Die Transversalbedingung selbst wird bei dieser Schreibweise durch die Gleichungen (6) ersetzt.

Eliminieren wir aus den Gleichungen (6) und (7) die Größen ξ , η , ζ , was durch zweimalige Differentiation der Gleichungen (6) nach t geschieht, so erhalten wir ein der Form nach mit dem Systeme (4) und (5) identisches Gleichungssystem für den Vektor \mathbf{p} .

Durch die Einführung eines weiteren Vektors \mathbf{q} lassen sich die Gleichungen (6) und (7) in eine symmetrische und für das Folgende sehr brauchbare Form bringen. Die Komponenten a , b , c von \mathbf{q} sollen bestimmt sein durch die Beziehungen:

$$(8) \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial \xi}{\partial t}, \\ b &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial \eta}{\partial t}, \\ c &= \frac{1}{\omega} \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \end{aligned}$$

Es ergibt sich dann aus (7):

$$(9) \quad \begin{aligned} \frac{\partial a}{\partial t} &= \omega \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial b}{\partial t} &= \omega \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial c}{\partial t} &= \omega \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

und aus (6):

$$(10) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} &= \omega \left(\frac{\partial c}{\partial y} - \frac{\partial b}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial t} &= \omega \left(\frac{\partial a}{\partial z} - \frac{\partial c}{\partial x} \right), \\ \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial t} &= \omega \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Was die Vektoren \mathbf{p} , \mathbf{p} und \mathbf{q} in ihrer gegenseitigen Beziehung anbelangt, so läßt sich leicht durch Rechnung einsehen, daß, wenn man speziell die Lösungen der Gleichungen (4) und (5) annimmt, die einer geradlinig polarisierten ebenen Wellenbewegung entsprechen (wo dann in den Ausdrücken (1) $a = b = c$ ist), dann auch die Vektoren \mathbf{p} und \mathbf{q} geradlinig polarisierte ebene Wellenbewegungen darstellen. \mathbf{p} und \mathbf{q} ergeben sich auch als transversal, u. zw. \mathbf{p} zu \mathbf{p} senkrecht und \mathbf{q} zu \mathbf{p} parallel (mit Phasendifferenzen und Unterschieden in den Amplituden). Speziell von geradlinigen Polarisationen kann man sprechen, weil sich eine allgemeine elliptische Polarisation immer durch Überlagerung zweier geradliniger Polarisationen erklären läßt.

Die Gleichungen für den Lichtvektor (und somit auch die für die Vektoren \mathbf{p} und \mathbf{q}) sind nur auf Grund experimenteller Tatsachen aufgestellt und es ist die physikalische Bedeutung des Lichtvektors noch nicht berücksichtigt. Es ist die Frage noch ganz offen gelassen, was bei den Lichtschwingungen schwingt, und es ist auf eine tiefere Begründung der Undulationstheorie, insbesondere auf dem Boden der Mechanik, ganz verzichtet.

Da die Lichtschwingungen Transversalschwingungen sein müssen, so ist es leicht erklärlich, daß man bei ihrer physikalischen Deutung zunächst an jene Transversalschwingungen dachte, die man lange Zeit als die einzigen zu beobachten Gelegenheit hatte, nämlich an die elastischen Schwingungen fester Körper, und

daß man eine Theorie des Lichtes auf dem Boden der Elastizitätstheorie aufstellte. Als Träger der Schwingungen nahm man den Äther.*)

Als man aber später bei der Ausbildung der mathematischen Physik auch auf die Möglichkeit der Existenz anderer Transversalschwingungen geführt wurde, nämlich auf die Schwingungen, welche die elektrische und magnetische Polarisation, die elektrischen und magnetischen Kräfte zulassen, ging man daran, eine Theorie des Lichtes auf dem Boden der Elektrizität und des Magnetismus zu versuchen. Maxwell, der diese elektromagnetische Lichttheorie begründete, wurde dazu durch seine Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen geführt. Zur Erklärung derselben ist auch als Hilfsmedium der Äther eingeführt, durch dessen kontinuierlich fortschreitende dielektrische oder magnetische Polarisation die Wechselwirkung elektrisierter oder magnetisierter Körper erklärt wird (nach Faraday).

Auf die Grundzüge dieser elektromagnetischen Lichttheorie gehen wir näher ein.

2.

Um auf die elektromagnetische Deutung des Lichtvektors zu kommen, gehen wir von dem Hertz'schen Gleichungssysteme für die elektrischen und magnetischen Kräfte aus, welches für den leeren Raum, den freien Äther, lautet:

$$(11) \quad \begin{aligned} A \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, & A \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ A \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, & A \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ A \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, & A \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \end{aligned}$$

X, Y, Z sind die Komponenten der elektrischen Kräfte nach den Koordinatenrichtungen (x, y, z), L, M, N die der magnetischen Kräfte, bezeichnet für die positive Elektrizitätseinheit, beziehungsweise die positive Einheit des Magnetismus. Der Faktor A ist dadurch eingeführt, daß wir das Gauß'sche absolute Maßsystem zugrunde legen.

Zu diesen Gleichungen treten noch, den Äther von der ponderablen Materie auszeichnend, die beiden Gleichungen:

$$(12) \quad \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0,$$

welche aussagen, daß freie Elektrizität und freier Magnetismus nicht vorhanden sind.

Für einen anderen elektrisch und magnetisch polarisierbaren Nichtleiter erhalten die Gleichungen (11) durch Einführung der Dielektrizitätskonstanten ϵ und der Magnetisierungskonstanten μ die Form:

$$(13) \quad \begin{aligned} A\epsilon \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, & A\mu \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ A\epsilon \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, & A\mu \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ A\epsilon \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, & A\mu \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen (12) gelten hier nur für den besonderen Fall, daß wir nur solche in der Zeit ablaufende Veränderungen betrachten, bei welchen keine äußeren elektrischen und magnetischen Kräfte wirken, sondern nur die inneren elektrischen und magnetischen Kräfte, welche durch die Störung hervorgerufen werden, wirksam sind.

*) Cfr. (auch im Folgenden) Volkmann, Theorie des Lichtes, § 2.

Mit Hilfe der bekannten Proportionalitäten zwischen den elektrischen, beziehungsweise magnetischen Kräften und den durch sie hervorgerufenen elektrischen, beziehungsweise magnetischen Polarisationen (\mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} ; \mathfrak{L} , \mathfrak{M} , \mathfrak{N}):

$$(14) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} X, & \mathfrak{Y} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} Y, & \mathfrak{Z} &= \frac{\varepsilon}{4\pi} Z, \\ \mathfrak{L} &= \frac{\mu}{4\pi} L, & \mathfrak{M} &= \frac{\mu}{4\pi} M, & \mathfrak{N} &= \frac{\mu}{4\pi} N, \end{aligned}$$

wo wir natürlich bei der Spezialisierung für den Äther $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$ zu setzen haben, erhalten wir aus (11) die Gleichungen für die Polarisationen bezogen auf den freien Äther:

$$(15) \quad \begin{aligned} A \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y}, & A \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z}, \\ A \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z}, & A \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x}, \\ A \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x}, & A \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} \end{aligned}$$

und aus (12) die Gleichungen:

$$(16) \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} = 0.$$

Bei den isotropen Körpern fallen bekanntlich die Richtungen der Polarisationen immer mit den Richtungen der Kräfte zusammen. Statt elektrischer und magnetischer Polarisation sagt man auch dielektrisches und magnetisches Moment pro Volumseinheit oder schlechtweg dielektrisches und magnetisches Moment.

3.

Vergleichen wir das Gleichungssystem (15) (16) mit den Gleichungen (9) (10) und den Beziehungen:

$$(17) \quad \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial b}{\partial y} + \frac{\partial c}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = 0,$$

die sich leicht aus (8) und (6) ergeben, so finden wir zwischen beiden Systemen eine formelle Übereinstimmung. Die volle Übereinstimmung sehen wir hergestellt, vorerst mit Bezug auf die Vektoren, wenn wir $\mathfrak{X} = a$, $\mathfrak{Y} = b$, $\mathfrak{Z} = c$ und $\mathfrak{L} = \mathfrak{x}$, $\mathfrak{M} = \mathfrak{y}$, $\mathfrak{N} = \mathfrak{z}$ setzen, wenn wir also annehmen, daß das dielektrische Moment mit dem Vektor q und das magnetische mit dem Vektor p übereinstimmt. Daraus ergibt sich die Möglichkeit einer vollkommenen elektromagnetischen Deutung der Lichtausbreitung im freien Äther. Eine solche Deutung können wir auch mittelst der entsprechenden Gleichungen für ein beliebiges Dielektrikum erschließen.

Da die beiden Vektoren p und q zu einander senkrecht gerichtet sind, so haben wir auch die beiden Momente als zu einander senkrecht anzunehmen.

Als erstes hervortretendes und ausschlaggebendes Resultat der elektromagnetischen Deutung ergibt sich, daß wir, wie der Vergleich der Gleichungssysteme bei obiger Identifizierung lehrt, die Größe $\frac{1}{A}$ gleich ω erhalten, also gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Lichtwellen im freien Äther, im leeren Raume.

Die Größe A ist der Reduktionsfaktor zwischen dem elektromagnetischen absoluten Maßsysteme und dem elektrostatischen absoluten Maßsysteme und ist ihrer Dimension nach eine Potenz einer reziproken Geschwindigkeit, wie leicht zu sehen ist. Die Stromintensität z. B. hat nach dem elektromagnetischen Maße die Dimension: $[i] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}]$ und nach dem elektrostatischen $[j] = [M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}]$,

so daß also $[A] = \begin{bmatrix} i \\ j \end{bmatrix} = [TL^{-1}] = \frac{1}{[LT^{-1}]}$ ist. Der Zahlenwert von A wurde zuerst von Weber und Kohlrausch durch Vergleichung von Elektrizitätsmengen berechnet; und es ergab sich das merkwürdige Resultat, das damals nur als ein sonderbarer Zufall angesehen wurde, daß $\frac{1}{A}$ geradezu gleich erscheint der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume. Jetzt, wo wir durch Gleichungen von selbst, ohne weitere Annahmen machen zu müssen, zu demselben Ergebnis geführt werden, bildet das Resultat der Experimente eine sehr wichtige Grundlage und Stütze für die elektromagnetische Lichttheorie.

4.

Die Vektoren p und q, mit denen wir das dielektrische und magnetische Moment identifiziert haben, sind nicht direkt Lichtvektoren, sondern nur aus dem Lichtvektor p abgeleitet. Wir können jedoch auch die genannten Momente mit dem Lichtvektor selbst identifizieren und dadurch zu einer sehr einfachen Vorstellung über den Vorgang bei der Lichtausbreitung auf Grund der elektromagnetischen Theorie gelangen.

Zu dem Zwecke gehen wir auf die Gleichungen (15) zurück, wollen aber dabei nun den Fall eines beliebigen isotropen dielektrisch und magnetisch polarisierbaren Mediums ins Auge fassen. Die Gleichungen haben dann die Form:

$$(18) \quad \begin{array}{l} A\mu \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial y}, \quad A\varepsilon \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial z}, \\ A\mu \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial z}, \quad A\varepsilon \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial z} - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial x}, \\ A\mu \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial y} - \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x}, \quad A\varepsilon \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial x} - \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial y}. \end{array}$$

Die Beziehungen (16) haben hier zwar keine allgemeine Giltigkeit mehr, wir wollen sie aber im Speziellen noch gelten lassen, indem wir äußere elektrische und magnetische Kräfte ausschließen.

Aus (18) eliminieren wir nun einerseits \mathcal{Q} , \mathcal{M} , \mathcal{N} und andererseits \mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{B} dadurch, daß wir jede Gleichung noch einmal nach der Zeit differenzieren und dann für die Größen auf den rechten Seiten die entsprechenden Werte aus den anderen Gleichungen in (18) einsetzen. Es ergibt sich dann mit Berücksichtigung von (16) das Gleichungssystem:

$$(19) \quad \begin{array}{l} A^2\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{X}}{\partial t^2} = \Delta \mathcal{X}, \quad A^2\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{Q}}{\partial t^2} = \Delta \mathcal{Q}, \\ A^2\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{Y}}{\partial t^2} = \Delta \mathcal{Y}, \quad A^2\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{M}}{\partial t^2} = \Delta \mathcal{M}, \\ A^2\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{B}}{\partial t^2} = \Delta \mathcal{B}, \quad A^2\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \mathcal{N}}{\partial t^2} = \Delta \mathcal{N}; \end{array}$$

$$(20) \quad \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x} + \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichungen finden wir der Form nach identisch mit den Gleichungen (4) (5) für den Lichtvektor p. Zugleich sehen wir aber auch, daß diese Gleichungen eigentlich auf zweierlei Weise elektromagnetisch erklärt werden können.

1. Wir können den Lichtvektor p (ξ , η , ζ) mit dem dielektrischen Momente (\mathcal{X} , \mathcal{Y} , \mathcal{B}) identifizieren. Dadurch erklären wir also die Lichterscheinungen als ein Phänomen elektrischer Vorgänge. Die zeitlichen Änderungen des Lichtvektors sind dann durch die zeitlichen Änderungen des dielektrischen Momentes gegeben. Diese aber sind bekanntlich identisch mit elektrischen Strömen. Solche bestehen

wieder in Bewegungen der elektrischen Massen in den Elementen und periodische Änderungen daher in Schwingungen elektrischer Massen. Wir sind also imstande, die Lichterscheinungen elektromagnetisch durch Schwingungen elektrischer Massen in den einzelnen Elementen des Dielektrikums zu erklären.

Die Geschwindigkeit der Lichtfortpflanzung ist gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der elektrischen Störungen:

$$(21) \quad \omega = \frac{1}{\Lambda \sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Neben diesen elektrischen Wellen, die natürlich transversal sind, müssen im Medium noch transversale magnetische Wellen auftreten, welche durch die zweite Gleichungsgruppe in (19) (20) bestimmt sind und deren Vektor ($\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$) zu dem der elektrischen Wellen ($\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$) immer senkrecht steht. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser magnetischen Wellen ist dieselbe wie die der elektrischen. Wir haben diese magnetischen Wellen hier nur als Begleiterscheinung aufzufassen, die mit den Lichterscheinungen direkt nichts zu tun hat.

2. Wir können aber auch den Lichtvektor p mit dem magnetischen Momente ($\mathfrak{L}, \mathfrak{M}, \mathfrak{N}$) identifizieren und analog die Lichterscheinungen durch oszillatorische Bewegungen der magnetischen Massen in den Elementen des Mediums erklären, die sich wieder mit der Geschwindigkeit (21) fortpflanzen. Es wären dann diese magnetischen Wellen begleitet von elektrischen Wellen, deren Vektor zu dem der magnetischen senkrecht steht und die sich mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzen.

Es besteht also für die elektromagnetische Interpretation der Lichterscheinungen eine gewisse Willkür: wir können elektrisch oder magnetisch deuten. Allein eine Gruppe von Tatsachen, die schon lange bekannt und aufgefallen sind, zwingt uns, die Lichterscheinungen nur elektrisch zu deuten, nämlich die Tatsachen, daß diejenigen Körper, welche gute Leiter der Elektrizität sind (also hauptsächlich die Metalle), zugleich auch undurchsichtige Körper sind, also Körper, in welchen sich Lichtbewegungen nicht ausbreiten können, in welchen das Licht beim Eintritte absorbiert wird. Und solche Leiter der Elektrizität können auch keinen Polarisationszustand annehmen, da ja die Elektrizität frei von einem Elemente zum anderen überströmen kann. Wir werden folglich durch diese Tatsachen gezwungen anzunehmen, daß nur in Nichtleitern der Elektrizität, also in solchen Körpern, die dielektrisch polarisierbar sind, auch Lichtbewegungen vor sich gehen können. Daß die Lichterscheinungen aus den elektrischen Vorgängen erklärt werden müssen, hat sich auch weiterhin als den Tatsachen entsprechend gezeigt, worauf aber hier nicht weiter eingegangen werden soll.

5.

Wir wollen uns nun etwas näher mit dem Ausdrucke für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes befassen, wie wir ihn für ein beliebiges Dielektrikum nach der elektromagnetischen Theorie gefunden haben (21):

$$\omega = \frac{1}{\Lambda \sqrt{\varepsilon \mu}}.$$

Da ε und μ , welche Größen für das betreffende Medium durch Versuche ermittelt werden können, stets positiv sind, so ergibt sich immer ein reeller Wert von ω . — Die Größe μ ist erfahrungsgemäß bei den meisten Medien gleich der Einheit, so daß wir mit hinreichender Genauigkeit auch schreiben können:

$$\omega = \frac{1}{\Lambda \sqrt{\varepsilon}}.$$

Bedenken wir nun, daß der absolute Berechnungsexponent n eines Mediums dem Quotienten aus der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume (ω_0) und der im

betreffenden Medium (ω) gleich ist: $n = \frac{\omega_0}{\omega}$, so haben wir, wenn für diese Geschwindigkeiten die gefundenen Werte eingesetzt werden: $n = \frac{1}{A} : \frac{1}{A\sqrt{\epsilon}}$ oder

$$(22) \quad n = \sqrt{\epsilon},$$

d. h. es ist der Brechungsindex gleich der Quadratwurzel aus der Dielektrizitätskonstanten, ein Resultat, das bis auf wenige Ausnahmen mit den Erfahrungstatsachen übereinstimmt und somit eine weitere wesentliche Stütze für die elektromagnetische Lichttheorie bildet.

Die Übereinstimmung findet sich insbesondere bei Gasen und isolierenden Flüssigkeiten. Bei den diesbezüglichen Versuchen (die ersten hat Boltzmann angestellt) wurde für n teils der Mittelwert der Brechungsindizes im Spektrum, teils der Brechungsindex für Licht von unendlich großer Wellenlänge verwendet; dies letztere deshalb, um damit dem langsamen Prozesse Rechnung zu tragen, durch welchen nach den gewöhnlichen Methoden Dielektrizitätskonstanten bestimmt werden*) (das sind statische Methoden und solche, bei denen im Verhältnis zur Geschwindigkeit der Lichtschwingungen sehr langsame elektrische Schwingungen angewendet werden). Worauf die Abweichungen von der Formel (22), wie sie bei einer Reihe fester Körper und Flüssigkeiten, insbesondere beim Wasser eintreten, zurückzuführen sind, ob nämlich darauf, daß die nach den bisherigen Methoden bestimmten Dielektrizitätskonstanten einer sehr großen Wellenlänge entsprechen, oder auf mangelnde elektrische Isolation im Sinne der elektromagnetischen Theorie soll hier nicht entschieden werden.

6.

In das Gebiet der Optik verweisen wir diejenigen elektromagnetischen Schwingungen, deren Periode einen sehr kleinen Bruchteil der Sekunde beträgt, nämlich von der Ordnung $\frac{1}{100}$ Billiontel einer Sekunde ist. Hertz hat gezeigt, daß elektromagnetische Schwingungen von größerer Periode auch noch die Eigenschaften des Lichtes haben.

In den Versuchen von Hertz überhaupt hat die elektromagnetische Lichttheorie eine weitere wichtige Stütze gefunden. Hertz, dem es zuerst gelang, elektromagnetische Wellen, wie sie sich in der mathematischen Physik ergaben, auch experimentell zur Darstellung zu bringen, und der in den wichtigsten Punkten der Maxwell'schen Theorie der Elektrizität die experimentelle Bestätigung geliefert hat, kam dabei auch zu Ergebnissen, die sehr für die Annahme der elektromagnetischen Lichttheorie sprechen, so: daß elektrische Schwingungen in langen Drähten sich mit Lichtgeschwindigkeit fortpflanzen, daß ihnen in der Luft eine Fortpflanzungsgeschwindigkeit von derselben Größenordnung zukommt, daß man ferner bei sehr kleiner Schwingungsdauer mit den elektrischen Schwingungen die wichtigsten Versuche wiederholen kann, die für die Lichtbewegung charakteristisch sind: geradlinige Ausbreitung, regelmäßige Reflexion, Brechung, Polarisation.

Die sich an die grundlegenden Experimente Hertz' anschließenden Versuche und Arbeiten anderer Physiker haben diese experimentelle Stütze der elektromagnetischen Lichttheorie nur noch gefestigt.

7.

Für die Annahme der elektromagnetischen Theorie günstig und diese Theorie vor der elastischen bevorzugend, erscheint auch der Umstand, daß man sich bei ihr eine in mancher Hinsicht bequemere Vorstellung über den Äther machen kann. Denn hier braucht man diesem Hilfsmedium nur die Eigenschaft zuzuer-

*) Cfr. Tumlirz, Die elektromagnetische Theorie des Lichtes.

kennen, daß es dielektrisch und magnetisch polarisierbar sei; im übrigen kann man sich den Äther gasförmig oder flüssig denken (denn nach den Erfahrungen zeigen solche Körper auch Polarisation). Wir brauchen also hier unserer Vorstellung durchaus keine Gewalt anzutun im Gegensatze zur elastischen Lichttheorie, wo man eigentlich für den Äther eine innerlich unwahrscheinliche Konstitution annimmt.

Ja vom Standpunkte der elektromagnetischen Theorie dürfte man vielleicht dem Gedanken näher kommen können, den Äther als gar keine besondere Substanz anzusehen, sondern ihn etwa durch eine Fortsetzung der Erdatmosphäre, durch ein ponderables dünnes Gas zu ersetzen.

II. Die Lichtbewegung in anisotropen homogenen Medien.

1.

Um für den Fall anisotroper (kristallinischer) Medien die Differentialgleichungen für den Lichtvektor zu erhalten, haben wir die diesbezüglichen Gleichungen für isotrope Medien entsprechend zu verallgemeinern. Die Verallgemeinerung führen wir mit Hilfe des Energiesatzes durch, der lautet: Für ein beliebiges isoliertes, d. h. gegen äußere Einwirkungen geschütztes System bleibt die totale Energie mit der Zeit konstant.

In unserem Falle führen wir die Isolierung des Mediums, in dem die Lichtbewegung vor sich geht, so durch, daß wir es durch eine hinreichend große, etwa unendlich groß gewählte Fläche begrenzt denken, bis zu welcher also ein Bewegungsvorgang, der zur betrachteten Zeit auf einen endlichen Teil des Raumes beschränkt sein soll, in endlicher Zeit nicht gelangen kann. Und um die Größe abzuleiten, die mit der Zeit konstant bleibt, verfahren wir folgendermaßen. Wir multiplizieren die Gleichungen (7) der Reihe nach $\xi' d\tau$, $\eta' d\tau$ und $\zeta' d\tau$, wo $d\tau$ ein Volumelement bedeutet und ξ' , η' , ζ' für die ersten Differentialquotienten von ξ , η , ζ nach der Zeit gesetzt sind, addieren sie dann und integrieren über den ganzen Raum, der von der Begrenzungsfläche eingeschlossen ist. Durch partielle Integration auf der rechten Seite der entstandenen Gleichung und Berücksichtigung der Begrenzungswerte, sowie der Relationen (6) ergibt sich schließlich:

$$\frac{d}{dt} \int d\tau \left[\frac{1}{2} (\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2) + \frac{1}{2} \omega^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) \right] = 0,$$

so daß also das Integral einen von der Zeit unabhängigen Wert hat.

Der erste Teil unter dem Integral, die Summe der Geschwindigkeiten des Lichtvektors multipliziert mit $d\tau$, ist mechanisch gedeutet als eine aktuelle Energie zu bezeichnen; der zweite Teil wird demnach als die potentielle Energie anzusehen sein.

Wir setzen zur Abkürzung für diese potentielle Energie pro Volumseinheit:

$$(23) \quad \frac{1}{2} \omega^2 (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = \varphi.$$

Dann gehen, da $\omega^2 \xi = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}$ u. s. w. ist, die Gleichungen (7) über in:

$$(24) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right), \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right), \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right). \end{aligned}$$

Wir nehmen nun die oben angedeutete Verallgemeinerung vor, indem wir der quadratischen Form φ die allgemeinere Gestalt geben:

$$2\varphi = a_{11}\xi^2 + a_{22}\eta^2 + a_{33}\zeta^2 + a_{23}\eta\zeta + a_{31}\zeta\xi + a_{12}\xi\eta.$$

Mit Hilfe dieser Form ergeben sich Gleichungen, welche die Lichtbewegung wenigstens in einer großen Klasse von kristallinen Substanzen darzustellen vermögen, nämlich in solchen, welche drei zu einander senkrechte ausgezeichnete Richtungen haben. — Für diesen Ausdruck von φ ist ein ganz beliebig gewähltes Koordinatensystem vorausgesetzt. Der Einfachheit halber bringen wir nun aber, wie es ja immer geschehen kann, φ durch eine passende Koordinatentransformation auf die Form:

$$(25) \quad 2\varphi = a_1^2 \xi^2 + a_2^2 \eta^2 + a_3^2 \zeta^2,$$

wobei die Größen ξ, η, ζ für das neue Koordinatensystem wieder mit denselben Buchstaben bezeichnet sind. φ ist dann auf die sogenannten Hauptachsen des kristallinen Mediums bezogen. Die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 heißen die Hauptkonstanten des Kristalls und sind ebenso wie die früheren Koeffizienten $a_{11}, a_{22} \dots$ unabhängig von den Komponenten des Lichtvektors, wohl aber noch abhängig von der Farbe des Lichtes zu denken (analog der Größe ω bei isotropen Körpern).

Unter Berücksichtigung von (25) gehen die Gleichungen (24) über in:

$$\begin{aligned} \zeta'' &= a_2^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} - a_3^2 \frac{\partial \xi}{\partial y}, \\ \eta'' &= a_3^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} - a_1^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \\ \xi'' &= a_1^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} - a_2^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{aligned}$$

oder, wenn wir die Gleichungen (6) benutzen, in:

$$(26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= a_2^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) - a_3^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= a_3^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - a_1^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= a_1^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) - a_2^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Als Bedingungsgleichung für die Transversalität des Lichtvektors gehört dazu noch die Gleichung:

$$(27) \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Die aus diesen Gleichungen folgenden optischen Erscheinungen weisen meist eine höhere Symmetrie auf als sie der Kristallstruktur selbst entspricht. Der Ausdruck von φ zeigt für diese optischen Phänomene die Symmetrie eines Ellipsoides, welche das kristallinische Medium in Bezug auf seine geometrischen Verhältnisse nicht besitzen muß.

2.

Wie müssen wir nun die Gleichungen, die sich uns für isotrope Dielektrika ergeben haben, abändern, wenn wir es mit anisotropen Körpern zu tun haben?

Es zeigt sich wieder auf Grund experimenteller Untersuchungen, daß kristallinische Dielektrika meist in Bezug auf ihr dielektrisches Verhalten eine höhere Symmetrie besitzen als die kristallinische Struktur selbst. Versuche von Boltzmann haben gelehrt, daß in solchen Medien drei zu einander senkrechte Richtungen anzunehmen sind, in welchen die elektrischen Polarisationen ein Maximum, bzw. ein Minimum erreichen und für welche die Richtung der elektrischen Polarisation mit der Richtung der elektrischen Kraft, welche die Polarisation hervorbringt, zusammenfällt. In diesen drei ausgezeichneten Richtungen haben wir also dasselbe Verhalten wie bei isotropen Medien vor uns. Man nennt diese Richtungen die Hauptdielektrizitätsachsen des Kristalls und die Dielektrizitätskonstanten für dieselben, welche natürlich im allgemeinen von einander verschieden sind, die Hauptdielektrizitätskonstanten ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$). Die Hauptdielektrizitätsachsen wollen

wir im Folgenden zu Koordinatenachsen machen. — Bezüglich der magnetischen Kräfte und Polarisationen zeigt die Erfahrung, daß ihnen gegenüber die kristallinen Substanzen sich isotrop verhalten. Die Richtung der magnetischen Polarisierung fällt also für jede Richtung im Kristall in die Richtung der magnetischen Kraft und die Magnetisierungskonstante μ bleibt immer dieselbe.

Es werden demnach jetzt die Beziehungen (14) zwischen den Polarisierungen und den Kräften folgende Form haben, die Komponenten auf die Hauptdielektrizitätsachsen als Koordinatenachsen bezogen:

$$(28) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X} &= \frac{\varepsilon_1}{4\pi} X, & \mathfrak{Y} &= \frac{\varepsilon_2}{4\pi} Y, & \mathfrak{Z} &= \frac{\varepsilon_3}{4\pi} Z; \\ \mathfrak{L} &= \frac{\mu}{4\pi} L, & \mathfrak{M} &= \frac{\mu}{4\pi} M, & \mathfrak{N} &= \frac{\mu}{4\pi} N; \end{aligned}$$

die Hertz'schen Gleichungen (13) für Nichtleiter werden übergehen in:

$$(29) \quad \begin{aligned} A \varepsilon_1 \frac{\partial X}{\partial t} &= \frac{\partial M}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial y}, & A \mu \frac{\partial L}{\partial t} &= \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}, \\ A \varepsilon_2 \frac{\partial Y}{\partial t} &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial z}, & A \mu \frac{\partial M}{\partial t} &= \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}, \\ A \varepsilon_3 \frac{\partial Z}{\partial t} &= \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}, & A \mu \frac{\partial N}{\partial t} &= \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}. \end{aligned}$$

Ermitteln wir nun aus diesen Gleichungen mit Hilfe von (28) die entsprechenden Gleichungen für die elektrischen und magnetischen Polarisierungen und trennen wir in den entstehenden Gleichungen nach dem bekannten Verfahren die elektrischen und magnetischen Größen von einander, so ergibt sich einerseits:

$$A^2 \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} \right)$$

und zwei analoge Gleichungen, andererseits:

$$A^2 \mu \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial t^2} = \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} \right) - \frac{1}{\varepsilon_3} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} \right)$$

und zwei analoge Gleichungen. Setzen wir darin zur Abkürzung:

$$(30) \quad \frac{1}{A^2 \mu \varepsilon_1} = a_1^2, \quad \frac{1}{A^2 \mu \varepsilon_2} = a_2^2, \quad \frac{1}{A^2 \mu \varepsilon_3} = a_3^2,$$

so können wir schreiben:

$$(31) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{X}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(a_1^2 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - a_3^2 \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(a_2^2 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - a_1^2 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{Y}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(a_2^2 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial x} - a_1^2 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(a_3^2 \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - a_2^2 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(a_3^2 \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial y} - a_2^2 \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a_1^2 \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial z} - a_3^2 \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

und:

$$(32) \quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial t^2} &= a_2^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} \right) - a_3^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{M}}{\partial t^2} &= a_3^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} \right) - a_1^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 \mathfrak{N}}{\partial t^2} &= a_1^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial z} \right) - a_2^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Dazu treten noch die Bedingungsgleichungen dafür, daß die Körper ursprünglich im unelektrischen und unmagnetischen Zustande gewesen seien:

$$(33) \quad \frac{\partial \mathfrak{X}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{Y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial z} = 0.$$

3.

Vergleichen wir nun die beiden Gleichungssysteme (31) (33) und (32) (33) mit den Gleichungen (26) (27) für den Lichtvektor.

Wenn wir die Komponenten der magnetischen Polarisation (\mathfrak{L} , \mathfrak{M} , \mathfrak{N}) mit den Größen ξ , η , ζ identifizieren, so erscheinen die Gleichungssysteme (32) (33) und (26) (27) identisch. Die elektromagnetische Lichttheorie liefert also für die magnetischen Schwingungen eines anisotropen Mediums genau dieselben Gleichungen, wie sie für den Lichtvektor (ohne physikalische Deutung) gefunden sind.

Anders steht es mit den elektrischen Schwingungen. Da haben wir in den Gleichungen (31) (33) und (26) (27) keine Übereinstimmung, wenn wir \mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z} mit ξ , η , ζ identifizieren. Indem wir aber speziell die Gesetze für die Fortpflanzung ebener transversaler Wellen in den Medien untersuchen, zeigt sich, wenn wir nur anstatt des Vektors (\mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z}) einen anderen in der Wellenebene liegenden und zu (\mathfrak{X} , \mathfrak{Y} , \mathfrak{Z}) normalen nehmen, was wir ja tun können, da wir es ganz unbestimmt sein lassen müssen, welche von den beiden Richtungen der Lichtvektor in einer polarisierten Welle hat, daß dann die Gleichungen für die elektrischen Schwingungen zu denselben Resultaten führen wie die für die magnetischen Schwingungen.

In den Gleichungen (33) ist wieder die Tatsache der Transversalität der elektrischen und magnetischen Schwingungen ausgesprochen.

4.

Unter der Voraussetzung ebener Wellen wollen wir uns zunächst mit den Gleichungen für die magnetischen Schwingungen beschäftigen, wo wir volle Übereinstimmung mit den Gleichungen für den Lichtvektor gefunden haben. Wir setzen also für ξ , η , ζ die Größen \mathfrak{L} , \mathfrak{M} , \mathfrak{N} und nehmen dafür gleich die allgemeinsten Ausdrücke, wie wir sie für eine ebene Wellenbewegung bereits kennen (1), nur in etwas veränderter Form:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L} &= A \sin \left[2 \pi \nu \left(t - \frac{r}{\omega} \right) + a \right] = A \sin u, \\ \mathfrak{M} &= B \sin \left[2 \pi \nu \left(t - \frac{r}{\omega} \right) + b \right] = B \sin v, \\ \mathfrak{N} &= C \sin \left[2 \pi \nu \left(t - \frac{r}{\omega} \right) + c \right] = C \sin w.\end{aligned}$$

ω , r , a , b , c haben die bekannte Bedeutung, ν stellt die Zahl der Schwingungen in der Sekunde dar, u , v , w sind zur Abkürzung eingeführt. Mit Rücksicht auf (32) bilden wir nun:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathfrak{L}}{\partial t^2} &= -4 \pi^2 \nu^2 A \sin u, \text{ u. s. w.} \\ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} &= \frac{2 \pi \nu}{\omega} (C \alpha \cos w - A \gamma \cos u), \text{ u. s. w.} \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial z} - \frac{\partial \mathfrak{M}}{\partial x} \right) &= \frac{4 \pi^2 \nu^2}{\omega^2} \gamma (C \alpha \sin w - A \gamma \sin u), \text{ u. s. w.}\end{aligned}$$

und erhalten als erste Gleichung:

$$-A \sin u = \frac{a_2^2}{\omega^2} \gamma (C \alpha \sin w - A \gamma \sin u) - \frac{a_3^2}{\omega^2} \beta (A \beta \sin u - B \alpha \sin v).$$

Analog ergeben sich die beiden anderen Gleichungen. Diese Gleichungen müssen für jede beliebige Zeit t und für jeden beliebigen Punkt (x, y, z) erfüllt sein. Da aber die Größen t, x, y, z in den Sinusargumenten vorkommen, so müssen die Sinusgrößen selbst aus den Gleichungen herausfallen. Es kann dies jedoch nur geschehen, wenn $u = v = w$, also $a = b = c$ ist. Diese erste Bedingung sagt aber aus, daß dann:

$$(35) \quad \begin{aligned} \mathfrak{L} &= A \sin \left[2\pi\nu \left(t - \frac{r}{\omega} \right) + a \right], \\ \mathfrak{M} &= B \sin \left[2\pi\nu \left(t - \frac{r}{\omega} \right) + a \right], \\ \mathfrak{N} &= C \sin \left[2\pi\nu \left(t - \frac{r}{\omega} \right) + a \right] \end{aligned}$$

die Komponenten einer geradlinig polarisierten Schwingung sind. In einem anisotropen Medium können sich also nur ebene Wellen fortpflanzen, die geradlinig polarisiert sind.

A, B, C, die Komponenten der Amplitude einer geradlinig polarisierten Schwingung nach den Achsen, sind den Richtungskosinus der Schwingungsrichtung proportional, und wenn wir der Einfachheit wegen die Amplitude gleich der Einheit setzen, so sind A, B, C direkt diese Richtungskosinus.

Nach dem Früheren haben wir nun folgende Gleichungen vor uns:

$$(36) \quad \begin{aligned} \omega^2 A &= a_3^2 \beta (A\beta - B\alpha) - a_2^2 \gamma (C\alpha - A\gamma), \\ \omega^2 B &= a_1^2 \gamma (B\gamma - C\beta) - a_3^2 \alpha (A\beta - B\alpha), \\ \omega^2 C &= a_2^2 \alpha (C\alpha - A\gamma) - a_1^2 \beta (B\gamma - C\beta). \end{aligned}$$

Hiezu tritt noch die Transversalitätsbedingung:

$$(37) \quad A\alpha + B\beta + C\gamma = 0,$$

wie sie aus (33) hervorgeht.

Dieses Gleichungssystem lösen wir unter der Annahme auf, daß die Wellenebene gegeben sei, also α, β, γ bekannt seien, d. h. wir haben die Wellengeschwindigkeit und die Schwingungsrichtung anzugeben. Zu dem Zwecke schreiben wir die Gleichungen zunächst einfacher durch die Abkürzungen:

$$(38) \quad B\gamma - C\beta = A', \quad C\alpha - A\gamma = B', \quad A\beta - B\alpha = C'.$$

A', B', C' sind wieder Richtungskosinus, u. zw. einer Richtung, welche sowohl zur Wellennormale als auch zur Schwingungsrichtung senkrecht ist. Wir erhalten:

$$(39) \quad \begin{aligned} \omega^2 A &= a_3^2 C'\beta - a_2^2 B'\gamma, \\ \omega^2 B &= a_1^2 A'\gamma - a_3^2 C'\alpha, \\ \omega^2 C &= a_2^2 B'\alpha - a_1^2 A'\beta. \end{aligned}$$

Eliminieren wir daraus A, B, C, indem wir die zweite Gleichung mit γ , die dritte mit β multiplizieren und dann beide von einander subtrahieren u. s. w., so ergibt sich:

$$(40) \quad \begin{aligned} (a_1^2 - \omega^2) A' &= \alpha f', \\ (a_2^2 - \omega^2) B' &= \beta f', \\ (a_3^2 - \omega^2) C' &= \gamma f', \end{aligned}$$

worin $f' = a_1^2 A'\alpha + a_2^2 B'\beta + a_3^2 C'\gamma$ gesetzt ist. Werden weiter die aus diesen Gleichungen folgenden Werte von A', B', C' der Reihe nach mit α, β, γ multipliziert und die Produkte dann addiert, so ergibt sich:

$$(41) \quad \frac{\alpha^2}{a_1^2 - \omega^2} + \frac{\beta^2}{a_2^2 - \omega^2} + \frac{\gamma^2}{a_3^2 - \omega^2} = 0$$

als Gleichung, aus welcher die Wellengeschwindigkeit zu bestimmen ist. Da zwei Lösungen für ω möglich sind, so haben wir das Resultat: Nach einer bestimmten Richtung hin können sich in anisotropen Medien zwei ebene Wellen mit im allgemeinen verschiedener Geschwindigkeit fortpflanzen. Die zugehörigen Werte von A', B', C' ergeben sich aus (40). Es ist:

$$\begin{aligned} A_1' : B_1' : C_1' &= \frac{\alpha}{a_1^2 - \omega_1^2} : \frac{\beta}{a_2^2 - \omega_1^2} : \frac{\gamma}{a_3^2 - \omega_1^2}, \\ A_2' : B_2' : C_2' &= \frac{\alpha}{a_1^2 - \omega_2^2} : \frac{\beta}{a_2^2 - \omega_2^2} : \frac{\gamma}{a_3^2 - \omega_2^2}, \end{aligned}$$

und damit sind natürlich auch die zugehörigen beiden Schwingungsrichtungen selbst bestimmt. Von diesen nun läßt sich zeigen, daß sie zu einander senkrecht

stehen, d. h. es ergibt sich, daß die beiden möglichen ebenen Wellen senkrecht zu einander polarisiert sind.

Die ganze Betrachtung wird vereinfacht, wenn wir zu einer geometrischen Behandlungsweise übergehen. Zu dem Zwecke multiplizieren wir die Gleichungen (40) das einmal der Reihe nach mit A, B, C und addieren sie, das anderemal mit A', B', C' und addieren sie. Wir erhalten:

$$(42) \quad a_1^2 A A' + a_2^2 B B' + a_3^2 C C' = 0,$$

$$(43) \quad a_1^2 A'^2 + a_2^2 B'^2 + a_3^2 C'^2 = \omega^2.$$

Legen wir dann durch ein Ellipsoid, dessen Gleichung:

$$(44) \quad a_1^2 x^2 + a_2^2 y^2 + a_3^2 z^2 = 1$$

ist, einen Diametralschnitt, welcher der angenommenen Wellenebene parallel ist und also die Gleichung hat:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0,$$

so seien von der entstehenden Schnittellipse die beiden Hauptachsen betrachtet. Es ist bekannt, daß, wenn wir für den Schnitt zunächst zwei konjugierte Durchmesser ins Auge fassen, die Richtungen derselben, (A, B, C) und (A', B', C') , durch die Gleichung charakterisiert sind:

$$a_1^2 A A' + a_2^2 B B' + a_3^2 C C' = 0.$$

Sind diese Durchmesser die Hauptachsen, dann muß noch:

$$A A' + B B' + C C' = 0$$

sein. Ist ferner mit s' die Länge der Hauptachse, welche die Richtung (A', B', C') hat, bezeichnet, so ist:

$$a_1^2 A'^2 + a_2^2 B'^2 + a_3^2 C'^2 = \frac{1}{s'^2}.$$

Durch Vergleichung dieser drei allgemein für die Hauptachsen geltenden Gleichungen mit den Gleichungen (42) (43) und der Beziehung:

$$(45) \quad A A' + B B' + C C' = 0,$$

wie sie auch für die Richtungen (A, B, C) und (A', B', C') bestehen muß, ersehen wir, daß die Richtungen der beiden Hauptachsen des Schnittes die beiden möglichen Schwingungsrichtungen für die ebene Welle darstellen und daß $\omega^2 = \frac{1}{s'^2}$

wird, d. h. daß die reziproken Längen dieser beiden Hauptachsen die zugehörigen Wellengeschwindigkeiten geben, aber so, daß die reziproke Länge der einen Hauptachse die Wellengeschwindigkeit für die Richtung der anderen darstellt.

Es ist dies jene Konstruktion für die Schwingungsrichtungen und Wellengeschwindigkeiten, wie sie von F. E. Neumann als Modifikation einer Fresnel'schen Konstruktion gegeben wurde. Nach Fresnel würden die reziproken Längen der Hauptachsen die Wellengeschwindigkeiten für die Richtungen der betreffenden Achse selbst angeben. Natürlich ist dieser Unterschied für die Lichtbewegung von keiner Bedeutung, weil wir die Lichtschwingungen im Vektor ebenso gut nach der einen Richtung wie nach der dazu senkrechten Richtung gerichtet annehmen können.

5.

Beschäftigen wir uns nun mit den Gleichungen (31) für die elektrischen Schwingungen unter der Voraussetzung ebener Wellen. Wir setzen also für ξ, η, ζ die Größen $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}, \mathfrak{Z}$ und nehmen nach dem früheren dafür gleich die einfacheren Ausdrücke einer geradlinig polarisierten ebenen Wellenbewegung:

$$(46) \quad \begin{aligned} \mathfrak{X} &= A \sin \left[2\pi\nu \left(t - \frac{r}{\omega} \right) + a \right], \\ \mathfrak{Y} &= B \sin \left[2\pi\nu \left(t - \frac{r}{\omega} \right) + a \right], \\ \mathfrak{Z} &= C \sin \left[2\pi\nu \left(t - \frac{r}{\omega} \right) + a \right]. \end{aligned}$$

Die erste Gleichung in (31) geht dann über in:

$$A \omega^2 = \gamma (a_1^2 A \gamma - a_3^2 C z) - \beta (a_2^2 B z - a_1^2 A \beta),$$

und wir erhalten, wenn wir entsprechend ordnen und die beiden anderen Gleichungen analog hinzufügen:

$$(47) \quad \begin{aligned} (a_1^2 - \omega^2) A &= \alpha f, \\ (a_2^2 - \omega^2) B &= \beta f, \\ (a_3^2 - \omega^2) C &= \gamma f, \end{aligned}$$

wo $f = a_1^2 A z + a_2^2 B f + a_3^2 C \gamma$ gesetzt ist. Dazu kommt noch infolge (33) die Gleichung:

$$A z + B \beta + C \gamma = 0.$$

Dieses Gleichungssystem ist mit dem Systeme (40) für magnetische Schwingungen der Form nach vollständig identisch. Ein Unterschied besteht nur darin, daß jetzt an Stelle von $A', B', C' \dots A, B, C$ steht. Wir werden also bei Vertauschung der Richtungen (A, B, C) und (A', B', C') aus (47) dieselben Schlüsse ziehen können wie früher aus (40). Mit Hilfe des Ellipsoides (44):

$$a_1^2 x^2 + a_2^2 y^2 + a_3^2 z^2 = 1$$

gelangen wir wieder zu einer Konstruktion der Schwingungsrichtungen und Wellengeschwindigkeiten, jetzt aber direkt zur Fresnel'schen, d. h. die Hauptachsen des Schnittes bestimmen jetzt ihren reziproken Werten nach, jede für ihre eigene Richtung, die zugehörigen Wellengeschwindigkeiten.

Wir kommen also zum Resultate: Die Gesetze für die Lichtfortpflanzung in anisotropen Medien nach den Gleichungen für die elektrischen Schwingungen sind dieselben wie nach den Gleichungen für die magnetischen Schwingungen. Nur erfolgen die elektrischen Schwingungen im Sinne Fresnels, während die magnetischen im Sinne Neumanns vor sich gehen.

Es ist also auch sofort ersichtlich, daß auch bei anisotropen Medien bei einer elektromagnetischen Schwingung die elektrischen Schwingungen senkrecht zu den zugehörigen magnetischen stehen und umgekehrt.

Franz John.

Die erste Gleichung in (1) lässt sich in der Form
$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E \sin \omega t$$

schreiben, wobei q die Ladung und E die Amplitude der äußeren Spannung
bedeutet. Die Lösung dieser Gleichung ist
$$q(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \sin(\omega t - \phi)$$

wobei ϕ die Phaseverschiebung ist. Die Stromstärke $i(t)$ ist
dann $i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{E \omega}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}} \cos(\omega t - \phi)$.
Die mittlere Leistung P wird durch $P = \frac{1}{T} \int_0^T i^2 R dt$ gegeben,
wobei T die Periodendauer ist. Es ergibt sich $P = \frac{1}{2} i_{eff}^2 R$,
wobei $i_{eff} = \frac{E \omega R}{\sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}$ die effektive Stromstärke
ist. Die Resonanzfrequenz ω_0 ist durch $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ gegeben,
wobei L die Induktivität und C die Kapazität sind. Bei Resonanz
erhöht sich der Strom auf $i_{eff} = \frac{E}{R}$. Die Bandbreite $\Delta \omega$ ist
durch $\Delta \omega = \frac{R}{L}$ gegeben. Die Güte Q ist durch $Q = \frac{\omega_0 L}{R}$ gegeben.

Fazit

Die Analyse eines RLC-Kreises zeigt, dass die Resonanzfrequenz
eine wichtige Rolle spielt. Bei dieser Frequenz ist der Strom
maximal und die Leistung wird effizient übertragen. Die
Bandbreite des Kreises ist durch den Widerstand R bestimmt.
Eine hohe Güte Q führt zu einer schmalen Bandbreite und
großer Amplitude bei Resonanz. Umgekehrt führt ein kleiner
Widerstand zu einer breiten Bandbreite und geringerer Amplitude.
Die Phaseverschiebung ϕ ist ein Maß für den zeitlichen
Verzug zwischen Strom und Spannung. Bei Resonanz ist $\phi = 0$,
was bedeutet, dass Strom und Spannung in Phase sind.