Das Aufsuchen der irrationalen Wurzeln einer Gleichung.

Wenn man in der allgemeinen Gleichung

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Rx + S = 0$$

$x = p + q$ setzt, so wird

$$\begin{aligned}
x^n &= (p+q)^n &&= p^n + np^{n-1}q + \tfrac{n.(n-1)}{1\,.\,2}p^{n-2}q^2 + \ldots \\
Ax^{n-1} &= A.(p+q)^{n-1} &&= Ap^{n-1} + A.(n-1)p^{n-2}q + A.\tfrac{(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2}p^{n-3}q^2 + \ldots \\
Bx^{n-2} &= B(p+q)^{n-2} &&= Bp^{n-2} + B.(n-2)p^{n-3}q + B.\tfrac{(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2}p^{n-4}q^2 + \ldots \\
Cx^{n-3} &= C.(p+q)^{n-3} &&= C.p^{n-3} + C.(n-3)p^{n-4}q + C\tfrac{(n-3)\,(n-4)}{1\,.\,2}p^{n-5}q^2 + \ldots \\
\cdot \quad &\quad \cdot &&\quad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot \quad &\quad \cdot &&\quad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot \quad &\quad \cdot &&\quad \cdot \qquad \cdot \\
\cdot \quad &\quad \cdot &&\quad \cdot \qquad \cdot \\
Rx &= R(p+q) &&= Rp + Rq \\
S &= &&= S
\end{aligned}$$

Werden diese Reihen nach den Potenzen von q addirt, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&1,\ p^n + Ap^{n-1} + Bp^{n-2} + Cp^{n-3} + \ldots, + \\
&2,\ \left[n.\,p^{n-1} + A(n-1)p^{n-2} + B.(n-2)p^{n-3} + C.(n-3)p^{n-4} + \ldots\right]q + \\
&3,\ \left[\tfrac{n.\,(n-1)}{1\,.\,2}p^{n-2} + A\tfrac{(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2}p^{n-3} + B.\tfrac{(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2}p^{n-4} + C.\tfrac{(n-3)\,(n-4)}{1\,.\,2}p^{n-5} + \ldots\right]q^2 + \\
&4,\ \left[\tfrac{n\,(n-1)\,(n-2)}{1\,.\,2\,.\,3}p^{n-3} + A.\tfrac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3}p^{n-4} + B.\tfrac{(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3}p^{n-5} + \ldots\right]q^3 + \\
&5,\ \left[\tfrac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}p^{n-4} + A.\tfrac{(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}p^{n-5} + \ldots\right]q^4 +
\end{aligned}$$

u. s. w. u. s. w.

In dieser Entwickelung ist die Reihe 1, die Summe aller derjenigen Glieder der ganzen Formel, welche bloß den ersten Summanden p der zweitheiligen Wurzel $(p+q)$ und nicht den zweiten q enthalten. Kann man nun p selbst, oder einen annähernden Werth dieser Größe bestimmen, so berechnet man die Reihe 1, subtrahirt die Summe von dem bekannten Gliede S und dividirt den Rest durch den Coefficienten von q der Reihe 2. Hierauf multiplicirt man den Divisor mit dem gefundenen Quotienten q, berechnet alle übrigen Reihen 3, 4, 5 u. s. w., addirt die sämmtlichen Resultate und zieht ihre Summe von dem Reste ab. Ist diese Summe größer als der Rest, so hat man den zweiten Theil q zu groß angenommen und muß die Rechnung mit einem kleineren Quotienten ausführen, ganz so, wie bei der Ausziehung der Quadrat- und Kubikwurzel. Hierauf betrachtet man die gefundenen Theile der Wurzel immer zusammen als den ersten Theil der ganzen Wurzel, als p, und sucht einen neuen, in der Form des zweiten Theiles q, indem man jedesmal durch die Reihe 2, ohne q, in den vorigen Rest dividirt und das Verfahren so lange fortsetzt, bis man den Werth von x entweder vollständig, oder doch so genau gefunden hat, wie man ihn haben will. Ist man dabei bis an die Einer gekommen, ohne daß die Rechnung aufgeht, so werden die Decimalstellen auf dieselbe Weise gefunden. Sind einzelne Coefficienten der ursprünglichen Gleichung negativ, so werden sie als solche in Rechnung gebracht, wodurch aber der Gang der Entwickelung keine Veränderung erleidet. Bei unvollständigen Gleichungen denkt man sich die fehlenden Potenzen von x mit dem Coefficienten Null verbunden, wodurch dann in der allgemeinen Formel alle diejenigen Glieder fortfallen, welche diese Coefficienten enthalten. Hat dagegen die Unbekannte in einer Gleichung einen negativen Werth, so bleiben zwar Formel und Rechnung im Allgemeinen unverändert, aber man muß darauf achten, daß alle geraden Potenzen einer negativen Größe positiv, alle ungeraden negativ werden.

Wir wollen jetzt diese Methode, welche zum Zweck hat, die Wurzeln der numerischen Gleichungen entweder vollkommen genau, oder, wenn dies nicht möglich ist, mit jeder beliebigen Annäherung an den wahren Werth, zu berechnen, auf einige Beispiele anwenden und dann ein Verfahren angeben, um die sämmtlichen reellen Wurzeln einer gegebenen Gleichung zu entdecken.

Die allgemeine Form einer Gleichung des dritten Grades ist: $x^3+Ax^2+Bx+C=0$.

Setzt man $x=p+q$, so ist

$$x^3=(p+q)^3=p^3+3p^2q+3pq^2+q^3$$
$$Ax^2=A(p+q)^2=Ap^2+2Apq+Aq^2$$
$$Bx=B(p+q)=Bp+Bq$$
$$C=\qquad C\text{, folglich gleich}$$

$$\begin{aligned}&p^3+Ap^2+Bp && (1)\\ &+\left(3p^2+2Ap+B\right)q && (2)\\ &+(3p+A)q^2 && (3)\\ &+\qquad q^3 && (4)=-C.\end{aligned}$$

Denselben Ausdruck gibt auch die allgemeine Formel, wenn man $n=3$, und die Coefficienten D, E u. s. w. $=0$ setzt. Bei einer unvollständigen Gleichung fallen auch noch diejenigen Glieder fort, deren Coefficienten, A oder B, fehlen.

1. Wenn $x^3\pm C=0$, so erhalten wir $p^3+3p^2q+3pq^2+q^3=\mp C$.

Es ergibt sich daraus, daß die bekannte Formel zur Ausziehung der Kubikwurzel nur ein specieller Fall der oben entwickelten allgemeinen Formel ist. Da aber jede kubische Gleichung drei Wurzeln hat, so dividirt man, wenn a der gefundene Werth von x war, mit $x-a=0$ in die gegebene Gleichung $x^3 \pm C=0$, wodurch man eine quadratische Gleichung erhält, deren Auflösung dann die beiden anderen, unmöglichen Wurzeln liefert.

2. $x^3+Ax^2-C=0$. Die Formel gibt hier:

$$p^3+Ap^2+(3p^2+2Ap)q+(3p+A)q^2+q^3=C.$$

Es sei z. B. $x^3+9x^2-25=0$ gegeben.

Die positive Wurzel liegt, wie später nachgewiesen wird, zwischen 1 und 2. Nimmt man $p=1$ an, so ist $p^3+Ap^2=10$ und $25-10=15$. Hierauf wird mit $3p^2+2Ap=21$ in 15 dividirt, wodurch $q=0{,}5$ gefunden wird. Die einzelnen Summanden sind dann:

$$1,\ (3p^2+2Ap)q = 21.0{,}5 = 10{,}5$$
$$2,\ (3p+A)q^2 = (3+9)(0{,}5)^2 = 3,$$
$$3,\ q^3 = (0{,}5)^3 = 0{,}125$$

welche addirt 13,625 und von 15 subtrahirt 1,375 geben.

Jetzt betrachtet man die gefundenen Theile $(1+0{,}5)$ zusammen als den ersten Theil der ganzen Wurzel, als p, und sucht den neuen, in der Form des zweiten Theiles q, indem man immer mit dem Summanden (1), ohne q, in den vorigen Rest dividirt. Mit $3p^2+2Ap=33{,}75$ wird also in 1,375 dividirt, wodurch $q=0{,}04$ gefunden wird. Die einzelnen Summanden sind:

$$1,\ (3p^2+2Ap)q = 33{,}75.\ 0{,}04 = 1{,}35$$
$$2,\ (3p+A)q^2 = (4{,}5+9).(0{,}04)^2 = 0{,}0216$$
$$3,\ q^3 = (0{,}04)^3 = 0{,}000064$$

welche addirt 1,371664 und von 1,375 subtrahirt 0,003336 geben.

p ist jetzt $= 1{,}54$

Mit $3p^2+2Ap=34{,}8348$ in 0,003336

dividirt gibt $0{,}00009=q$. Die Summe:

$$1,\ (3p^2 + 2Ap)q = 0{,}003135132$$

$$2,\ (3p + A)q^2 \quad = 0{,}\ldots\ldots110322$$

$$3,\ \qquad q^3 = 0{,}\ldots\ldots\ldots\ldots729$$

$$0{,}003135242322729$$

von $0{,}003336$ subtrahirt giebt $0{,}000200757677271$.

$$p = 1{,}54009.$$

Mit $3p^2 + 2Ap = 34{,}8372516243$ in den vorigen Rest dividirt giebt $0{,}000005 = q$.

Die Summe:

$$1,\ (3p^2 + 2Ap)q = 0{,}0001741862581215$$

$$2,\ (3p + A)q^2 \quad = 0{,}\ldots\ldots\ldots34050675$$

$$3,\ \qquad q^3 = 0{,}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots125$$

$$0{,}000174186598628375$$ von dem vorigen Rest

subtrahirt giebt $0{,}000026571078642626$.

$$p = 1{,}540095.$$

Mit $3p^2 + 2Ap = 34{,}837387827075$ in den vorigen Rest dividirt giebt

$0{,}0000007 = q$. Die Summe:

$$1,\ (3p^2 + 2Ap)q = 0{,}0000243861714789525$$

$$2,\ (3p + A)q^2 \quad = 0{,}\ldots\ldots\ldots\ldots667393965$$

$$3,\ \qquad q^3 = 0{,}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots343$$

$$0{,}0000243861781528924 93$$ von dem vorigen Rest

subtrahirt giebt $0{,}000002184900489732507$.

$$p = 1{,}5400957.$$

Mit $3p^2 + 2Ap = 34{,}83740689547547$ in den vorigen Rest dividirt giebt

$0{,}00000006 = q$ u. s. w.

Der positive Werth von x ist also $= 1{,}54009576\ldots$

Der eine negative Werth der Gleichung $x^2 + 9x^2 = 25$ liegt zwischen (-1) und (-2). Für $p = (-1)$ ist $p^3 + Ap^2 = 8$, und $25 - 8 = 17$. Mit $3p^2 + 2Ap = (-15)$ in 17 dividirt giebt $q = (-0{,}8)$. u. s. w., wie es folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{array}{l} 25 \,\|\, -1{,}872894.. \\ \underline{\;\;8\;\;} \\ 17 : (-15) = -0{,}8. \end{array}$$

1, $(3p^2 + 2Ap)q = +12$

2, $(3p + A)q^2 \quad = + \;3{,}84$

3, $\qquad\qquad q^3 \quad = -0{,}512$

$+1{,}672 : (-22{,}68) = -0{,}07.$

1, $(3p^2 + 2Ap)q = +1{,}5876$

2, $(3p + A)q^2 \quad = +0{,}01764$

3, $\qquad\qquad q^3 \quad = -0{,}000343$

$+0{,}067103 : (-23{,}169) = -0{,}002.$

1, $(3p^2 + 2Ap)q = +0{,}0463386$

2, $(3p + A)q^2 \quad = +0{,}00001356$

3, $\qquad\qquad q^3 \quad = -0,\ldots\ldots..8$

$+0{,}020750848 : (-23{,}182848) = 0{,}0008.$

1, $(3p^2 + 2Ap)q = +0{,}0185462784$

2, $(3p + A)q^2 \quad = +0,\ldots..216576$

3, $\qquad\qquad q^3 \quad = -0,\ldots\ldots..512$

$+0{,}002202404352 : (-23{,}18826048) = 0{,}00009.$

1, $(3p^2 + 2Ap)q = +0{,}0020869434432$

2, $(3p + A)q^2 \quad = +0,\ldots\ldots.2739096$

3, $\qquad\qquad q^3 \quad = +0,\ldots\ldots\ldots..729$

$+0{,}0001154335185\,69 : (-23{,}1888691437) = 0{,}000004.$

Die eine negative Wurzel ist also $= -1{,}872894\,.\,.$

Die zweite negative Wurzel wird auf ähnliche Weise gefunden:

$$25 \,\|\, -8{,}6672007\ldots$$
$$\underline{64}$$
$$-39 : 48 = -0{,}06.$$

$1,\ (3p^2 + 2Ap)q = -28{,}8$

$2,\ (3p + A)q^2 = -\ 5{,}4$

$3,\ q^3 = -\ 0{,}216$

$-\ 4{,}584 : 67{,}08 = -0{,}06.$

$1,\ (3p^2 + 2Ap)q = -\ 4{,}0248$

$2,\ (3p + A)q^2 = -\ 0{,}06048$

$3,\ q^3 = -\ 0{,}000216$

$-\ 0{,}498504 : 69{,}1068 = -0{,}007.$

$1,\ (3p^2 + 2Ap)q = -\ 0{,}4837476$

$2,\ (3p + A)q^2 = -\ 0,\ldots83202$

$3,\ q^3 = -\ 0,\ldots\ldots343$

$-\ 0{,}013924037 : 69{,}344667 = -0{,}0002.$

$1,\ (3p^2 + 2Ap)q = -\ 0{,}0138689334$

$2,\ (3p + A)q^2 = -\ 0,\ldots\ldots68004$

$3,\ q^3 = -\ 0,\ldots\ldots\ldots..8$

$-\ 0{,}000054423552 : 69{,}35146752 = 0{,}0000007.$

Anmerkung. Soll die gegebene Gleichung $x^3 + 9x^2 - 25 = 0$ nach der Cardam'schen Formel aufgelöst werden, so schafft man das zweite Glied fort, indem man $x = y - 3$ einsetzt, wodurch $y^3 - 27y + 29 = 0$ erhalten wird. In der Gleichung $y^3 + Ay + B = 0$ ist bekanntlich

$$y=\sqrt[3]{-\frac{B}{2}+\sqrt{\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{4}}}+\sqrt[3]{-\frac{B}{2}-\sqrt{\frac{A^3}{27}+\frac{B^2}{4}}}.$$

Setzt man aber die Werthe: $A = -27$, $B = 29$ ein, so ist $\frac{A^3}{27}$ negativ und größer als $\frac{B^2}{4}$, mithin die Quadratwurzel daraus unmöglich. In diesem Falle ist die Cardanische Formel nicht anwendbar (Casus irreducibilis). Wir nehmen daher $y = r.\ \text{Cosin.}\ \alpha$ an und setzen diesen Werth in die Gleichung $y^3 + Ay + B = 0$ ein, wodurch $r^3.\ \text{Cos.}\ \alpha^3 + A.\ r.\ \text{Cos.}\ \alpha + B = 0$ wird. Es ist aber $\text{Cos.}\ 3\alpha = 4\ \text{Cos.}\ \alpha^3 - 3\ \text{Cos.}\ \alpha$ oder $\text{Cos.}\ \alpha^3 = \frac{1}{4}\ \text{Cos.}\ 3\alpha + \frac{3}{4}\ \text{Cos.}\ \alpha$, mithin $r^3(\frac{1}{4}\ \text{Cos.}\ 3\alpha + \frac{3}{4}\ \text{Cos.}\ \alpha) + A.r.\ \text{Cos.}\ \alpha + B = 0$ oder $\frac{r^3}{4}\ \text{Cos.}\ 3\alpha + \left(\frac{3r^3}{4} + A.r\right)\text{Cos.}\ \alpha + B = 0$. Setzt man $\frac{3r^3}{4} + A.r = 0$ (1) und

$$\frac{r^3}{4}\ \text{Cos.}\ 3\alpha + B = 0 \quad (2)$$

so ist 1, $r = \sqrt{-\frac{4A}{3}}$ und nach (2) $\text{Cos.}\ 3\alpha = \frac{-4B}{r^3} = \sqrt{-\frac{27B^2}{4A^3}}$

Cos. 3α ist aber eigentlich Cos. $(3\alpha + 2n\pi)$, folglich erhält α die drei verschiedenen Werthe:

1, Cos. 3α;
2, Cos. $(\alpha + 120^0) = -$ Cos. $(60^0 - \alpha)$;
3, Cos. $(\alpha + 240^0) = -$ Cos. $(60^0 + \alpha)$;

aber auch nur diese drei Werthe, weil die folgenden Ausdrücke immer wieder dasselbe geben.

In der abgeleiteten Gleichung $y^3 - 27y + 29 = 0$ ist $A = -27$, $B = +29$,

also $r = \sqrt{-\frac{4A}{3}} = \sqrt{36} = \pm 6$;

$3\alpha = 57^0\ 31'\ 4{,}2''$

$$\alpha = \begin{cases} 19^0\ 10'\ 21{,}4'' \\ 79^0\ 10'\ 21{,}4'' \\ 40^0\ 49'\ 38{,}6'',\ \text{mithin} \end{cases}$$

1, $y_1 = r.\ \text{Cos.}\ \alpha = \pm 6.\ \text{Cos.}\ 19^0\ 10'\ 21{,}4'' = \pm 5{,}667202$
2, $y_2 = r.\ \text{Cos.}\ (60^0 + \alpha) = \pm 6.\ \text{Cos.}\ 79^0\ 10'\ 21{,}4'' = \pm 1{,}127105.$
3, $y_3 = r.\ \text{Cos.}\ (60^0 - \alpha) = \pm 6.\ \text{Cos.}\ 40^0\ 49'\ 38{,}6'' = \pm 4{,}540097.$

Die späteren Untersuchungen zeigen, daß von diesen Wurzeln nur folgende drei brauchbar sind:

$y_1 = -5{,}667202$
$y_2 = +1{,}127105$
$y_3 = +4{,}540097.$

Es war aber $x = y - 3$, mithin sind die drei Wurzeln der ursprünglichen Gleichung $x^3 + 9x^2 - 25 = 0$:

$x_1 = -8{,}667202$
$x_2 = -1{,}872895$
$x_3 = -1{,}540096.$

Für die Gleichung $x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ geht die allgemeine Formel in folgende über:

$p^4 + Ap^3 + Bp^2 + Cp + (4p^3 + 3Ap^2 + 2Bp + C).q + (6p^2 + 3Ap + B).q^2 + (4p + A).q^3$
$+ q^4 = -D.$ Es sei z. B. $x^4 - 3x^3 - 30x^2 - 21x + 25 = 0$ gegeben.

Da hier $A = -3$, $B = -30$, $C = -21$ ist, so erhalten wir:

$$p^4 - 3p^3 - 30p - 21p$$
$$+ (4p^3 - 9p^2 - 60p - 21)q \quad (1)$$
$$+ (6p^2 - 9p - 30)q^2 \quad (2)$$
$$+ (4p - 3)q^3 \quad (3)$$
$$+ \quad q^4 \quad (4) = -25.$$

Die Ausrechnung giebt:

$$-25 \parallel 7{,}38516\,..$$
$$-245$$
$$-220 : 490 = 0{,}3$$

$$1,\ (4p^3 - 9p^2 - 60p - 21)q = 147$$
$$2,\ (6p^2 - 9p - 30)q^2 = 18{,}09$$
$$3,\ (4p - 3)q^3 = 0{,}675$$
$$4,\ q^4 = 0{,}0081$$
$$54{,}2269 : 617{,}458 = 0{,}08$$

$$1,\ (4p^3 - 9p^2 - 60p - 21)q = 49{,}39664$$
$$2,\ (6p^2 - 9p - 30)q^2 = 1{,}433856$$
$$3,\ (4p - 3)q^3 = 0{,}0134144$$
$$4,\ q^4 = 0{,}\ldots.4096$$
$$3{,}38294864 : 653{,}809488 = 0{,}005.$$

$$1, (4p^3 - 9p^2 - 60p - 21)q = 3{,}269047440$$

$$2, \quad (6p^2 - 9p - 30)q^2 = 0{,}0057591600$$

$$3, \quad (4p - 3)q^3 = 0{,}.....331500$$

$$4, \quad q^4 = 0{,}.........625$$

$$0{,}108138724375 : 656{,}1151415 = 0{,}0001.$$

$$1, (4p^3 - 9p^2 - 60p - 21)q = 0{,}065611514150$$

$$2, \quad (6p^2 - 9p - 30)q^2 = 0{,}.....23076435$$

$$3, \quad (4p - 3)q^3 = 0{,}..........2644$$

$$4, \quad q^4 = 0{,}...............1$$

$$0{,}04252490255550599 : 656{,}161295166204 = 0{,}00006.$$

u. s. w.

Bevor wir jetzt zu der zweiten Aufgabe schreiten, sämmtliche Wurzeln einer Gleichung zu entdecken, müssen wir noch einige Sätze vorausschicken.

1. Sind $x = a$, $x = b$, $x = c$, u. s. w. die Wurzeln einer Gleichung, so wird bekanntlich die entsprechende Gleichung erhalten, wenn man die Faktoren $x - a$, $x - b$, $x - c$, ... mit einander multiplicirt, das Produkt nach den Potenzen von x ordnet und gleich Null setzt. Die allgemeine Form dieser Gleichung ist dann:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots + S = 0, \text{ worin}$$

$$A = a + b + c + d \ldots = C_1^n (a, b, c, \ldots)$$

$$B = ab + ac + \ldots = C_2^n (a, b, c, \ldots)$$

$$C = abc + abd + \ldots = C_3^n (a, b, c, \ldots)$$

$$\vdots$$

$$S = abcd \ldots = C_n^n (a, b, c, \ldots).$$

Der Coefficient A besteht also aus der Summe aller Wurzeln oder der Combinationen derselben zu 1, mit dem entgegengesetzten Zeichen; der Coefficient B aus der Summe der Combinationen aller Wurzeln zu 2, mit demselben Zeichen; der Coefficient C aus der Summe der Combinationen der Wurzeln zu 3, mit dem entgegengesetzten Zeichen, u. s. w.; endlich der letzte Coefficient aus der Combination der Wurzeln zu n, d. h. aus dem Produkte aller Wurzeln, mit demselben oder entgegengesetzten Zeichen genommen, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Sind z. B. $x = 4$, $x = 5$ und $x = -3$ die Wurzeln einer Gleichung, so giebt $(x - 4)(x - 5)(x + 3)$ oder $x^3 - 6x^2 - 7x + 60 = 0$ die entsprechende Gleichung, worin $-6 = -(4 + 5 - 3)$, $-7 = +(4.5 - 3.4 - 3.5)$, $+60 = +(3.4.5)$ ist.

2. Aendert man in einer Gleichung die Zeichen des zweiten, vierten, sechsten, ... Gliedes, so erhält man eine Gleichung, in welcher die Wurzeln die entgegengesetzten Zeichen haben. So hat z. B. die Gleichung $x^3 + 6x^2 - 7x - 60 = 0$ die Wurzeln -4, -5, und $+3$, dagegen $x^3 - 6x^2 - 7x + 60 = 0$ die Wurzeln $+4$, $+5$ und -3. Es ist also die Aufsuchung negativer Wurzeln leicht zu vermeiden.

3. Eine Gleichung, in welcher kein Glied fehlt, kann nicht mehr positive Wurzeln, als Zeichenwechsel, und nicht mehr negative Wurzeln haben, als Zeichenfolgen vorhanden sind. So hat die Gleichung $x^3 - 6x^2 - 7x - 60 = 0$ zwei positive und eine negative Wurzel. — Fehlt in einer Gleichung kein Glied und sind sämmtliche Wurzeln reell, so sind genau so viele positive Wurzeln, als Zeichenwechsel, und so viele negative Wurzeln als Zeichenfolgen vorhanden. Die fehlenden Glieder einer Gleichung können durch ± 0 ergänzt werden.

4. Setzt man in einer Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + \ldots + S = 0$ für x nach und nach die beiden Werthe a und b und erhält dadurch Resultate mit entgegengesetzten Zeichen, so liegt nothwendig zwischen a und b wenigstens eine Wurzel der Gleichung. Behält dagegen die Gleichung für die beiden Werthe $x = a$ und $x = b$ einerlei Zeichen, so ist es zwar möglich, daß keine Wurzel zwischen a und b liegt, es können aber auch 2,4.., überhaupt eine gerade Anzahl von Wurzeln zwischen beiden Werthen liegen. —

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun zur Berechnung der Wurzeln in Zahlen übergehen. Zuerst kommt es darauf an, dem Werthe irgend einer reellen Wurzel nur erst nahe zu kommen, d. h. etwa zwei ganze Zahlen zu finden, zwischen welchen nothwendig eine oder mehrere Wurzeln liegen müssen, zweitens aber, diese Grenzen enger zusammenzuziehen. Die folgende Methode ist in der Regel die einfachste und bequemste. Man verwandelt die gegebene Gleichung

$$x^n + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1} x + A_n = 0,$$

die wir auch der Kürze wegen durch $X = 0$ bezeichnen werden, durch die Substitution von $x = y + u$ in jene

$$(y + u)^n + A_1 (y + u)^{n-1} + A_2 (y + u)^{n-2} + \ldots + A_{n-1}(y + u) + A_n = 0,$$

oder, wenn man die Entwickelung nach S. 3 ausführt, und die Reihen nach den Potenzen von y ordnet in

$$F + F_1 y + F_2 y^2 + F_3 y^3 + \ldots + F_{n-1} y^{n-1} + F_n y^n = 0,$$

wobei F, F_1, ..., folgende Werthe haben:

$$F = u^n + A_1 u^{n-1} + A_2 u^{n-2} + \ldots + A_{n-1} u + A_n$$

$$F_1 = nu^{n-1} + (n-1) A_1 u^{n-2} + (n-2) A_2 u^{n-3} + \ldots + A_{n-1}$$

$$F_2 = \frac{n.(n-1)}{1 \,.\, 2} u^{n-2} + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \,.\, 2} A_1 u^{n-3} + \ldots + A_{n-2}$$

$$\vdots$$

$$F_{n-1} + \frac{n.(n-1)\ldots 3 \,.\, 2}{1 \,.\, 2 \ldots (n-1)} u + A_1 = nu + A_1$$

$$F_n = \frac{n\,.\,(n-1)\ldots 2\,.\,1}{1\,.\,2\ldots(n-1)\,.\,n} = 1.$$

Das Gesetz, nach welchem die Coefficienten F, F_1 ... einer aus dem andern abgeleitet werden können, ist leicht zu übersehen. Das erste Glied F ist die ursprüngliche Gleichung, nur daß man statt x überall u setzen muß. Aus diesem Polynom wird der nächste Coefficient F_1 abgeleitet, indem man überall den Exponenten von u zum Coefficienten macht und den früheren Exponenten um eine Einheit vermindert. Eben so werden F_2 aus F_1, F_3 aus F_2 u. s. w. abgeleitet, wobei noch zu bemerken ist, daß bei der ersten Ableitung jeder Coefficient durch 1, bei der zweiten durch 2, bei der dritten durch 3 u. s. w., bei der nten durch n zu dividiren ist, wodurch als letzter Coefficient $\frac{n\,.\,(n-1)\ldots 3\,.\,2\,.\,1}{1\,.\,2\ldots(n-1)n}$ oder 1 erhalten wird. Setzt man hierauf für u eine Zahl a in die Polynome F, F_1, F_2, ... und schreibt die Zeichen derselben neben einander, verfährt eben so mit einer zweiten Zahl b, so giebt der Unterschied in der Zahl der Zeichenwechsel die zwischen a und b liegenden reellen Wurzeln an. Einige Beispiele mögen dieses Verfahren erläutern. Es sei die Gleichung $x^3 + 9x^2 - 25 = 0$ gegeben. Hier ist

$$F = u^3 + 9u^2 - 25$$
$$F_1 = 3u^2 + 18u$$
$$F_2 = 3u + 9$$
$$F_3 = 1.$$

Diese Polynome geben für $u = 0$ die Zeichenwechsel: $- \pm + +$ (einen Zeichenwechsel), indem für F_2 ± 0 geschrieben wird; für $u = 1$: $- + + +$ (ebenfalls einen Zeichenwechsel), für $u = 2$: $+ + + +$ (keinen Zeichenwechsel). Auch überzeugt man sich leicht, daß für jede noch so große Zahl keine Zeichenveränderung eintritt. Da zwischen $u = 0$ und $u = 1$ keine Zeichenveränderung eingetreten ist, so liegt auch zwischen 0 und 1 keine Wurzel; zwischen 1 und 2 dagegen muß eine reelle Wurzel liegen, weil ersterer Werth einen Zeichenwechsel mehr giebt. Zugleich sehen wir aber auch, daß 2 die obere Grenze der positiven Wurzeln ist, weil sämmtliche Coefficienten der abgeleiteten Gleichung $19 + 48y + 15y^2 + y^3$ positiv sind.

Um die negativen Wurzeln der Gleichung zu finden, verwandeln wir sie, durch Aenderung der Vorzeichen des zweiten und vierten Gliedes, in positive. Wir erhalten dann $x^3 - 9x^2 + 25 = 0$. Hier ist

$$F = u^3 - 9u^2 + 25$$
$$F_1 = 3u^2 - 18u$$
$$F_2 = 3u - 9$$
$$F_3 = 1.$$

Für $u = 0$ geben die Polynome

$+ \pm - +$ (2 Wechsel);

für $u = 1$: $+ - - +$ (2 Wechsel);

für $u = 10$: $+ + + +$ (kein Wechsel);

dasselbe erfolgt für jede größere Zahl. Es können also zwei reelle Wurzeln zwischen 1 und 10 liegen. Für $u = 5$ sind die Zeichen: $- - - +$ (1 Wechsel), mithin liegt die eine Wurzel zwischen 1 und 5, die andere zwischen 5 und 10. Da aber die ursprüngliche Gleichung dieselben Wurzeln, nur mit entgegengesetzten Zeichen, hat, so liegt die eine negative Wurzel der Gleichung $x^3 + 9x^2 - 25 = 0$ zwischen -1 und -5, die andere zwischen -5 und -10. In der That haben wir oben die drei Wurzeln:

$$x_1 = +1,54009576$$
$$x_2 = -1,872894$$
$$x_3 = -8,6672007$$

gefunden.

2. Es sei $x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 80 = 0$. Die vier Zeichenwechsel: $+ - + - +$ zeigen an, daß alle vier Wurzeln positiv sind. Hier ist

$$F = u^4 - 12u^3 + 54u^2 - 108u + 80$$
$$F_1 = 4u^3 - 36u^2 + 108u - 108$$
$$F_2 = 6u^2 - 36u + 54$$
$$F_3 = 4u - 12$$
$$F_4 = 1.$$

Es giebt:

1, $u = 0$: $+ - + - +$ (4 Wechsel),

2, $u = 10$: $+ + + + +$ (kein Wechsel),

also können vier Wurzeln zwischen 0 und 10 liegen, und zugleich ist 10 die obere Grenze der Wurzeln.

3, $u = 5$: $+ + - + +$ (2 Wechsel),

also liegen zwei Wurzeln zwischen 0 und 5 und zwei zwischen 5 und 10.

4, $u = 1$: $+ - + - +$ (4 Wechsel),

5, $u = 2$: $F = 0$,

mithin ist 2 selbst eine Wurzel,

6, $u = 3$: $- - \pm \pm +$,

weil F_2 und F_3 Null geben. Je nachdem man das obere oder das untere Zeichen nimmt, erhält man 1, 2, oder 3 Wechsel — eine unbestimmte Anzahl, welche auf unmögliche Wurzeln hinweist, — und in der That sind diese beiden Wurzeln $3 - \sqrt{-1}$ und $3 + \sqrt{-1}$.

Die vier Wurzeln 2, 4, $3 - \sqrt{-1}$ und $3 + \sqrt{-1}$ geben auch

$$(x - 2)(x - 4)(x - 3 + \sqrt{-1})(x - 3 - \sqrt{-1})$$

oder:

$$x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 80 = 0.$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Verfahrens beruht darauf, daß die gegebene Gleichung $X = 0$ durch die Substitution von $x = y + u$ in jene

$$F + F_1 y + F_2 y^2 + \ldots + F_{n-1} y^{n-1} + y^n = 0.$$

wobei $F, F_2 \ldots$ die Seite 13 angegebene Bedeutung haben, verwandelt wird. Hat dann die Gleichung $X = 0$ bloß die reellen Wurzeln $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ von denen z. B. x_2 und x_3 zwischen a und b liegen sollen, so daß die numerischen Werthe folgende Reihe bilden:

$$x_1,\ a,\ x_2\ x_3\ b,\ x_4, \ldots,$$

so erhält die Gleichung $Y = 0$ für die beiden Substitutionen $u = a$ und $u = b$, respective die Wurzeln:

$$x_1 - a,\ x_2 - a,\ x_3 - a,\ x_4 - a,\ \ldots$$
$$\text{und } x_1 - b,\ x_2 - b,\ x_3 - b,\ x_4 - b,\ \ldots$$

Hierbei haben je zwei unter einander stehende Wurzeln gleiche Zeichen, wenn sie aus den Wurzeln x_1, x_4, welche außerhalb a und b liegen, oder ungleiche Zeichen, wenn sie aus jenen x_2 und x_3, welche innerhalb dieser beiden Zahlen liegen, gebildet sind. Wären z. B. $x_1 = 1$, $x_2 = 4$, $x_3 = 6$, $x_4 = 8$, ... die Wurzeln einer Gleichung, und hätten wir $a = 2$ und $b = 7$ in die abgeleitete Gleichung eingesetzt, so würden die Wurzeln

$$1 - 2,\ 4 - 2,\ 6 - 2,\ 8 - 2,\ \ldots.$$
$$\text{und } 1 - 7,\ 4 - 7,\ 6 - 7,\ 8 - 7,\ \ldots. \text{ die Zeichen}$$
$$\begin{array}{cccc} - & + & + & +\ .. \\ - & - & - & + \end{array}$$

haben, wobei die unter einander stehenden ersten und vierten Wurzeln gleiche Zeichen, die zweiten und dritten aber ungleiche Zeichen besitzen. Welche Vorzeichen aber auch die Wurzeln x_1, x_2, ... haben mögen, immer giebt die Substitution $u = b$ zwei positive Wurzeln mehr oder weniger als jene $u = a$, wenn zwischen a und b zwei Wurzeln liegen. Da wir aber sämmtliche Wurzeln der Gleichung $Y = 0$ als reell annehmen, so besitzt diese auch so viele Zeichenwechsel, als positive Wurzeln vorhanden sind. Die Substitution von $u = b$ muß also zwei Zeichenwechsel mehr oder weniger, als jene von $u = a$ hervorbringen. Hätten wir dagegen die Werthe $c = 5$ und $b = 7$ substituirt, so wären die Wurzeln der Gleichung $Y = 0$:

$$1 - 5,\ 4 - 5,\ 6 - 5,\ 8 - 5,\ \ldots$$
$$\text{und } 1 - 7,\ 4 - 7,\ 6 - 7,\ 8 - 7,\ \ldots, \text{ also}$$
$$\begin{array}{cccc} - & - & + & + \quad \text{und} \\ - & - & - & + \end{array}$$

d. h. die Substitution von $b = 7$ hätte eine positive Wurzel weniger, mithin auch die Gleichung einen Zeichenwechsel weniger als die durch $u = 5$ abgeleitete. Diese Schlüsse können leicht auf jede beliebige Zahl von Wurzeln, welche zwischen a und b liegen, angewendet werden.