Jahresbericht

über das

Gymnasium zu Mühlhausen,

womit

zu den Prüfungen am 21. 22. 23. März 1839

ehrerbietigst und ergebenst einladet

Dr. Christian Wilhelm Haun,
Director.

Angefügt ist eine Abhandlung:

Versuch einer elementaren Darstellung der Theorie des Größten und Kleinsten

von

Julius Albert Hartrodt,
Subconrector.

Mühlhausen.
Gedruckt bei Wilhelm Rode.

Schulnachrichten

über

das Gymnasium zu Mühlhausen von Ostern 1838 bis Ostern 1839.

I. Chronik des Gymnasiums.

Der unterzeichnete Director hatte bereits vor dem Anfange dieses Schuljahrs seit dem 1. März v. J. als dem Tage seiner Herkunft interimistisch die Leitung der Anstalt übernommen, und sich daher auch in einem Nachworte zum vorigen Programm noch dem Publikum zu empfehlen gesucht. Das Schuljahr wurde sodann am Montage nach Ostern, den 23. April 1838 eröffnet mit seiner feierlichen Einführung, welche in der für größere Schulfeierlichkeiten freistehenden Klosterkirche Statt fand. Früh 10 Uhr begaben sich Lehrer und Schüler des Gymnasiums und der Knaben-Bürgerschule aus dem Schullocale in feierlichem Zuge zur Kirche, wohin sich die eingeladenen Behörden, Gönner und Freunde des Schulwesens zahlreich versammelt hatten. Nach einem mit Orchesterbegleitung vom Singchore durch den Musikdirector Thierfelder aufgeführten Hymnus von Mozart hielt erst der Herr Superint. Schollmeyer als Magistratischer Inspector aller hiesigen Schulen eine deutsche Rede über den Unterschied der Realschulen und Gymnasien; sodann übergab der Herr Bürgermeister Gier nach geeigneter Mittheilung an das Publikum dem Director die Installation, worauf der Director den Handschlag der Treue den Vorgesetzten gab, wie er ihn von dem Lehrercollegio und für die Schüler von dem Ersten jeder Classe entgegen nahm. Dann trat er selbst auf und hielt seine Antrittsrede, für welche er, die Localität benutzend, zum Gegenstand der Betrachtung nahm: „Die Schule in der Kirche", als an ihrem rechten Orte: denn wie alle Christen in dieser Schule des Christenthums, so auch alle Schulen der Christen; wodurch sich ihm sein Amt darstellte als ein Amt hoher Verpflichtung, die Schule im christlichen Geiste zu leiten und für das Reich Gottes zu bilden. Da nämlich der Christ auch alle Wissenschaft dem Zwecke Christi, dem Reiche Gottes, dienen lassen muß, indem er durch sie die Wahrheit, die Gerechtigkeit, das leibliche und geistige Wohl seiner Brüder muß fördern wollen, so gewinnen auch alle Gegenstände des Bürgerschul- und Gymnasial-Unterrichts als allgemein nothwendige Vorbildung oder Grundlagen für höhere Wissenschaft die Bedeutung und Wichtigkeit christlicher Elemente. Wie nun Alles im Reiche Gottes groß ist, so auch hier selbst jede kleinlich scheinende Sprachregel, da auf ihr das einstige richtige Verständniß einer Wahrheit, die rechte Anwendung eines Grundsatzes beruhen kann. So stellt sich denn der Ernst christlicher Pflicht als das Haupt- und Grundgesetz alles Lehrens und Lernens auf, und diesem sittlichen Ernste wird sich dann auch die rechte Methode, wird sich die rechte Disciplin offenbaren. Als rechte Methode wird dem christlichen Sinne gelten, was ihm die wahre Liebe zum Berufe, die Gewissenhaftigkeit in Aneignung der gründlichsten Wissenschaft, die Treue in Anwendung des richtig Erkannten an die Hand giebt als bestes Mittel zweckgemäßer Ausbildung der verschiedenen Fähigkeiten seiner Schüler: als die rechte Disciplin wird ihm gelten die Erziehung zur sittlichen Freiheit des erleuchteten Christen durch fruchtbaren Religionsunterricht, und gewissenhaft strenge, aber zugleich väterlich wohlwollende Angewöhnung an gute Zucht und Sitte, worin die Lehrer ihren Schülern das Beispiel zu geben verpflichtet sind, so weit es nur ein ernster christlicher Wille darzustellen vermag. An diesen hier nur in den Hauptumrissen gegebenen Vortrag fügte der Vf. noch Dank, Bitten und Gelübde. Die Feierlichkeit schloß mit dem gemeinschaftlichen Gesange: „Nun danket Alle Gott".

Beim Rückblicke auf die Wünsche beim Beginn des Schuljahres fühlen wir uns zum Dank gegen Gott verpflichtet, daß er auf zwei Jahre, von denen jedes ein Todesjahr für einen Lehrer, erst für den Director Dr. Gräfenhan, dann für den Subrector Beutler, gewesen war, nun ein Jahr folgen ließ, wo Lehrer und Schüler ungestörter für ihren Beruf arbeiten konnten, indem nur Ein Lehrer zu zwei verschiedenen Malen auf wenige Tage die Lectionen wegen Krankheit aussetzen mußte, und, nur einige Schüler ausgenommen, welche von den der Jugend gewöhnlichen Krankheiten ergriffen wurden, alle übrigen sich einer dauerhaften Gesundheit erfreuten.

An die Freude über diese äußern glücklichen Verhältnisse knüpft sich in unserer Betrachtung die über die Förderung des innern Gedeihens, das wir vorzüglich der ersten Anwesenheit des neuen Provinzial-Schulraths Hrn. Dr. Schaub verdanken, welcher am 20. Juni hier eintraf, und nach Besuch aller Classen bei verschiedenen Lehrgegenständen während der drei folgenden Tage sowohl in einer Conferenz mit dem Lehrercollegio, als in einer besondern mit dem Director eben so erfahrene Rathschläge ertheilte, als liebevolle Fürsorge zeigte, die uns zu dauerndem Danke verpflichtet und mit Vertrauen fernern Wohlwollens und Beistandes erfüllt hat. Dankbar muß Referent auch erwähnen, daß der Herr Bischof D. Dräseke am 2. November, obgleich er auf seiner amtlichen Reise zu Land-Superintendenturen in hiesiger Nähe nur kurze Zeit in der Stadt selbst verweilte, dennoch den neuen Director mit dem Besuche des Gymnasiums erfreuen wollte, und außer dem allgemeinen Frühgebete und einer Schriftstellerlection des Directors in Prima noch zwei Religionsstunden beiwohnte, und durch diese Theilnahme eben so, wie durch die belehrenden und herzlichen Worte zu den Schülern sich ein dankbares Andenken sicherte. Weniger günstig war uns das Glück darin, daß der Besuch, welchen der Herr Oberpräsident Graf zu Stolberg-Wernigerode unserer Stadt am 6. August schenkte, in den Anfang der Sommerferien fiel, und der auf einige Tage verreiste Director bei seiner Rückkehr zu bedauern hatte, die Anstalt der hohen Fürsorge nicht durch persönliche Aufwartung haben empfehlen zu können.

Außer den im Kreise der Schule Statt gehabten feierlichen Einführungen der neuen Lehrer, wie des Collab. Recke am 25. April, des Dr. Ameis als Subconrector am 2. October, und des Musikdir. Thierfelder am 17. November, und der feierlichen Entlassung Eines Abiturienten zu Ostern, am 2. Mai, und zweier zu Michaelis den 2. October, sind noch zu erwähnen die drei öffentlichen Schulfeierlichkeiten, nämlich:

1) Die Feier des Stiftungsfestes am 31. Mai durch Rede-Actus, der in dem mit grünen Zweigen aus der nahen Waldung geschmückten Lehrzimmer von Prima folgender Maaßen angeordnet

war: 1) Hymnus: Sieh von Deines Himmels Höhen rc., in Musik gesetzt von G. Weber. 2) Vater Unser, gedichtet von Raupach, gesprochen von dem Primaner Albert Hartmann. 3) Mit selbst gearbeiteten Vorträgen traten auf a) der Primaner Johann Carl Rinneberg, von hier: (lateinische Rede: Non scholæ, sed vitæ discimus,) b) der Primaner Johann August Körner, von hier: (deutsche Rede: Beurtheilung derjenigen Sprichwörter, welche den Begriff des Anfangens enthalten, c) der Primaner Bernhard Rudolph Veit, aus Großuhrleben: (französische Rede: Invitation à une promenade à la maison blanche. Zwischen diesen Vorträgen declamirten vier Schüler der Bürgerschule, je Einer aus jeder Classe, kurze Gedichte, nämlich Rudolf Haun, aus Merseburg; Christian Eisenhardt von hier; Wilhelm Adolph Bader, von hier; Theodor Gier, von hier. 4) Schlußrede des Director Dr. Haun: Ueber die Art, wie sich der rechte Berufssinn bereits in der Jugend äußern müsse. 5) Vertheilung der von der Familie Lutteroth gestifteten Legate (28 Thlr. unter sieben bedürftige und würdige Schüler.) 6) Hymnus: Preis Dir, Höchster, in Ewigkeit rc., in Musik gesetzt von Gottfried Weber.

2) Die Feier des Popperoder Schüler=Brunnenfestes, am 25. Juni durch feierlichen Auszug der Lehrer und Schüler des Gymnasiums und der Knaben=Bürgerschule Mittags unter Gesang frommer Lieder durch die Stadt, und eben so bei der Rückkehr am Abend, so wie an der eine halbe Stunde von hier entfernten schönen und der Stadt so vielfach nützlichen Quelle selbst, wo eine sehr zahlreiche Versammlung von Bewohnern der Stadt und Umgegend, deren Herzen die Feier von Jugend auf werth geworden ist, andächtig am Gesange Theil nimmt, und die heilige Stille zu loben ist, mit welcher die Menge die Rede anzuhören pflegt. Die über die Bedeutung und den Zweck dieses religiösen Schul= und Volksfestes in freier Natur dießmal wieder vom Director gehaltene Rede ist in dem hiesigen Gemeinnützigen Unterhaltungsblatte 1838 Nr. 26 abgedruckt. Die freundlichste Witterung begünstigte die nachherigen Vergnügungen unter den bejahrten Linden und in den umliegenden Gärten.

3) Die Feier des Geburtstages Sr. Majestät des Königs am 3. August durch einen nach Beendigung des Militärgottesdienstes angestellten Rede=Actus, dessen Anordnung folgende war: 1) Hymnus. 2) Gebet des Directors. 3) Weihgedicht, vorgetragen vom Secundaner Eduard Schenk, von hier. 4) Selbstgearbeitete Vorträge der Schüler a) des Secundaner Eisermann aus Oppershausen: deutsche Rede: Was ist uns der König? und was sollen wir dem Könige seyn? b) des Primaner Lorbacher: De causis interitus imperii Romani, c) des Primaner Rinneberg: Ueber den Tod für das Vaterland. 5) Declamationen von Schülern aus jeder Classe. 6) Chorgesang mit Tutti: „Heil Dir im Siegerkranz".

Die freundliche Theilnahme aller Behörden, vieler Gönner und Freunde des Schulwesens aus dem Militär= und Civilstande, so wie auch vieler Eltern unserer Zöglinge an diesem, wie am Stiftungsfeste wirkte erfreuend und ermunternd auf Lehrer und Schüler, die ihren Dank hiermit öffentlich bekennen.

Das heil. Abendmahl wurde von den Lehrerfamilien und Schülern zweimal öffentlich gefeiert, am Himmelfahrtsfeste in der Hauptkirche der Oberstadt, am 20. p. Trinit. in der Hauptkirche der Unterstadt. Beidesmal fand am vorhergehenden Tage vor der Beichthandlung eine Vorbereitungsfeier in der Schule durch Gesang und Rede des Directors Statt.

Außer den regelmäßigen 14täglichen Conferenzen des Collegiums hielt das magistratische Schulcuratorium, welches durch den Herrn Bürgermeister Gier als Deputirten des Magistrats und Patronats und den Herrn Superintendent Schollmeyer als Stadtschul-Inspector vertreten wird, mit dem Lehrercollegio monatlich eine Conferenz. Ueberdieß wurden acht außerordentliche Conferenzen wegen besonderer Disciplinar-Untersuchungen gehalten. Wir hoffen, daß diejenigen Schüler, welche sich bisher noch Gesetzwidrigkeiten, unschickliches Betragen, niedere Gesittung, und polizeiwidrige Vergehungen zu Schulden kommen ließen, in dankbarer Benutzung der bisher noch angewandten Erziehungsmaaßregeln der genauern Belehrung und öftern Ermahnung und der auf Besserung abzweckenden Strafen sich bemühen werden, einer edlen Denkart und eines sittlichen öffentlichen Benehmens ernstlich sich zu befleißigen, weil bei neuem Hervortreten solchen Tones unnachsichtlich schärfere Ahndungen selbst bis zur Entfernung in Anwendung kommen werden. Außerdem aber freut es mich, rühmen zu können, daß meine Bitte an das Publikum im vorigen Programme um fördernde Mitwirkung nicht unbeachtet geblieben ist, indem das mir mehrfach bewiesene Vertrauen mich in den Stand gesetzt hat, sicherer auf Einzelne einzuwirken, und die Mehrheit für eine bessere Gesittung zu gewinnen, die eben so, wie die würdevollere Haltung des Singchors bereits Anerkennung gefunden hat. Dieses Interesse hat sich namentlich auch bei den Vergnügungen, die wir den Schülern gestatteten, an den Tag gelegt, indem sowohl am Stiftungsfeste beim Spaziergange vor das weiße Haus, als im Januar an einem Winterabende die Bitte an die Eltern und die Lehrer-Familien um ihre Theilnahme eine so freundliche Beachtung fand, daß das Vergnügen der jungen Leute erhöht wurde, und nicht bloß zu einer Schule der Bildung zu gefälliger und würdiger Art gesellschaftlichen Benehmens, sondern auch zu einer Aufmunterung werden konnte, sich zu dem Danke, der durch ein diesem Vertrauen entsprechendes Betragen sich darlegt, verpflichtet zu fühlen. Vorzüglich wirkte dazu mit, daß E. Wohllöblicher Magistrat bei dem Sommervergnügen den Saal des Forsthauses vor dem Walde zur alleinigen Disposition für die Schule gestellt, und beim Tanzvergnügen im Winter das Directorium der Casinogesellschaft uns die Benutzung des durch seine Eleganz schon ein ästhetisches Wohlgefallen erweckenden Locals auf liberale Art gestattet hatte.

Ein solches äußeres Mittel zur Bildung des innern Sinnes, wie es bereits die Mädchen-Bürgerschule und Volksschule und eine der vorstädtischen Schulen in ihren neuen freundlichen und anständigen Localen besitzen, wird uns nun auch bald zu Theil werden in dem Neubau des Gymnasiums und der Knaben-Bürgerschule, für welchen in diesem Jahre die Grundmauern fertig geworden sind, so daß mit Gottes Hilfe diesen Sommer hindurch der äußere Aufbau so weit wird gefördert werden können, um im folgenden Sommer das Werk zu vollenden. Wir wollen indeß am Geistigen fortbauen, damit dann jedes in möglichster Vollendung sich einander entspreche.

II. Lehrverfassung.

A) Es gereicht mir zur Freude, bekennen zu können, daß bei dem Antritt der Stelle das Lehrercollegium mir so bereitwillig die Hand dazu bot, den Zeitpunkt, wo nach dem empfindlichen Verluste dreier binnen Jahresfrist der Anstalt entzogenen Lehrer, zweier durch den Tod, Eines durch Weiterbeförderung, die Stellen wieder neu besetzt waren, so wie den Umstand, daß eine kurz vorher erlassene Hohe Ministerial-Verfügung vom **24.** October **1837** für das Gymnasium zum ersten Mal in Anwendung zu bringen war, zu einer Gelegenheit werden zu lassen, die Angelegenheiten des Gymnasiums, wenn auch nicht in den äußern, doch vor der Hand in den innern Beziehungen einmal so umzugestalten, daß sich ein frisches und kräftigeres Leben herbeiführen und der Anstalt eine Einrichtung geben ließ, die der jetzigen Aufgabe der Gymnasien so vollständig als möglich entsprechen möchte. Durch dieses bereitwillige Wirken Aller für den Einen Zweck gelang es daher auch, den Lectionsplan hinsichtlich der Zahl der Lectionen, so wie der Gegenstände derselben bereits zu Ostern der Hohen Ministerial-Verfügung vom **24.** October **1837** so nahe zu bringen, daß nur bei zwei Lectionen zu **4** Stunden Combination Statt fand, und die erlaubte Abweichung von der den Gegenständen zuertheilten Normalzahl von Stunden nur viermal benutzt zu werden brauchte. Die Vorschrift, daß nicht mehr als vier Gegenstände an Einem Tage vorgetragen und daß in jeder Classe nur Ein Dichter, und Ein Prosaiker zu gleicher Zeit gelesen werden sollen, so wie die Behandlung verwandter Lehrstoffe theils in denselben Stunden, theils in Stunden nacheinander hatte sich ganz befolgen lassen. Gleichwohl aber wurde die Rathgebung des im Juni anwesenden Herrn Provinzial-Schulraths Dr. Schaub dem Plane außer mehreren andern Beziehungen auf das Innere besonders auch noch sehr nützlich hinsichtlich der Vertheilung der Lehrgegenstände unter die für sie sich eignendsten Lehrer und der Anordnung, daß die Ordinarien mehr in ihrer Classe beschäftigt sind, und dadurch mehr Gegenstände in derselben Hand liegen, wie aus folgender vergleichenden Uebersicht des Sommer- und Winterhalbjahrs hervorgeht, indem im letztern die Zahl der in einer Classe unterrichtenden Lehrer geringer ist. Denn im Sommerhalbjahr unterrichteten in Prima **7**, in Secunda **6**, in Tertia **6**, in Quarta **6**, in Quinta **5** Lehrer; im Winterhalbjahre aber war die Zahl der Lehrer in Prima **6**, in Secunda **6**, in Tertia **5**, in Quarta **5**, in Quinta **5**. Die Classen-Ordinarien waren für das ganze Schuljahr in Prima der Director, im Sommer mit **10**, im Winter mit **11** Lectionen; in Secunda der Conrector Dr. Schlickeisen, im Sommer mit **12**, im Winter mit **15** Lectionen; in Tertia der Subconrector Dr. Ameis, im S. mit **14**, im W. mit **18** Lectionen; in Quarta der Subrector Dr. Mühlberg im S. mit **11**, im W. mit **12** Lectionen; in Quinta der Subconrector Hartrodt im S. mit **11**, im W. mit **12** Lectionen. Die Lectionenzahl für jede Classe ist wöchentlich **32**.

B) Vollendete Lehrpensa.

1) In Prima: I) Hebräisch: **2** St. Syntax und Wiederholung der Formenlehre, nach Gesenius, mit schriftlicher Uebung im Uebersetzen ins Hebräische und im Analysiren. Lectüre des **2.** Buchs Samuelis. Subrector Dr. Mühlberg. II) Griechisch: **2** St. Sophoclis Oedip. Tyr. nach Vorausschickung des Nöthigen über die Tragödie der Alten überhaupt, insbesondere über die Sophokleische Behandlung der Oedipodischen Fabel, wie über den Chor rc.; Director Dr. Haun.— **2** St. Demosth. de coron. § **1**—**105**, mit Einleitung über das Leben des Demosthenes und seinen Standpunct zur damaligen Zeit: und **2** St. Syntax, nach Rost's Grammatik, Uebersetzungen ins Griechische, Repetition der Privatlectüre in Homeri Ilias XIII—XX und Odyssee IX—X. Subconr. Dr. Ameis. III) Lateinisch: **3** St. Cicero de orat. I. und Repetition der Privatlectüre in Ciceron. oratt. und Liv. Hist. — **3** St. Stylübungen in freien Ausarbeitungen, Exercitien, Extemporalien, und lat. Disputiren. Director Dr. Haun. — **2** St. Horat. Od. IV, **2**—**10**. Sat. I, **1** und **3**—**6**. Subconrector Dr. Ameis. IV) Deutsch, im S. **1** St., im W. **2** St. Stylübungen in freien Ausarbeitungen, Erläuterungen von Stellen deutscher Classiker, und

freien Vorträgen. Director Dr. Haun. — V) Französisch: Lectüre in Ideler und Nolte poetischem Handbuche, und Uebersetzungen ins Französische, Collabor. Ficher. VI) Religionslehre, combinirt mit Secunda: Einleitung in die Bücher des A. und N. T., Religionsgeschichte: Erläuterung der Apostelgeschichte Cap. X bis Ende im Grundtexte, Diaconus Karmrodt. VII) Neuere Geschichte 2 St. Von Ludwig XIV bis zur franz. Revolution, nach Wachler, § 107 bis Ende. Conr. Dr. Schlickeisen. VIII) Geschichte der deutschen Literatur, nach Koberstein, 2 St. im S. § 181 bis Ende im W. § 1 — 50. und Poetik nach Eschenburgs Entwurf von Pinder, Conrect. Dr. Schlickeisen. IX) Mathematik 4 St. nach Matthias, im S. Trigonometrie, § 1—48. Prorector Limpert. Im W. 4 St. Gleichungen des 1 und 2 Grades mit einer und mehrern unbekannten Größen; unbestimmte Gleichungen. Ebene Trigonometrie. Subconrector Hartrodt. X) Physik 2 St. Licht, Wärme, Electricität, Magnetismus, nach Kries. Abriß der mathemat. Geographie, nach eignen Heften. Subconrector Hartrodt.

2) In Secunda: I) Hebräisch 2 St. Elementar- und Formenlehre, nach Gesenius Grammatik mit schriftl. Uebungen, Lectüre historischer Stücke in Gesenius Lesebuche, im S. Subconr. Dr. Ameis, im W. Subr. Dr. Mühlberg. II) Griechisch: 2 St. Herodot Histor. I. im S. Dir. Dr. Haun; im W. Conr. Dr. Schlickeisen. — 2 St. Homeri Iliad I. II. u. III. zur Hälfte — 1 St. Stylübung. 1 Grammatik, nach Rost. Conr. Dr. Schlickeisen. III) Lateinisch: 2 St. Virg. Aen. V — VI im S. Subrect. Dr. Mühlberg; im W. Director Dr. Haun. — 3 St. Ciceron. oratt. pro Ligar., pro rege Dejot., pro leg. Manil., pro Murena halb, mit Repetition der Privatlectüre im Cicer. Liv. und Caesar. — 3 St. Stylübungen, freie Aufsätze, Scripta und Extemporalia — 2 St. Grammatik und Metrik nach Zumpt. Conrector Dr. Schlickeisen. IV) Deutsch: 2 St. Stylübung in freien Aufsätzen und Vorträgen. Lectüre, Gramm., Rhetorik, im S. Subr. Dr. Mühlberg, im W. Conr. Dr. Schlickeisen. V) Französisch: 2 St. Lectüre in Ideler und Nolte prosaischem Handbuche und Uebersetzungen ins Französische. Collab. Ficher. VI) Religionslehre: combin. mit Prima. VII) Geschichte und Geographie der alten Welt. 2 St. Römische Geschichte von den Punischen Kriegen bis Ende. Griech. Geschichte nebst Asien und Afrika, nach Wachler. Subr. Dr. Mühlberg. VII) Mathematik: im S. 2 St. Arithmetik. Die Lehre von den arithmet. und geometr. Reihen, nach Matthias 6—7 Absch. 2 St. Geometrie. Ausmessung der Figuren, nach Matthias 6—7 Abschnitt. im S. Subc. Hartrodt, im W. 2 St. Stereometrie 1—3 Abschn. im Matthias. 2 St. arithmet. und geometr. Proportionen. Pror. Limpert. IX) Physik: 1 St. im S. Licht und Wärme, nach Kries. Subc. Hartrodt; im W. Electricität und Magnetismus. Prorector Limpert.

3) In Tertia: I) Griechisch: 2 St. Homer. Odyss IX, 19—414 mit Erläuterung der Formenlehre des ionischen Dialekts von Lucas: 2 St. Xenoph. Anab. I. Subc. Dr. Ameis — 2 St. Stylübung und Gramm. nach Rost; im S. Conr. Dr. Schlickeisen; im W. Subc. Dr. Ameis. II) Lat. 2 St. poetische Chrestomathie von Kraft; im S. Dir. Dr. Haun; im W. Subc. Dr. Ameis. — 3 St. Cæsar de bello civ. II—III Bell. Gallic. I—V. 3 St. Stylübungen, Scripta, Extemporalia. 2 St. Grammatik, nach Zumpt, Subc. Dr. Ameis. III) Deutsch: 2 St. Stylübungen

und Grammatik, nach Beckers Leitfaden, Subconr. Dr. Ameis. IV) Französisch: 2 St. **Les aventures de Telemaque et Florian Guillaume Tell,** Uebersetzungen ins Französische, Collaborator Ficher. V) Religionslehre: Erklärung von Zerrenners biblisch. Leitfaden. 1. u. 2. Abschn. und 3. zur Hälfte. Diac. Karmrodt. VI) Allgem. Geschichte und Geographie, 3 St. nach Pölitz, Geschichte vom Anfang bis zu den Kreuzzügen. Geogr., mathemat. und physik.; — Polit. Asiens, Afrikas und einiger Länder Europas, Conr. Dr. Schlickeisen. VII) Mathematik: 3 St. Planimetrie, nach Matthias. 5 — 7 Abschn. Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel aus Symbolen, Prorector Limpert. VIII) Naturbeschreibung: 2 St. Botanik und Mineralogie, nach Stein, Pror. Limpert. IX) Zeichnen: 2 St. Uebungen auf dem Reißbrete, Köpfe in Kreide, Landschaften mit der Feder und in Tusche, Thierstücke, Zeichenlehrer Dettmann.

NB. An den außer der Schulzeit liegenden Zeichenstunden in Tertia nahmen freiwillig mehrere Schüler aus Prima und Secunda Theil.

---

4) In Quarta: I) Griechisch: im S. 4 St. Jacobs Elementarbuch und Stylübungen, Subr. Dr. Mühlberg. 2 St. Grammatik, nach Rost, Formenlehre und darauf bezügliche Lectüre in Jacobs Elementarbuch, Subconrector Dr. Ameis. — Im W. 6 St. Jacobs Elementarbuch 1. Curs., Grammatik. Uebersetzungen ins Griechische, nach Kühner, Collab. Recke. II) Lateinisch: im S. 5 St. Phædr. und Grammatik, nach Zumpts Auszug, Subr. Dr. Mühlberg. 5 St. Corn. Nep. und Stylübung, Collab. Recke — im W. 3 St. Corn. Nep. 3 St. Stylübung, 2 St. Grammat., 2 St. Phædr. Subr. Dr. Mühlberg. III) Deutsch: 2 St. Stylübungen, Declamation, Grammatik, nach Heyse — im S. Collab. Recke — im W. Subr. Dr. Mühlberg. IV) Französisch: Meidingers Grammatik, Formenlehre und Uebersetzung ins Franz. und aus d. Frz. Collab. Ficher. V) Religionslehre: 2 St. comb. mit Quinta. Erläuterung von Luthers Katechismus, Bibl. Gesch. des A. und N. T., Diac. Karmrodt. VI) Ethnograph. Gesch. und Geogr., nach Pölitz und Selten. 2 St. Von Entdeckung Amerikas bis zu der franz. Revol., im S. Subr. Dr. Mühlberg — im W. Landesgeschichte von Friedrich II. an und geogr. Uebersicht des Preuß. Staates. Pror. Limpert. VII) Mathematik: 3 St. Nach Matthias 1 — 4 Abschn. der Planimetrie. Proportionen. Ausziehen der Quadrat- und Cubikwurzel aus Zahlen. Pror. Limpert. VIII) Naturbeschreibung: 1 St. Amphibien, Fische, Insekten, Würmer, nach Steins Naturgesch. Pror. Limpert. IX) Zeichnen: 2 St. Körperzeichnen, nach Peter Schmidt, gerade und krummlinige, in Umriß und Schattirungen, und häusl. Aufgaben nach Vorlegeblättern. Zeichenlehrer Dettmann. X) Schönschreiben: Derselbe. XI) Singen: Musikdirector Thierfelder.

---

5) In Quinta: I) Lateinisch: Uebersetzungen ins Deutsche, nach Jacobs Lesebuche. Uebersetzungen ins Lateinische, nach Augusts Vorübungen. Grammatik nach Zumpts Auszug, im S. 5 St. Subconr. Hartrodt. 5 St. Collab. Recke. — Im W. 4 St. Subc. Hartrodt. 6 St. Collab. Recke. II) Deutsch: 2 St. Grammatik und Stylübung. Subc. Hartrodt. III) Religionslehre: comb. mit Quarta. IV) Allgem. Geschichte und Geographie: 3 St. Gesch. in biograph. Character. Allgem. Uebersicht der Länder. Subrector Dr. Mühlberg. V) Rechnen: im S. 2 St. Kopfrechnen. Prorector Limpert. 2 St. Tafelrechnen. Subc. Hartrodt. — im W. 4 St. die vier Spezies in ganzen und gebrochnen, benannten und unbenannten Zahlen. Regula de Tri. Subc. Hartrodt nach seinem Leitfaden. VI) Naturbeschreibung: 2 St. Säugethiere und Vögel, nach Stein. Pror.

Limpert. VII) Zeichnen: 2 St. Körperzeichnen in Umrissen, mit häuslichen Aufgaben nach Vorlegeblättern. Zeichenlehrer Dettmann. VIII) Schönschreiben: 3 St. Derselbe. IX) Singen 3 St. Musikdirector Thierfelder.

Die Schüler des Nebenseminars sind von Secunda an vom Griechischen und Lateinischen dispensirt und erhalten dafür Unterricht in der Bibelerklärung, bibl. Geschichte, Katechetik, im Rechnen, Generalbaß, Orgelspiel, vom Pastor Barlósius, Prorector Limpert, Musikdir. Thierfelder.

Eine dankbare Erwähnung gebührt der freundlichen Hilfleistung des Hrn. Zimmermeister Köthe jun., welcher mit uneigennützigem Sinn seit Neujahr 1839 sich um die vaterstädtische Jugend dadurch verdient zu machen bestrebt, daß er die sich zu einem technischen Berufe Bestimmenden aus der 1. und 2. Classe der Bürgerschule wöchentlich 1 Stunde im technischen Zeichnen unterrichtet.

Meine Bitte im vorigen Programme hinsichtlich der Einführung gymnastischer Uebungen hat die freundlichste Berücksichtigung gefunden. Der gewünschte Platz ist gewonnen, für die Instandsetzung desselben und für Anstellung eines geeigneten Lehrers sind die nöthigen Einleitungen gemacht worden, und wir werden mit Eintritt der passenden Witterung diese der Gesundheit des Körpers und der Aufheiterung des Geistes so förderlichen Uebungen beginnen können.

III. Verordnungen und Erlasse der vorgesetzten Behörden.

Außer mehreren Erlassen E. Hohen Ministeriums, E. Hochlöbl. Provinzial-Schul-Kollegiums, und E. Wohllöbl. Magistrates, die Person des Directors, seine Anstellung, Einführung und Emolumente betreffend, gingen beim Director ein:

A) Von E. Wohllöbl. Magistrate allhier als Patron der Anstalt: 36 Zufertigungen, von welchen 2 auf äußere Verwaltungsangelegenheiten, 5 auf Disciplinarfälle, 4 auf Einführungen von Lehrern, 3 auf Anordnung von Schulfeierlichkeiten, 4 auf Schulgeld-Erlasse, 4 auf Bibliothekangelegenheiten, 4 auf Doctrinalverhältnisse, 3 auf Legatenvertheilungen, 2 auf den Programmendruck, 1 auf die Einsendung der Impfscheine, 4 auf geforderte Gutachten über Vorschläge für Einrichtungen am Gymnasium, am Seminare, an der Knaben-Bürgerschule, insbesondere auch für Einführung gymnastischer Uebungen sich bezogen.

B) Von E. Hochlöblichen Provinzial-Schul-Kollegio 22 Erlasse folgenden Inhalts:

1) Sendung des Heirathsconsenses für den Subconrector Hartrodt. Den 6. März.

2) Ueber Vereidung und Verpflichtung des Collaborator Recke. Den 7. März.

3) Genehmigung des Druckes des im Manuscript eingereichten Programmes. Den 22. März.

4) Mittheilung der Hohen Ministerial-Verfügung vom 27. Februar, daß die Lehrer der Mathematik von der Wirksamkeit der Classenordinarien, wenn sie sich dazu eignen, nicht ausgeschlossen werden sollen, und daß die Classenordinarien nur auf speziellen Antrag und Nachweisung ihrer Verdienste das Prädikat eines Oberlehrers erhalten können. Den 22. März.

5) Einem Ausländer wird Dispensation von der Theilnahme am griechischen Unterricht ertheilt. Den 2. April.

6) Einige Abänderungen in der Rectoren-Instruction vom 1. December 1827 betreffend.

7) Circular-Mittheilung eines Entwurfs einer Instruction für Candidaten des höhern Schulamts, welche ihr Probejahr am Gymnasio abhalten wollen, nebst Aufgabe, einen ähnlichen Entwurf, den Localverhältnissen angepaßt, einzureichen. Den 3. Mai.

8) Ueber Besetzung des zweiten Subconrectorats. Den 7. Mai.

9) Vorläufige Genehmigung des für das Schuljahr Ostern 1838—1839 eingereichten Lectionsplanes. Den 5. Mai.

10) Mittheilung eines Hohen Erlasses des Königl. Ministeriums vom 4. Februar, daß die Directoren der Gymnasien zur Erreichung des in einer Hohen Circular-Verfügung an die Königl. Wissenschaftlichen Prüfungs-Commissionen — hinsichtlich der höhern Anforderungen an die pro facultate docendi zu prüfenden Candidaten des höhern Schulamts — beabsichtigten Zweckes mitwirken sollen, einerseits durch Abrathung der für den Lehrerberuf den geistigen Anlagen, der Neigung und Persönlichkeit nach nicht für befähigt genug erkannten Schüler, andererseits dadurch, daß sie die für diesen Beruf sich eignenden Schüler über die Bedeutung, den Umfang, die Schwierigkeiten der Aufgabe, sowie über die Anforderungen bei der Prüfung pro facultate docendi belehren und ihnen im letzten Semester vor ihrem Abgange von der Schule in außerordentlichen Lectionen eine gehörige auf die Individualität des zu Belehrenden berechnete Anleitung zu zweckmäßiger Einrichtung ihrer Universitätsstudien geben, oder durch geeignete Lehrer des Gymnasiums geben lassen. Ueberdieß wird zur Aufmunterung der sich dem Lehrerfache Widmenden der Beschluß mitgetheilt, daß von jetzt an die Dispensation von der Prüfung pro loco und pro ascensione nur in den Fällen zu ertheilen ist, wo die Tüchtigkeit der Candidaten zu dem in Aussicht genommenen Lehramte durch den Inhalt des ihm bei der Prüfung pro facultate docendi ertheilten Zeugnisses und des den Antrag auf Dispensation motivirenden Berichtes ganz außer Zweifel gestellt ist. Magdeburg, den 19. Mai 1838.

11) Mittheilung E. Hohen Ministerial-Verfügung vom 20. Juli, daß die Directoren der Gymnasien den Herausgebern des statistischen Handbuchs der deutschen Gymnasien (Cassel in der Kriegerschen Buchhandlung) den Herren Professoren Dr. Brauns und Dr. Theobald in Cassel, für Fortsetzung ihres Unternehmens die erforderlichen Notizen in dem gewünschten Umfange und in der bezeichneten Ordnung mittheilen möchten. Magdeburg, den 31. Juli.

12) Erfreuende Mittheilung aus dem Berichte über die von dem Königl. Provinzial-Schulrathe Herrn Dr. Schaub im Monat Juni vorgenommene Revision des Gymnasiums nebst Genehmigung zur Ausführung vorgeschlagener Anordnungen, und Anempfehlungen anderer Art. Den 17. August.

13 und 14) Mittheilung des Gutachtens E. Königl. Wissenschaftlichen Prüfungs-Commission über die zu Ostern und Michaeli 1838 abgehaltenen Abiturienten-Prüfungen nebst Rücksendung der Prüfungs-Verhandlungen. Den 19. August und 16. Februar.

15) Mittheilung der Hohen Ministerial-Verfügung vom 13. August über den Beitritt der Fürstl. Schwarzb. Sondershäuser Gymnasien zu Sondershausen und Arnstadt zum Programmentausch. 25. Sept.

16) Bestätigung des für das Winterhalbjahr 1838—1839 eingereichten Lectionsplanes nebst Vorschlag hinsichtlich des aufgegebenen Wegfalls des französ. Unterrichts in Quarta. 15. Septbr.

17) Daß ein früherer Schüler des Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums in Berlin, Leopold Beck aus Frankfurt an der Oder, vor Ostern 1839 nicht zum Maturitäts-Examen zuzulassen sei. 25. Oct.

18) Aufforderung E. Hohen Präsidiums zur Subscription auf die zum Besten der Magdeb. Bibelgesellschaft bestimmte Herausgabe einiger Predigten des Herrn Bischof D. Dräseke. 29. Oct.

19) Circularmittheilung dreier bei Bädeker in Essen erschienenen Bücher, nämlich 1) Koppe Anfangsgründe der reinen Mathematik. 4 Bände 2) Savels Grundriß der vergl. Lehre vom Gebrauche der Modi. 3) vom Gebrauche der Casus — zur Durchsicht und Kenntnißnahme. Den 19. November.

20) Aufgabe, künftig 193 Exemplare des Programmes einzusenden. Den 24. Dece. 1838.

21) Bestimmungen über einzelne Angaben in den halbjährlichen Frequenztabellen. Magdeb. den 22. Januar 1839.

22) Huldvolles Rescript über den Jahresbericht. Magdeburg, den 14. Februar.

IV. Statistische Uebersicht des Gymnasiums von Ostern 1838 bis Ostern 1839.

1) Zahl der Schüler.

Das Gymnasium zählt gegenwärtig 102 Schüler, von denen 7 in Prima, 14 in Secunda, 25 in Tertia, 24 in Quarta, 32 in Quinta sitzen.

2) Neu Aufgenommene: (26)

Für Prima 2: Franz Kaufhold, aus Erfurt, 1. — Franz Ehrhard Kraatz, aus Neussen.

Für Secunda 2: Eduard Haun, aus Merseburg. — Carl Friedr. Julius Stiege, aus Langensalza.

Für Tertia 2: Otto Haun, aus Merseburg. — Emil Eggert, aus Oesterkörner.

Für Quarta 1: Adolph Wilhelm Sachse, aus Grabe.

Für Quinta 19: Johann Valentin Gräfedünkel, aus Lengefeld. — Gottfried Madlung, von hier. — Eduard Brehme, von hier. — Ernst Christoph Demme, von hier. — August Herrmann Pfaff, von hier. — Johann Wilhelm Dönhardt, von hier. — Christian Gottfried Kleinschmidt, von hier. — August Gottfried Beyreiß, von hier. — Karl Gottfried Karmrodt, von hier. — Joh. Adolph Gerau, von hier. — Johann Ernst Ermeling, von hier. — Johann Theodor Schröder, von hier. — Carl Schreiber, aus Alterstädt. — Herrmann Friedrich Seyfarth, aus Hohenberge. — Adolph Wilhelm Schäfer, aus Großtöpfer. — Johann Eduard Feigenspan, von hier. — Ferdinand Hartmann aus Duderstadt. — Friedrich Wilhelm August Hirt, aus Seebach. — Friedrich Eduard Meißner, von hier.

3) Abgegangene: (35)

a) Aus Prima nach überstandener Abiturienten-Prüfung auf die Universität: (3)

Zu Ostern 1838.

Friedrich Carl Diedrichs, aus Reifenstein, geboren den 9. October 1817, evangelischer Confession; ist 6 Jahr auf der Schule und 2 Jahr in Prima gewesen; erhielt, da er von der Erlernung der griechischen Sprache dispensirt gewesen war, das Zeugniß der Reife nach der im § 28 Lit. C. gestatteten Berücksichtigung des erwählten Berufes; geht nach freiwilliger Ableistung der Militärpflichtigkeit im reitenden Feldjägercorps auf die Forstakademie zu Neustadt-Eberswalde.

Zu Michael 1838.

Johann Carl Rinneberg, von hier, geb. den 18. Januar 1818, evangel. Confession; ist $7\frac{1}{2}$ Jahr auf der Schule und 3 Jahr in Prima gewesen; ging mit dem Zeugniß der Reife nach Halle, um Theologie zu studiren.

Johann August Körner, von hier, geb. den 22. Februar 1817, evangel. Confession, ist $8\frac{1}{2}$ Jahr auf der Schule und $2\frac{1}{2}$ Jahr in Prima gewesen; ging mit dem Zeugnisse der Reife (außer im Hebräischen) nach Greifswalde, um Theologie zu studiren.

b) Seminaristen aus Prima nach überstandener Wahlfähigkeitsprüfung am Königl. Seminar zu Erfurt: (2)

Carl Friedrich Holzapfel, von hier, geb. den 29. October 1813, war 9 Jahr auf der Schule und $1^1/_4$ Jahr in Prima.

Johann Carl Weber, von hier, geb. den 23. August 1817, war $7^1/_2$ Jahr auf der Schule und $1^1/_4$ Jahr in Prima.

Beide erhielten in der Prüfung am Königl. Seminar zu Erfurt das Wahlfähigkeitszeugniß und wurden für Schulamts = Candidaten erklärt.

c) Auf eine andere Schule: (10).

Aus Prima 1: Franz Kaufhold, aus Erfurt (in Folge des ihm ertheilten Rathes).

Aus Secunda 1: Armin Lebrecht Früh, von hier.

Aus Quarta 2: Otto von Berken, von hier. — Ernst Gottfried Meißner, aus Dachrieden.

Aus Quinta 6: Carl Bohm, aus Berlin. — Emil Bohm, aus Berlin. — Christ. Herrmann Habbicht, von hier. — Leopold Hartmann, aus Worbis. — Theodor Ferdinand Hartmann, aus Worbis. — Ferdinand Hartmann, aus Duderstadt.

d) Zu einem andern Berufe: (20).

Aus Prima 2: Albert Hartmann, aus Worbis. — Ernst Nolke, von hier.

Aus Secunda 2: Anton Herzberg, aus Halberstadt. — Isaak Mankiewitz, von hier.

Aus Tertia 1: Carl Christoph Schmidt, von hier.

Aus Quarta 10: Johann Eduard Burkhardt, von hier. — Christoph Erff, aus Körner. — Emilius Erff, aus Körner. — Julius Gottfried Feigenspan, von hier. — Johann Carl Glotz, von hier. — Richard Wilhelm Heinrichshofen, von hier. — August Benjamin Kersten, von hier. — Adalbert Peter, aus Rüdigershagen. — Friedrich Rausch, aus Treffurt. — Carl v. Westernhagen, aus Teistungen.

Aus Quinta 5: Bernhard Christian Angler, von hier. — Heinrich Adolph Hey, von hier. — Friedrich Ferdinand Viselius, von hier. — Gottfried Lebrecht Wiegand, aus Altengottern. — Johann Ernst Ermeling, von hier.

4) Vermehrung des Lehrapparates.

An Geschenken, für welche hiermit Dank abgestattet wird, erhielt das Gymnasium:

1) Von E. Hochlöbl. Provinzial=Schulcollegium: Ein Exemplar des von dem Herrn General=Lieut. Rühle v. Lilienstern herausgegebenen Historiogramms des Preuß. Staates und des dazu gehör. erklärenden Textes, als Geschenk E. Hohen Ministeriums der Geistl. rc. Angelegenheiten. Den 14. April 1838. — Ein Exemplar der Schrift: Das veranschaulichte Weltsystem, von Dr. Schulze. Den 7. August 1838. — Nordische Vorzeit und Mythen vom Baron v. Dirking=Holmfeld, 1. und 2. Hft. Drei Sendungen von Programmen vom 9. Juni, 24. December 1838 und 31. Januar 1839 enthielten 102 inländische und 15 ausländische Programme.

2) Von E. Wohllöbl. Magistrate allhier: Friedrich von Schönholz Handbuch der Wissenschaften. 1. und 2. Thl. — Turntafeln, von E. W. B. Eiselen. Berlin, 1837.

3) Von dem Herrn Stadtrath Stephan allhier: Vier von einem gebornen Mühlhäuser, Gottfr. Vockrodt, Rector des Gymnasiums zu Gotha, herausgegebene Schriften, in Einem Bande, nämlich: a) Consultationes de literarum studiis recte et religiose instituendis. Gothæ 1705. b) Commentatio de eruditorum societatibus et varia re literaria. Gothæ 1704. c) Sermones Panegyrici. Gothæ 1705. d) Commentatio de vera et falsa eruditione. Hal. 1692.

Die Schulbibliothek kaufte aus eigenen Fonds die Fortsetzungen folgender Werke: Thucydides, ed. Poppo. Graff hochdeutscher Sprachschatz. Goldfuß naturhistorischer Atlas. Allgemeine

Encyclopädie von Ersch und Gruber. Richters Geschichte des deutschen Freiheitskrieges. Lenz Naturgeschichte. Corpus scriptor. histor. Byzant. Gehlers physikalisches Wörterbuch. Ueberdieß Charten, Zeichnungen, gelehrte Journale, Vorschriften zum Schönschreiben. Außer diesen kamen noch 26 neue Werke hinzu, welche mit Einschluß obiger Geschenke die Bibliothek um 65 Bände vermehrten.

Für den mathematisch-physikal. Apparat wurde aus den Ersparnissen des dazu bestimmten Fonds eine vom Mechanikus Herrn D. Lüttig zu Berlin mit Sorgfalt angefertigte Diopter-Boussole nebst Libelle und Tellerstatif für den Preis von 54 Thlr. angeschafft.

Die Schülerlesebibliothek, welche sich allein durch die Beiträge der Schüler erhalten muß, bekam einen Zuwachs von 9 Werken in 90 Bänden.

Für den historischen Leseverein gehören außer den Fortsetzungen mehrerer Werke von Raumer, Schlosser und Menzel zu den neu angeschafften vorzügl. Neorama, von Carové; Gallus, von Dr. Becker; Hesperien, von Richter; die neue Demokratie von Frankreich, gekrönte Preisschrift. Bei noch größerer Theilnahme, die wir durch solche Werke von allgemeinem Interesse zu bewirken hoffen, wird noch mehr auf Schriften Rücksicht genommen werden können, deren Lectüre der Fortbildung mit der Zeit in geschichtlicher Hinsicht förderlich ist.

5) Geschenke, Remunerationen, Stiftungen und Legate.

Zu besonderm Dank verpflichtet fühlen sich die Lehrer a) den Eltern unserer Schüler für die auch in diesem Jahre geschehene Darbringung des Neujahrsgeschenkes; b) E. Wohll. Magistrate für die wegen übernommener Mehrarbeit in der letzten Vacanzzeit, Neujahr bis Ostern 1838 gewährten Remunerationen in der Gesammtsumme von 100 Thlr., so wie der Director für die ihm in der Summe von 83⅓ Thlr. gewährte erfreuliche Beihilfe zur Deckung eines Theiles der bedeutenden Umzugskosten.

Unter die Schüler wurden zum Oster-Examen 1838 die Prämienbücher zu dem Gesammtwerthe von 30 Thlr. ausgetheilt, nämlich an 13 Schüler des Gymnasiums, und an 10 Schüler der Knaben-Bürgerschule, welche sich durch Fleiß und gute Sitten derselben würdig gemacht hatten.

Die Spenden der wohlthätigen Stiftungen des Beidergewandsgeldes, der Schuhgelder, des Stephan-Griesbach-Helmsdorfschen Legates wurden dem Willen der Stifter gemäß unter arme, fleißige und gute Schüler beider Anstalten an den festgesetzten Tagen vertheilt; auch von einem Theile, der für Lehrmittel verwendet werden darf, die unter Leitung des Herrn Regierungs- und Schulrathes Dr. Chr. Weiß von den Lehrern der Bürgerschule zu Merseburg im Jahre 1838 herausgegebenen Vorlegeblätter zum Unterricht im Schönschreiben, 3 Abtheil. in 10 Heften, für den Subscriptionspreis von 4 Thlr. angeschafft, da sie außer der Zweckmäßigkeit und Schönheit der Schriftzüge sich besonders durch den gewählten und belehrenden Inhalt empfehlen.

Von der v. Hansteinschen Stiftung erhielten zu Weihnachten 2 Schüler des Gymnasiums und 3 Schüler der Knaben-Bürgerschule, jeder Tuch zu Oberröcken, und außerdem 2 Schüler der erstern, 8 Schüler der letztern Anstalt nützliche Schulbücher.

Des Legates der Familie Lutteroth ist schon pag. 5 bei Erwähnung des Stiftungsfestes, an welchem die Vertheilung geschieht, gedacht worden.

Die Lehrer erhielten das Thon'sche Legat, das Gregoriusgeld, und der Director und Prorector besonders das Etzelsche Legat richtig ausgezahlt.

Die Namen der hier erwähnten Familien haben durch ihre wohlthätigen Stiftungen einen so guten Klang in unserer Stadt, und sich ein so dauerndes Gedächtniß erhalten, daß wir die Hoffnung nicht aufgeben, die Macht des guten Beispiels werde auch hinfort wieder manche Begüterte geneigt machen, ihren Namen an solche Segnungen zu knüpfen, um dadurch in dem dankbaren Andenken künftiger Generationen fortzuleben.

Es hat aber auch schon in diesem Jahre nicht an Wohlthätern gefehlt, welche ärmere Schüler auf eine zweckmäßige Art unterstützten, die Einen durch Bücher, die Anderen durch Kleidung, noch Andere dadurch, daß sie ihnen den Genuß der Anhörung von Conzerten verschafften. Für alle diese Beweise der Zuneigung und des Wohlwollens stattet die Anstalt ihren ergebensten Dank ab.

V. Ueber die Schulprüfungen.

An Michael 1838 wurden die Classen vor dem Schulcuratorium und Lehrercollegium geprüft.

Die Anordnung der öffentlichen Prüfungen zu Ostern d. J. ist außer der Eröffnung und Beschließung mit Gesang folgende:

1) Im Gymnasium, Donnerstags den **21.** März, von früh 8—**12** Uhr, und Nachm. von **2**—4 Uhr:

Prima: Religionslehre (mit Secunda comb.) Diac. Karmrodt. — Cicero de oratore: Dir. Dr. Haun. — Demosthen. orat. de corona: Subconrector Dr. Ameis.

Secunda: Herod. Hist.: Conr. Dr. Schlickeisen. — Hebräisch: Subr. Dr. Mühlberg. — Französisch: Collabor. Ficher.

Tertia: Geschichte und Geographie: Conr. Dr. Schlickeisen. — Lat. Dichter: Subc. Dr. Ameis.

Quarta: Mathematik: Prorector Limpert. — Griechisch: Collabor. Recke.

Quinta: Naturbeschreibung: Prorector Limpert. — Lateinisch: Subconrector Hartrodt.

2) In der Knaben-Bürgerschule, Freitags, den **22.** März, früh 8 Uhr und Nachm. **2** Uhr:

Erste Classe: Geschichte und Geographie: Cantor Weber. — Chemie: Subc. Hartrodt. — Geometrie: Lehrer John.

Zweite Classe: Religionslehre: Cantor Schmidt. — Naturgeschichte: Cantor Weber. — Tafelrechnen: Cantor Schmidt.

Dritte Classe: Religionslehre: Lehrer John — Geographie: Hilfslehrer Hühn. — Rechnen: Lehrer John.

Vierte Classe: Deutsche Sprache: Hilfslehrer Weißenborn. — Lesen: Hilfslehrer Hühn. — Rechnen: Hilfslehrer Weißenborn.

An die Prüfung jeder dieser Classen schließt sich die Versetzung und die Vertheilung der Prämienbücher an.

3) Im Seminar, Sonnabends, den **23.** März, früh von **9** Uhr an:

Die Prüfung der Seminaristen geschieht durch den Pastor Barlösius, Prorector Limpert, Musikdirector Thierfelder.

Zwischen einzelnen Lectionen werden einige Schüler passende Stücke deklamiren. An jedem Tage werden die Ausarbeitungen und Scripta in den verschiedenen Sprachen, so wie die Schreib- und Zeichenbücher der Schüler vorliegen.

Sonnabends um **10** Uhr findet dann im Gymnasium die Vertheilung der Censuren, der Prämienbücher und die Versetzung der Schüler Statt, woran sich die Entlassung des Abiturienten schließt.

Zu diesen Prüfungen werden hiermit ganz ergebenst eingeladen E. Wohllöbl. Magistrat als Patron der Anstalten, das Schulcuratorium, die Wohllöbl. Stadtverordneten-Versammlung, die Eltern unserer Zöglinge und alle Gönner und Freunde des Schulwesens.

Mühlhausen, den **14.** März **1839**. Dr. Haun, Director.

Uebersicht

der statistischen Verhältnisse des Gymnasiums zu Mühlhausen, im Schuljahre Ostern 1838 bis 1839.

I. Lehrer.

Director Dr. Haun.
Prorector Limpert.
Conr. Dr. Schlickeisen.
Subr. Dr. Mühlberg.
Subconr. I Hartrodt.
Subconr. II Dr. Ameis.
Collaborator I Ficher.
Collaborator II Recke.
Diaconus Karmrodt.
Schreib- und Zeichenlehrer Dettmann.
Musikdir. Thierfelder.

Pastor Barlösius, Lehrer am Seminar.

II. Allgemeiner Lehrplan.

Unterrichts-Gegenstände.	Stundenzahl. I	II	III	IV	V	Sma.
a) Sprachen:						
Hebräisch . . .	2	2	—	—	—	4
Griechisch . . .	6	6	6	6	—	24
Lateinisch . . .	8	10	10	10	10	48
Deutsch . . .	2	2	2	2	4	12
Französisch . .	2	2	2	2	—	8
b) Wissenschaften:						
Religionslehre .	2	2	2	2	2	10
Philos. Propädeutik	1	—	—	—	—	1
Gesch. u. Geograph.	2	3	3	2	3	13
Mathematik . .	4	4	3	3	—	14
Rechnen . . .	—	—	—	—	4	4
Physik . . .	2	1	—	—	—	3
Naturbeschreibung	—	—	2	1	2	5
Deutsche Lit. Gesch.	1	—	—	—	—	1
c) Fertigkeiten:						
Schönschreiben .	—	—	—	1	3	4
Zeichnen . . .	—	—	2	2	2	6
Singen . . .	—	—	—	1	2	3
Summa	32	32	32	32	32	160

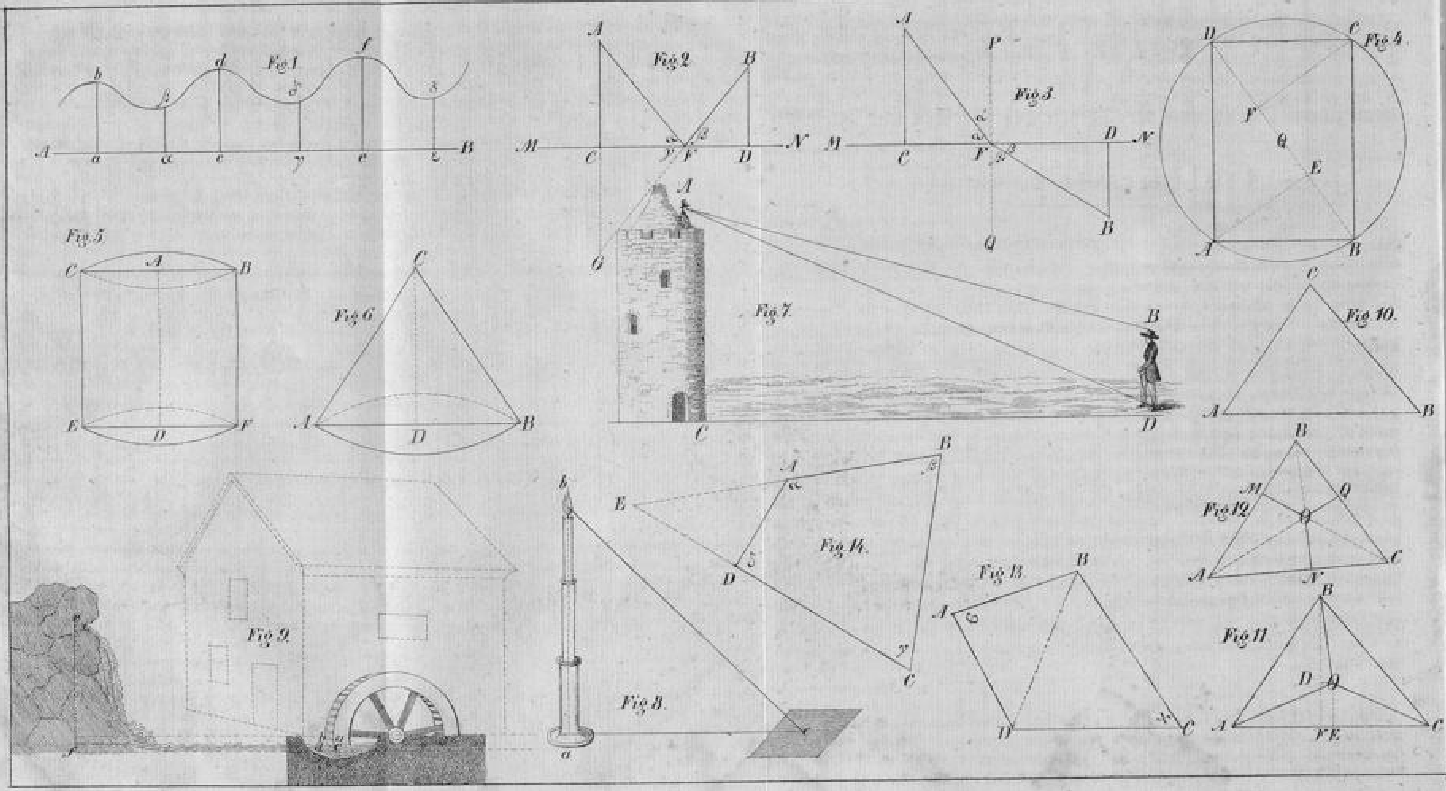
III. a) Verhältnisse der Schüler.

In Classe	waren zu Ostern 1838	aufgenommen durch Reception	aufgenommen durch Versetzung	Summa	entlassen durch Abgang	entlassen durch Versetzung	Summa	sind jetzt zu Ostern 1839
I	10	2	3	5	8	—	8	7
II	10	2	8	10	3	3	6	14
III	22	2	10	12	1	8	9	25
IV	34	1	11	12	12	10	22	24
V	35	19	—	19	11	11	22	32
Sma.	111	26			35			102

III. b) Verhältnisse der Abiturienten.

sind entlassen	Zahl	studiren wo?	Zahl	studiren was?	Zahl
zu Ostern 1838	1	Forstakademie zu Neustadt-Eberswalde	1	Forstwissenschaft	1
zu Michael 1838	2	Halle	1	Theologie	2
		Greifswalde	1		
Summa	3		3		3

Zallartrödts Theorie des Grössten u. Kleinsten, Mühlhäuser Oster-Programm 1839.



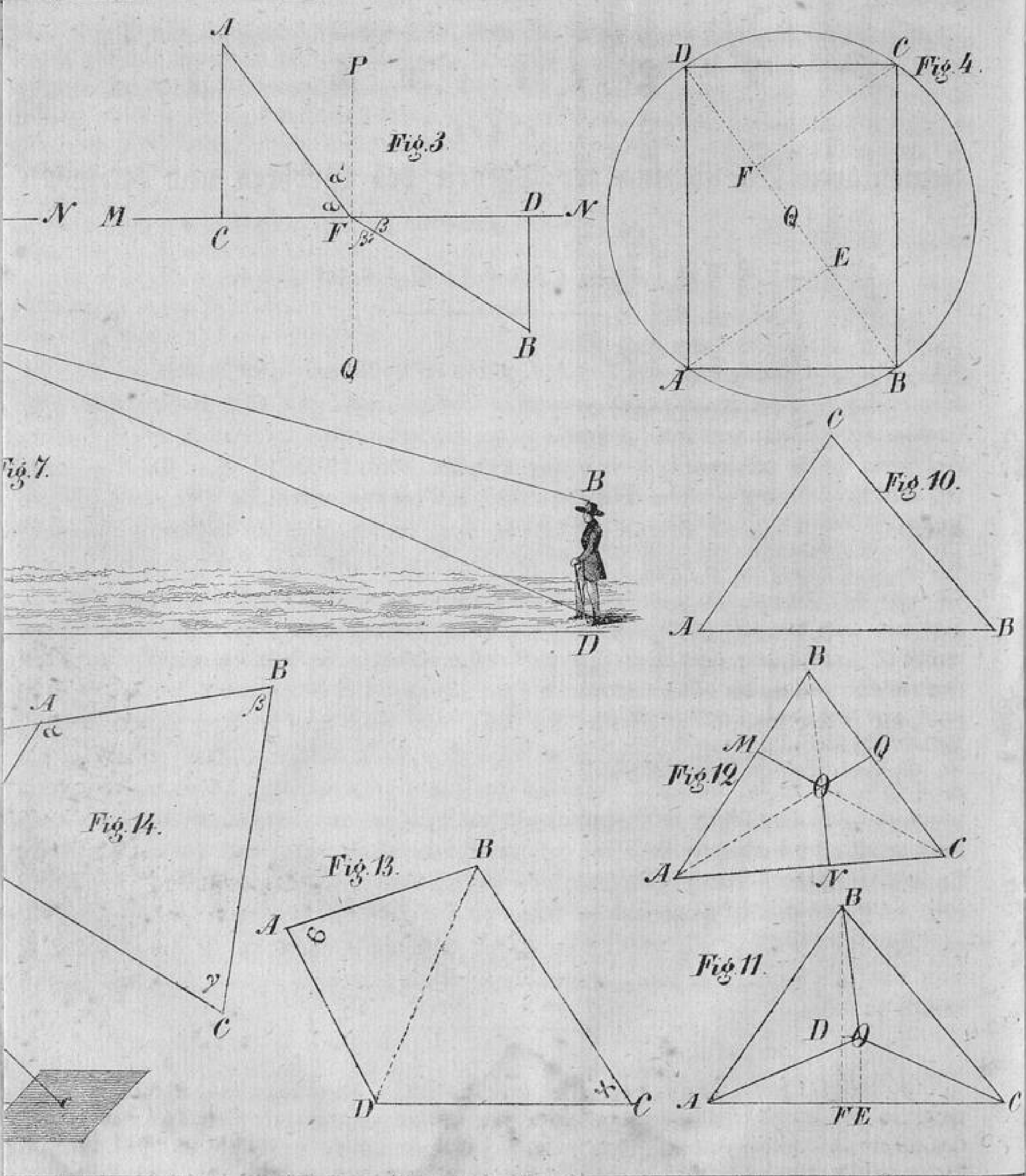


Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 7.
Fig. 10.
Fig. 12.
Fig. 14.
Fig. 13.
Fig. 11.

Versuch

einer

elementaren Darstellung der Theorie des Größten und Kleinsten

vom

Subconrector Hartrodt.

Alle Elementar-Auflösungen von Aufgaben, welche auf Bestimmung eines Größten oder Kleinsten hinauslaufen, — entweder durch rein-geometrische Constructionen, oder durch Raisonnement, oder durch geschickte Wendungen und Kunstgriffe, namentlich in der Wahl der Unbekannten (m. s. besonders Meier Hirsch „Sammlung geometrischer Aufgaben. Berl. 1805. 7. I. S. 215—225; II. S. 262—303.") — zeugen zwar von dem Scharfsinne und der Gewandtheit der Operirenden, können aber, da sie sich immer nur auf specielle Fälle beziehen, durchaus nicht zur Aufstellung allgemeiner Regeln für die Behandlung dieses Gegenstandes überhaupt dienen. Aus diesem Grunde wird auch die Lehre vom Größten oder Kleinsten gewöhnlich erst in der Differential-Rechnung ganz allgemein behandelt. Da nun aber schon in den Elementen der Mathematik und Physik Fragen vorkommen, welche die Entwickelung eines Größten oder Kleinsten verlangen, so ist in den nachfolgenden Blättern versucht worden, die höchst interessanten Untersuchungen über Größte und Kleinste allgemein durch die niedere Analysis zu führen. Der Verf. hatte dabei einen dreifachen Zweck. Zunächst wünschte er seine jungen Leser mit diesem wichtigen Gegenstande ausführlicher und genauer bekannt zu machen, als es im Laufe des Gymnasial-Unterrichts geschehen kann; sodann wollte er ihnen zeigen, wie auch schwierigere und zusammengesetztere Probleme einer leichtern und einfachern Rechnung unterworfen werden können, ohne daß man gerade nöthig habe, seine Zuflucht zur höhern Analysis zu nehmen; endlich sollte ihnen diese kleine Abhandlung Gelegenheit geben, ihre Kenntnisse und Fähigkeiten im mathematischen Calcul zu prüfen und zu erweitern. — Ich habe mich bemüht, die Darstellung möglichst einfach und verständlich einzurichten, so daß ich die Hoffnung nicht ganz unterdrücken kann, meinen Zweck, wenn nicht völlig erreicht, doch nicht zu weit verfehlt zu haben.

---

§. 1.

1. Variable, Constante. Bei analytischen Untersuchungen hat man mit zwei wesentlich von einander unterschiedenen Arten von Größen zu operiren. Betrachtet man nämlich eine Größe aus einem solchen Gesichtspunkte, daß man ihr jeden beliebigen Werth beilegen, mithin dieselbe ganz nach Willkühr ab- oder zunehmen lassen kann, so wird dieselbe eine verän-

derliche Größe (quantitas variabilis) genannt. Wird dagegen die Größe von solcher Beschaffenheit gedacht, daß sie in derselben Rechnung den einmal angenommenen Werth unverändert beibehält, — welche Veränderungen auch mit der Variablen vorgehen mögen, mit welcher sie in Verbindung steht, — so heißt sie eine beständige, unveränderliche Größe (q. constans).

Der Radius ein und desselben Kreises ist eine Constante, während Sehne, Sinus, Cosinus, Tangente 2c. veränderliche Größen sind, indem man sie nach Belieben wachsen oder abnehmen lassen kann. Aehnlich sind in den Gleichungen $c=gt$, $s=\frac{g}{2}t^2$, durch welche die Relationen dargestellt werden, welche für die Geschwindigkeit (c), den durchlaufenen Raum (s) und die Zeit (t) beim freien Falle der Körper im luftleeren Raume statt finden, 2 u. g ($=31',25$ pr. bei $45°$ Breite) constant, t veränderlich. Doch kann auch im letztern Beispiele g als veränderlich angesehen werden, wenn man die verschiedenen Breitengrade berücksichtigt. Es kommt mithin auf den Gesichtspunkt an, aus welchem man bei Untersuchungen die Größen betrachtet, um zu entscheiden, ob eine Größe veränderlich sei oder constant.

2. Bezeichnung der Variablen und Constanten. Zur Bezeichnung der veränderlichen Größen wählt man in der Mathematik gewöhnlich die letzten Buchstaben des Alphabets (t, u, v, x, y, z — φ, χ); die unveränderlichen dagegen werden meistentheils durch die ersten Buchstaben (a, b, c....; A, B, C....; α, β, γ) ausgedrückt.

3. Function. Werden eine gewisse Anzahl veränderliche und beständige Größen durch beliebige Operationen mit einander verknüpft, so entsteht ein analytischer Ausdruck, dessen Werth offenbar von den verschiedenen in ihm enthaltenen veränderlichen Größen abhängig ist, sich also mit den Veränderlichen gleichzeitig ändert und daher selbst eine Veränderliche ist. Man nennt eine solche analytische Darstellung der Zusammensetzung einer Größe aus verschiedenen Veränderlichen und Unveränderlichen eine abhängig-veränderliche Größe oder eine Function der darin erscheinenden Variablen. — Nach der Anzahl der vorkommenden Veränderlichen unterscheidet man Functionen mit einer oder mehreren Veränderlichen.

Die Ausdrücke $ax+b$, $\sqrt{a-x}$, $(a+x)^m$, a^x, x^a, $\sin x$, $\tang x$, $\overset{a}{\log}\, x$ und dergl. sind Functionen einer Veränderlichen (x). $\mathrm{Sin}\,(x+y)$, $\mathrm{tg}\,(x+y)$, $ax+by$.... sind Functionen zweier Veränderlichen (x, y). Die Interessen eines Capitals sind eine Function dreier Veränderlichen (des ausgeliehenen Capitals, der Procente, der Zeit).

4. Bezeichnung der Function. Als Repräsentant einer Function dient einer der letztern Buchstaben des lateinischen Alphabets (X, Y, Z..., y, z, w) oder ein vor die Functionalgröße (d. i. die in der Function enthaltene Variable) gesetztes f, F, φ, ψ... Letzteres namentlich dann, wenn die Form der Function noch nicht bestimmt ist, wie dies in sehr allgemeinen Untersuchungen der Analysis sehr häufig der Fall ist. In beiden Fällen verbindet man die eigentliche Function ($ax+b$, $\sin(x+y)$...) mit der die Function vertretenden Größe (y..., fx) durch das Gleichheitszeichen ($ax+b=\begin{cases} fx \\ y \end{cases}$; $\sin(x+y)=\begin{cases} f(x+y). \\ z \end{cases}$

§. 2.

1. Unendlich im Allgemeinen. Es liegt in der Natur vieler mathematischer und physikalischer Untersuchungen, daß sie den menschlichen Geist unwillkührlich auf die Idee des Unendlichen hinleiten. Wenn nun gleich alle mathematischen und physikalischen Betrachtungen, welche mit der Vorstellung des Unendlichen wesentlich verknüpft sind, in das Gebiet der höhern Analysis und höhern Physik gehören, so ist man doch selbst beim Studium der Elemente dieser Wissenschaften oft genöthigt, sich über das Endliche zu erheben und zum Unendlichen aufzuschwingen.

In der Arithmetik führen uns schon periodische Decimalbrüche, allgemeine Division, Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel, Logarithmen, Kettenbrüche, binomischer Lehrsatz u. s. f. auf den Begriff des unbegrenzt Fortschreitenden. In der Geometrie sind es vorzugsweise Rectification und Quadratur krummer Linien, Complanation krummer Flächen, Cubatur krummflächiger Körper, welche uns unvermeidlich zur Fiction des Unendlichen zwingen. Mehr aber noch sind wir in der Physik darauf hingewiesen, unsere Zuflucht zum Unendlichen zu nehmen, namentlich dann, wenn es sich um mathematische Entwickelung der Gesetze ungleichförmiger Bewegung handelt. — „So soll," wie Johann Schulz (Sehr leichte und kurze Entwickelung einiger der wichtigsten mathematischen Theorien. Königsberg, 1803. S. 230) sehr schön und treffend sagt, „der Geist des Mathematikers nicht durch zu mühsame und einförmige Anstrengungen, dergleichen die Beschäftigung mit lauter endlichen Größen erfordert, endlich ermüdet und abgestumpft, sondern sein Geist durch einen freien Aufschwung auf der einen Seite bis zur Meßkunst des Unendlichgroßen und auf der andern in die unermeßlichen Gefilde der erhabensten und nützlichsten Dichtungen auf die angenehmste Weise zu immer höhern Empfindungen belebt werden."

2. Unendlichgroß, unendlichklein. Die Vorstellungen, welche der Mathematiker vom Unendlichen hat, lassen sich auf folgende zwei reduziren:

a) Eine veränderliche Größe wird unendlichklein, wenn ihr numerischer Werth unbegrenzt abnimmt, so daß er kleiner werden kann, als jede angebbare noch so kleine Größe, folglich sich immer mehr und mehr dem Zustande des wirklich Verschwindens, d. h. der Null, nähert.

b) Eine veränderliche Größe wird unendlichgroß, wenn ihr Zahlenwerth ohne Ende wächst, so daß er größer werden kann, als jede namhafte Größe.

3. Bezeichnung des Unendlichkleinen und Unendlichgroßen. Als Symbol der Grenze der unbegrenzten Abnahme dient 0 (die 0 werdende Zahl, das Unendlichkleine); als Symbol der Grenze der unbegrenzten Zunahme ∞ (die ∞ werdende Zahl, das Unendlichgroße).

Die Entstehung des 0 und ∞ aus einem veränderlichen analytischen Ausdrucke, d. h. die Form des Unendlichen, ist auch der Grund, warum mit dem Unendlichkleinen und Unendlichgroßen gerechnet werden kann.

4. Zusammenstellung des Unendlichen unter sich und mit dem Endlichen.

a) Denkt man in dem Bruche $\frac{a}{x}$ a constant, x veränderlich, so ist offenbar, daß der Werth des Bruches immer $\left\{\begin{matrix}\text{kleiner}\\\text{größer}\end{matrix}\right.$ wird, je mehr x $\left\{\begin{matrix}\text{zunimmt.}\\\text{abnimmt.}\end{matrix}\right.$ Je mehr sich also der Nenner der Grenze $\left\{\begin{matrix}\infty\\0\end{matrix}\right.$ nähert, um so mehr wird sich auch der Werth des Bruchs der Grenze $\left\{\begin{matrix}0\\\infty\end{matrix}\right.$ nähern. Stellt man sich vor, daß der Nenner x die Grenze $\left\{\begin{matrix}\infty\\0\end{matrix}\right.$ wirklich erreicht habe, so wird der Bruch selbst die Grenze $\left\{\begin{matrix}0\\\infty\end{matrix}\right.$ erreicht haben. Daher die symbolischen Ausdrücke

$$\frac{a}{\infty} = 0 \;(1),\; \frac{a}{0} = \infty \;(2)\; . \left(\frac{1}{\infty} = 0,\; \frac{1}{0} = \infty\right).$$

„Eine endliche Zahl durch das $\left\{\begin{matrix}\text{Unendlichgroße}\\\text{Unendlichkleine}\end{matrix}\right.$ dividirt giebt $\left\{\begin{matrix}\text{Unendlichkleines."}\\\text{Unendlichgroßes."}\end{matrix}\right.$

b) Wird in dem Summenausdrucke $a_1 + a_2 + a_3 + — + a_x = ax$ die Stellenzahl (x) immer größer und größer gedacht, so wird auch die Summe (ax) selbst immer größer und größer; sie wird unendlichgroß, wenn man die Zahl (x) der Glieder unendlichgroß annimmt. Daher hat man

$$a + a + a + \ldots \text{ in infinitum} = a \,.\, \infty = \infty \;(3), \text{ mithin auch } \infty = \frac{\infty}{a} \;(4),$$

und da $a + a + a + \ldots$ in inf. $= a + (a + a + a \ldots$ in inf.), zugleich auch
$\infty = a + \infty$ (5), folglich auch $\infty - a = \infty$ (6).

„Das Unendlichgroße erleidet weder durch Addition oder Subtraction einer endlichen Zahl, noch durch Multiplication oder Division mit einer endlichen Zahl eine Veränderung."

c) Stellt man sich vor, daß in der Gleichung $a + \frac{a}{x} = \frac{ax+a}{x}$ x ins Unendliche wächst, so nähert sich der Ausdruck $\frac{ax+a}{x}$ immer mehr der Form $\frac{ax}{x} = a$ (b, (3) u. (5)). Daher wird, wenn man $x = \infty$ setzt, $a + \frac{a}{x} = a$ d. h.

$$a + 0 = a \ (7), \text{ mithin auch } a = a - 0 \ (8).$$

„Eine endliche Größe wird durch Addition oder Subtraction des Unendlichkleinen nicht verändert."

d) Die Gleichung $a \cdot (\frac{1}{x}) = \frac{a}{x}$ wird für ein ins Unendliche zunehmendes x die Form $a\,(\frac{1}{\infty}) = \frac{a}{\infty}$ annehmen, d. h. (a. (1).)

$$a \cdot 0 = 0 \ (9), \text{ folglich auch } 0 = \frac{0}{a} \ (10).$$

„Das Unendlichkleine erleidet durch Multiplication oder Division mit einer endlichen Zahl keine Veränderung."

Eben so wenig wie das Unendlichgroße ist also auch das Unendlichkleine etwas Reales.

e) Aus den Gleichungen (1), (3), (9) erhält man die Gleichungen

$$0 \cdot \infty = a \ (11), \ \frac{\infty}{\infty} = a \ (12), \ \frac{0}{0} = a \ (13)$$

als Symbole des **Unbestimmten**, indem a jede beliebige Größe (Endliches, aber auch 0, ∞) bezeichnen kann.

Aus diesen aufgestellten Sätzen ((1)—(13)) erhellet, daß das Endliche nicht mit dem Unendlichen in Vergleich gebracht werden kann, wohl aber das Unendliche mit dem Unendlichen, wodurch sich etwas Reales (a) ergeben **kann**.

Besonders wichtig für mathematische Untersuchungen sind die Ausdrücke, in welchen das Unendlichkleine vorkommt, und wir werden im Folgenden besonders nur diese berücksichtigen. Daß man sich aber bei mathematischen Untersuchungen den im Unendlichen erreichten Zustand einer solchen immer kleiner und kleiner werdenden Größe noch als etwas **Wirkliches** einbildet und, um die Rechnung dadurch einzuleiten, mit $i, k, h \ldots$, oder, wie es in der höheren Analysis geschieht, durch Δx, dx, δx, $\dot{x} \ldots$ bezeichnet, diese Größe im Vortrage ein **sehr Kleines** (Increment, Fluxion, Differential, untheilbare Größe) nennt, das aber am Schlusse der Rechnung der 0 sich nähernd und endlich mit ihr als eins gedacht wird, im Verlauf der Rechnung dagegen des Begriffs und der Form wegen $i, k, h \ldots$ von 0 genau unterscheidet, — dies wird weiter unten als nothwendig erkannt werden.

5. **Ordnungen des Unendlichkleinen.** Wird in der Proportion $1 : x = x : x^2$, $x : x^2 = x^2 : x^3$, $x^2 : x^3 = x^3 : x^4$ rc. x unendlichklein angenommen, so heißen $x, x^2, x^3, x^4 \ldots$ **Unendlichkleine der ersten, zweiten, dritten, vierten** ... **Ordnung**, was auf der Vorstellung beruht, daß, wenn x unendlich klein ist in Bezug auf eine endliche Größe (1), x^2 unendlichklein ist im Vergleich zu x u. s. f., wobei immer gleiche Grade der Abnahme vorausgesetzt werden. Eben so ist, wenn in der Proportion $1 : x = x' : xx'$ x und x' unendlichklein gedacht werden, das **Product** der beiden unendlichkleinen Größen (xx') ein **Unendlichkleines der zweiten Ordnung** u. s. f.

Läßt man in den Ausdrücken $a + bx$, $ax + bx^2$, $ax^2 + bx^3$, ... $ax^n + bx^{n+1}$ rc. x immer mehr und mehr abnehmen, so wird im Moment des Verschwindens

$$\begin{aligned}
a + bx &= a + b\,.\,0 = a,\\
ax + bx^2 &= x\,(a + bx) = x\,(a + b\,.\,0) = ax,\\
ax^2 + bx^3 &= x^2(a + bx) = x^2(a + b\,.\,0) = ax^2,\\
ax^n + bx^{n+1} &= x^n(a + bx) = x^n(a + b\,.\,0) = ax^n;
\end{aligned}$$

woraus sich der von Leibnitz zuerst aufgestellte Satz erklären läßt, daß „das Unendlichkleine gegen eine endliche Größe, das Unendlichkleine einer höhern Ordnung gegen ein Unendlichkleines einer niedern Ordnung verschwinde;" indem hier ebenfalls das Unendlichkleine immer im Moment des Verschwindens gedacht werden muß.

I. Ueber Größte und Kleinste im Allgemeinen.

§. 3.

1. Absolute Größte und Kleinste. Werden in irgend einer Function der unabhängigen veränderlichen Größe (x) nach und nach verschiedene Werthe beigelegt, so nimmt auch die abhängige Veränderliche (y) andere und andere Werthe an (§. 1, 3.). Unter diesen Werthen sind einige $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right.$ als andere und gewiß findet sich einer unter ihnen, welcher der $\left\{\begin{matrix}\text{größte}\\ \text{kleinste}\end{matrix}\right.$ von allen übrigen ist. Ein solcher Werth einer Function, welcher $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right.$ als alle übrigen ist, wird ein absolutes $\left\{\begin{matrix}\text{Größtes}\\ \text{Kleinstes}\end{matrix}\right.$ genannt $\left(\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ absolutum). So ist in der Function $y = 4x - 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ für $x = +\infty$, $y\,(=\infty)$ ein absolutes Größtes, für $x = 0$, $y\,(= 0)$ ein absolutes Kleinstes.

Die Aufsuchung der Werthe, für welche eine Function ein absolutes $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{matrix}\right.$ wird, hat im Allgemeinen wenig Interesse, weshalb auch die Bestimmung dieser Werthe, — die übrigens meist keiner großen Schwierigkeit unterworfen ist, — weniger oft in der Analysis vorkommt.

2. Relative Größte und Kleinste. Denkt man sich aber den Fall, daß für einen bestimmten Werth der Veränderlichen der zugehörige Werth der Function so beschaffen ist, daß er $\left\{\begin{matrix}\text{größer}\\ \text{kleiner}\end{matrix}\right.$ ist, als die unmittelbar vorhergehenden und unmittelbar nachfolgenden Werthe der Function für etwas größere und etwas kleinere Werthe der Veränderlichen, — wie klein auch die Unterschiede der unabhängig-veränderlichen Größe genommen werden mögen, — so spricht man von einem relativen $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum.}\\ \text{Minimum.}\end{matrix}\right.$ *) Wenn z. B. der Veränderlichen x die Werthe a, $a + k$, $a - k$ (wo k eine sehr kleine Größe ist) beigelegt werden und die resultirenden resp. Werthe der gegebenen Function A, A', A'' so beschaffen sind, daß A zu gleicher Zeit größer als A' und A'', oder A zu gleicher Zeit kleiner als A' und A'' ist, so hat man im ersteren Falle ein rel. Größtes, im letztern ein rel. Kleinstes.

Für die Function $y = 4x - 2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4$ ist für $x = +2$, $y = A = +1{,}333333\ldots$ ein Minimum, indem für $x = 2 + \frac{1}{100}$, $y = A' = 1{,}333535\ldots$, und für $x = 2 - \frac{1}{100}$, $y = A'' = 1{,}333531\ldots$, mithin $A < \left\{\begin{matrix}A'\\ A''\end{matrix}\right.$ wird. Dagegen wird für $x = +1$, $y = A = 1{,}916666\ldots$ zum Maximum; denn für $x = 1 + \frac{1}{100}$, ist $y = A' = 1{,}916517\ldots$ für $x = 1 - \frac{1}{100}$, $y = A'' = 1{,}916515\ldots$, folglich $A > \left\{\begin{matrix}A'.\\ A''.\end{matrix}\right.$

*) Im Folgenden werden wir, wenn vom $\left\{\begin{matrix}\text{Größten}\\ \text{Kleinsten}\end{matrix}\right.$ überhaupt die Rede ist, immer nur ein relatives $\left\{\begin{matrix}\text{Größtes}\\ \text{Kleinstes}\end{matrix}\right.$ verstehen.

3. Anzahl der größten und kleinsten Werthe einer Function. Eine Function kann, wie aus dem obigen Beispiele erhellet, ein Maximum und Minimum zugleich haben; ja sie kann mehrere Maxima und mehrere Minima haben, weil es sich immer nur um das Verhalten der Werthe der Function zu ihren Nachbarwerthen handelt. So findet für unser Beispiel noch ein Minimum statt für $x = -2$. Ebenso sind in der Fig. 1. ab, cd, ef Maxima, $\alpha\beta$, $\gamma\delta$, $\varepsilon\zeta$ Minima, weil die Punkte $b, d, f\ldots$ höher, die Punkte β, δ, ζ tiefer als die Nachbarpunkte liegen, wenn man die Lage der Punkte $b, \beta, d, \delta, f, \zeta$ in Bezug auf die Gerade AB in Betracht zieht.

4. Eintheilung der Lehre vom Größten und Kleinsten. Die Lehre vom Größten und Kleinsten zerfällt in zwei Theile, welche von einander wohl zu trennen sind. Der erste Theil hat zum Gegenstande die Bestimmung der Größten und Kleinsten gewisser Functionen, deren Form gegeben ist, wie es im obigen Beispiele der Fall war. Der zweite Theil dagegen behandelt die umgekehrte Aufgabe, die Form zu bestimmen, welche einer Function zukommen muß, wenn dieselbe unter mehrern oder unendlich vielen Functionen, die eine gewisse Eigenschaft mit ihr gemeinschaftlich haben, diese in größter oder kleinster Quantität haben soll. Die Beantwortung dieser letztern Frage gehört zu den wichtigsten und feinsten, aber auch schwierigsten Problemen der höheren Analysis, und ist das Hauptgeschäft der sogenannten Variationsrechnung.

Die erste Aufgabe dagegen, Maxima und Minima gegebener Functionen aufzufinden, wird gewöhnlich durch Differential-Rechnung gelöst. Das im Folgenden mitgetheilte elementare Verfahren zur Bestimmung der Maxima und Minima der Form nach gegebener Functionen hat im Ganzen viel Aehnlichkeit mit dem Fermat'schen (Opp. math. Tolosae 1679). Jedoch erstreckt sich Fermat's Methode nur auf rationale, ganze Functionen mit einer Veränderlichen, läßt auch unentschieden, ob die gefundenen Werthe Maxima oder Minima sind und nimmt keine Rücksicht auf die Fälle, wo es unbestimmt bleibt, ob ein Maximum oder Minimum statt findet. Auch hat Fermat weder eine Erklärung, noch einen allgemeinen Beweis seiner Methode mitgetheilt, sondern begnügt sich, dieselbe in speciellen Anwendungen zu zeigen. Auch Schaffer's Versuch über das Maximum und Minimum („Geometrische Aufgaben." Oldenb. 1816) ist dem meinigen sehr verwandt. Die Bestimmung der größten und kleinsten Werthe ist nur bei Schaffer etwas umständlicher und die Beurtheilung derselben den Bedingungen eines Maximums und Minimums weniger entsprechend. Die ganze Untersuchung verbreitet sich auch nur auf Functionen mit einer Variablen.

5. Nutzen der Lehre vom Größten und Kleinsten. Die Theorie des Größten und Kleinsten ist überaus wichtig und lehrreich wegen der mannichfachen sehr schönen Untersuchungen, die man mit Hülfe derselben über viele rein-geometrische Gegenstände anstellen kann. Ich erwähne hier nur das isoperimetrische Problem, die Punkte kleinster Entfernung, die Punkte mittlerer Entfernung, wovon Beispiele weiter unten vorkommen werden. Von weit größerem Einfluß ist aber diese Theorie für die angewandte Mathematik, indem man durch dieselbe eine Menge für die Wissenschaft überhaupt und die Praxis insbesondere wichtiger Probleme zu lösen im Stande gewesen ist. Hierher gehört besonders das von Maupertuis (Essai de Cosmologie) zuerst aufgestellte und jetzt allgemein als Naturgesetz angenommene Princip der kleinsten Wirkung (Principe de la moindre quantité d'action): „die Natur bringe mit dem geringsten Aufwande von Kraft oder Mitteln überhaupt die größte Wirkung hervor." Nach diesem Principe ist nämlich bei der Bewe-

gung der Körper die Summe der Producte der Massen in die Geschwindigkeiten und in die von jedem Körper durchlaufenen Räume immer ein Kleinstes. Von diesem für die Physik höchst fruchtbaren Satze werden wir auch einige Anwendungen zur Erklärung gewisser Naturerscheinungen zu machen Gelegenheit nehmen. Nicht minder wichtig ist die von Gauß (Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium, Hamb. 1809. Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Comm. Soc. Reg. Gott. T. V. 1819—1822) aufgestellte Methode der kleinsten Quadrate, welcher man sich gegenwärtig fast allgemein bedient, um aus einer gewissen Zahl gemachter Beobachtungen ein allgemeines Gesetz herzuleiten, und, damit dasselbe der Wahrheit so nahe als möglich kommt, die Summe der Quadrate der Beobachtungsfehler zum Minimum macht. Auch andere Probleme (die Linie des schnellsten Falles, der Körper des geringsten Widerstandes, die Bestimmung des größten Effects beim Stoß fester und flüssiger Körper, der vortheilhaftesten Lage der Segel, der vortheilhaftesten Gestalt der Anker und dergl.) dürften wohl ebenfalls die Aufmerksamkeit auf sich ziehen.

Wegen des so sehr in die Augen fallenden Nutzens der Theorie des Größten und Kleinsten in allen Zweigen der Mathematik hat auch dieselbe die größten Mathematiker und Physiker beschäftigt und seit der Entdeckung der Fluxions- oder Differential-Rechnung sind auch so viele hiergehörige Fragen, auf welche die ältern Mathematiker nicht einmal gerathen konnten, geschweige daß sie dieselben hätten lösen können, aufgestellt, und meist mit großer Leichtigkeit beantwortet worden.

II. Analytische Methode zur Bestimmung und genauern Beurtheilung der größten und kleinsten Werthe einer Function mit einer Veränderlichen.

§. 4.

1. Bedingungen für ein Maximum oder Minimum. Es drücke die Function

$$y = A + A_1, + A_2\, x^2 + A_3\, x^3 + \ldots\ldots \times A_n\, x^n\ (\alpha),$$

in welcher die Constanten $A, A_1, A_2, A_3, \ldots . A_n$ beliebige, ganze oder gebrochene, positive oder negative, rationale oder irrationale Größen bedeuten, die Abhängigkeit der Veränderlichen y von der Veränderlichen x in ihrer ganzen Allgemeinheit aus. Gesetzt, es sei nun x ein solcher Werth, für welchen die gegebene Function (y) ein Größtes oder Kleinstes wird, so müssen, wenn man in die ursprüngliche Function (fonction primaire) anstatt x $(x+k)$, $(x-k)$ setzt, (wo k ebenfalls eine veränderliche, sehr kleine Größe bedeuten soll,) zwischen der Urfunction (y) und den durch Substitution von $x \pm k$ anstatt x aus y abgeleiteten Functionen (f. derivées) $\begin{cases} y' \\ y'' \end{cases}$ die Relationen statt finden

$$y > \begin{cases} y' \\ y'' \end{cases} \text{für ein Maximum,}$$

$$y < \begin{cases} y' \\ y'' \end{cases} \text{für ein Minimum.}$$

Substituirt man nun wirklich für x die obigen Werthe $x \pm k$ in die Function y, so hat man die beiden derivirten Functionen

$$y' = A + A_1\,(x+k) + A_2\,(x+k)^2 + A_3\,(x+k)^3 + \ldots + A_n\,(x+k)^n\ (\beta),$$
$$y'' = A + A_1\,(x-k) + A_2\,(x-k)^2 + A_3\,(x-k)^3 + \ldots + A_n\,(x-k)^n\ (\gamma).$$

Vergleicht man dieselben mit der ursprünglichen Function (y), so ersieht man sogleich, daß y' und y'' dem y immer näher rücken, je kleiner k angenommen wird. In dem Momente aber, wo k als verschwindend klein gedacht wird, gehen beide Ausdrücke (y', y'') in y selbst über. Dadurch erhalten wir zur Bestimmung des $\begin{cases}\text{Maximums}\\\text{Minimums}\end{cases}$ einer Function die gemeinschaftlichen Bedingungsgleichungen

$$1)\ y = \begin{cases}y'\\y''\end{cases},\quad 2)\ k = 0.$$

Durch Erfüllung dieser beiden Bedingungen lassen sich ein oder mehrere Werthe der Veränderlichen x, für welche die gegebene Function y zu einem $\begin{cases}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{cases}$ wird, bestimmen. Setzt man dann den gefundenen Werth von x in die gegebene Function, so erhält man dadurch den $\begin{cases}\text{größten}\\\text{kleinsten}\end{cases}$ Werth der Function selbst, wenn nämlich ein solcher möglich ist. (Ein imaginärer Ausdruck für x ist ein Zeichen, daß es für diesen Werth der Veränderlichen kein reelles $\begin{cases}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{cases}$ giebt. — Im Folgenden soll nur auf reelle $\begin{cases}\text{Maxima}\\\text{Minima}\end{cases}$ Rücksicht genommen werden.)

2. Bestimmung der Werthe, für welche ein Größtes oder Kleinstes statt findet. Werden die in den Gleichungen (β), (γ) nur angedeuteten Operationen mit Hülfe des Binomialtheorems wirklich ausgeführt und die Größen nach aufsteigenden Potenzen von k geordnet, so hat man

$$\begin{aligned}
y' &= A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n + (A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + nA_n x^{n-1})\, k \\
&\quad + \left(A_2 + 3A_3 x + \ldots \tfrac{+n.n-1}{1.2} A_n x^{n-2}\right) k^2 + \ldots \\
&= y + \mathfrak{A} k + \mathfrak{B} k^2 + \ldots . \\
y'' &= A + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \ldots + A_n x^n - (A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + nA_n x^{n-1})\, k \\
&\quad + \left(A_2 + 3A_3 x + \ldots \tfrac{+n.n-1}{1.2} A_n x^{n-2}\right) k^2 + \ldots \\
&= y - \mathfrak{A} k + \mathfrak{B} k^2 + \ldots .
\end{aligned}$$

indem man für $A + A_1 x + A_2 x^2 \ldots + A_n x^n$ seinen Werth y und der Kürze wegen $A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 \ldots + nA_n x^{n-1} = \mathfrak{B}_I$, $A_2 + 3A_3 x \ldots + \frac{n.n.1}{1.2} A_n x^{n-2} = \mathfrak{B}$ setzt. Höhere Potenzen als k^2 hat man gewöhnlich nicht zu entwickeln nöthig, wie man weiter unten sehen wird.

Wird nun den ersten Bedingungen eines $\begin{cases}\text{Maximums}\\\text{Minimums}\end{cases}$ gemäß $y = y'$, $y = y''$ gesetzt, so erhält man

$$y = y + \mathfrak{A} k + \mathfrak{B} k^2 + \ldots, \text{ oder } 0 = \mathfrak{A} k + \mathfrak{B} k^2 + \ldots = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} k + \ldots,$$
$$y - y - \mathfrak{A} k + \mathfrak{B} k^2 - \ldots, \text{ oder } 0 = -\mathfrak{A} k + \mathfrak{B} k^2 - \ldots = -\mathfrak{A} + \mathfrak{B} k - \ldots,$$

indem beide Gleichungen durch den allen Gliedern gemeinschaftlichen Factor k dividirt werden. Führt man der zweiten Bedingung des $\begin{cases}\text{Maximums}\\\text{Minimums}\end{cases}$ zu Folge $k = 0$ in diese beiden Gleichungen ein, so findet man, da alle in k, $k^2 \ldots$ multiplicirten Gleichungen verschwinden,

$$0 = \mathfrak{A} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + nA_n x^{n-1}$$

als Finalgleichung zur Bestimmung von x, für welches die Function zum $\begin{cases}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{cases}$ wird. Diese

Gleichung ist vom $(n-1)$ten Grade, hat mithin im Allgemeinen $(n-1)$ Wurzeln, welche entweder sämmtlich, oder nur zum Theil, oder gar nicht der Aufgabe genügen können. Da die zweite Gleichung $0 = -\mathfrak{A}$ mit der Gleichung $0 = +\mathfrak{A}$ identisch ist, so erhellet, daß die Entwickelung von y' allein hinreichend ist.

Beispiele.

1) $y = \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + 10 = M$ (Maximum oder Minimum)

$y' = \frac{4}{3}(x+k)^3 + \frac{7}{2}(x+k)^2 - 2(x+k) + 10 = \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + 10 + (4x^2 + 7x - 2)k + (4x + \frac{7}{2})k^2 + \frac{4}{3}k^3$. Setzt man $y = y'$, so ist

$\frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + 10 = \frac{4}{3}x^3 + \frac{7}{2}x^2 - 2x + 10 + (4x^2 + 7x - 2)k + (4x + \frac{7}{2})k^2 + \frac{4}{3}k^3$, oder

$$0 = (4x^2 + 7x - 2)k + (4x + \tfrac{7}{2})k^2 + \tfrac{4}{3}k^3 = 4x^2 + 7x - 2 + (4x + \tfrac{7}{2})k + \tfrac{4}{3}k^2.$$

Wird nun $k = 0$ gesetzt, so erhält man $0 = 4x^2 + 7x - 2$, $x = \begin{cases} +\frac{1}{4} \\ -2 \end{cases}$. Diese Werthe in die Function selbst gesetzt, geben $y = A = \begin{cases} +9\frac{39}{32} \\ +17\frac{1}{3} \end{cases}$, entweder zwei Maxima, oder zwei Minima, oder ein Maximum und ein Minimum, oder vielleicht weder ein Maximum, noch ein Minimum.

2) $y = x^4 - 2x^2 + 10$, $y' = (x+k)^4 - 2(x+k)^2 + 10 = (x^4 - 2x^2 + 10) + (4x^3 - 4x)k + (6x^2 - 2)k^2 + + \ldots$; mithin, wenn $y = y'$ gesetzt und reducirt wird, $0 = (4x^3 - 4x) + (6x^2 - 2)k + \ldots$ Wird nun $k = 0$ angenommen, so ist $0 = 4x^3 - 4x$, mithin

$$x = \begin{cases} 0 \\ +1 \\ -1 \end{cases},\ y = A = \begin{cases} +10 \\ +\ 9 \\ +\ 9 \end{cases}.$$

3) $y = x + \sqrt{2 - x^2}$, $y' = x + k + \sqrt{2 - (x+k)^2} = x + k + \sqrt{2 - x^2 - 2kx - k^2}$

$$= x + k + (2-x^2)^{\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}(2-x^2)^{-\frac{1}{2}}(2xk + k^2) - \tfrac{1}{8}(2-x^2)^{-\frac{3}{2}}.\ (2xk + k^2)^2 \ldots =$$

$$x + k + (2-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{xk}{(2-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{\frac{1}{2}k^2}{(2-x^2)^{\frac{1}{2}}} - \tfrac{1}{8}.\frac{(4x^2k^2 + ..)}{(2-x^2)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$x + \sqrt{2-x^2} + \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\right)k - \left(\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}} + \frac{x^2}{2(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}\right)k^2 + \ldots$$

Daher ist auch

$$x + \sqrt{2-x^2} = x + \sqrt{2-x^2} + \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\right)k - \left(\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}} + \frac{x^2}{2(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}\right)k^2 + \ldots$$

oder

$$0 = \left(1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}\right)k - \left(\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}} + \frac{x^2}{2(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}\right)k^2 + \ldots =$$

$$1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} \quad - \left(\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}} + \frac{x^2}{2(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}\right)k + \ldots$$

Soll nun $k = 0$ sein, so muß $1 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}} = 0$, mithin $x = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$, $y = A = \begin{cases} +2 \\ \ 0 \end{cases}$.

3. **Kriterium für ein Maximum oder Minimum.** Die Entscheidung der Frage, ob die gegebene Function für einen gefundenen reellen Werth der Veränderlichen x ein Maximum oder ein Minimum, oder keins von beiden werde, ist zwar an und für sich leicht, aber die Rechnung fällt oft weitläuftiger und beschwerlicher aus, als die Lösung der eigentlichen Aufgabe selbst

2

In §. 4, 1 fanden wir, daß für ein Maximum $y > \frac{y'}{y''}$, für ein Minimum $y < \frac{y'}{y''}$ sein müsse. Aus diesen beiden Ungleichungen erhält man durch Transposition für ein Maximum $0 > \frac{y'-y}{y''-y}$, für ein Minimum $0 < \frac{y'-y}{y''-y}$. Tragen wir diese Ausdrücke in eine andere Sprache über, so muß für ein Maximum $\left\{\begin{matrix} y'-y \\ y''-y \end{matrix}\right.$ negativ, für ein Minimum $\left\{\begin{matrix} y'-y \\ y''-y \end{matrix}\right.$ positiv sein. Da nun

$$y' = y + \mathfrak{A}k + \mathfrak{B}k^2 + \ldots,$$
$$y'' = y - \mathfrak{A}k + \mathfrak{B}k^2 + \ldots,$$

so ist

$$y' - y = \quad \mathfrak{A}k + \mathfrak{B}k^2 + \ldots = + \mathfrak{B}k^2 + \ldots$$
$$y'' - y = - \mathfrak{A}k + \mathfrak{B}k \; - \ldots = + \mathfrak{B}k^2 - \ldots,$$

indem zur Bestimmung der Werthe von x, für welche y ein $\left\{\begin{matrix} \text{Größtes} \\ \text{Kleinstes} \end{matrix}\right.$ werden sollte, $\mathfrak{A} = 0$ gesetzt wurde (§. 4, 2). Wird nun k unendlich klein angenommen, so verschwinden die höhern Potenzen von k gegen k^2 (§. 2, 5) und da k^2 $(=(+k)^2=(-k)^2)$ stets positiv ist, so kömmt es mithin nur auf die Beschaffenheit des Coefficienten von k^2 ($\mathfrak{B}$) an, ob ein Maximum oder Minimum statt findet. Setzt man nämlich den aus $\mathfrak{A} = A_1 + 2A_2 x + 3A_3 x^2 + \ldots + nA_n x^{n-1} = 0$ für x gefundenen Werth in $\mathfrak{B} = A_2 + 3A_3 x + \ldots + \frac{n.n-1}{1.2} A_n x^{n-2}$ und der resultirende Ausdruck ist $\left\{\begin{matrix} \text{negativ} \\ \text{positiv} \end{matrix}\right.$, so ist dieß ein Zeichen, daß für den gefundenen Werth von x ein $\left\{\begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix}\right.$ statt finde.

Da $y'-y$ mit $y''-y$ identisch wird, so ist es auch zur Beurtheilung des $\left\{\begin{matrix} \text{Maximums} \\ \text{Minimums} \end{matrix}\right.$ hinreichend, $y'-y$ zu untersuchen.

Für Beispiel (1) ist $\mathfrak{B} = 4x + \frac{7}{2} = \left\{\begin{matrix} +4\frac{1}{2},\ x = \frac{1}{4} \\ -4\frac{1}{2},\ x = -2 \end{matrix}\right\}$.

Der erstere Werth deutet auf ein Minimum, der letztere auf ein Maximum.

Für Beispiel (2) ist $\mathfrak{B} = 6x^2 - 2 = \left\{\begin{matrix} -2,\ x = 0 \\ +4,\ x = +1 \\ +4,\ x = -1 \end{matrix}\right\}$, $\begin{matrix} \text{Maximum.} \\ \text{Minimum.} \\ \text{Minimum.} \end{matrix}$

Für Beispiel (3) ist $\mathfrak{B} = -\left(\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}} + \frac{x^2}{2(2-x^2)\sqrt{2-x^2}}\right) =$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2-x^2}}\left\{1\frac{+x^2}{2-x^2}\right\} = -\frac{1}{(2-x^2)\sqrt{2-x^2}} = -1,\ x = \pm 1,\ \text{Maximum.}$$

Tritt der Fall ein, daß auch $\mathfrak{B}$ nach Substitution des aus $\mathfrak{A} = 0$ entwickelten Werthes von x $\frac{0}{0}$, ∞, 0 wird, dann ist dieß entweder ein Zeichen, daß gar kein $\left\{\begin{matrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{matrix}\right.$ statt findet, oder man muß auch den Coefficienten von k^3 ($\mathfrak{C}$) $= 0$ setzen, aus dieser Gleichung x bestimmen, den erhaltenen Werth für x in den Coefficienten von k^4 ($\mathfrak{D}$) einführen. Ist das Resultat $\left\{\begin{matrix} \text{positiv} \\ \text{negativ} \end{matrix}\right.$, so ist dies ein Zeichen, daß ein $\left\{\begin{matrix} \text{Minimum} \\ \text{Maximum} \end{matrix}\right.$ existire, u. s. f.

4. Die Resultate der vorhergehenden Untersuchungen lassen sich der bequemern Uebersicht wegen und zum leichtern Festhalten in folgende wenige Sätze zusammendrängen:

1) Man entwickele aus der gegebenen Function (y), deren $\left\{\begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix}\right.$ bestimmt werden soll, eine andere (y'), indem man überall statt x $(x+k)$ setzt. Ist die Function nicht unmittelbar ge-

geben, sondern die Veränderlichen in Form einer Aufgabe mit einander verbunden, so suche man zunächst eine Gleichung zwischen der unabhängigen und abhängigen Veränderlichen zu entwickeln.

2) Man führe die nur angedeuteten Operationen des Potenzirens wirklich aus und ordne die Größen nach aufsteigenden Potenzen von k.

3) Den Coefficienten von k setze man gleich Null, (weil die Größen, welche k nicht zum Factor haben und die, welche in k^2, k^3 ... multiplicirt sind, wegfallen) und entwickle aus dieser Gleichung einen oder alle Werthe von x, welche die Function zum $\begin{cases}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{cases}$ machen werden.

4) Durch Substitution dieser für x erhaltenen Werthe in den Coefficienten von k^2 ersieht man, ob ein $\begin{cases}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{cases}$ vorhanden ist, wenn nämlich der resultirende Werth $\begin{cases}\text{negativ}\\\text{positiv}\end{cases}$ ist. Ist dieser Werth $\frac{0}{0}$, ∞, 0, so hat man noch die Coefficienten von k^3 zu entwickeln, gleich Null zu setzen, aus dieser letzten Gleichung x zu bestimmen, und dann den Coefficienten von k^4 zu untersuchen, ob derselbe $\mp$ sei.

III. Bestimmung und Beurtheilung der größten und kleinsten Werthe einer Function mit zwei Veränderlichen.

1. Bedingungen für ein Größtes oder Kleinstes. Es ist nicht schwierig, aber meist etwas weitläuftig, die bisherigen Untersuchungen über Größte und Kleinste der Functionen mit einer Veränderlichen auf Functionen mit zwei Veränderlichen auszudehnen. Es sei u eine Function zweier Veränderlichen (x, y) von der Form

$$u = A + A_1\, x + A_2\, y + A_3\, x^2 + A_4\, xy + A_5\, y^2 + \ldots.$$

indem A, A_1, A_2 .... beliebige Constante bezeichnen. Seien nun x, y solche Werthe, für welche u zu einem $\begin{cases}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{cases}$ wird, so muß, wenn für x und y der Reihe nach

$$\begin{array}{l} x + k,\; y + h \\ x + k,\; y - h \\ x - k,\; y - h \\ x - k,\; y + h \end{array}$$

gesetzt wird, zwischen der Urfunction (u) und den durch Substitution dieser Werthe hervorgehenden Functionen u', u'', u''', u'''' die Relationen statt finden, daß

$$\text{für ein Maximum } u > \begin{cases} u' \\ u'' \\ u''' \\ u'''' \end{cases},$$

$$\text{für ein Minimum } u < \begin{cases} u' \\ u'' \\ u''' \\ u'''' \end{cases} \text{ ist.}$$

2. **Bestimmungen der größten oder kleinsten Werthe.** Es ist

$$u' = A + A_1(x+k) + A_2(y+h) + A_3(x+k)^2 + A_4(x+k)(y+h) + A_5(y+h)^2 + \ldots.$$
$$= A + A_1 x + A_2 y + A_3 x^2 + A_4 xy + A_5 y^2 + (A_1 + 2A_3 x + A_4 y) k$$
$$+ (A_2 + A_4 x + 2A_5 y) h + (A_3 k^2 + A_4 kh + A_5 h^2) + \ldots.$$
$$= u + \mathfrak{A}k + \mathfrak{B}h + (A_3 k^2 + A_4 kh + A_5 h^2) + \ldots$$

Wenn man für $A + A_1 x + A_2 y + A_3 x^2 + A_4 xy + A_5 y^2$ seinen Werth u und der Kürze wegen $A_1 + 2A_3 x + A_4 y = \mathfrak{A}$, $A_2 + A_4 x + 2A_5 y = \mathfrak{B}$ setzt.

Auf gleiche Weise erhält man

$$u'' = u + \mathfrak{A}k - \mathfrak{B}h + (A_3 k^2 - A_4 kh + A_5 h^2) + \ldots.$$
$$u''' = u - \mathfrak{A}k - \mathfrak{B}h + (A_3 k^2 + A_4 kh + A_5 h^2) + \ldots.$$
$$u'''' = u - \mathfrak{A}k + \mathfrak{B}h + (A_3 k^2 - A_4 kh + A_5 h^2) + \ldots.$$

Analog den obigen Bedingungen (§. 4, 1) muß im Falle eines $\left\{\begin{array}{l}\text{Maximums}\\ \text{Minimums}\end{array}\right.$

$$1)\quad u = \left\{\begin{array}{l} u' \\ u'' \\ u''' \\ u'''' \end{array}\right. \qquad 2)\quad \begin{array}{l} k = 0, \\ h = 0. \end{array}$$

Wird zunächst die erste Bedingung erfüllt, so erhält man nach geschehener Reduction

$$0 = + \mathfrak{A}k + \mathfrak{B}h + (A_3 k^2 + A_4 kh + A_5 h^2) + \ldots.$$
$$0 = + \mathfrak{A}k - \mathfrak{B}h + (A_3 k^2 - A_4 kh + A_5 h^2) + \ldots.$$
$$0 = - \mathfrak{A}k - \mathfrak{B}h + (A_3 k^2 + A_4 kh + A_5 h^2) + \ldots.$$
$$0 = - \mathfrak{A}k + \mathfrak{B}h + (A_3 k^2 - A_4 kh + A_5 h^2) + \ldots.$$

Setzt man nun $h = 0$, dividirt die übrigen Größen durch k und macht alsdann auch $k = 0$, so erhält man $\mathfrak{A} = 0$; nimmt man aber zunächst $k = 0$ an, dividirt hierauf durch h und annullirt h, so erhält man $\mathfrak{B} = 0$. Diese beiden Gleichungen

$$\mathfrak{A} = A_1 + 2A_3 x + A_4 y = 0$$
$$\mathfrak{B} = A_2 + A_4 x + 2A_5 y = 0$$

dienen zur Bestimmung der Werthe von x und y, für welche die gegebene Function zum $\left\{\begin{array}{l}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{array}\right.$ wird.

Da alle vier Gleichungen auf dasselbe Resultat führen, so hat man nur nöthig u' zu entwickeln.

Beispiele.

1) $u = x^2 + y^2 + xy + 72y$. $u' = (x+k)^2 + (y+h)^2 + (x+k)(y+h) + 72(y+h) = x^2 + y^2 + xy + 72y + (2x+y)k + (2y+x+72)h + (k^2 + kh + h^2)$. Hier ist $\mathfrak{A} = 2x + y = 0$, $\mathfrak{B} = 2y + x + 72 = 0$, woraus man für ein $\left\{\begin{array}{l}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{array}\right.$ $x = 24$, $y = -48$ erhält. $u = 24^2 + 48^2 - 24.\ 48 - 24.\ 48 = +576$.

2) $2x^2 + 3y^3 - 4x - 16y - 8 = u$, $u' = 2(x+k)^2 + 3(y+h)^3 - 4(x+k) - 16(y+h) - 8 = 2x^2 + 3y^3 - 4x - 16y - 8 + (4x-4)k + (9y^2 - 16)h + (k^2 + 9yh^2) + \ldots\ldots$ Mithin $\mathfrak{A} = 4x - 4 = 0$, $\mathfrak{B} = 9y^2 - 16 = 0$, woraus $x = +1$, $y = \pm\frac{4}{3}$ gefunden wird. $u = -24\frac{2}{3}$, oder $= 4\frac{2}{3}$.

3) $u = x + y^2 - \sqrt{x+y}$. $u' = (x+k) + (y+h)^2 - \sqrt{x+k+y+h} = x + k + y^2 + 2yh + h^2 - ((x+y) + (k+h))^{\frac{1}{2}} = x + k + y^2 + 2yh + h^2 - (x+y)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(x+y)^{-\frac{1}{2}}(k+h) + \frac{1}{8}(x+y)^{-\frac{3}{2}} \cdot (k+h)^2 + \ldots\ldots$

$= x + y^2 - \sqrt{x+y} + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right) k + \left(2y - \frac{1}{2\sqrt{x+y}}\right) h + \left\{ + \frac{k^2}{8(x+y)^{\frac{3}{2}}} + \frac{kh}{4(x+y)^{\frac{3}{2}}} + \left(1 + \frac{1}{8(x+y)^{\frac{3}{2}}}\right) h^2 \right\} + \ldots.$ Folglich $\mathfrak{A} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x+y}} = 0$, $\mathfrak{B} = 2y - \frac{1}{2\sqrt{x+y}} = 0$, $x = -\frac{1}{4}$, $y = +\frac{1}{2}$; $u = -\frac{1}{4}$.

3. Beurtheilung der gefundenen Werthe. Um zu bestimmen, ob die entwickelten Werthe einem Maximum oder Minimum entsprechen, muß, indem man u transponirt,

$$\left.\begin{array}{l} u' - u \\ u'' - u \\ u''' - u \\ u'''' - u \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{negativ für ein Maximum,} \\ \text{positiv für ein Minimum sein,} \end{array}$$

$$\text{oder } \left\{\begin{array}{l} A_3 k^2 + A_4 kh + A_5 h^2 \\ A_3 k^2 - A_4 kh + A_5 h^2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{negativ für ein Maximum,} \\ \text{positiv für ein Minimum,} \end{array}$$

weil $\mathfrak{A} = 0$, $\mathfrak{B} = 0$, und $u''' - u$ mit $u' - u$, $u'''' - u$ mit $u'' - u$ identisch ist.

Statt der letztern beiden Bedingungen kann man auch die Bedingung stellen, daß keiner von jenen beiden Ausdrücken $= 0$ sein dürfe. Dies findet aber nur dann statt, wenn beide quadratische Gleichungen keine reellen Wurzeln haben. Setzt man nun

$$A_3 k^2 + A_4 kh + A_5 h^2 = 0,$$
$$A_3 k^2 - A_4 kh + A_5 h^2 = 0,$$

so findet man, wenn man diese quadratischen Gleichungen auflöst

$$k + \frac{A_4}{2A_3} h = \pm \sqrt{\left(\frac{A_4}{2A_3}\right)^2 - \frac{A_5}{A_3}},$$
$$k - \frac{A_4}{2A_3} h = \pm \sqrt{\left(\frac{A_4}{2A_3}\right)^2 - \frac{A_5}{A_3}}.$$

Damit also beide Gleichungen keine reellen Wurzeln haben, muß $\left(\frac{A_4}{2A_3}\right)^2 - \frac{A_5}{A_3}$ negativ oder < 0 sein. Dann ist $\left(\frac{A_4}{2A_3}\right)^2 < \frac{A_5}{A_3}$, oder $A_4{}^2 < 4 A_3 A_5$. Da nun $A_4{}^2$ stets positiv ist, so müssen A_3 und A_5 gleichnamig (d. i. beide positiv oder beide negativ) sein.

$$\text{Da } \left.\begin{array}{l} A_3 k^2 + A_4 kh + A_5 h^2 \\ A_3 k^2 - A_4 kh + A_5 h^2 \end{array}\right\} \text{zusammen } \begin{array}{l} < 0 \text{ für ein Maximum,} \\ > 0 \text{ für ein Minimum} \end{array}$$

sind, so muß auch

$$2 A_3 k^2 + 2 A_5 h^2 \left\{\begin{array}{l} < 0 \text{ für ein Maximum} \\ > 0 \text{ für ein Minimum} \end{array}\right. \text{sein.}$$

k^2 und h^2 sind stets positiv; sind mithin

$$A_3 \text{ und } A_5 \left\{\begin{array}{l} \text{negativ,} \\ \text{positiv,} \end{array}\right. \text{ so findet ein } \left\{\begin{array}{l} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array}\right. \text{statt.}$$

Für Beispiel (1) ist $A_3 = 1$, $A_4 = 1$, $A_5 = 1$, mithin $A_4{}^2 < 4 \,.\, A_3 \,.\, A_5$, und da A_3 und A_5 positiv sind, so existirt in diesem Falle ein Minimum.

(2) $A_3=1$, $A_4=o$, $A_5=\pm 12$. Hier gilt nur der positive Werth von A_5; da $A_4^2 < 4 . A_3 . A_5$, so haben wir hier ein Minimum.

(3) $A_3=1$, $A_4=2$, $A_5=2$. Da $A_4^2 < 4 . A_3 . A_5$, A_3 und A_5 positiv sind, so findet hier ebenfalls ein Minimum statt.

4. Fassen wir wieder das Vorhergehende zusammen, so haben wir zur Bestimmung der $\left\{\begin{array}{l}\text{Maxima}\\ \text{Minima}\end{array}\right.$ von Functionen mit zwei Veränderlichen folgende Regeln zu beachten:

1) Man setze in die gegebene Function anstatt x $x+k$, anstatt y $y+h$; entwickele die angedeuteten Operationen und ordne die Größen nach Potenzen von $k, h, k^2, kh, h^2 \ldots$.
2) Setze hierauf die Coefficienten von k und h einzeln gleich Null und bestimme aus diesen beiden Gleichungen x und y.
3) Im Falle eines $\left\{\begin{array}{l}\text{Maximums}\\ \text{Minimums}\end{array}\right.$ müssen a) die Coefficienten von k^2 und h^2 gleichnamig, b) das vierfache Product dieser Coefficienten größer, als das Quadrat des Coefficienten von kh sein.
4) Sind die Coefficienten von k^2 und h^2 zusammen $\left\{\begin{array}{l}\text{negativ}\\ \text{positiv}\end{array}\right.$, so hat man ein $\left\{\begin{array}{l}\text{Maximum}\\ \text{Minimum}\end{array}\right.$.

Das Verfahren für Functionen mit mehr als zwei Veränderlichen ist diesem analog.

IV. Anwendung der Lehre vom Größten und Kleinsten auf verschiedene mathematische und physikalische Probleme.

Alle mathematischen Theorien haben für den Anfänger etwas Abschreckendes und zeigen sich ihm als etwas Unnützes, Todtes, so lange er nicht den unmittelbaren Nutzen ersieht. Erst die Anwendung auf wirkliche Dinge bringt für ihn Leben und Bedeutung in die Sache und verleiht dem behandelten Gegenstande ein höheres Interesse. Es folgen daher noch einige Uebungsaufgaben, theils um die vorgetragenen Lehren durch Beispiele zu erläutern, theils um die Wichtigkeit der Lehre vom Größten und Kleinsten zu zeigen, indem wir sie zur Entwickelung einiger interessanten Lehren benutzen.

Aufgabe 1.

1. Ein Körper soll sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit von einem Orte (A) nach einem andern (B) hinbewegen, so daß er eine Gerade (MN) berührt. In welchem Punkte (F) muß er diese treffen, damit der durchlaufene Weg ($AF+FB$) ein Minimum werde?

A. Es sei (Fig. 2.) $AC\ (\perp MN)=a$, $BD\ (\perp MN)=b$, $CD=c$, $CF=x$, so ist $AF=\sqrt{a^2+x^2}$, $BF=\sqrt{b^2+(c-x)^2}$, mithin muß $y=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}=Min.$ Es ist $y'=(a^2+(x+k)^2)^{\frac12}+(b^2+(c-x-k)^2)^{\frac12}=(a^2+x^2+2xk+k^2)^{\frac12}+(b^2+(c-x)^2-2(c-x).k+k^2)^{\frac12}=(a^2+x^2)^{\frac12}+\frac12(a^2+x^2)^{-\frac12}.(2xk+k^2)-\frac18(a^2+x^2)^{-\frac32}(2xk+k^2)^2+\ldots+(b^2+(c-x)^2)^{\frac12}+\frac12(b^2+(c-x)^2)^{-\frac12}.(-2(c-x)k+k^2)-\frac18(b^2+(c-x)^2)^{-\frac32}.(-2(c-x)k+k^2)^2+\ldots$
$=(a^2+k^2)^{\frac12}+(b^2+(c-k)^2)^{\frac12}+(a^2+x^2)^{-\frac12}xk+\frac12(a^2+x^2)^{-\frac12}.k^2-\frac12(a^2+k^2)^{-\frac32}x^2k^2+\ldots$
$-(b^2+(c-x)^2)^{-\frac12}.(c-x)k+\frac12(b^2+(c-x)^2)^{-\frac12}.k^2-\frac12(b^2+(c-x)^2)^{-\frac32}.(c-x)^2k^2+\ldots\ldots$

$$=\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+(c-x)^2}+\left(\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\right)k+\frac12\left\{\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}-\frac{x^2}{(a^2+x^2).\sqrt{a^2+x^2}}+\frac{1}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}-\frac{(c-x)^2}{(b^2+(c-x)^2)\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\right\}k^2+\ldots$$

Den Bedingungen des Minimums gemäß muß $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = 0$, $x = \frac{ac}{a+b}$ (Geht der Weg von A über B nach MN, so ist $x = \frac{ac}{a-b}$). Daß dieser Werth ein Minimum ist, ersieht man unmittelbar aus dem Coefficienten von k^2. Dieser ist $= \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\left\{1 - \frac{x^2}{a^2+x^2}\right\} + \frac{1}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\left\{1 - \frac{(c-x)^2}{b^2+(c-x)^2}\right\} = \frac{a^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{b^2}{(b^2+(c-x)^2)^{\frac{3}{2}}}$, mithin stets positiv. Das Minimum selbst ist $= \sqrt{a^2 + \frac{a^2c^2}{(a+b)^2}} + \sqrt{b^2 + \frac{b^2c^2}{(a+b)^2}} = \sqrt{(a+b)^2 + c^2} =$ der Hypotenuse eines rechtwinkligen Δ, dessen Katheten $(a+b)$ und c sind.

Anm. 1. Da $\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{CF}{AF} = \cos\alpha$; $\frac{c-x}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} = \frac{FD}{FB} = \cos\beta$, so muß auch $\cos\alpha = \cos\beta$, $\alpha = \beta$ sein. Hierdurch ergiebt sich eine leichte geometrische Construction CG ($\perp MN$) $= AC$, G und B durch eine Gerade verbunden, so ist $\alpha = \gamma = \beta$.

Anm. 2. Diese Aufgabe hat auch noch besonderes Interesse, weil sie ein specieller Fall des Princips der kleinsten Wirkung ist. Für unsern Fall ist nämlich Masse und Geschwindigkeit des sich bewegenden Körpers immer dieselbe, mithin muß allein der durchlaufene Raum ein Minimum sein. So wandte zuerst Maupertuis (Mém. de Paris. 1744.) diesen Satz auf seine Untersuchungen über regelmäßige Reflexion des Lichtes an und fand, wie es auch die Erfahrung bestätigt, daß „der Einfallswinkel = dem Reflexionswinkel" sein müsse.

2. Wäre die Aufgabe gestellt, daß $y = m.AF + nFB = \text{Min.}$ (Fig. 3) sei, wo m und n beliebige Constante sind, so erhält man mit Beibehaltung der frühern Bestimmungen

$$y = m\sqrt{a^2+x^2} + n\sqrt{b^2+(c-x)^2} = \text{Min. } y' = m\sqrt{{}^2a+x^2} + n\sqrt{b^2+(c-x)^2} + \left(\frac{mx}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{n(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}\right)k + \tfrac{1}{2}\left(\frac{m}{\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{mx^2}{\sqrt{(a^2+x^2)^3}} + \frac{n}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}} - \frac{n(c-x)^2}{\sqrt{(b^2+c-x^2)^3}}\right)k^2 + \ldots$$

Für ein Minimum muß $\frac{mx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{n(c-x)}{\sqrt{b^2+(c-x)^2}}$, d. i. $m\cos\alpha = n\cos\beta$, oder $\cos\alpha : \cos\beta = n : m = \frac{1}{m} : \frac{1}{n}$; wofür man auch, da $\cos\alpha = \sin\alpha'$, $\cos\beta = \sin\beta'$, $\sin\alpha' : \sin\beta' = \frac{1}{m} : \frac{1}{n}$ setzen kann.

Anm. Auch diese Aufgabe ist deshalb höchst interessant, weil sie das merkwürdige Gesetz der regelmäßigen Refraction des Lichtes enthält, daß „der Sinus des Einfallswinkels (α') zum Sinus des Brechungswinkels (β') für einerlei Materie in constantem Verhältniß $\left(\frac{1}{m} : \frac{1}{n}\right)$ stehe." Maupertuis (Mém. de Berlin. 1746) erwies diesen Satz, den schon Willebrord Snellius (+ 1616) nur in andrer Form und ohne Beweis aufgestellt hatte, vermittelst des Princips der kleinsten Wirkung, indem m die Geschwindigkeit des Lichtes in dem einen Mittel, und n die Geschwindigkeit in dem andern Mittel bezeichnet. Aus demselben Principe leitete auf ähnliche Weis[e] auch Laplace (Mém. de l'Inst. de France X. p. 300) die Erscheinung der doppelten Brechung h[er]

Aufgabe 2.

Aus einem cylindrischen Blocke einen vierkantigen Balken von größtmöglichster relativer Festigkeit zu schneiden.

A. $ABCD$ (Fig. 4.) stelle den senkrechten Querdurchschnitt des cylindrischen und vierseitigen Blocks dar. Sei der Durchmesser des Kreises $BD = 2r$, die untere Kante des Balkens $AB = x$, die Seitenkante $AD = y$, so muß, da nach dem Gesetze der Statik „die relativen Festigkeiten der Bauhölzer bei derselben Länge sich wie die Producte der Breite in das Höhenquadrat verhalten," $z = xy^2$ ein Maximum werden. Nun ist $x^2 + y^2 = 4r^2$, mithin $y^2 = 4r^2 - x^2$, also $z = x(4r^2 - x^2) = 4r^2x - x^3 = \text{Max.}$ Es ist $z' = 4r^2(x+k) - (x+k)^3 = 4r^2x + 4r^2k - x^3 - 3x^2k - 3xk^2 - k^3 = 4r^2x - x^3 + (4r^2 - 3x^2)k + (-3x)k^2 \ldots$ Für ein Maximum ist $4r^2 - 3x^2 = 0$, $x = 2r\sqrt{\tfrac{1}{3}}$, $y = \sqrt{4r^2 - \tfrac{4r^2}{3}} = 2r\sqrt{\tfrac{2}{3}}$, also $x : y = 1 : \sqrt{2}$, $x^2 : y^2 = 1 : 2$. Die gefundenen Werthe entsprechen einem Maximum, weil $(-3x)$ stets negativ ist.

Anm. Macht man $BE = \tfrac{2}{3}r$, $AE \perp BD$, und zieht AB, AD, so ist $AB = x$, $AD = y$. Denn $AE^2 = ED \,.\, EB = \tfrac{4}{3}r \cdot \tfrac{2}{3}r = \tfrac{8}{9}r^2$, $AB^2 = AE^2 + EB^2 = \tfrac{8}{9}r^2 + \tfrac{4}{9}r^2 = \tfrac{4}{3}r^2$, mithin $AB = 2r\sqrt{\tfrac{1}{3}}$; $AD^2 = DE^2 + AE^2 = \tfrac{16}{9}r^2 + \tfrac{8}{9}r^2 = \tfrac{8}{3}r^2$, $AD = 2r\sqrt{\tfrac{2}{3}}$.

Aufgabe 3.

1. Die Dimensionen eines Cylinders von gegebenem Inhalte (a^3) zu bestimmen, dessen Gesammtoberfläche ein Kleinstes ist.

A. Es sei (Fig. 5.) der Radius der Basis $DF = x$, die Höhe des Cylinders $Ad = y$, so ist der Inhalt des Cylinders $\pi x^2 y = a^3$, der Inhalt der obern und untern Basis $= \pi x^2$, der Inhalt des Cylindermantels $= 2\pi xy$. Mithin muß $z = 2\pi x^2 + 2\pi xy = \text{Min.}$ Da nun $y = \frac{a^3}{\pi x^2}$, so ist $z = 2\pi x^2 + \frac{2a^3}{x} = \text{Min.}$ Nun ist $z = 2\pi(x+k)^2 + 2a^3(x+k)^{-1} = 2\pi x^2 + 4\pi xk + 2\pi k^2 + 2a^3(x^{-1} - x^{-2}k + x^{-3}k^2 + \ldots) = 2\pi x^2 + \frac{2a^3}{x} + \left(4\pi x - \frac{2a^3}{x^2}\right)k + \left(2\pi + \frac{2a^3}{x^3}\right) . k^2 + \ldots$ Für unsere Aufgabe muß $4\pi x - \frac{2a^3}{x^2} = 0$, $x = a\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$, $y = \frac{a^3}{\pi \,.\, a^2 \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}}} = \frac{a}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}} = a\sqrt[3]{\frac{4}{\pi}}$, $x : y = 1 : 2$, $y = 2x$ (d. i. die Höhe dem Durchmesser gleich). Das Minimum selbst $= 2\pi a^2 \sqrt[3]{\frac{1}{4\pi^2}} + \frac{2a^3}{a\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}} = a^2\sqrt[3]{2\pi} + 2a^2\sqrt[3]{2\pi} = 3a^2\sqrt[3]{2\pi}$. Daß der gefundene Werth ein Minimum ist, erhellet, weil $\left(2\pi + \frac{2a^3}{x^3}\right)$ positiv ist.

2. Soll der Cylindermantel und die Basis ein Minimum werden, so muß $z = x^2\pi + 2xy\pi = x^2\pi + \frac{2a^3}{x} = \text{Min.}$ $z' = (x+k)^2\pi + 2a^3(x+k)^{-1} = x^2\pi + \frac{2a^3}{x} + \left(2\pi x - \frac{2a^3}{x^2}\right)k + \left(\pi + \frac{2a^3}{x^3}\right)k^2 + \ldots$ Mithin $2\pi x - \frac{2a^3}{x^2} = 0$, $x = a\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$, $y = \frac{a^3}{\pi a^2\sqrt[3]{\frac{1}{\pi^2}}} = a\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}} = x$ (d. i. die Höhe dem Halbmesser gleich), $z = \pi a^2\sqrt[3]{\frac{1}{\pi^2}} + \frac{2a^3}{a}\sqrt[3]{\pi} = 3a^2\sqrt[3]{\pi}$. Dieser Werth ist ein Minimum, weil $\pi + \frac{2a^2}{x^3}$ positiv ist.

Betrachtet man umgekehrt die Gesammtoberfläche oder den Mantel mit der Basis als gegebene Größen, so wird der Inhalt des Cylinders ein Maximum, wenn obige Relationen ($y = 2x$; $y = x$) Statt finden.

Aufgabe 4.

1. Die Abmessungen eines senkrechten Kegels zu bestimmen, dessen Gesammtoberfläche bei einem gegebenen Inhalte (a^3) ein Kleinstes ist.

A. Es sei (Fig. 6.) der Halbmesser der Basis $AD = x$, die Höhe des Kegels $CD = y$, so ist der Inhalt des Kegels $\frac{1}{3}\pi x^2 y = a^3$, der Basis $= \pi x^2$, des Mantels $= \pi x\sqrt{x^2 + y^2} = \pi\sqrt{x^4 + x^2y^2} = \pi\sqrt{\frac{x^4 + 9a^6}{\pi^2x^2}} = \pi\sqrt{x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2}\,.\,x^{-2}}$. Daher muß $z = \sqrt{x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2}\,.\,x^{-2}} + \pi x^2 = \text{Minimum}$. Es wird $z' = \pi\sqrt{(x+k)^4 + \frac{9a^6}{\pi^2}(x+k)^{-2}} + \pi(x+k)^2$

$$= \pi\sqrt{x^4 + 4x^3k + 6x^2k^2 + \ldots + \frac{9a^6}{\pi^2}(x^{-2} - 2x^{-3}k + 3x^{-4}k^2\ldots)} + \pi x^2 + 2\pi xk + \pi k^2$$

$$= \pi\left\{\left(x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}\right) + \left(4x^3k - \frac{18a^6k}{\pi^2x^3} + 6x^2k^2 + \frac{27a^6k^2}{\pi^2x^4}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} + \pi x^2 + 2\pi xk + \pi k^2$$

$$= \pi\left\{\left(x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \pi x^2 + \frac{1}{2}\left(x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(4x^3k - \frac{18a^6k}{\pi^2x^3} + 6x^2k^2 + \frac{27a^6k^2}{\pi^2x^4}\right)\right.$$

$$\left. - \frac{1}{8}\left(x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot\left(4x^3k - \frac{18a^6k}{\pi^2x^3}\right) + 2xk + k^2\right\} = \pi\sqrt{x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}} + \pi x^2$$

$$+ \left\{\frac{\left(2x^3 - \frac{9a^6}{\pi^2x^3}\right)}{\sqrt{x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}}} + 2x\right\}\pi k + \left\{\frac{\frac{1}{2}\left(6x^2 + \frac{27a^6}{\pi^2x^4}\right)}{\sqrt{x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}}} - \frac{\frac{1}{8}\left(4x^3 - \frac{18a^6}{\pi^2x^3}\right)^2}{\sqrt{\left(x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}\right)^3}}\right\}\pi k^2 + \pi k^2 + \ldots$$

Für unsern Fall muß $\frac{2x^3 - \frac{9a^6}{\pi^2x^3}}{\sqrt{x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}}} + 2x = 0$, $2x^3 - \frac{9a^6}{\pi^2x^3} = -2x\sqrt{x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}}$, Wird die letztere Gleichung quadrirt, so findet man

$$4x^6 - \frac{36a^6}{\pi^2} + \frac{81a^{12}}{\pi^4x^6} = 4x^6 + \frac{36a^6}{\pi^2},\ \frac{81a^{12}}{\pi^4x^6} = \frac{72a^6}{\pi^2},\ x = a\sqrt[6]{\frac{9}{8\pi^2}},\ y = \frac{3a^3}{\pi a^2\sqrt[6]{\frac{81}{64\pi^4}}}$$

$$= 3a\sqrt[6]{\frac{64}{81\pi^2}} = 2a\sqrt[6]{\frac{9}{\pi^2}},\ x : y = \sqrt[6]{\tfrac{1}{8}} : 2 = \sqrt{\tfrac{1}{2}} : 2 = 1 : 2\sqrt{2},\ \ x^2 : y^2 = 1 : 8,$$

folglich $z = 4\pi x^2 = 4\pi \,.\, a^2\sqrt[3]{\frac{9}{8\pi^2}} = 2a^2\sqrt[3]{9\pi}$. Dieser Ausdruck ist ein Minimum, weil der Coefficient von k^2 die positive Form $(2\pi^4x^{12} + 117\pi^2a^6x^6 + 162a^{12}) : 2x^3(\pi^2x^6 + 9a^6)^{\frac{3}{2}} + \pi$ annimmt.

2. Soll der Kegelmantel allein ein Kleinstes werden, so muß

$$z = \pi\sqrt{x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}} = \text{Min.}\ z' = \pi\left(x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\left(2x^3 - \frac{9a^6}{\pi^2x^3}\right)}{\sqrt{x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}}}\pi k + \left\{\frac{\frac{1}{2}\left(6x^2 + \frac{27a^6}{\pi^2x^4}\right)}{\sqrt{x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}}}\right.$$

$$\left. - \frac{\frac{1}{8}\left(4x^3 - \frac{18a^6}{\pi^2x^3}\right)^2}{\sqrt{\left(x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}\right)^3}}\right\}\pi k^2 + \ldots$$ Für ein Kleinstes muß $$\frac{2x^3 - \frac{9a^6}{\pi^2x^3}}{\sqrt{x^4 + \frac{9a^6}{\pi^2x^2}}} = 0,\ x = \sqrt[6]{\frac{9}{2}\frac{a^6}{\pi^2}}$$

$$= a\sqrt[6]{\frac{9}{2\pi^2}},\ y = a\sqrt[6]{\frac{72}{2\pi^2}},\ \ x : y = 1 : \sqrt[6]{8} = 1 : \sqrt{2},\ \ x^2 : y^2 = 1 : 2,\ \ z = \pi x^2\sqrt{3}$$

$= a^2\sqrt[3]{\frac{9\pi}{2}}\sqrt{3} = 3a^2\sqrt[6]{\frac{3\pi^2}{4}}$. Dieser Ausdruck ist ebenfalls ein Minimum, weil der Coefficient von k^2 sich auf die positive Form $(2\pi^4x^{12} + 117\pi^2a^6x^6 + 162a^{12}) : 2x^3(\pi^2x^6 + 9a^6)^{\frac{3}{2}}$ reduziren läßt.

Anm. Ist die Gesammtoberfläche oder der Mantel des Kegels gegeben, so wird der Inhalt ein Größtes, wenn obige Relationen ($x : y = 1 : 2\sqrt{2}$, $x : y = 1 : \sqrt{2}$) Statt finden.

Aufgabe 5.

Von einem Thurme herab erblickt man einen in der Ebene, auf welcher der Thurm steht, sich senkrecht fortbewegenden Gegenstand. In welcher Entfernung vom Thurme erscheint dieser Gegenstand dem auf dem Thurme befindlichen Zuschauer am größten?

A. Sei (Fig. 7.) die Höhe des Thurmes $AC = a$, des Gegenstandes $BD = b$, die Entfernung des letztern vom Thurme $CD = x$, so muß, wenn in A das Auge des Zuschauers sich befindet, der Sehwinkel $BAD = \varphi$ ein Größtes werden. Es ist

$\operatorname{tg} EAB = \frac{EB}{AE} = \frac{CD}{AC - EC} = \frac{CD}{AC - BD} = \frac{x}{a - b}$; $\operatorname{tg} CAD = \frac{CD}{AC} = \frac{x}{a}$. Ferner ist

$\operatorname{tg} EAB = \operatorname{tg}(CAD + \varphi) = \frac{\operatorname{tg} CAD + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg} CAD \operatorname{tg}\varphi}$, d. h. $\frac{x}{a-b} = \frac{\frac{x}{a} + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \frac{x}{a}\operatorname{tg}\varphi}$, woraus man

$\operatorname{tg}\varphi = y = \frac{\frac{x}{a-b} - \frac{x}{a}}{1 + \frac{x^2}{a(a-b)}} = \frac{bx}{a(a-b) + x^2} = \text{Max.}$ findet.

Es ist $y' = b(x+k)\,(a(a-b)+(x+k)^2)^{-1} = b(x+k)\,(a(a-b+x^2+(2xk+k^2))^{-1}$ $= b(x+k)\,(a(a-b)+x^2)^{-1} - (a(a-b)+x^2)^{-2}\,(2xk+k^2) + (a(a-b)+x^2)^{-3}\,(2xk)^2 + \ldots)$ $= b(x+k)\,\{(a(a-b)+x^2)^{-1} - (a(a-b)+x^2)^{-2}\,.\,2xk - (a(a-b)+x^2)^{-2}\,k^2$ $+ (a(a-b)+x^2)^{-3}\,.\,4x^2k^2 + - \} = b\,\{(a(a-b)+x^2)^{-1}\,x + (a(a-b)+x^2)^{-1}\,k$ $- (a(a-b)+x^2)^{-2}\,2x^2k - (a(a-b)+x^2)^{-2}\,2xk^2 - (a(a-b)+x^2)^{-2}\,xk^2$ $\ldots + (a(a-b)+x^2)^{-3}\,4x^3k^2 + \ldots\} = b\left\{\frac{x}{a(a-b)+x^2} + \left(\frac{1}{a(a-b)+x^2} - \frac{2x^2}{(a(a-b)+x^2)^2}\right)k\right.$ $\left.+\left(-\frac{3x}{(a(a-b)+x^2)^2} + \frac{4x^3}{(a(a-b)\,x^2)^3}\right)k^2 + \ldots\right\}$. Damit also φ ein Maximum werde, muß $\frac{1}{a(a-b)+x^2} - \frac{2x^2}{(a(a-b)+x^2)^2} = 0$, $x = \sqrt{a^2-ab}$ (d. i. die mittlere Proportionale zwischen a u. $a-b$). Hiernach ist $\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{2\sqrt{a^2-ab}}$, $\sin\varphi = \frac{b}{2a-b}$. Daß dieser Werth wirklich ein Maximum ist, ersieht man aus $\left(-\frac{3x}{(a(a-b)+x^2)^2} + \frac{4x^3}{(a(a-b)+x^2)^3}\right) = \left(-3 + \frac{4x^2}{a^2-ab+x^2}\right)$ $\frac{x}{(a^2-ab+x^2)^2} = \left(-3 + \frac{4(a^2-ab)}{2(a^2-ab)}\right)\frac{\sqrt{a^2-ab}}{4(a^2-ab)^2} = -1\,.\,\frac{\sqrt{a^2-ab}}{4(a^2-ab)^2}$.

Aufgabe 6.

Eine Kerze soll eine in einer gewissen Entfernung befindliche Fläche möglichst stark erleuchten. Wie hoch muß sich die Lichtflamme über jener Fläche befinden?

A. Es sei die unveränderliche Lichtstärke J, die Entfernung des Fußpunktes der Kerze von der Mitte der Fläche (Fig. 8.) $ac = e$, die Entfernung der Kerzenflamme vom Mittelpunkte der Fläche $bc = x$, der Neigungswinkel der Lichtstrahlen gegen die Mitte der zu beleuchtenden Fläche $acb = \alpha$, die Höhe der Kerze $ab = h$, so muß, da nach den Gesetzen der Optik „die Erleuchtung der Lichtstärke und dem Sinus des Einfallswinkels direct, dem Quadrate der Entfernung indirect proportional ist“, $y = \frac{J\sin\alpha}{x^2}$ ein Minimum sein. Nun ist $\sin\alpha = \frac{ab}{bc} = \frac{\sqrt{x^2-e^2}}{x}$, folglich $y = J\frac{\sqrt{x^2-e^2}}{x^3} = \text{Min.}$ Es ist $y' = J\,.\,\frac{\sqrt{(x+k)^2-e^2}}{(x+k)^3} = J\,.\,(x^2-e^2+2xk+k^2)^{\frac{1}{2}}$ $(x+k)^{-3} = J((x^2-e^2)^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2}(x^2-e^2)^{-\frac{1}{2}}\,(2xk+k^2) - \tfrac{1}{8}(x^2-e^2)^{-\frac{3}{2}}\,(2xk)^2 + \ldots)$ $(x^{-3} - 3x^{-4}k + 6x^{-5}k^2\ldots) = J\left(\sqrt{x^2-e^2} + \frac{xk}{\sqrt{x^2-e^2}} + \frac{k^2}{2\sqrt{x^2-e^2}} - \frac{x^2k^2}{2(x^2-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$ $\left(\frac{1}{x^3} - \frac{3k}{x^4} + \frac{6k^2}{x^5}\ldots\right) = J\left(\frac{\sqrt{x^2-e^2}}{x^3} + \frac{k}{x^2\sqrt{x^2-e^2}} + \frac{k^2}{2x^3\sqrt{x^2-e^2}} - \frac{k^2}{2x(x^2-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right.$ $\left.-\frac{3k\sqrt{x^2-e^2}}{x^4} - \frac{3k^2}{x^3\sqrt{x^2-e^2}}\ldots + \frac{6\sqrt{x^2-e^2}\,k^2}{x^5}\ldots\right) = J\left\{\frac{\sqrt{x^2-e^2}}{x^3} + \left(\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-e^2}} - \frac{3\sqrt{x^2-e^2}}{x^4}\right)k\right.$ $\left.+\left(\frac{1}{2x^3\sqrt{x^2-e^2}} - \frac{3}{x^3\sqrt{x^2-e^2}} - \frac{1}{2x(x^2-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{6\sqrt{x^2-e^2}}{x^5}\right)k^2 + \ldots\right\}$. Für den Fall eines Maximums muß $\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-e^2}} - \frac{3\sqrt{x^2-e^2}}{x^4} = 0$, $x = e\sqrt{\tfrac{3}{2}}$, $h = \sqrt{x^2-e^2} = e\sqrt{\tfrac{1}{2}} = 0{,}7071\,.\,e$, $\sin\alpha = \frac{h}{x} = \frac{e\sqrt{\frac{1}{2}}}{e\sqrt{\frac{3}{2}}} = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$, $\alpha = 35^\circ\ 15'\ 52''$ (c.), $y = \frac{J\sqrt{\frac{1}{3}}}{\frac{3}{2}e^2} = \frac{2J}{3\sqrt{3}\,.\,e^2}$. Dieser Werth entspricht einem Maximum, weil $\frac{1}{2x\,3\sqrt{x^2-e^2}} - \frac{3}{x^3\sqrt{x^2-e^2}} - \frac{1}{2x(x^2-e^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{6\sqrt{x^2-e^2}}{x^5} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-e^2}}$ $\left\{-\frac{5}{2x^2} - \frac{1}{2x^2(x^2-e^2)} + \frac{6(x^2-e^2)}{x^4}\right\} = \frac{1}{e\sqrt{\frac{3}{2}}\,.\,\frac{1}{2}e^2}\left\{-\frac{5}{3e^2} - \frac{1}{3e^2\,.\,\frac{1}{2}e^2} + \frac{6\,.\,\frac{1}{2}e^2}{\frac{9}{4}e^4}\right\} = \frac{1}{e^3\sqrt{\frac{3}{8}}}$ $\left\{-\frac{5}{3e^2} - \frac{2}{3e^4} + \frac{4}{3e^2}\right\} = \frac{1}{e^3\sqrt{\frac{3}{8}}}\left\{-\frac{1}{3e^2} - \frac{2}{3e^4}\right\} = -\frac{1}{e^3\sqrt{\frac{3}{8}}}\left\{\frac{1}{3e^2} + \frac{2}{3e^4}\right\}$.

Aufgabe 7.

Die Bedingungen zu entwickeln, unter welchen das Bewegungsmoment eines unterschlächtigen Wasserrades am größten ausfällt.

A. Es sei die vom Wasser getroffene Schaufelfläche des Rades (Fig. 9.) $abcd = f$, das spec. Gewicht des Wassers $= \sigma$, die Geschwindigkeit des anstoßenden Wassers $= c$, das Gefälle $ef = h$, so ist dem bekannten Fallgesetze zu Folge $c^2 = 2gh$ ($g = 31',25$), $h = \frac{c^2}{2g}$. Der Stoß des Triebwassers gegen die noch ruhende Schaufel ist, wie die Hydrodynamik lehrt, „dem Gewichte einer Wassersäule von der Basis der getroffenen Schaufelfläche und der Höhe des Gefälles gleich," mithin $= fh\,.\,\sigma = \frac{fc^2\,.\,\sigma}{2g}$. Weicht nun aber die Schaufel mit einer gewissen Geschwindigkeit (x) aus, so ist der Stoß gegen die Schaufel nicht mehr so groß als früher, es kann blos die relative Geschwindigkeit ($c-x$) in Rechnung gebracht werden. Hiernach ist der Stoß gegen die ausweichende Schaufel $= \frac{f(c-x)^2\sigma}{2g}$, folglich das Bewegungsmoment des sollicitirten Wasserrades $\frac{f(c-x)^2\sigma}{2g}\,.\,x$, welches ein Größtes sein soll. Da f, $2g$, σ constant sind, so muß mithin

$$y = (c-x)^2x = c^2x - 2cx^2 + x^3 = \text{Max}.$$

$y' = c^2(x+k) - 2c(x+k)^2 + (x+k)^3 = c^2x + c^2k - 2cx^2 - 4cxk - 2ck^2 + x^3 + 3x^2k + 3xk^2 + k^3 = c^2x - 2cx^2 + x^3 + (c^2 - 4cx + 3x^2)k + (-2c + 3x)k^2 + \ldots$

Im Falle eines Maximums muß $c^2 - 4cx + 3x^2 = 0$, $x = \begin{cases} +c. \\ +\frac{1}{3}c. \end{cases}$ Für $+c$ wird $-2c + 3x = +c$, für $+\frac{1}{3}c = -c$, im erstern Falle findet ein Minimum, im letztern ein Maximum statt. Das Bewegungsmoment ist im ersten Fall $= 0$, im letztern $= f\,.\,\frac{\frac{4}{9}\,.\,c^2\sigma\,.\,\frac{1}{3}c}{2g} = \frac{\frac{2}{27}fc^3\,.\,\sigma}{g}$.

Aufgabe 8.

1. Ein Dreieck zu construiren, dessen Inhalt bei gegebenem Umfange ein Größtes ist.

A. Es sei (Fig. 10.) $AB = x$, $BC = y$, $Ac = z$, $x + y + z = 2p$, so ist der Flächeninhalt $F = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)\ (x+y-z)\ (x-y+z)\ (-x+y+z)} = \frac{1}{4}\sqrt{2p\,(2x+2y-2p)\ (2p-2y)\ (2p-2x)} = \sqrt{p}\sqrt{(x+y-p)\ (p-y)\ (p-x)}$, mithin auch $\frac{F^2}{p} = (p+y-p)\ (p-y)\ (p-x) = u = \text{Max}$. Durch Substitution von $x+k$, $y+h$ anstatt x, y, erhält man $u' = (x+y-p+k+h)\ (p-y-h)\ (p-x-k)$

$= \{(x+y-p)(p-y) + k(p-y) + h(p-y) - (x+y-p)h - kh - h^2\}(p-x-k)$
$= (x+y-p)(p-y)(p-x) + k(p-y)\,.\,(p-x) + h(p-y)(p-x) - (x+y-p)(p-x)h$
$- (p-x)kh - (p-x)h^2 - (x+y-p)(p-y)k - k^2(p-y) - (p-y)kh + (x+y-p)hk$
$+ k^2h + kh^2 = (x+y-p)(p-y)(p-x) + \{(p-y)(p-x) - (x+y-p)(p-y)\}\,.\,k$
$+ \{(p-y)(p-x) - (x+y-p)(p-x)\}h + \{-(p-x)h^2 - (p-x+p-y$
$- (x+y-p))kh - (p-x)h^2\} + \ldots$ Für ein Maximum muß

$$(p-y)(p-x) - (x+y-p)(p-y) = 0,$$
$$(p-y)(p-x) - (x+y-p)(p-x) = 0,$$

woraus man $x = y = z = \frac{2p}{3}$, $F = \frac{p^2}{9}\sqrt{3}$ findet. Dieser Werth entspricht einem Maximum, weil $A_3 = -(p-x) = -\frac{1}{3}p$, $A_4 = -\frac{1}{3}p$, $A_5 = -\frac{1}{3}p$, mithin A_3 und A_5 gleichnamig und zwar negativ sind, zugleich $A_4{}^2 < 4A_3\,.\,A_5$ ist.

2. Die umgekehrte Aufgabe, ein Dreieck vom kleinsten Umfange bei gegebenem Inhalte zu construiren, führt ebenfalls auf das gleichseitige Dreieck.

Anm. Beide Aufgaben sind ein specieller Fall des sogenannten isoperimetrischen Problems, welches schon seit den ältesten Zeiten die Mathematiker vielfach beschäftigt hat.

Aufgabe 9.

1. In der Ebene eines Dreiecks einen Punkt zu bestimmen, daß die Summe der Entfernungen dieses Punktes von den Eckpunkten des Dreiecks ein Kleinstes werde.

A. Sei O (Fig. 11.) der gesuchte Punkt, so soll $AO + BO + CO$ ein Kleinstes werden; ist nun OE und BF senkrecht auf AC, $OD \perp BF$, $AF = m$, $BF = l$, $AC = b$, $AE = x$. $OE = y$, so ist $AO = \sqrt{x^2+y^2}$, $BO = \sqrt{(m-x)^2+(l-y)^2}$, $CO = \sqrt{(b-x)^2+y^2}$, folglich $u = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(m-x^2)+(l-y)^2} + \sqrt{(b-x)^2+y^2} = \text{Min.}$ Setzt man anstatt x, $x+k$, anstatt y, $y+h$, so erhält man $u' = \sqrt{x^2+y^2+2xk+2yh+k^2+h^2}$
$+\sqrt{(m-x)^2+(l-y)^2-2k(m-x)-2h(l-y)+k^2+h^2} + \sqrt{(b-x)^2+y^2-2k(b-x)+2hy+h^2+k^2}$
$= (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2xk+2yh+k^2+h^2) - \frac{1}{8}(x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}(2xk+2yh)^2 + \ldots\ldots$
$+ ((m-x)^2+(l-y)^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}((m-x)^2+(l-y)^2)^{-\frac{1}{2}}(2k(m-x)+2h(l-y)-k^2-h^2)$
$- \frac{1}{8}((m-x)^2+(l-y)^2)^{-\frac{3}{2}}(2k(m-x)+2h(l-y)^2 + \ldots + (b-x)^2+y^2)^{\frac{1}{2}} -$
$\frac{1}{2}((b-x)^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}(2k(b-x) - 2hy - h^2 - k^2) - \frac{1}{8}((b-x)^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}(-2k(b-x)$
$+ 2hy)^2 + = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(m-x)^2+(l-y)^2} + \sqrt{(b-x)^2+y^2} + \frac{xk}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{yh}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$+ \frac{k^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{h^2}{2\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^2k^2}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{xykh}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{y^2h^2}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{k(m-x)}{\sqrt{(m-x)^2+(l-y)^2}} - \frac{h(l-y)}{\sqrt{(m-x)^2+(l-y)^2}}$
$+ \frac{k^2}{2\sqrt{(m-x)^2+(l-y)^2}} + \frac{h^2}{2\sqrt{(m-x)^2+(l-y)^2}} - \frac{k^2(m-x)^2}{2\sqrt{[(m-x)^2+(l-y)^2]^3}} - \frac{kh(m-x)(l-y)}{\sqrt{[(m-x)^2+(l-y)^2]^3}} - \frac{h^2(l-y)^2}{2\sqrt{[(m-x)^2+(l-y)^2]^3}}$
$- \frac{k(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}} + \frac{hy}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}} + \frac{h^2}{2\sqrt{(b-x)^2+y^2}} + \frac{k^2}{2\sqrt{(b-x)^2+y^2}}\,.\, - \frac{k^2(b-x)^2}{2\sqrt{[(b-x)^2+y^2]^3}}$
$+ \frac{kh(b-x)y}{\sqrt{[(b-x)^2+y^2]^3}} - \frac{h^2y^2}{2\sqrt{[(b-x)^2+y^2]^3}} = \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(m-x)^2+(l-y)^2} + \sqrt{(b-x)^2+y^2}$

$$+\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{(m-x)}{\sqrt{(m-x)^2+(l-y)^2}}-\frac{(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}}\right\}k+\left\{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{(l-y)}{\sqrt{(m-x)^2+(l-y)^2}}+\frac{y}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}}\right\}h$$

$$+\left\{\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x^2}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2\sqrt{(m-x)^2+(l-b)^2}}-\frac{(m-x)^2}{2[(m-x)^2+(l-y)^2]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2\sqrt{(b-x)^2+y^2}}\right.$$

$$\left.-\frac{(b-x)^2}{2[(b-x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}k^2+\left\{-\frac{xy}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}-\frac{(m-x)(l-y)}{[(m-x)^2+(l-y)^2]^{\frac{3}{2}}}+\frac{(b-x)y}{[(b-x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}kh+\left\{\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}-\right.$$

$$\left.\frac{y^2}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2[(m-x^2)+(l-y^2)]^{\frac{1}{2}}}-\frac{(l-y)^2}{2[(m-x)^2+(l-y)^2]^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{2[(b-x)^2+y^2]^{\frac{1}{2}}}-\frac{y^2}{2[(b-x)^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}\right\}h^2+\ldots.$$

Hiernach muß

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{(m-x)}{\sqrt{(m-x)^2+(l-y)^2}}-\frac{(b-x)}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}}=0, \text{ oder } \cos\alpha-\cos\beta-\cos\gamma=0,$$

$$\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{(l-y)}{\sqrt{(m-x)^2+(l-y)^2}}+\frac{y}{\sqrt{(b-x)^2+y^2}}=0, \text{ oder } \sin\alpha-\sin\beta+\sin\gamma=0.$$

Hieraus findet man $(\cos\alpha-\cos\gamma)^2=\cos\beta^2$, $(\sin\alpha+\sin\gamma)^2=\sin\beta^2$, mithin $(\cos\alpha-\cos\gamma)^2+(\sin\alpha+\sin\gamma)^2=\cos\beta^2+\sin\beta^2$, d. i. $\cos\alpha^2-2\cos\alpha\cos\gamma+\cos\gamma^2+\sin\alpha^2+2\sin\alpha\sin\gamma+\sin\gamma^2=2-2(\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma)=2-2\cos(\alpha+\gamma)=1$, folglich $+\cos(\alpha+\gamma)=\frac{1}{2}$, $\alpha+\gamma=60^\circ$, $< AOC=120^\circ$. Auf ähnliche Weise findet man aus $\cos\alpha=\cos\beta+\cos\gamma$ und $\sin\alpha=\sin\beta-\sin\gamma$, $\cos(\gamma+\beta)=-\frac{1}{2}$, $\gamma+\beta=120^\circ$, oder da $E=\gamma$, $< BOC=120^\circ$, mithin auch $AOB=120^\circ$.

Um die einzelnen Linien AO, BO, CO und ihre Summe zu finden, hat man $\triangle AOB=\frac{1}{2}AO.BO\sin 120^\circ$, $\triangle BOC=\frac{1}{2}OC.OB\sin 120^\circ$, $\triangle AOC=\frac{1}{2}AO.OC\sin 120^\circ$, mithin $\triangle ABC=J=\frac{1}{2}\sin 120^\circ(AO.OB+OC.OB+AO.OC)=\frac{\sqrt{3}}{4}(AO.OB+OB.OC+AC.OC)$, $\frac{4J}{\sqrt{3}}=AO.OB+OB.OC+AO.OC$. Nun ist $a^2=AO^2+OB^2+AO.OB$, $b^2=AO^2+OC^2+AO.OC$, $c^2=OB^2+OC^2+OB.OC$, $\frac{a^2+b^2+c^2}{2}=AO^2+OB^2+OC^2+\frac{1}{2}(AO.OB+AO.OC+BO.OC)=AO^2+OB^2+OC^2+2(AO.OB+AO.OC+BO.OC)-\frac{3}{2}(AO.OB+AO.OC+BO.OC)=(AO+BO+CO)^2-\frac{3}{2}(AO.BO+AO.CO+BO.CO)=(AO+BO+CO)^2-\frac{3}{2}.\frac{4J}{\sqrt{3}}=(AO+BO+CO)^2-2J\sqrt{3}$, mithin $(AO+BO+CO)^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2J\sqrt{3}$, $AO+BO+CO=z=\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}+2J\sqrt{3}}$. Ferner ist $a^2-b^2=OB^2-OC^2+AO.OB-AO.OC=(OB+OC)(OB-OC)+AO(OB-OC)=(OB+OC+AO)(OB-OC)$, also $\frac{a^2-b^2}{z}=OB-OC$. Ebenso $\frac{c^2-b^2}{z}=OB-OA$; addirt man letztere beiden Gleichungen, so erhält man $\frac{a^2+c^2-2b^2}{z}=2OB-OC-OA=2OB-(z-BO)=3OB-z$, daher $OB=\frac{a^2+c^2-2b^2}{3z}+\frac{z}{3}$, und analog $AO=\frac{b^2+c^2-2a^2}{3z}+\frac{z}{3}$, $OC=\frac{a^2+b^2-2c^2}{3z}+\frac{z}{3}$.

Daß diese Werthe einem Maximum entsprechen, erhellt aus den Coefficienten von k^2 und h^2 (A_3, A_5), welche beide positiv und zugleich so beschaffen sind, daß ihr vierfaches Product größer, als das Quadrat des Coefficienten von kh (A_4) ist. Die Ausführung der Rechnung ist wegen zu großer Weitläufigkeit weggelassen.

Anm. Dieser Satz ist ein specieller Fall von dem allgemeinen der Punkte kleinster Entfernung.

2. Soll $AO^2 + BO^2 + CO^2$ ein Kleinstes sein, so ist $x^2 + y^2 + (m-x)^2 + (l-y)^2 + (b-x)^2 + y^2 = 3x^2 + 3y^2 - 2(m+b)\,x - 2ly + m^2 + l^2 + b^2 = u = \text{Min.}$ $u' = 3x^2 + 3y^2 - 2(m+b)\,x - 2ly + m^2 + l^2 + b^2 + (6x - 2m - 2b)\,k + (6y - 2l)\,h + 3k^2 + 3h^2$, folglich ist $6x - 2m - 2b = 0$, $6y - 2l = 0$; woraus man $x = \frac{m+b}{3}$, $y = \frac{l}{3}$, $u = \frac{2}{3}(b^2 + m^2 + l^2 - mb)$ findet, welcher Werth ein Minimum ist, da $A_3 = +3$, $A_5 = +3$, und $A_4{}^2\ (=0)$ kleiner als $4\,A_3\,A_5$ ist.

Anm. Dieser Satz bildet ebenfalls einen besondern Fall des ganz allgemeinen der Punkte mittlerer Entfernung. Die allgemeine Auflösung beider Probleme ist etwas weitläufig nach unserer Methode, sie findet sich durch Differential-Rechnung geführt in einer Gelegenheitsschrift von Franz Heinen (Ueber Systeme von Kräften 2c. Essen 1834.).

Aufgabe 10.

In einem Dreiecke den Punkt zu bestimmen, für welchen die Summe der Quadrate der von demselben auf die Seiten des Dreiecks gezogenen Senkrechten ein Minimum wird.

A. Ist O der gesuchte Punkt (Fig. 12.), $OM = x$, $ON = y$, $OQ = z$, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, so ist, wenn man AO, BO, CO zieht, $\triangle\,AOB = \frac{cz}{2}$, $\triangle\,AOC = \frac{by}{2}$, $\triangle\,BOC = \frac{az}{2}$, mithin $ax + by + cz = 2.\triangle\,ABC = 2F$. Da nun $x^2 + y^2 + z^2$ ein Kleinstes werden soll, so muß $u = x^2 + y^2 + \left(\frac{2F - (ax+by)}{c}\right)^2 = \left(\frac{c^2+a^2}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{c^2+b^2}{c^2}\right)y^2 + \frac{2abxy}{c^2} - 4\frac{aF}{c^2}x - \frac{4bF}{c^2}y + \frac{4F^2}{c^2} = \text{Min.}$ $u' = \left(\frac{c^2+a^2}{c^2}\right)(x+k)^2 + \left(\frac{c^2+b^2}{c^2}\right)(y+h)^2 + \frac{2ab}{c^2}(x+k)(y+h) - \frac{4aF}{c^2}(x+k) - \frac{4bF}{c^2}(y+h) + \frac{4F^2}{c^2} = \left(\frac{c^2+a^2}{c^2}\right)x^2 + \left(\frac{c^2+b^2}{c^2}\right)y^2 + \frac{2abxy}{c^2} - \frac{4aFx}{c^2} - \frac{4bFy}{c^2} + \frac{4F^2}{c^2} + \left\{2\left(\frac{c^2+a^2}{c^2}\right)x + \frac{2aby}{c^2} - \frac{4aF}{c^2}\right\}k + \left\{2\left(\frac{c^2+b^2}{c^2}\right)y + \frac{2abx}{c^2} - \frac{4bF}{c^2}\right\}h + \left\{\left(\frac{c^2+a^2}{c^2}\right)k^2 + \frac{2ab}{c^2}kh + \left(\frac{c^2+b^2}{c^2}\right)h^2\right\}$.

Für das Minimum muß

$2\left(\frac{c^2+a^2}{c^2}\right)x + \frac{2aby}{c^2} - \frac{4aF}{c^2} = 0$, $\left(\frac{c^2+b^2}{c^2}\right)y + \frac{2abx}{c^2} - \frac{4bF}{c^2} = 0$. Aus diesen beiden Gleichungen findet man $x = \frac{2aF}{a^2+b^2+c^2}$, $y = \frac{2bF}{a^2+b^2+c^2}$, mithin auch $z = \frac{2cF}{a^2+b^2+c^2}$, $u = \frac{4F^2}{a^2+b^2+c^2}$. Dieser Werth ist ein Minimum, weil $\left(\frac{c^2+a^2}{c^2}\right)$ und $\left(\frac{c^2+b^2}{c^2}\right)$ positiv sind und zugleich $\left(\frac{2ab}{c^2}\right)^2 < 4\left(\frac{c^2+a^2}{c^2}\right)\left(\frac{c^2+b^2}{c^2}\right)$.

Aufgabe 11.

Die Seiten eines Vierecks sind der Größe und Reihenfolge nach gegeben; die Winkel so zu bestimmen, daß der Inhalt ein Maximum werde.

A. Es sei (Fig. 13.) $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $< BAD = \varphi$, $BCD = \chi$, so ist der Inhalt des Vierecks $u = \frac{ad}{2}\sin\varphi + \frac{bc}{2}\sin\chi$, welcher Ausdruck ein Maximum werden soll. Nun ist auch $BD^2 = a^2 + d^2 - 2ad \,.\, \cos\varphi = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos\chi$. Entwickelt man aus letzterm Ausdrucke $\sin\chi$ und substituirt denselben in den Ausdruck für u, so erhält man eine Gleichung mit einer Unbekannten. Allein dieß Verfahren würde etwas weitläufig sein; man operire daher wie folgt. Setze $\cos\varphi = x$, $\sin\varphi = \sqrt{1-x^2}$, $\cos\chi = y$, $\sin\chi = \sqrt{1-y^2}$ in obige beide Gleichungen, so entsteht

$$a^2 + d^2 - 2adx = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, y;\; u = \frac{ad}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{bc}{2}\sqrt{1-y^2} = \text{Max.}$$

Aus der ersteren Gleichung erhält man durch Substitution von $x + k$ und $y + h$ anstatt x und y

$$a^2 + d^2 - 2ad(x+k) = b^2 + c^2 - 2bc(y+h),$$

mithin wenn man die gegebene Gleichung selbst abzieht, $adk = bch$, $h = \frac{ad}{bc}k$.

Aus der zweiten Gleichung $u' = \frac{ad}{2}\sqrt{1-x^2-(2xk+k^2)} + \frac{bc}{2}\sqrt{1-y^2-(2yh+h^2)}$ $= \frac{ad}{2}\left\{(1-x^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(2xk+k^2) - \frac{1}{8}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(2xk+\ldots)^2 + \ldots\right\} + \frac{bc}{2}\left\{(1-y^2)^{\frac{1}{2}}\right.$ $\left. - \frac{1}{2}(1-y^2)^{-\frac{1}{2}} \,.\, (2yh+h^2) - \frac{1}{8}(1-y^2)^{-\frac{3}{2}}(2yh+\ldots)^2 + \ldots\right\} = \frac{ad}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{bc}{2}\sqrt{1-y^2}$

$$- \frac{ad \,.\, xk}{2\sqrt{1-x^2}} - \frac{cd \,.\, yh}{2\sqrt{1-y^2}} - \frac{ad \,.\, k^2}{4\sqrt{1-x^2}} - \frac{bc \,.\, h^2}{4\sqrt{1-y^2}} - \frac{1}{4}\,\frac{ad \,.\, x^2k^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}} - \frac{bc \,.\, y^2h^2}{4\sqrt{(1-y^2)^3}}.$$

Wird nun für h sein Werth $\frac{ad}{bc} \,.\, k$ eingeführt, so erhält man

$$u' = \frac{ad}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{bc}{2}\sqrt{1-y^2} - \frac{ad}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)k - \frac{k^2}{4}\left(\frac{ad}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{adx^2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}\right.$$
$$\left. + \frac{abcd}{\sqrt{1-y^2}} + \frac{abcd}{\sqrt{(1-y^2)^3}}\right).$$

Im Falle eines Maximums muß $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = 0$, d. i. $\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} + \frac{\cos\chi}{\sin\chi} = \frac{\sin\chi\,\cos\varphi + \sin\varphi\,\cos\chi}{\sin\varphi\,\sin\chi} = \frac{\sin(\chi+\varphi)}{\sin\varphi\,\sin\chi} = 0$. Hieraus ergibt sich $\chi + \varphi = 0°, 180°, 360° \ldots$ Für unsern Fall gilt nur der zweite Werth $\chi + \varphi = 180°$, wodurch sich das Viereck als ein Sehnenviereck herausstellt.

Diese Bestimmung entspricht einem Größten, weil der Coefficient von k^2 stets negativ ist. Um die Winkel des Vierecks zu bestimmen, hat man $a^2 + d^2 - 2ad \,.\, \cos\varphi = b^2 + c^2 - 2bc \,.\, \cos\chi = b^2 + c^2 + 2bc \,.\, \cos\varphi$; hieraus findet man $\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad+bc)} = \cos\varphi$,

$$1 + \cos\varphi = \frac{a^2 + 2ad + d^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2(ad+bc)} = \frac{(a+d)^2 - (b-c)^2}{2(ad+bc)} = \frac{(a+d+b-c)(a+d-b+c)}{2(ad+bc)};$$

$$1 - \cos\varphi = \frac{b^2 + 2bc + c^2 - (a^2 - 2ad + d^2)}{2(ad+bc)} = \frac{(b+c)^2 - (a-d)^2}{2(ad+bc)} = \frac{(b+c+a-d)(b+c-a+d)}{2(ad+bc)};$$

$$(1+\cos\varphi)(1-\cos\varphi) = 1 - \cos\varphi^2 = \sin\varphi^2 = \frac{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(a-b+c+d)(-a+b+c+d)}{4(ad+bc)^2},$$

folglich $\sin\varphi = \sin\chi = \frac{\sqrt{(a+b+c-d)\ (a+b-c+d)\ (a-b+c+d)\ (-a+b+c+d)}}{2\,(ad+bc)} =$ $2\frac{\sqrt{(s-d)\ (s-c)\ (s-b)\ (s-a)}}{(ad+bc)}$ (wenn $a+b+c+d$ gleich $2s$ gesetzt wird). Dadurch ergiebt sich
$$u = ad\frac{\sqrt{(s-d)(s-c)(s-b)(s-a)}}{ad+bc} + bc\frac{\sqrt{(s-d)(s-c)(s-b)(s-a)}}{ad+bc} = \sqrt{(s-d)(s-c)(s-b)(s-a)}.$$

Aufgabe 12.

Unter welchen Bedingungen wird der Inhalt eines Vierecks, dessen Winkel und Umfang gegeben sind, ein Größtes?

A. Stellt $ABCD$ (Fig. 14) das verlangte Viereck dar, und ist $AB=w$, $BC=y$, $DC=z$, $AD=x$, $<BAD=\alpha$, $<ABC=\beta$, $<BCD=\gamma$, $<CDA=\delta$, p der gegebene Umfang, so muß $x+w+y+z=p$ und der Inhalt $u=\frac{xw}{2}\sin\alpha+\frac{yz}{2}\sin\gamma$ ein Maximum sein. Denkt man sich BA über A, CD über D verlängert, bis beide Verlängerungen sich in E treffen, so ist $<E=(\alpha+\delta)-180^\circ$, $AE=-\frac{x\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}$, $ED=-\frac{x\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)}$, $z+ED=\frac{y\sin\beta}{\sin E}$, $w+EA=\frac{y\sin\gamma}{\sin E}$. Aus diesen letzteren Gleichungen findet man nach gehöriger Substitution $z=\frac{x\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)}-\frac{y\sin\beta}{\sin(\alpha+\delta)}$, $w=\frac{x\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}-\frac{y\sin\gamma}{\sin(\alpha+\delta)}$; durch Einführung dieser Werthe von z und w in die obigen Gleichungen erhält man
$$p=x+y+\frac{x\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}-\frac{y\sin\gamma}{\sin(\alpha+\delta)}+\frac{x\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)}-\frac{y\sin\beta}{\sin(\alpha+\delta)}=x\left(1+\frac{\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}+\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)}\right)$$
$$+y\left(1-\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\delta)}-\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\delta)}\right).\ u=\frac{x}{2}\left(\frac{x\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}-\frac{y\sin\gamma}{\sin(\alpha+\delta)}\right)\sin\alpha+\frac{y}{2}\left(\frac{x\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)}\right.$$
$$\left.-\frac{y\sin\beta}{\sin(\alpha+\delta)}\right)\sin\gamma=\frac{x^2\sin\alpha\sin\delta}{2\sin(\alpha+\delta)}-\frac{y^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\alpha+\delta)}.$$

Durch Aenderung von x und y in $(x+k)$ und $(y+h)$ erhält man aus dem ersten Gliede
$$p=(x+k)\left(1+\frac{\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}+\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)}\right)+(y+h)\left(1-\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\delta)}-\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\delta)}\right).$$
Folglich auch durch Subtraction der ursprünglichen Gleichung $o=k\left(1+\frac{\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}+\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\delta)}\right)$
$$+h\left(1-\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\delta)}-\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\delta)}\right),\text{ oder } h=-k\left(\frac{\sin(\alpha+\delta)+\sin\alpha+\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)-\sin\beta-\sin\gamma}\right).$$

Aus der zweiten Gleichung entsteht
$$u'=\frac{(x+k)^2\sin\alpha\sin\delta}{2\sin(\alpha+\delta)}-\frac{(y+h)^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\alpha+\delta)}=\frac{x^2\sin\alpha\sin\delta}{2\sin(\alpha+\delta)}-\frac{y^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\alpha+\delta)}+\frac{xk\sin\alpha\sin\delta}{2\sin(\alpha+\delta)}$$
$$-\frac{yh\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\delta)}+\frac{k^2\sin\alpha\sin\delta}{2\sin(\alpha+\delta)}-\frac{h^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\alpha+\delta)}=\frac{x^2\sin\alpha\sin\delta}{2\sin(\alpha+\delta)}-\frac{y^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\alpha+\delta)}+k\left\{\frac{x\sin\alpha\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}\right.$$

$$+ \frac{y \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\alpha+\delta)} \cdot \frac{\sin(\alpha+\delta)+\sin\alpha+\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)-\sin\beta-\sin\gamma}\Big\} + k^2 \Big\{\frac{\sin\alpha\sin\delta}{2\sin(\alpha+\delta)} - \frac{\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\alpha+\delta)} \cdot \left(\frac{\sin(\alpha+\delta)+\sin\alpha+\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)-\sin\beta-\sin\gamma}\right)^2\Big\}.$$

Der Forderung der Aufgabe gemäß muß $\frac{x \sin\alpha \sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)} + \frac{y \sin\beta \sin\gamma}{\sin(\alpha+\delta)} \cdot \frac{\sin(\alpha+\delta)+\sin\alpha+\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)-\sin\beta-\sin\gamma} =$

o, d. i. $x \sin\alpha \sin\delta + y \sin\beta \sin\gamma \cdot \frac{\left(2\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\cos\frac{\alpha-\delta}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2} - 2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} =$

$x \sin\alpha \sin\delta + y \sin\beta \sin\gamma \cdot \frac{\cos\frac{\alpha+\delta}{2} + \cos\frac{\alpha-\delta}{2}}{\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}$ (weil $\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right) =$

$180 - \left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right), \frac{\beta+\gamma}{2} = 180 - \left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)$) $= x \sin\alpha \sin\delta - y \sin\beta \sin\gamma \cdot \frac{2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\delta}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}} =$

$4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\delta}{2} \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\delta}{2} \cdot x - 4 \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}} . y =$

o, mithin $x = y \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\delta}{2}}$. Nun ist $p = x \frac{(\sin(\alpha+\delta)+\sin\alpha+\sin\delta)+y(\sin(\alpha+\delta)-\sin\beta-\sin\gamma)}{\sin(\alpha+\delta)} =$

$\frac{2x\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\delta}{2}} - \frac{2y\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\delta}{2}}$, oder $x = \frac{p\cos\frac{\alpha+\delta}{2} + 2y\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\delta}{2}} = \frac{y\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}$.

Hieraus findet man $y = \frac{p\cos\frac{\alpha+\delta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\delta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)} =$

$$\frac{p \cdot \cos\frac{\alpha+\delta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{\left(+\cos\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right)} = \frac{p \cdot \cos\frac{\alpha+\delta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\delta}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha-\delta}{2}\right)}$$

$$= \frac{p\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{4}\right)\cos\left(\frac{\beta+\delta-\gamma-\alpha}{4}\right)} = \frac{p\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta+\delta}{2}}.$$

Aehnlich ist $x = \frac{p \cdot \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{p\sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\gamma+\delta}{2} \cdot \sin\frac{\beta+\delta}{2}}, w = \frac{p\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\delta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\alpha+\delta}{2}},$

$z = \frac{p \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}{2 \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} \sin\frac{\gamma+\beta}{2}}$. Der Inhalt ist in diesem Falle $= \frac{p^2 \sin\frac{\beta}{2} . \sin\frac{\gamma}{2}^2 \sin\frac{\delta}{2} . \sin\alpha}{8 \sin\frac{\gamma+\delta}{2} . \sin\frac{\beta+\delta}{2} \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} . \sin\frac{\alpha+\delta}{2}}$

$$+ \frac{p^2 . \sin\frac{\alpha}{2}^2 \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\delta}{2} . \sin\gamma}{8 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\beta+\delta}{2} \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} \sin\frac{\beta+\gamma}{2}} = \frac{p^2}{4} . \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\beta+\delta}{2} . \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}} . \left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\gamma+\delta}{2} \sin\frac{\alpha+\delta}{2}} \right.$$

$$\left. + \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} . \sin\frac{\beta+\gamma}{2}} \right) = \frac{p^2}{4} . \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} . \sin\frac{\gamma}{2} . \sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\beta+\delta}{2} . \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}} . \left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2} . \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\gamma+\delta}{2} \sin\frac{\alpha+\delta}{2}} + \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma+\delta}{2} \sin\frac{\alpha+\delta}{2}} \right)$$

$$= \frac{p^2}{4} . \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} . \sin\frac{\delta}{2} . \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\delta}{2} \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} . \sin\frac{\gamma+\delta}{2} . \sin\frac{\alpha+\delta}{2}} = \frac{p^2}{4} . \frac{\sin\frac{\alpha}{2} . \sin\frac{\beta}{2} . \sin\frac{\gamma}{2} . \sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\delta}{2} . \sin\frac{\beta+\delta}{2} . \sin\frac{\gamma+\delta}{2}}.$$

Da der Coefficient von k^2 sich auf $- \frac{\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\delta}{2}}{\sin\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)}$ reduzirt, $\sin\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)$ stets positiv ist, so findet ein Maximum statt, wenn α und δ kleiner als $2R$ sind, d. h. wenn das Viereck keine einwärtsgehenden Winkel hat; ist aber α oder $\delta > 2R$, so wird $\cos\frac{\alpha}{2}$ oder $\cos\frac{\delta}{2}$ negativ, mithin der ganze Ausdruck positiv, dann entsprechen die gefundenen Werthe einem Kleinsten. — $\mathrm{Cos}\,\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\delta}{2}$ können aber nicht zu gleicher Zeit **negativ** sein (d. h. α und δ nicht zu gleicher Zeit $> 2R$).

Berichtigungen.

Seite 8 Zeile 12 von unten ist in der Mitte $= \mathfrak{A}$ statt $= \mathfrak{B}$ zu lesen.
» 8 » 6 » » ist zu Anfang $y = y$ statt $y - y$ zu lesen.
» 10 » 8 von oben muß es in der Mitte $\mathfrak{B}k^2$ heißen statt $\mathfrak{B}k$.
» 12 » 6 » » muß anfangen: **wenn** 2c., nicht: Wenn 2c.

Gotha, gedruckt mit Engelhard-Reyher'schen Schriften.

$$z = \frac{p \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}{2 \sin\frac{\gamma+\alpha}{2} \sin\frac{\gamma+\beta}{2}}.$$ Der

$$+ \frac{p^2 . \sin\frac{\alpha^2}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\delta}{2} .}{8 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\beta+\delta}{2} \sin\frac{\alpha+}{2}}$$ $$. \sin\frac{\gamma^2}{2} \sin\frac{\delta}{2} . \sin\alpha$$ $$\sin\frac{\beta+\delta}{2} \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} . \sin\frac{\alpha+\delta}{2}$$

$$\frac{\delta}{2} . \left(\frac{\sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\gamma+\delta}{2} \sin\frac{\alpha+\delta}{2}} \right.$$

$$+ \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} . \sin\frac{\beta+\gamma}{2}} \Bigg) = \frac{p^2}{4} .$$ $$\frac{\alpha}{2} \quad \frac{}{+\delta}{2} + \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma+\delta}{2} \sin\frac{\alpha+\delta}{2}} \Bigg)$$

$$= \frac{p^2}{4} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\delta}{2} \sin\frac{\alpha+\gamma}{2} .}$$ $$\frac{\sin\frac{\beta}{2} . \sin\frac{\gamma}{2} . \sin\frac{\delta}{2}}{. \sin\frac{\beta+\delta}{2} . \sin\frac{\gamma+\delta}{2}}.$$

Da der Coefficient von k^2 sich $\frac{+\delta}{2}$) stets positiv ist, so

findet ein Maximum statt, wen nn das Viereck keine einwärtsgehenden Winkel hat; ist er $\cos\frac{\delta}{2}$ negativ, mithin der ganze Ausdruck positiv, dar m Kleinsten. — $\cos\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\delta}{2}$ können aber nicht und δ nicht zu gleicher Zeit $> 2R$).

Seite 8 Zeile 12 von en.
» 8 » 6 » fen.
» 10 » 8 von $\mathfrak{B}$ k.
» 12 » 6 » ꝛc.

$$+\frac{y\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\delta)}\cdot\frac{\sin(\alpha+\delta)+\sin\alpha+\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)-\sin\beta-\sin\gamma}\Big\}+k^2\Big\{\frac{\sin\alpha\sin\delta}{2\sin(\alpha+\delta)}-\frac{\sin\beta\sin\gamma}{2\sin(\alpha+\delta)}\cdot\left(\frac{\sin(\alpha+\delta)+\sin\alpha+\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)-\sin\beta-\sin\gamma}\right)^2\Big\}.$$

Der Forderung der Aufgabe gemäß muß $\frac{x\sin\alpha\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)}+\frac{y\sin\beta\sin\gamma}{\sin(\alpha+\delta)}\cdot\frac{\sin(\alpha+\delta)+\sin\alpha+\sin\delta}{\sin(\alpha+\delta)-\sin\beta-\sin\gamma}=$ o, d. i. $x\sin\alpha\sin\delta+y\sin\beta\sin\gamma\cdot\frac{\left(2\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2}+2\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\cos\frac{\alpha-\delta}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha+\delta}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2}-2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}=$

$x\sin\alpha\sin\delta+y\sin\beta\sin\gamma\cdot\frac{\cos\frac{\alpha+\delta}{2}+\cos\frac{\alpha-\delta}{2}}{\left(\cos\frac{\beta+\gamma}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}$ (weil $\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)=180-\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$, $\frac{\beta+\gamma}{2}=180-\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)$) $=x\sin\alpha\sin\delta-y\sin\beta\sin\gamma\cdot\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\delta}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}=$

$4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\delta}{2}\cdot x-4\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}\cdot y=$

o, mithin $x=y\cdot\frac{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2}}$. Nun ist $p=x\frac{(\sin(\alpha+\delta)+\sin\alpha+\sin\delta)+y(\sin(\alpha+\delta)-\sin\beta-\sin\gamma)}{\sin(\alpha+\delta)}=$

$\frac{2x\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\delta}{2}}-\frac{2y\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha+\delta}{2}}$, oder $x=\frac{p\cos\frac{\alpha+\delta}{2}+2y\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\delta}{2}}=\frac{y\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}$.

Hieraus findet man $y=\frac{p\cos\frac{\alpha+\delta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{2\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\delta}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right)}=$

$$\frac{p\cdot\cos\frac{\alpha+\delta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{\left(+\cos\left(\frac{\alpha+\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta-\gamma}{2}\right)-\cos\left(\frac{\alpha-\delta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)\right)}=\frac{p\cdot\cos\frac{\alpha+\delta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\delta}{2}\left(\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\cos\frac{\alpha-\delta}{2}\right)}$$

$$=\frac{p\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{4}\right)\cos\left(\frac{\beta+\delta-\gamma-\alpha}{4}\right)}=\frac{p\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\delta}{2}}.$$

Aehnlich ist $x=\frac{p\cdot\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}=\frac{p\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\sin\frac{\beta+\delta}{2}}$, $w=\frac{p\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\delta}{2}}{2\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\delta}{2}}$,