Zur Einführung in die analytische Geometrie.

Von Prof. Dr. J. Jacob.

Vorliegende Zeilen haben den Zweck, dem Schüler vor Beginn der systematischen Behandlung der analytischen Geometrie eine ungefähre Vorstellung von der Methode dieser Wissenschaft zu geben, und denselben in diese neue und anfangs fremde Betrachtungsweise der geometrischen Gebilde einzuführen. Sie sind nicht für Schüler geschrieben, sondern bedürfen, im Unterrichte verwendet, der Ergänzung seitens des Lehrers. Es ist besonders hervorzuheben, dass die nachfolgende Betrachtung mit dem Unterrichte in der Physik und besonders dem der Logik im engsten Zusammenhange steht und, was letztere Disciplin anlangt, besonders die Lehre von der Definition als bekannt vorausgesetzt wird. Von physikalischen Gesetzen wird der freie Fall in der Betrachtung von Galilei, das Boylesche Gesetz, sowie das Gesetz von der Ausdehnung der Körper durch die Wärme benützt; das letztere kann ohne Mühe anticipiert werden. Die Citate beziehen sich auf Machs Grundriss der Naturlehre (Ausgabe für Gymnasien), sowie auf Höfler-Meinongs Logik.

1.

In der Lehre vom freien Falle wurde aus der Gleichung $v = at$ die Formel $s = \frac{a}{2} t^2$ abgeleitet. Zu diesem Zwecke wurden die Zeiten auf einem Strahle (Abscissenachse) und die dazugehörigen Geschwindigkeiten senkrecht aufgetragen. (Mach p. 12.) Nehmen wir für t die Werte 0, 1, 2, . . ., so erhalten wir für $v = 0, a, 2a, \ldots$. Denken wir uns nun möglichst viele Punkte gezeichnet und dieselben verbunden, so erhalten wir eine gerade Linie.

Ein zweites Beispiel: Die Physik lehrt, dass ein Quecksilberfaden, der bei 0^0 100 cm lang ist, bei t^0 die Länge $l = 100 + 2t$ hat. Setzen wir $t = 0, 1, 2, 3, \ldots$, so erhalten wir $l = 100, 102, 104, 106, \ldots$, und diese Zahlenwerte geben, geometrisch interpretiert, ebenfalls eine gerade Linie. Diese Formel gilt annähernd auch für negative Temperaturen. Setzen wir für $t = -1, -2, -3$, so erhalten wir $l = 98, 96, 94$. Um diese Werte graphisch darzustellen, verlängern wir die Abscissenachse über ihren Anfangspunkt nach der entgegengesetzten Richtung und tragen die Strecken 98, 96, 94 senkrecht auf, wodurch die gerade Linie verlängert wird.

Um zu zeigen, wie unter Umständen solche graphische Darstellungen eine krumme Linie ergeben können, erinnern wir uns an das Boylesche Gesetz und schreiben dasselbe in der Form $p\,v = c$. Wählen wir $c = 1$ und tragen die Volumine der Gasmasse auf der Abscissenachse, den jeweiligen Druck auf die Einheit der Oberfläche senkrecht auf, so erhält man eine krumme Linie, welche sich augenscheinlich nach zwei Richtungen in die Unendlichkeit erstreckt. (Mach p. 78.)

2.

Den Gedanken, der diesen Beispielen zugrunde liegt, verallgemeinernd, erkennen wir sofort, dass, unabhängig von jedem physikalischen

Probleme, jede Gleichung mit zwei Unbekannten eine gerade oder krumme Linie darstellt, sobald ihre Lösungen in der angegebenen Weise geometrisch interpretiert werden. Freilich waren bisher die senkrecht zur Abscissenachse aufgetragenen Werte (Ordinaten) stets positiv; doch ist es leicht, auch negative Werte für die Ordinaten geometrisch zu interpretieren, sobald wir festsetzen, dass solche Ordinaten in entgegengesetzter Richtung, also unterhalb der Abscissenachse, aufgetragen werden sollen.

Zur Einübung der geometrischen Interpretation von Lösungen einer Gleichung in der allgemeinsten Form, sowie zur Construction von Linien können die Gleichungen $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 - y^2 = 5$, $y = \sin x$ u. s. f. verwendet werden.

Aus der Erkenntnis, dass jede Gleichung mit zwei Unbekannten eine Linie darstellt, sobald sämmtliche Lösungen derselben in der angegebenen Weise geometrisch interpretiert werden, folgen unmittelbar die nachstehenden Sätze: 1. Jede Lösung einer Gleichung gibt, geometrisch interpretiert, einen Punkt der durch sie bestimmten Linie. 2. Jedes Wertepaar, das die Gleichung nicht befriedigt, gibt, geometrisch interpretiert, einen Punkt, der nicht auf der durch die Gleichung bestimmten Linie liegt. Nach dem Hauberschen Satze können diese Urtheile rein convertiert werden, also: 3. Wird ein Punkt einer durch eine Gleichung bestimmten Linie arithmetisch interpretiert, so erhält man eine Lösung der Gleichung. 4. Wird ein Punkt, der nicht auf der Linie liegt, arithmetisch interpretiert, so erhält man ein Wertepaar, das die Gleichung nicht befriedigt. Was dabei unter der Ausdrucksweise »arithmetisch interpretieren« verstanden ist, ist wohl leicht ersichtlich: wir meinen nämlich die beiden Strecken, welche die Lage des Punktes inbezug auf die Coordinatenachsen bestimmen, construieren und durch Abmessen in Zahlen ausdrücken.

3.

Wir können das Resultat des vorhergehenden Paragraphen aber noch anders auffassen und sagen, dass jede Gleichung die zur eindeutigen Bestimmung einer Linie nothwendigen Merkmale enthält, dass sie also eine Linie definiert.

Es ist aus der Logik bekannt, dass von einem und demselben Dinge mehrere Begriffe (Höfler-Meinong p. 41) und daher verschiedene Definitionen möglich sind; wir haben gesehen, dass wir den Kreis als eine ebene, geschlossene Linie definieren können, deren sämmtliche Punkte von einem denselben Abstand haben, oder als Schnitt einer Kugelfläche mit einer Ebene, oder als Schnitt zweier Kugelflächen, oder als geometrischen Ort aller Punkte einer Ebene, für welche die zu zwei festen Punkten der Ebene gezogenen Geraden einen rechten Winkel einschließen, oder als eine geschlossene Linie von constanter Krümmung. (Höfler-Meinong p. 41.)

Alle diese Begriffe haben verschiedenen Inhalt, aber denselben Umfang, da aus jedem der genannten Merkmale die anderen mit Nothwendigkeit folgen. Es besteht kein Gesetz der Begriffsbildung, das erfordert, dass der Kreis durch die Gleichheit der Radien definiert werden müsse (Höfler-Meinong p. 232), und wir können daher auch Gleichungen als Definitionen von Curven betrachten.

Vergleichen wir nun die eben gefundenen Definitionen von Curven durch Gleichungen mit den bisher gebräuchlichen, die wir der Kürze halber euklidische Definitionen nennen wollen, so müssen wir uns vor allem daran erinnern, dass der Aufstellung einer Definition innerhalb eines strengen Systems eine Untersuchung vorangehen muss, ob sie nicht abundant ist (Höfler-Meinong p. 231), d. h. ob nicht eines der in der Definition aufgenommenen Merkmale aus den anderen mit Nothwendigkeit folge. Ja, wir können sogar einen Schritt weiter gehen und sagen, dass die Definitionen auch dahin geprüft werden müssen, ob sie nicht widersprechende Merkmale enthalten, d. h. ob nicht eines der in der Definition aufgenommenen Merkmale mit den anderen unverträglich ist. Es ist aus diesem Grunde insbesondere bei der Bildung von synthetischen Definitionen nicht gestattet, willkürliche Merkmale zu einem Begriffe zu vereinigen und etwa eine Linie als eine ebene, geschlossene, krumme, deren jeder Punkt von einem bestimmten den gleichen Abstand hat, zu definieren. Die Krümmung der Linie folgt eben aus den anderen Merkmalen. Ebenso falsch wäre es, eine Linie als eine ebene, geschlossene Linie zu definieren, deren sämmtliche Punkte die Eigenschaft haben, dass die Differenz ihrer Abstände von zwei gegebenen Punkten einer gegebenen Strecke gleich ist. Es lässt sich leicht auf constructivem Wege nachweisen, dass das Merkmal des Geschlossenseins sich mit den anderen Merkmalen nicht verträgt.

Die Definitionen der analytischen Geometrie haben augenscheinlich den großen Vorzug, in dieser Hinsicht keiner besonderen Untersuchung zu bedürfen. Wir können eine beliebige Gleichung mit zwei variabeln Größen hinschreiben und können gewiss sein, eine in den angegebenen Beziehungen richtige Definition gebildet zu haben. »Die Sprache der Analysis«, sagt Laplace, »die vollkommenste aller Sprachen, ist schon an sich selbst ein mächtiges Hilfsmittel und Werkzeug der Entdeckung.«

4.

Es entsteht aber noch eine zweite Frage: Wenngleich die Definitionen von Linien durch Gleichungen, wie wir eben gezeigt haben, richtig sind, so müssen wir doch fragen, ob sie auch wissenschaftlich brauchbar sind.

Von den Curven sind euklidische Definitionen und solche durch Gleichungen möglich; welche verdienen den Vorzug? Nach den Lehren der Logik (Höfler-Meinong p. 234) jene, welche die einfachsten Merkmale besitzen, zumal wenn dieselben der Anschauung leicht zugänglich sind, und welche erlauben, aus ihnen Urtheile von möglichster Allgemeinheit in möglichst großer Anzahl auf möglichst einheitliche und leichte Weise abzuleiten.

Inbezug auf diese drei Punkte wollen wir die Definitionen der analytischen Geometrie untersuchen.

Dass die Merkmale einfach sind, liegt auf der Hand. Was den zweiten Punkt betrifft, so könnte jemand im Hinblicke auf die euklidische Definition des Kreises meinen, dass mit der euklidischen Definition einer Linie unmittelbar das geometrische Bild derselben gegeben und dieselbe deshalb anschaulicher sei, als es die Definition durch Gleichungen sein könne. Hier muss aber daran erinnert werden, dass durch die euklidischen Definitionen Begriffe fixiert werden und jeder Begriff abstract und mithin unanschaulich ist. Es soll damit nicht geleugnet werden, dass in einem solchen anschauliche Elemente vorkommen können, aber das eine folgt aus obiger Bemerkung, dass mit der euklidischen Definition nicht unmittelbar das geometrische Bild der betreffenden Linie gegeben ist, sondern erst aus der Definition abgeleitet werden muss.

Die Erfahrung bestätigt diese Deduction: niemand, der zum erstenmale die Definition einer Linie als einer ebenen hört, in welcher jeder

Punkt von einem gegebenen Punkte und einer gegebenen Geraden gleich weit entfernt ist, hat mit dieser Definition gleichzeitig das geometrische Bild der Linie. Gewiss denken wir bei der Definition, ja sogar bei dem Klange des Wortes Kreis stets auch an die geometrische Figur; aber weit entfernt, dass das Bild unmittelbar mit dem Begriffe gegeben ist, erklärt sich diese Thatsache durch die Gewohnheit, ebenso wie sich die Erscheinung, dass wir niemals denken, ohne zu sprechen, durch die Gewohnheit erklärt. (Höfler-Meinong p. 10.)

Trotzdem lässt es sich aber nicht verkennen, dass die Definitionen der analytischen Geometrie außerordentlich abstract und infolgedessen weniger anschaulich sind als die euklidischen. Aber dieser Nachtheil kann als unbedeutend bezeichnet werden, sobald wir bei Betrachtung des dritten Punktes gezeigt haben werden, dass aus den Definitionen durch Gleichungen alle Eigenschaften der Linien durch ein und dasselbe Verfahren gefunden werden können. (Höfler-Meinong p. 233.)

Als erstes Beispiel wählen wir die Gleichung $x^2 + y^2 = 16$ und wollen zeigen, dass die durch dieselbe definierte Linie die Eigenschaft hat, dass jeder Punkt derselben von dem Anfangspunkte des Coordinatensystems die gleiche Entfernung hat, dass also diese Gleichung einen Kreis definiert. Bezeichen (x_1, y_1) und (x_2, y_2) zwei Punkte der Linie, so brauchen wir, wie aus der Figur unter Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes sofort hervorgeht, nur zu zeigen, dass $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}$ ist. Die Richtigkeit dieser Gleichung lässt sich aber unschwer in folgender Weise erkennen: da (x_1, y_1) und (x_2, y_2) Punkte der durch die gegebene Gleichung definierten Linie sind, so müssen, wie oben gezeigt, ihre Coordinaten, arithmetisch interpretiert, Lösungen der gegebenen Gleichung sein, d. h. es müssen die Gleichungen $x_1^2 + y_1^2 = 16$ und $x_2^2 + y_2^2 = 16$ bestehen, aus denen die zu beweisende Gleichung sofort folgt.

Als zweites Beispiel wählen wir die Gleichung $y^2 = 2p\,x$ und zeigen, dass jeder Punkt der durch sie definierten Linie die Eigenschaft hat, von dem Punkte $(\frac{p}{2}, 0)$ und jener Linie, welche durch den Punkt $(-\frac{p}{2}, 0)$ geht und auf der Abscissenachse senkrecht steht, gleichweit entfernt zu sein. Bezeichnet $(x_1\; y_1)$ einen beliebigen Punkt der durch die gegebene Gleichung definierten Linie, so haben wir, wie eine einfache Zeichnung zeigt, nur zu beweisen, dass $\sqrt{(x_1 - \frac{p}{2})^2 + y_1^2} = x_1 + \frac{p}{2}$ oder dass $y_1^2 = 2p\; x_1$ ist. Dies leuchtet aber sofort ein, da $(x_1\; y_1)$ als Punkt der Curve thatsächlich der Gleichung $y^2 = 2p\; x$ genügen muss.

Diese Beispiele zeigen uns nicht nur, dass die Eigenschaften der durch Gleichungen definierten Linien stets durch ein und dasselbe Verfahren gefunden werden können, sondern zeigen uns genauer, dass dieses Verfahren von dem in der euklidischen Geometrie gebräuchlichen wesentlich verschieden ist, indem in demselben nicht die Geometrie, sondern die Arithmetik die wichtigste Rolle spielt, weshalb dieses Verfahren auch die arithmetische (analytische) Deduction genannt wird. (Höfler-Meinong p. 233.)

In der Einleitung in die analytische Geometrie empfiehlt es sich ganz besonders, zu zeigen, dass durch dieses Verfahren auch das geometrische Bild der durch eine Gleichung definierten Linie in der einfachsten Weise gefunden werden kann: es ist nur nöthig, der Größe x alle möglichen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ zu geben, die zugehörigen Werte von y zu suchen und die jedesmal gefundene Lösung geometrisch zu interpretieren, ein Verfahren, das den Namen »Discussion der Gleichung« führt.

Wir wollen dies zunächst wieder an der Gleichung $x^2 + y^2 = 16$

zeigen und geben ihr die zu diesem Zwecke vortheilhaftere Form $y = \pm \sqrt{16 - x^2}$. Setzen wir $x = 0$, so erhalten wir für y die beiden Werte $+4$ und -4. Lassen wir x nach rechts hin etwas wachsen, so sehen wir nicht nur, dass y immer kleiner wird, sondern auch, dass jedem Werte von x zwei, absolut genommen, gleiche, durch das Vorzeichen verschiedene Werte von y entsprechen, d. h. dass die Linie inbezug auf die Abscissenachse symmetrisch verläuft. Für $x = 4$ fallen die Werte für y zusammen, und für größere Werte von x wird y imaginär, lässt also eine geometrische Deutung nicht zu. Ganz ähnliche Schlüsse gelten auch für negative Werte von x, und die Discussion bestätigt also das früher gefundene Resultat, dass die Gleichung einen Kreis definiere.

Ebenso zeigt die Discussion der zweiten oben behandelten Gleichung, dass die Linie im Ursprunge des Coordinatensystems beginnt, sich nach rechts hin erstreckt, zu der x-Achse symmetrisch ist, sich in die Unendlichkeit ausdehnt und sich immer weiter von der Abscissenachse entfernt.

5.

So entsteht in uns die Idee einer neuen Geometrie, welche die verschiedenen Linien durch Gleichungen definiert und die Eigenschaften derselben ebenfalls durch arithmetische Betrachtungen findet. Sie hat, wie wir gesehen, den großen Vorzug gegenüber der euklidischen Geometrie, dass sich die Eigenschaften der Linien auf eine für unser Denken einheitliche und einfache, kurz natürliche Weise ableiten lassen, und aus diesem Grunde können wir von den dieser Wissenschaft zugrunde liegenden Definitionen immerhin sagen, dass sie den Begriff, also die betreffende Linie, durch ihre »wesentlichen« Merkmale definieren. (Höfler-Meinong p. 234.) Diese Definition durch Gleichungen bringt aber noch einen weiteren Vortheil: die Gleichungen lassen sich bekanntlich nach ihrem Grade eintheilen in Gleichungen ersten, zweiten u. s. w. Grades, und daraus ergibt sich auch eine vollständige Eintheilung der Linien, so dass uns die analytische Geometrie einen vollkommenen Überblick über alle Linien gewährt, den die euklidische Geometrie unmöglich gewähren kann. Wir können zwar auch euklidisch eine unendliche Menge von Linien definieren, z. B. eine Linie als den Inbegriff aller in einer Ebene liegenden Punkte, welche die Eigenschaft haben, dass die Summe oder Differenz, Product, Quotient, Summe oder Differenz der Quadrate, Kuben, Biquadrate etc. etc. ihrer Entfernungen von zwei gegebenen Punkten einer gegebenen Größe gleich sei. Aber ein vollständiger Überblick, eine strenge Classification kann offenbar auf diesem Wege nicht erreicht werden; denn würde man ganz allgemein eine Linie euklidisch durch eine beliebige Gleichung zwischen den Entfernungen von den gegebenen Punkten definieren, so gäbe eine Eintheilung dieser Gleichungen nach ihrem Grade keineswegs eine strenge Classification aller Linien, da eben stets die Beziehung zu zwei festen Punkten vorausgesetzt wird. »Man erfinde auf die Weise noch hunderttausend und mehr neue Bildungsgesetze,es muss dies der Phantasie doch immer schwerer und schwerer werden, und sie muss zuletzt ganz ermüden.«

Indessen wird dieser rein wissenschaftliche Vorgang in der Mittelschule nicht beibehalten. Wir werden von den euklidischen Definitionen ausgehen, aus diesen die der analytischen Geometrie ableiten und aus diesen wiederum die verschiedenen Eigenschaften der Linien deducieren. Wir wissen, dass es verschiedene Definitionen des Kreises gibt und dass er auch durch die Gleichheit der Peripherienwinkel über demselben Bogen definiert werden kann; man könnte also in der euklidischen Geometrie den Versuch machen, die Lehre vom Kreise unter Zugrundelegung dieser Definition zu behandeln. Ganz ähnlich wollen auch wir in der analytischen Geometrie verfahren; wir wollen statt der euklidischen Definition einer Linie die der analytischen Geometrie zugrunde legen, in der wohlbegründeten Erwartung, die Eigenschaften derselben durch einfache arithmetische Betrachtungen ableiten zu können, speciell beim Kreise und der Geraden die bekannten Eigenschaften zu bestätigen und andere zu finden. Dadurch erwächst aber die neue Aufgabe, aus der euklidischen Definition einer Linie die entsprechende Gleichung abzuleiten; bevor aber ein Vorbegriff der Lösung dieser Aufgabe gegeben wird, ist es nöthig, im Unterrichte auf die geometrische Interpretation der Lösungen einer Gleichung näher einzugehen, d. h. in der üblichen Weise den Begriff des Coordinatensystems zu entwickeln, den Abstand zweier Punkte, sowie die Fläche eines Dreieckes zu berechnen, und etwa die Bedingung zu entwickeln, unter der drei Punkte auf einer Geraden liegen. Die Transformation der Coordinaten kann später vorgenommen werden. -- Eine ungefähre Vorstellung, wie aus der euklidischen Definition die entsprechende Gleichung gebildet wird, kann dem Schüler etwa in folgender Weise gegeben werden.

6.

Wir nehmen als Beispiel die euklidische Definition des Kreises als den Inbegriff aller in einer Ebene gelegenen Punkte, deren jeder von einem gegebenen Punkte einen gegebenen Abstand hat. Es handelt sich nun darum, die vorliegende Aufgabe so klar als möglich darzulegen; es soll aus der euklidischen Definition die entsprechende Gleichung abgeleitet, d. h. eine Gleichung deduciert werden, welche folgende Bedingungen erfüllt: Erstens muss jeder Punkt des Kreises, arithmetisch interpretiert, eine Lösung der Gleichung liefern, und umgekehrt muss jede Lösung der Gleichung, geometrisch interpretiert, einen Punkt des Kreises liefern.

Um nun diese Gleichung zu finden, beziehen wir den gegebenen Punkt auf ein Coordinatensystem, so dass die Abscisse p, die Ordinate q ist, und bezeichnen mit r die Maßzahl der gegebenen Entfernung; die euklidische Definition besagt, dass irgend ein Punkt (x, y) der Linie von dem Punkte (p, q) die Entfernung r hat; unter Anwendung der Distanzformel ergibt sich $\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2}=r$. Liegt ein Punkt (x, y) nicht auf dem Kreise, so ist seine Entfernung vom Punkte (p, q) entweder größer oder kleiner als r, mithin $\sqrt{(x-p)^2+(y-q)^2} \gtrless r$. Also gibt jeder Punkt der Linie, arithmetisch interpretiert, eine Lösung obiger Gleichung, jeder Punkt dagegen, der nicht auf der Linie liegt, ein Wertepaar, das die Gleichung nicht befriedigt. Nach dem Hauberschen Satze können wir, den ersten Satz umkehrend, sagen: Jede Lösung der Gleichung gibt, geometrisch interpretiert, einen Punkt des Kreises. Obige Gleichung gibt also die Definition des Kreises oder, wie der Geometer kurz sagt, »die Gleichung des Kreises«.

Es sei dem Urtheile der Fachgenossen anheimgestellt, ob bereits an dieser Stelle oder erst im Verlaufe des Unterrichtes das vorliegende Problem an der Hand des eben behandelten Beispiels analysiert und sowohl bezüglich der Data desselben, als hinsichtlich des Gefragten und der Lösung folgende nähere Betrachtungen angestellt werden sollen. Was die Data betrifft, so ist es vielleicht nicht überflüssig, daran zu erinnern, dass die euklidische Geometrie ihre Linien in Definitionen darbietet, d. h. die Begriffe darlegt; Lübsen meint also mit Unrecht, dieselben könnten anschaulich »durch einen Curvenzug« gegeben sein, und wenn Hočevar sagt, eine Linie könne durch Construction bestimmt sein, so ist dieses Wort nicht etwa im Sinne von anschaulicher Individualvorstellung, sondern im Sinne von Constructionsmethode, welche einer genetischen Definition gleichkommt, zu verstehen. Dem Schüler genügt es natürlich, zu wissen, dass die euklidische Geometrie ihre Linien thatsächlich durch die wohlgeordnete und vollständige Angabe ihrer Merkmale definiert. Bezüglich der Data muss noch ein zweiter Punkt hervorgehoben werden: man braucht sich bloß vor Augen zu halten, dass wir eine Gleichung von der Eigenschaft zu finden haben, dass jeder Punkt des Kreises, arithmetisch interpretiert, eine Lösung der Gleichung gibt und umgekehrt, um zu erkennen, dass zum Zwecke einer arithmetischen Interpretation alle in der Definition vorkommenden Punkte und Strecken durch Zahlen angegeben sein müssen, was bei den ersteren durch die Beziehung auf ein Coordinatensystem erreicht wird; speciell beim Kreise darf nicht die Lage des Mittelpunktes unbestimmt gelassen und nur der Radius angegeben sein, sondern der Kreis muss auch der Lage nach eindeutig bestimmt, die Lage des Mittelpunktes in Bezug auf ein Coordinatensystem in Zahlen ausgedrückt sein, und ebenso darf der Halbmesser nicht als Strecke, sondern es muss die Maßzahl dieser Strecke gegeben sein. Dass — wie wir kurz sagen wollen — die Constanten der Definition in Zahlen ausgedrückt sein müssen, soll dem Schüler unbedingt zum klaren Bewusstsein kommen.

Ist dieser Punkt vollständig begriffen, so kann auch die Frage schärfer gefasst werden; da die gesuchte Gleichung aus der gegebenen Definition abgeleitet werden soll, so darf sie nebst den in der Begriffsbestimmung enthaltenen Constanten natürlich nur noch die laufenden Coordinaten enthalten, speciell beim Kreise ist also eine Gleichung zwischen den Größen p, q, r, x, y aufzustellen, wo p, q die Coordinaten des Mittelpunktes und r den Radius bedeutet. Es ist im Unterrichte unbedingt daran festzuhalten, dass der Schüler diese Consequenz begreife und vor der Lösung jeder derartigen Aufgabe über jene Größen orientiert sei, welche in der gesuchten Gleichung vorkommen müssen.

Werfen wir endlich einen Blick auf die Lösung der Aufgabe. Wir bemerken zunächst, dass der Begriff des Kreises in der euklidischen Geometrie ein relativer ist; denn der Begriff des Kreises ist eindeutig bestimmt durch Angabe eines festen Punktes (des Mittelpunktes) und einer Gleichheitsrelation; jeder Punkt der Kreislinie steht eben zu dem Mittelpunkte in der Beziehung, dass die von dem Punkte zum Mittelpunkte gezogene Strecke d stets gleich r ist. Die Definition des Kreises enthält also schon eine Gleichung $d = r$, welche allerdings noch nicht die gesuchte Gleichung zwischen den Größen p, q, r, x, y ist, welche aber den Ausgangspunkt der Lösung bildet. Man braucht nämlich bloß die fremde Größe d durch Anwendung der Distanzformel durch Coordinaten auszudrücken, um die Relation $\sqrt{(x-p)^2 + (y-q)^2} = r$ zu erhalten, welche die gesuchte Gleichung des Kreises darstellt.

7.

Hat man auch nur einmal diese Betrachtungen sorgfältig angestellt, so ergibt sich eine Fülle von Aufgaben, die sich in zwei Gruppen theilen lassen, welche aber alle auf Grund der gewonnenen Erkenntnisse unmittelbar gelöst werden können.

Zunächst können die Gleichungen der Ellipse, Hyperbel und Parabel leicht gefunden werden, die beiden ersteren sogar allgemein, wie an der

Ellipse gezeigt werden soll. Dieselbe wird als der Inbegriff aller in einer Ebene gelegenen Punkte definiert, deren jeder in folgender Weise gekennzeichnet ist: Verbindet man einen beliebigen Punkt mit den zwei gegebenen Punkten (p_1, q_1) und (p_2, q_2), so ist die Summe der Entfernungen stets gleich 2a. Es soll also eine Gleichung zwischen p_1 q_1 p_2 q_2 a x y gefunden werden. Auch hier enthält die euklidische Definition eine Gleichung, da für jeden Punkt der Ellipse $d_1 + d_2 = 2a$ ist, wo die Bedeutung von d_1 und d_2 wohl allgemein verständlich ist. Durch Anwendung der Distanzformel ergibt sich sofort die gesuchte Gleichung in der Form $\sqrt{(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2} + \sqrt{(x - p_2)^2 + (y - q_2)^2} = 2a$. Das Rationalmachen dieser Gleichung wird wohl kaum der Mühe wert sein. Im speciellen Falle, wo $p_1 = + e$, $q_2 = - e$, $q_1 = q_2 = 0$ gesetzt wird, erhält man die bekannte Gleichung der Ellipse. Ähnlich können auch die Gleichungen der Hyperbel und Parabel gefunden werden.

Von der Ellipse und Hyperbel ausgehend, können wir nun leicht andere euklidische Definitionen bilden, indem wir statt der Relationen $d_1 + d_2 = 2a$ bez. $d_1 - d_2 = 2a$ beliebige andere Relationen, etwa $d_1^2 + d_2^2 = 2a$, $d_1^2 - d_2^2 = 2a$, $d_1 \, d_2 = 2a$ u. s. w. setzen. Die entsprechenden Gleichungen können in vollkommen analoger Weise gebildet werden. Und nun empfiehlt es sich ganz besonders, solche Relationen zu wählen, von denen die Schüler schon wissen, dass durch sie entweder ein Kreis oder eine Gerade bestimmt ist, da dieselben sodann imstande sind, die Richtigkeit der gefundenen Definitionen durch Gleichungen durch Construction zu prüfen. Solche Aufgaben bilden die zweite Gruppe, aus der wir zwei Beispiele wählen wollen.

Es sei euklidisch eine Linie als der Inbegriff aller in einer Ebene gelegenen Punkte definiert, deren jeder von den zwei gegebenen Punkten (p_1, q_1) und (p_2, q_2) gleich weit entfernt ist. Die Definition durch eine Gleichung gibt, wie unmittelbar ersichtlich,

$$(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 = (x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 \text{ oder}$$
$$2x(p_2 - p_1) + 2y(q_2 - q_1) = p_2^2 + q_2^2 - p_1^2 - q_1^2.$$

Nach den Lehren der Geometrie muss dies die Gleichung einer Geraden sein, welche durch den Mittelpunkt der die gegebenen Punkte verbindenden Strecke geht und auf derselben senkrecht steht. Die Richtigkeit dieser Consequenz kann aber leicht durch Construction nachgewiesen werden, sobald für p_1 q_1 p_2 q_2 specielle Zahlenwerte angenommen werden.

Es sei ferner euklidisch eine Linie als der Inbegriff aller in einer Ebene gelegenen Punkte definiert, deren jeder folgende Eigenschaft hat: verbindet man ihn mit den gegebenen Punkten (p_1 q_1) und (p_2 q_2), so soll die Summe der Quadrate der beiden Abstände stets gleich sein dem Quadrate des Abstandes der beiden gegebenen Punkte. Die analytische Definition ergibt

$$(x - p_1)^2 + (y - q_1)^2 + (x - p_2)^2 + (y - q_2)^2 = (p_1 - p_2)^2 + (q_1 - q_2)^2 \text{ oder}$$
$$x^2 + y^2 - x(p_1 + p_2) - y(q_1 + q_2) + p_1 p_2 + q_1 q_2 \text{ d.}$$

Die Gleichung muss aber nach den Lehren der Geometrie einen Kreis darstellen, der durch die beiden gegebenen Punkte geht und der den Abstand der gegebenen Punkte zum Durchmesser hat. Auch die Richtigkeit dieser Consequenz lässt sich leicht nachweisen, sobald für p_1 p_2 q_1 q_2 passende Zahlenwerte eingesetzt werden.

8.

Mag man nun das eben besprochene Problem, aus der euklidischen Definition die entsprechende Gleichung zu bilden, in der Einleitung zur analytischen Geometrie bloß skizzieren, oder auf dasselbe sogleich in der angegebenen Weise genauer eingehen, eine Frage muss unbedingt erledigt werden: wie steht es bei diesem Probleme mit der geraden Linie? Ob die Gerade definierbar ist oder nicht, gehört ja, wie die Logik lehrt, zu den viel discutierten Problemen der Philosophie der Geometrie. (Höfler-Meinong p. 233.) In der Mittelschule wird dieser Begriff nicht definiert, sondern als ein gegebener vorausgesetzt, und es ist demnach nicht einzusehen, wie eine ihn definierende Gleichung gebildet werden könne.

Werfen wir nochmals einen Blick auf die in dem vorangehenden Abschnitte behandelten Beispiele, speciell auf den Kreis, so erkennen wir, wie schon betont, als den letzten Grund der Leichtigkeit, mit welcher die euklidischen Definitionen in Gleichungen umgesetzt werden konnten, dass sich unter den constitutiven Merkmalen der betreffenden Linien eine Gleichheitsbeziehung zwischen Strecken befand, welche sich sofort in jenen Größen ausdrücken ließ, die in der Definition durch Gleichungen aufgenommen werden sollten. Es ist nun leicht zu erkennen, dass, falls die euklidische Definition entweder gar keine oder eine wenig geeignete Gleichheitsrelation enthielte, trotzdem die Gleichung leicht gebildet werden kann, sobald aus den constitutiven Merkmalen der euklidischen Definition eine solche Gleichheitsbeziehung folgt, aus der umgekehrt die euklidische Definition selbst wieder abgeleitet werden kann — kurz wenn es gelingt, den gegebenen Begriff durch einen anderen zu ersetzen, unter dessen Merkmalen eine Gleichheitsrelation vorkommt. Es sei z. B. eine Linie euklidisch definiert als durch den Mittelpunkt der die Punkte (p_1, q_1) und (p_2, q_2) verbindenden Strecke gehend und auf dieser senkrecht stehend. Diese Definition ist nach jetzigen Kenntnissen nicht geeignet, aus ihr die entsprechende Gleichung abzuleiten. Bedenkt man aber, dass jeder Punkt der gesuchten Geraden von den beiden gegebenen Punkten gleich weit abstehen muss und umgekehrt, so kann die gegebene Definition sofort durch eine andere ersetzt werden, welche die Gleichheitsrelation $d_1 = d_2$ enthält und deshalb, wie wir im vorangehenden Abschnitte sahen, leicht durch die entsprechende Gleichung ersetzt werden kann.

Hat man aber erkannt, dass es bei dem vorliegenden Probleme nicht nöthig ist, von dem gegebenen Begriffe direct auszugehen, sondern dass es genügt, einen anderen zugrunde zu legen, der mit dem gegebenen den gleichen Umfang hat, so können wir, einen Schritt weitergehend, auch jene Fälle betrachten, in denen die Linie ursprünglich durch gar keine strenge Definition, sondern durch eine genetische Definition gegeben ist. Durch solche werden z. B. die sogenannten Rollcurven definiert; ein Kreis, der eine Gerade berührt, rolle, ohne zu gleiten, längs derselben: der Berührungspunkt beschreibt dabei eine bestimmte Linie, welche die Cycloide genannt wird. Um ein näher liegendes und leichter zu behandelndes Beispiel zu wählen, stellen wir uns vor, die Ellipse wäre nicht durch eine strenge, sondern eine genetische Definition in folgender Weise gegeben: an zwei festen Punkten wäre eine Schnur von unveränderlicher Länge angebracht; dieselbe werde durch einen Bleistift gespannt und derselbe in einem bestimmten Sinne und in einer bestimmten Ebene so lange bewegt, bis er in die ursprüngliche Lage zurückkommt. Diese genetische Definition der Ellipse ist zur analytischen Darstellung nicht geeignet, wird es aber sofort, sobald man aus ihr eine streng euklidische abzuleiten imstande ist. Dies ist hier viel leichter als bei den Rollcurven; es ist nämlich sofort ersichtlich, dass diese Linie als der Inbegriff aller in einer gegebenen Ebene liegenden Punkte definiert werden kann, deren jeder die Eigenschaft besitzt, dass die Summe seiner Entfernungen von den beiden festen Punkten der gegebenen Länge der Schnur gleich ist. Die Aufstellung der entsprechenden Gleichung wurde im vorigen Abschnitte vorgenommen.

Und nun sind wir imstande, den letzten Schritt zu thun und den Fall zu betrachten, dass, wie bei der geraden Linie, überhaupt gar keine Definition zugrunde liegt, sondern der Begriff ein undefinierbarer ist. Sobald nämlich der undefinierbare Begriff zum Gegenstande von Urtheilen, wird und derselbe besonders mit solchen Merkmalen in Beziehung gebracht wird, welche nur von ihm gelten, wie z. B. die Merkmale wahr und falsch von Urtheilen oder das Merkmal der Tonhöhe von der Tonempfindung, so kann zwar von dem gegebenen undefinierbaren Begriffe keine Definition, aber eine Charakteristik gegeben werden, welche, wie wir sofort sehen werden, für das vorliegende Problem vollkommen hinreicht. Wir können die gerade Linie als jene Linie charakterisieren, welche stets dieselbe Richtung hat, oder als jene Linie, welche durch zwei Punkte oder durch einen Punkt und den Winkel, den sie mit einer zweiten festen Geraden bildet, eindeutig bestimmt ist; es ist für unser Problem nicht gleichgiltig, von welcher Charakteristik wir ausgehen, vielmehr leuchtet es unmittelbar ein, dass die zweite und dritte Charakteristik den Vorzug verdient, da Punkte leicht durch Beziehung auf ein Coordinatensystem arithmetisch interpretiert werden können und auch die Größe eines Winkels sich in Zahlen ausdrücken lässt. Aber trotzdem sind diese beiden Charakteristiken noch nicht geeignet, das vorliegende Problem zu lösen, da jene Gleichheitsbeziehung fehlt, die bei allen in dem vorangehenden Abschnitte behandelten Beispielen (speciell beim Kreise) eine so wesentliche Rolle gespielt haben. Aber auch eine solche Gleichheitsrelation ist bei der Geraden zu finden; an die letzte Charakteristik anknüpfend, braucht man nur zu bedenken, dass, wenn eine Gerade durch beliebige andere Parallele geschnitten wird, sie mit diesen Parallelen stets gleiche Winkel einschließt. In der analytischen Geometrie wird diese Charakteristik zugrunde gelegt und überdies vorausgesetzt, dass der gegebene Punkt auf der Ordinatenachse liegt und durch (o, b) bestimmt sei; als feste Gerade wird die Abscissenachse gewählt und der Winkel, den beide einschließen, mit α bezeichnet. Der Grund dieser Specialisierungen liegt darin, dass unter diesen Voraussetzungen die Gleichung der Geraden einfacher wird als bei jeder anderen; doch wird auf die Ableitung der Gleichung der Geraden unter anderen Voraussetzungen keineswegs verzichtet. Ziehen wir nun, um die erwähnte Gleichheitsbeziehung anzuwenden, durch den gegebenen Punkt zur Abscissenachse eine Parallele und ziehe überdies die Coordinaten (x, y) eines beliebigen Punktes, so ist stets, wie die Zeichnung lehrt, $y - b = x \operatorname{tg} \alpha$ oder $y = x \operatorname{tg} \alpha + b$. Da nun leicht zu ersehen, dass ein nicht auf der Geraden liegender Punkt auch keine Lösung dieser Gleichung bilden kann, so ist $y = \operatorname{tg} \alpha\, x + b$ die Gleichung der geraden Linie und mit Gewinnung dieser die Einleitung in die analytische Geometrie beendet.