

Ueber die Flächen zweiten Grades.

§ 1. Die allgemeine Gleichung zweiten Grades mit drei Variablen ist

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (1).$$

Die Funktion auf der linken Seite wird gelegentlich abkürzend mit $f(x, y, z)$ bezeichnet werden.

Die Gleichung (1.) stellt eine Fläche dar, welche durch jede einer Coordinaten-Ebene parallele Ebene in einer Linie zweiten Grades geschnitten wird. — Da jede Ebene als Coordinaten-Ebene angenommen werden kann, und da der Uebergang von einem Parallel-Coordinaten-Systeme zu irgend einem andern Parallel-Coordinaten-Systeme weder den Charakter der Gleichung als einer algebraischen noch ihren Grad ändert, so folgt daraus, dass die Fläche durch jede Ebene in einer Linie zweiten Grades geschnitten wird. Diese kann selbstverständlich alle Spezial- und Grenzfälle darbieten, insbesondere auch imaginär werden. — Demzufolge wird eine Fläche zweiten Grades von jeder geraden Linie in zwei Punkten geschnitten; es kann die Besonderheit eintreten, dass, während die Linie in endlicher Entfernung liegt, einer der beiden Punkte in unendlicher Entfernung liegt; es kann die andere Besonderheit eintreten, dass die beiden Punkte in einen zusammenfallen oder dass sie imaginär werden.

§ 2. Durch Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten in den Punkt (p, q, r) ohne Aenderung der Axenrichtungen werden die sechs Glieder zweiter Dimension nicht geändert, die Coefficienten der drei Glieder erster Dimension werden

$$\begin{aligned} & 2(a_{11}p + a_{12}q + a_{13}r + a_{14}) \\ & 2(a_{21}p + a_{22}q + a_{23}r + a_{24}) \\ & 2(a_{31}p + a_{32}q + a_{33}r + a_{34}) \end{aligned}$$

wobei zu bemerken ist, dass $a_{ii} = a_{ii}$ ist. — Wenn p, q, r so bestimmt werden, dass jene drei Coefficienten gleichzeitig Null werden, so ist der Punkt (p, q, r) der Mittelpunkt der Fläche, indem dann jede durch diesen Punkt gezogene Sehne der Fläche von ihm halbiert wird.

Die Fläche hat einen bestimmten Mittelpunkt in endlicher Entfernung, wenn der gemeinsame Nenner der durch diese drei Bedingungen bestimmten Werthe von p, q, r von Null verschieden ist. — Dieser gemeinsame Nenner ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (2)$$

Wenn demnach diese Zahl von Null verschieden ist, so ist die Fläche eine Mittelpunktsfläche; sie ist es nicht, wenn die Zahl gleich Null ist.

§ 3. Welches ist der geometrische Ort der Mitte einer Sehne von gegebener Richtung in einer Fläche zweiten Grades?

Die Gleichungen der Sehne seien

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} \quad (3)$$

die Gleichung der Fläche sei die (1) in § 1.

Man erhält die Durchschnittspunkte der Linie (3) mit der Fläche (1), indem man diejenigen Werthe von $x y z$, welche diesen beiden Oertern gemeinsam sind, d. h. indem man die den Gleichungen (1) und (3) gemeinsamen Wurzeln bestimmt. Man erhält dadurch zwei Werthegruppen von $x y z$, den Endpunkten der Sehne entsprechend. — Man erhält die Coordinaten der Mitte der Sehne, indem man die halbe Summe je zweier gleichnamigen Coordinaten der Endpunkte der Sehne nimmt. Die Elimination gewinnt Symmetrie und dadurch Einfachheit, indem man eine vierte Variable λ einführt, welche so bestimmt ist, dass

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c} = \lambda \quad (4).$$

Es ist dann λ der Entfernung des Punktes $x y z$ vom Punkte $x_1 y_1 z_1$ proportional. Die Elimination ergibt dann zwei Werthe für λ , deren halbe Summe dem Abstände der Mitte der Sehne von $x_1 y_1 z_1$ proportional ist. Die Gleichungen der Linie (3) sind

$$\begin{aligned} x &= x_1 + a\lambda \\ y &= y_1 + b\lambda \\ z &= z_1 + c\lambda \end{aligned}$$

Durch Substitution in die Gleichung (1) erhält man

$$\begin{aligned} &(a_{11} a^2 + a_{22} b^2 + a_{33} c^2 + 2a_{12} ab + 2a_{13} ac + 2a_{23} bc) \lambda^2 \\ + 2 &\left\{ a_{11} ax_1 + a_{22} by_1 + a_{33} cz_1 + a_{12} (ay_1 + bx_1) + a_{13} (az_1 + cx_1) + a_{23} (bz_1 + cy_1) \right\} \lambda \\ &+ a_{14} a + a_{24} b + a_{34} c \\ &+ f(x_1, y_1, z_1) = 0. \end{aligned}$$

Bezeichnet man die Coordinaten der Mitte der Sehne mit $x' y' z'$ und entsprechend die halbe Summe der beiden Werthe von λ mit λ' , so hat man die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} x' &= x_1 + a\lambda' \\ y' &= y_1 + b\lambda' \\ z' &= z_1 + c\lambda' \\ &(a_{11} a^2 + a_{22} b^2 + a_{33} c^2 + 2a_{12} ab + 2a_{13} ac + 2a_{23} bc) \lambda'^2 \\ + &\left\{ a_{11} ax_1 + a_{22} by_1 + a_{33} cz_1 + a_{12} (ay_1 + bx_1) + a_{13} (az_1 + cx_1) + a_{23} (bz_1 + cy_1) \right\} \lambda' \\ &+ a_{14} a + a_{24} b + a_{34} c \\ &= 0. \end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen vier Gleichungen $x_1 y_1 z_1$ (wodurch gleichzeitig λ' herausfällt) d. h. macht man die Beziehung zwischen den Variablen und den Constanten unabhängig von denjenigen Grössen, welche nur einer individuellen Lage der Sehne angehören, so erhält man die Gleichung des geometrischen Ortes der Mitte der Sehne, deren Richtung (abc) ist. Nach Weglassung der Accente wird die Gleichung:

$$(a_{11} a + a_{12} b + a_{13} c) x + (a_{21} a + a_{22} b + a_{23} c) y + (a_{31} a + a_{32} b + a_{33} c) z + (a_{41} a + a_{42} b + a_{43} c) = 0. \quad (5)$$

Der geometrische Ort der Mitte einer Sehne von gegebener Richtung ist also eine Ebene. — Wenn die Fläche eine Mittelpunktsfläche ist, so ist nothwendig der Mittelpunkt in der Ebene (5) enthalten. Die Ebene enthält also dann unendlich viele Durchmesser. — Sie enthält aber auch in jedem anderen Falle unendlich viele Durchmesser und heisst deshalb Durchmesserenebene.

Bezeichnet man eine in der Ebene (5) enthaltene Richtung mit (a_1, b_1, c_1) , so ist diese Beziehung dargestellt durch die Gleichung

$$(a_{11} a + a_{12} b + a_{13} c) a_1 + (a_{21} a + a_{22} b + a_{23} c) b_1 + (a_{31} a + a_{32} b + a_{33} c) c_1 = 0.$$

Diese Gleichung erweist sich als symmetrisch in Bezug auf $a b c$ einerseits und $a_1 b_1 c_1$ andererseits, und lässt sich demzufolge schreiben

$$(a_{11} a_1 + a_{12} b_1 + a_{13} c_1) a + (a_{21} a_1 + a_{22} b_1 + a_{23} c_1) b + (a_{31} a_1 + a_{32} b_1 + a_{33} c_1) c = 0$$

d. h. die Richtung $(a b c)$ ist in dem geometrischen Orte der Mitte der Sehne von der Richtung $a_1 b_1 c_1$ enthalten. — Deshalb nennt man die Richtung $(a b c)$ und die Stellung der Ebene (5) conjugirt und hat den Satz:

Jeder Richtung ist in Bezug auf eine Fläche zweiten Grades eine Stellung derart conjugirt, dass die allen Richtungen dieser Stellung conjugirten Stellungen jene eine Richtung gemeinsam haben; und umgekehrt.

§ 4. Unter welchen Bedingungen steht eine Richtung $(a b c)$ auf der conjugirten Stellung senkrecht?

Die Bedingung ist unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten

$$\frac{a_{11} a + a_{12} b + a_{13} c}{a} = \frac{a_{21} a + a_{22} b + a_{23} c}{b} = \frac{a_{31} a + a_{32} b + a_{33} c}{c} \quad (6)$$

Um diejenige Werthegruppe $a b c$ zu bestimmen, welche diesen beiden Bedingungen gleichzeitig genügt, führt man eine vierte Unbekannte λ ein, welche so bestimmt ist, dass

$$\frac{a_{11} a + a_{12} b + a_{13} c}{a} = \frac{a_{21} a + a_{22} b + a_{23} c}{b} = \frac{a_{31} a + a_{32} b + a_{33} c}{c} = \lambda. \quad (7)$$

Diese Gleichungen kann man in folgender Form schreiben:

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda) a + a_{12} b + a_{13} c &= 0 \\ a_{21} a + (a_{22} - \lambda) b + a_{23} c &= 0 \\ a_{31} a + a_{32} b + (a_{33} - \lambda) c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Die Bedingung, dass diese drei Gleichungen gleichzeitig erfüllt sein können, ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf λ vom dritten Grade, hat also jedenfalls eine reelle Wurzel. Es lässt sich zeigen, dass alle drei Wurzeln reell sind.

Die Gleichung (9) lässt sich folgendermassen schreiben:

$$(\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - (\lambda - a_{11})a_{23}^2 - (\lambda - a_{22})a_{13}^2 - (\lambda - a_{33})a_{12}^2 - 2a_{12}a_{23}a_{31} = 0$$

Dieselbe lässt sich folgendermassen ordnen:

$$(\lambda - a_{11}) \{ (\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - a_{23}^2 \} - (\lambda - a_{22})a_{13}^2 - (\lambda - a_{33})a_{12}^2 - 2a_{12}a_{23}a_{31} = 0 \quad (10)$$

Die Zahl $(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - a_{23}^2$

lässt sich stets in zwei reelle Faktoren

$$(\lambda - \beta)(\lambda - \gamma)$$

zerlegen, wo die kleinere der beiden Zahlen β und γ (es sei β) kleiner als a_{22} und als a_{33} , die grössere $\gamma > a_{22}$ und $> a_{33}$ ist. Die linke Seite der Gleichung (10) nimmt dann für

$$\lambda = -\infty \text{ den Werth } -\infty$$

$$\lambda = \beta \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad + (\sqrt{a_{22} - \beta} \cdot a_{13} - \sqrt{a_{33} - \beta} \cdot a_{12})^2$$

$$\lambda = \gamma \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad - (\sqrt{\gamma - a_{22}} \cdot a_{13} + \sqrt{\gamma - a_{33}} \cdot a_{12})^2$$

$$\lambda = +\infty \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad +\infty$$

an, mithin hat die Gleichung (9) eine reelle Wurzel zwischen $-\infty$ und β , eine zwischen β und γ und eine zwischen γ und $+\infty$. — Es ergibt sich demnach, dass, mit Ausnahme besonderer Fälle, welche sogleich zu erörtern sind, λ drei verschiedene Werthe hat. Wenn aber λ drei verschiedene Werthe hat, so ergeben sich drei verschiedene Werthegruppen für a, b, c . — Es giebt demnach im Allgemeinen in einer Fläche zweiten Grades drei Richtungen, welche auf der conjugirten Ebene senkrecht stehen. — Jede solche Richtung heisst Hauptrichtung. — Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Wurzeln der Gleichung (9) und $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2), (a_3, b_3, c_3)$ die drei ihnen entsprechenden Richtungen. — Dann wird z. B. die erste der drei Gleichungen (8) sowohl durch a_1, b_1, c_1, λ_1 als durch a_2, b_2, c_2, λ_2 befriedigt, und es ist also

$$(a_{11} - \lambda_1) a_1 + a_{12} b_1 + a_{13} c_1 = 0$$

$$(a_{11} - \lambda_2) a_2 + a_{12} b_2 + a_{13} c_2 = 0$$

Durch Elimination von a_{11} erhält man

$$(\lambda_2 - \lambda_1) a_1 a_2 + a_{12} (b_1 a_2 - b_2 a_1) + a_{13} (c_1 a_2 - c_2 a_1) = 0$$

Ebenso erhält man aus der zweiten der Gleichungen (8)

$$(\lambda_2 - \lambda_1) b_1 b_2 + a_{12} (a_1 b_2 - a_2 b_1) + a_{23} (c_1 b_2 - c_2 b_1) = 0$$

und aus der dritten

$$(\lambda_2 - \lambda_1) c_1 c_2 + a_{13} (a_1 c_2 - a_2 c_1) + a_{23} (b_1 c_2 - b_2 c_1) = 0.$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen bekommt man

$$(\lambda_2 - \lambda_1) (a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2) = 0$$

Ebenso

$$(\lambda_1 - \lambda_3) (a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3) = 0$$

$$(\lambda_3 - \lambda_2) (a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3) = 0.$$

Folglich, wenn die drei Wurzeln der Gleichung (9) verschieden sind

$$\left. \begin{aligned} a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 &= 0 \\ a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3 &= 0 \\ a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

d. h. die drei Hauptrichtungen stehen auf einander, jede auf jeder senkrecht. (Dieses Resultat lässt sich leicht auch geometrisch begründen.)

Legt man durch den Anfangspunkt der Coordinaten eine Linie von der Richtung $a_1 b_1 c_1$ und bezeichnet die laufenden Coordinaten eines Punktes dieser Linie mit $x y z$, so sind $x y z$ den $a_1 b_1 c_1$ proportional, folglich stellen die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (a_{11} - \lambda_1) x + a_{12} y + a_{13} z &= 0 \\ a_{21} x + (a_{22} - \lambda_1) y + a_{23} z &= 0 \\ a_{31} x + a_{32} y + (a_{33} - \lambda_1) z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

drei Ebenen dar, welche sich in dieser Linie schneiden, d. h. die Gleichungen (12) sind die Gleichungen der Linie.

Erörterung der besonderen Fälle, wo die Wurzeln der Gleichung (9) nicht alle verschieden sind.

1. Die Wurzeln der Gleichung

$$(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - a_{23}^2 = 0$$

welche mit β und γ bezeichnet sind, sind resp.

$$\frac{a_{22} + a_{33}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{22} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2} \quad \text{und} \quad \frac{a_{22} + a_{33}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{22} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2}$$

Die kleinste der drei Wurzeln der Gleichung (9) ist also kleiner als die kleinere dieser beiden Zahlen, die zweite liegt zwischen ihnen, die dritte ist grösser als die grössere. — Gleiche Rollen spielen die Wurzeln der Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{33}) - a_{13}^2 &= 0 \\ (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}^2 &= 0, \end{aligned} \right.$$

d. h. die Zahlen

$$\begin{aligned} \frac{a_{11} + a_{33}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{13}^2} \quad \text{und} \quad \frac{a_{11} + a_{33}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{13}^2} \\ \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2} \quad \text{und} \quad \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2}. \end{aligned}$$

Wenn also zwei der drei Wurzeln $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ einander gleich sind, so muss, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 < \lambda_3$ ist,

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a_{22} + a_{33}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{22} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2} = \frac{a_{11} + a_{33}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{13}^2} = \\ \frac{a_{11} + a_{22}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2}, \end{aligned}$$

dagegen, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 > \lambda_3$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{a_{22} + a_{33}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{22} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2} = \frac{a_{11} + a_{33}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{13}^2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2}$$

sein, d. h. die vier Gleichungen

$$\begin{aligned} (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - (\lambda - a_{11})a_{23}^2 - (\lambda - a_{22})a_{13}^2 - (\lambda - a_{33})a_{12}^2 - 2a_{12}a_{23}a_{31} &= 0 \\ (\lambda - a_{22})(\lambda - a_{33}) - a_{23}^2 &= 0 \\ (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{33}) - a_{13}^2 &= 0 \\ (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}^2 &= 0 \end{aligned}$$

haben eine gemeinsame Wurzel, sie sind für einen gemeinsamen Werth von λ (nämlich $\lambda_1 = \lambda_2$), welcher jetzt λ' heißen möge, gleichzeitig erfüllt, d. h. es ist

$$(\lambda' - a_{11})(\lambda' - a_{22})(\lambda' - a_{33}) = (\lambda' - a_{11})a_{23}^2 = (\lambda' - a_{22})a_{13}^2 = (\lambda' - a_{33})a_{12}^2 = -a_{12}a_{23}a_{31}$$

folglich ist

$$a_{11} - \lambda' = \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} \quad a_{22} - \lambda' = \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} \quad a_{33} - \lambda' = \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}$$

Wenn man diese Ausdrücke in die Gleichungen (12) einsetzt, so sieht man, dass sie alle in eine einzige, nämlich in die

$$a_{12}a_{13}x + a_{12}a_{23}y + a_{13}a_{23}z = 0 \quad (13)$$

übergehen, dass es also der Wurzel λ' entsprechend nicht eine sondern unendlich viele Hauptrichtungen gibt, welche sämtlich in der Ebene (13) liegen. Die der Wurzel λ_3 entsprechende Hauptrichtung bleibt bestimmt und steht auf der Ebene (13) senkrecht.

Wenn demnach die Gleichung (9) zwei gleiche Wurzeln hat, so ist

$$a_{11} - \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} = a_{33} - \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}$$

Umgekehrt lässt sich zeigen, dass, wenn diese beiden Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind, die Gleichung (9) wenigstens zwei gleiche Wurzeln hat. Denn bezeichnet man jede dieser drei gleichen Zahlen mit λ' , so ist

$$a_{11} = \lambda' + \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} \quad a_{22} = \lambda' + \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} \quad a_{33} = \lambda' + \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}}$$

Setzt man diese Ausdrücke für $a_{11} a_{22} a_{33}$ in die Gleichung (9) ein, so geht sie über in

$$(\lambda' - \lambda)^2 \left(\lambda' - \lambda + \frac{a_{12}a_{13}}{a_{23}} + \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} + \frac{a_{13}a_{23}}{a_{12}} \right) = 0,$$

aus welcher unmittelbar ersichtlich ist, dass sie zwei Wurzeln $= \lambda'$ hat. In diesem Falle sind also alle drei Wurzeln sehr einfach gegeben.

2. Damit alle drei Wurzeln einander gleich seien, ist nothwendige Bedingung, dass

$$\left(\frac{a_{22} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{23}^2 = 0 \quad \left(\frac{a_{11} - a_{33}}{2}\right)^2 + a_{13}^2 = 0 \quad \left(\frac{a_{11} - a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}^2 = 0$$

und dies ist gleichbedeutend mit den fünf Bedingungen

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \quad a_{12} = a_{23} = a_{31} = 0.$$

Wenn diese fünf Bedingungen erfüllt sind, so reduciert sich die Gleichung (9) auf die

$$(\lambda - a_{11})^3 = 0.$$

Die Bedingungen sind also auch genügend. In diesem Falle sind die Hauptrichtungen vollständig unbestimmt, d. h. jede Richtung ist eine Hauptrichtung.

Es ist demnach bewiesen, dass es in jeder Fläche zweiten Grades im Allgemeinen und mindestens drei Hauptrichtungen gibt. Bei Mittelpunktsflächen heissen die Durchmesser, welche Hauptrichtungen haben, Hauptaxen. Die Ebene zweier Hauptaxen heisst Hauptebene. Bei den übrigen Flächen kommen diese Begriffe auch vor, bedürfen aber dort noch näherer Bestimmung.

§ 5. 1. Unter welcher Bedingung gibt es eine Richtung, deren conjugirte Durchmesserebene in unendlicher Entfernung liegt?

Damit die der Richtung $(a \ b \ c)$ conjugirte Durchmesserebene, deren Gleichung in § 3 (unter 5) gegeben ist, in unendlicher Entfernung liege, muss

$$\left. \begin{aligned} a_{11} a + a_{12} b + a_{13} c &= 0 \\ a_{21} a + a_{22} b + a_{23} c &= 0 \\ a_{31} a + a_{32} b + a_{33} c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

sein. Damit diese drei Gleichungen zusammenbestehen können, muss sein

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0. \quad (15)$$

In einer Mittelpunktsfläche tritt also selbstverständlich der fragliche Fall nicht ein; in jeder andern gibt es mindestens eine Richtung, deren conjugirte Durchmesserebene in unendlicher Entfernung liegt; man findet sie durch Auflösung der Gleichungen (14). — Ist das Coordinatensystem ein rechtwinkliges, so ist für diesen Fall $\lambda = 0$ eine Wurzel der Gleichung (9). Das Gleichungssystem (14) ist also dasselbe wie das (8), d. h.: In jeder Fläche, die nicht Mittelpunktsfläche ist, liegt eine Hauptebene in unendlicher Entfernung, oder gibt es eine Hauptrichtung, deren conjugirte Durchmesserebene in unendlicher Entfernung liegt.

2. Unter welchen Bedingungen gibt es zwei oder mehr Richtungen, deren conjugirte Durchmesserebenen in unendlicher Entfernung liegen?

Damit das eintrete, muss dem Gleichungssystem (14) durch mehr als eine Werthegruppe von $(a \ b \ c)$ genügt werden. Das tritt aber nur dann ein, wenn dasselbe unendlich viele Werthegruppen für $a \ b \ c$ liefert, wenn die Werthe für $a \ b \ c$ unbestimmt werden, d. h. wenn

$$a_{11} : a_{12} : a_{13} = a_{21} : a_{22} : a_{23} = a_{31} : a_{32} : a_{33}.$$

Diese Bedingung ist aber dieselbe wie die, dass die sechs Glieder zweiter Dimension in der Gleichung (1) ein vollständiges Quadrat bilden.

Dann gibt es nicht bloss zwei sondern unendlich viele Richtungen, deren conjugirte Durchmesserebenen in unendlicher Entfernung liegen, aber sie alle sind einer sehr einfachen Bedingung unterworfen. — Wenn nämlich für drei Richtungen $(a \ b \ c)$ $(a_1 \ b_1 \ c_1)$ $(a_2 \ b_2 \ c_2)$ gleichzeitig die conjugirten Durchmesserebenen in unendlicher Entfernung liegen, so muss für jede derselben das Gleichungssystem (14) erfüllt sein, müssen also alle drei z. B. der ersten der drei Gleichungen (14) genügen, d. h. es müssen die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11} a + a_{12} b + a_{13} c &= 0 \\ a_{11} a_1 + a_{12} b_1 + a_{13} c_1 &= 0 \\ a_{11} a_2 + a_{12} b_2 + a_{13} c_2 &= 0 \end{aligned}$$

zusammen bestehen, d. h. es muss

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

sein, d. h. die Richtungen $(a \ b \ c)$ $(a_1 \ b_1 \ c_1)$ $(a_2 \ b_2 \ c_2)$ müssen derselben Stellung angehören. Demnach: Alle Richtungen, deren conjugirte Durchmesserebenen in unendlicher Entfernung liegen, gehören derselben Stellung an.

Hieraus folgt: Unter den Hauptrichtungen einer Fläche zweiten Grades ist mindestens eine, deren conjugirte Durchmesserebene (Hauptebene) in endlicher Entfernung liegt.

§ 6. Es sei eine Fläche zweiter Ordnung auf eine in endlicher Entfernung liegende Hauptebene als XY -Ebene und auf eine auf ihr senkrechte Linie als Z -Axe bezogen. Ihre Gleichung kann dann die erste Potenz von z nicht enthalten, muss also die Form haben

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{12} xy + 2a_{14} x + 2a_{24} y + a_{44} = 0 \quad (16)$$

Der Schnitt dieser Fläche mit der XY -Ebene ist eine Linie zweiten Grades. Abgesehen von dem besondern, späterer Erörterung vorzubehaltenden Falle wo gleichzeitig $a_{11} = 0$ $a_{22} = 0$ und $a_{12} = 0$ ist, wo also die Gleichung (16) die besondere Form

$$a_{33} z^2 + 2a_{14} x + 2a_{24} y + a_{44} = 0 \quad (17)$$

annimmt, hat der Schnitt mit der XY -Ebene ein Paar bestimmte rechtwinklige conjugirte Richtungen und wenigstens einen Durchmesser, welcher alle auf ihm senkrechten Sehnen halbiert. Nehmen wir diesen Durchmesser als X -Axe und eine der ihr conjugirten Sehnen als Y -Axe, so erhält die Gleichung der Fläche die Form

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{14} x + a_{44} = 0.$$

Durch Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten lässt sich diese Gleichung, wenn a_{11} von Null verschieden ist, auf die Form

$$a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + a_{44} = 0 \quad (18)$$

und wenn $a_{11} = 0$ und a_{14} von Null verschieden ist, auf die Form

$$a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + 2a_{14} x = 0 \quad (19)$$

bringen; wenn endlich $a_{11} = 0$ und auch $a_{14} = 0$ ist, so reducirt sie sich auf die Form

$$a_{22} y^2 + a_{33} z^2 + a_{44} = 0 \quad (20)$$

Die Gleichungen (17) bis (20) umfassen demnach sämtliche Flächen zweiten Grades. Aus § 2 ergibt sich, dass die Gleichung (18) in welcher a_{11} a_{22} a_{33} von Null verschieden sind, die Flächen mit bestimmtem endlich entfernten Mittelpunkte, die Gleichung (19) die Flächen mit einem unendlich entfernten Mittelpunkte, die Gleichung (20) die Flächen mit unendlich vielen Mittelpunkten in endlicher Entfernung, die im Allgemeinen in einer graden Linie, der Mittellinie liegen, die Gleichung (17) die Flächen mit unendlich entfernter Mittellinie darstellen. (S. § 5. 2.)

§ 7. Uebersichtliche Entwicklung und Beschreibung sämtlicher Formen der Flächen zweiten Grades.

A. Die in der Gleichung (18) enthaltenen Flächen.

1. a_{44} sei von Null verschieden. — Wir dividiren durch $-a_{44}$

1. Die Coëfficienten $-\frac{a_{11}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ seien sämtlich negativ, so ist die Fläche imaginär.

2. Die Coëfficienten $-\frac{a_{11}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ seien sämtlich positiv.

Wir bezeichnen $-\frac{a_{11}}{a_{44}}$ mit $\frac{1}{\alpha^2}$, $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$ mit $\frac{1}{\beta^2}$, $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ mit $\frac{1}{\gamma^2}$,

so ist die Gleichung der Fläche

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0. \quad (21)$$

Die Fläche ist gegen jede der drei Coordinaten-Ebenen symmetrisch.

Die Schnitte in den Coordinaten-Ebenen sind Ellipsen mit den Halbaxen α β γ . Die Schnitte parallel den Coordinaten-Ebenen sind jenen ähnlich und sind um so kleiner, je weiter sie vom Mittelpunkte entfernt sind. In den Entfernungen $\pm \alpha$ resp. $\pm \beta$, $\pm \gamma$ vom Mittelpunkte reducirt sich die Schnittfigur auf einen Punkt, die Ebene berührt die Fläche. — Die Fläche ist vollständig begrenzt; sie liegt ganz in dem rechtwinkligen Parallelepipeton, dessen Ebenen die Gleichungen $x = \pm \alpha$, $y = \pm \beta$, $z = \pm \gamma$ haben. Die Berührungspunkte mit diesen Ebenen sind die Scheitel der Fläche. Sie heisst Ellipsoid. — Alle ebenen Schnitte des Ellipsoids sind Ellipsen.

Es sei α die grösste, γ die kleinste der drei Halbaxen; irgend ein Radius des Ellipsoids (21) habe die Länge ρ und bilde mit den Axen Winkel, deren Cosinus a b c seien, so ist $x = a\rho$ $y = b\rho$, $z = c\rho$

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} + \frac{c^2}{\gamma^2} = \frac{1}{\rho^2}$$

und da $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, so ist

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\alpha^2} + \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) b^2 + \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) c^2$$

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\gamma^2} - \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\alpha^2}\right) a^2 - \left(\frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2}\right) b^2,$$

folglich ist α der grösste und γ der kleinste Radius des Ellipsoids.

In der Ellipse der YZ -Ebene ist 2β die grosse Axe, in der Ellipse der XY -Ebene die kleine Axe. Legt man demnach durch die Y -Axe eine um dieselbe drehbare Ebene, lässt sie zunächst mit der YZ -Ebene zusammenfallen und dreht sie, so ist die Schnittfigur stets eine Ellipse, deren eine Axe fest ist, während die andre die XZ -Ebene durchläuft; diese letztere Axe ist anfangs die kleinere und wird später die grössere; es tritt also der Fall ein, wo beide Axen einander gleich sind; dann ist der Schnitt ein Kreis. Es giebt zwei solche Kreisschnitte; sie bilden mit der YZ -Ebene gleiche Winkel; ebenso mit der XY -Ebene.

Wenn von den drei Halbaxen $\alpha \beta \gamma$ zwei einander gleich sind, z. B. α und β , so sind alle Schnitte parallel der XY -Ebene Kreise; das Ellipsoid ist ein Revolutions-Ellipsoid. Die Umdrehungsaxe ist die Z -Axe. — Ein Revolutions-Ellipsoid kann seine grösste und seine kleinste Axe zur Umdrehungsaxe haben. In ihm fallen die beiden durch die mittlere Axe zu legenden Kreisschnitte in einen zusammen. —

Wenn $\alpha = \beta = \gamma$ ist, so ist das Ellipsoid eine Kugel. In ihr sind die im § 4 No. 2 entwickelten Bedingungen dafür erfüllt, dass die Fläche unendlich viele Hauptrichtungen hat. — Umgekehrt, jede Fläche, in welcher diese Bedingungen erfüllt sind, ist eine Kugel. Denn diese Fläche hat allgemein die Gleichung

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2 \frac{a_{14}}{a_{11}} x + 2 \frac{a_{24}}{a_{11}} y + 2 \frac{a_{34}}{a_{11}} z + \frac{a_{44}}{a_{11}} = 0,$$

welche sich sogleich auf die Form

$$\left(x + \frac{a_{14}}{a_{11}}\right)^2 + \left(y + \frac{a_{24}}{a_{11}}\right)^2 + \left(z + \frac{a_{34}}{a_{11}}\right)^2 - \left(\frac{a_{14}}{a_{11}}\right)^2 - \left(\frac{a_{24}}{a_{11}}\right)^2 - \left(\frac{a_{34}}{a_{11}}\right)^2 + \frac{a_{44}}{a_{11}} = 0$$

bringen und dadurch als die einer Kugel erkennen lässt.

Hiernach lässt sich leicht erkennen, dass jede Fläche zweiten Grades, welche in dem Spezialfalle § 4. No. 1 enthalten ist, eine Revolutionsfläche ist.

Nimmt man einen beliebigen Durchmesser als Z -Axe, die conjugirte Ebene als XY -Ebene, darin irgend einen Durchmesser als X -Axe, den conjugirten als Y -Axe, so hat die Fläche auch für dieses schiefwinklige Axensystem eine Gleichung von der Form

$$\frac{x^2}{\alpha_1^2} + \frac{y^2}{\beta_1^2} + \frac{z^2}{\gamma_1^2} - 1 = 0.$$

Daraus ersieht man, dass alle parallelen Schnittfiguren des Ellipsoids ähnliche Ellipsen sind, deren Mittelpunkte sämmtlich in einer Geraden, nämlich dem ihrer gemeinsamen Stellung conjugirten Durchmesser liegen. Legt man durch die Endpunkte eines solchen Durchmessers eine Ebene, welche die conjugirte Stellung hat, so hat dieselbe mit der Fläche einen Punkt gemein und enthält alle diejenigen Tangenten, welche die durch den Durchmesser gelegten Schnitteurven in dem Punkte berühren; sie berührt die Fläche. Die Fläche ist ganz in einem schiefwinkligen Parallelepipedon enthalten, dessen Ebenen die Gleichungen $x = \pm \alpha_1$, $y = \pm \beta_1$, $z = \pm \gamma_1$ haben, enthalten und berührt diese Ebenen.

3. Es seien von den drei Coefficienten $-\frac{a_{11}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ zwei positiv und einer negativ; es sei $-\frac{a_{11}}{a_{44}} = +\frac{1}{\alpha^2}$, $-\frac{a_{22}}{a_{44}} = +\frac{1}{\beta^2}$, $-\frac{a_{33}}{a_{44}} = -\frac{1}{\gamma^2}$ so ist die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0. \quad (22)$$

Auch diese Fläche ist, wie alle in der Gleichung (18) enthaltenen Flächen, gegen jede der drei Coordinaten-Ebenen symmetrisch. Der Schnitt mit der XY -Ebene ist eine Ellipse; alle Ebenen parallel der XY -Ebene schneiden die Fläche in ähnlichen Ellipsen, und zwar in um so grösseren, je weiter die Ebenen vom Mittelpunkte entfernt sind. — Die Z -Axe hat keinen Punkt mit der Fläche gemein.

Der Schnitt mit der XZ -Ebene ist eine Hyperbel, welche ihre Hauptaxe in der X -Axe hat. Jeder Schnitt parallel der XZ -Ebene, dessen Entfernung vom Mittelpunkte nicht grösser ist als β , ist eine Hyperbel, welche ihre Hauptaxe parallel der X -Axe hat; jeder Schnitt parallel der XZ -Ebene, dessen Entfernung vom Mittelpunkte $> \beta$ ist, ist eine Hyperbel, deren Hauptaxe parallel der Z -Axe ist; die Grenze zwischen beiden, im Scheitel der Y -Axe, ist ein System zweier graden Linien; sie haben die allen eben bezeichneten Hyperbeln gemeinsamen Asymptotenrichtungen. — Die analogen Erscheinungen zeigen die Schnitte parallel der YZ -Ebene. — Die Fläche heisst einschaliges Hyperboloid.

Legt man durch die Y -Axe eine um dieselbe drehbare Ebene und lässt dieselbe zuerst mit der XY -Ebene zusammenfallen um sie nachher bis zur YZ -Ebene hinzudrehen, so ist der Schnitt anfangs eine Ellipse, deren eine Axe constant ist, deren zweite Axe bei der Drehung continuirlich wächst; es zeigt sich, dass sie in eine Hyperbel übergeht, deren Hauptaxe in der Y -Axe liegt und constant bleibt; die Grenze zwischen Ellipse und Hyperbel bildet ein System zweier parallelen Graden; sie liegen in den beiden oben bezeichneten Ebenen, welche durch die in der Y -Axe gelegenen Scheitel parallel der XZ -Ebene gelegt werden und sind je eine von den beiden Linien, in welchen jede von diesen die Fläche schneidet. — Dasselbe zeigt sich bei der Drehung um die X -Axe. — Wenn die Drehung um die längere Axe der in der XY -Ebene gelegenen Ellipse erfolgt, so kommt unter den Formen der elliptischen Schnitte auch der Kreis vor, und zwar in zwei Ebenen, welche mit der XY -Ebene gleiche Winkel bilden. — Wenn $\alpha = \beta$ ist, so ist die Fläche eine Revolutionsfläche, welche durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre Nebenaxe entsteht. — Dann fallen die beiden Kreisschnitte in einen zusammen.

Schreibt man die Gleichung (22) folgendermassen

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 - \frac{y^2}{\beta^2}$$

so erkennt man, dass ihr genügt wird durch jeden gemeinsamen Punkt der beiden Ebenen

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma} &= x \left(1 - \frac{y}{\beta} \right) \\ x \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma} \right) &= 1 + \frac{y}{\beta} \end{aligned} \right\}$$

und ebenso durch jeden gemeinsamen Punkt der beiden Ebenen

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\alpha} - \frac{z}{\gamma} &= x \left(1 + \frac{y}{\beta} \right) \\ x \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{z}{\gamma} \right) &= 1 - \frac{y}{\beta} \end{aligned} \right\}$$

wo x eine willkürliche Grösse bezeichnet. Daraus ergibt sich, dass die Fläche zwei Systeme von unendlich vielen Graden enthält.

Zwei Grade desselben Systems haben keinen Punkt gemeinsam, denn die vier Ebenen

$$\begin{aligned} \frac{x}{\alpha} + z \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} - z &= 0 \\ z \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + z \frac{z}{\gamma} - 1 &= 0 \\ \frac{x}{\alpha} + z_1 \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} - z_1 &= 0 \\ z_1 \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + z_1 \frac{z}{\gamma} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

haben keinen Punkt gemein, weil die Determinante, wovon dies abhängig ist, den Werth $-\frac{4(z-z_1)^2}{\alpha\beta\gamma}$ hat, also nicht Null ist. — Ebenso für zwei Grade des zweiten Systems.

Dagegen hat jede Grade des einen Systems mit jeder Graden des andern Systems einen Punkt gemein.

Dies ist dadurch bedingt, dass die vier Ebenen

$$\begin{aligned} \frac{x}{\alpha} + z \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} - z &= 0 \\ z \frac{x}{\alpha} - \frac{y}{\beta} + z \frac{z}{\gamma} - 1 &= 0 \\ \frac{x}{\alpha} - z_1 \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} - z_1 &= 0 \\ z_1 \frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} + z_1 \frac{z}{\gamma} - 1 &= 0 \end{aligned}$$

einen Punkt gemein haben; dies findet immer statt, weil die bezügliche Determinante identisch Null ist. — Die Ebene, welche die beiden Graden enthält, hat die Gleichung

$$\frac{1+zx_1}{\alpha} x + \frac{z-z_1}{\beta} y - \frac{1-zx_1}{\gamma} z - (z+z_1) = 0. \quad (23)$$

Für jedes beliebige Werthepaar von z und z_1 hat also diese Ebene mit der Fläche (22) zwei grade Linien gemein.

4. Es seien von den drei Coefficienten $-\frac{a_{11}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$, $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ einer positiv, zwei negativ;

es sei $\frac{a_{11}}{a_{44}} = \frac{1}{\alpha^2}$, $\frac{a_{22}}{a_{44}} = \frac{1}{\beta^2}$, $-\frac{a_{33}}{a_{44}} = \frac{1}{\gamma^2}$, so geht die Gleichung (18) über in die

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} + 1 = 0. \quad (24)$$

Die Fläche hat mit der XY-Ebene und mit allen ihr parallelen Ebenen deren Entfernungen vom Mittelpunkte beiderseitig nicht grösser als γ sind, keinen Punkt gemein; die Ebenen $z = \pm \gamma$ haben mit der Fläche je einen Punkt gemein, den Scheitel. Jede Ebene $z = \pm \varepsilon$, wo $\varepsilon > \gamma$ ist, schneidet die Fläche in einer Ellipse, deren Axen der X- und der Y-Axe parallel sind; alle diese Ellipsen sind ähnlich, die Fläche besteht aus zwei getrennten Schalen.

Die XZ -Ebene und jede ihr parallele Ebene schneidet die Fläche in einer Hyperbel; alle diese Hyperbeln sind einander ähnlich und haben ihre Hauptaxen parallel der Z -Axe. — Die YZ -Ebene und jede ihr parallele Ebene schneidet ebenfalls die Fläche in einer Hyperbel, auch diese Hyperbeln sind sämtlich einander ähnlich und haben ihre Hauptaxen parallel der Z -Axe. — Die Fläche heisst zweischaliges Hyperboloid.

Wenn $\alpha = \beta$ ist, so ist die Fläche eine Revolutionsfläche, welche durch Umdrehung einer Hyperbel um ihre Hauptaxe entsteht. —

II. Der Coefficient a_{44} der Gleichung (18) sei Null.

1. Die drei Coefficienten a_{11} a_{22} a_{33} haben gleiche Vorzeichen. Die Fläche reducirt sich auf den Anfangspunkt der Coordinaten.

2. Die drei Coefficienten a_{11} a_{22} a_{33} haben nicht sämtlich gleiche Vorzeichen. Die Gleichung lässt sich dann schreiben

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0. \quad (25)$$

Die XY -Ebene hat mit der Fläche einen Punkt gemein; jede ihr parallele Ebene schneidet die Fläche in einer Ellipse; alle diese Ellipsen sind einander ähnlich und haben ihre Axen parallel der X - und der Y -Axe. Der Schnitt mit der XZ -Ebene ist ein System zweier graden Linien, welche mit der Z -Axe gleiche Winkel bilden; jeder parallele Schnitt eine Hyperbel, deren Asymptoten den Durchschnittslinien mit der XZ -Ebene parallel sind. — Ebenso für die YZ -Ebene.

Die Gleichung (25) ist homogen. Wenn also ein Punkt x y z der Fläche angehört, so gehört der Punkt tx , ty , tz für einen beliebigen Werth von t auch der Fläche an, d. h. sie wird von einer unendlichen Schaar grader Linien erfüllt, welche vom Mittelpunkte ausgehen. — Die Fläche heisst Kegel.

Wenn $\alpha = \beta$ ist, so ist der Kegel eine Umdrehungsfläche, ein sogenannter grader Kreiskegel.

B. Die in der Gleichung (19) enthaltenen Flächen.

Es wird vorausgesetzt, dass alle Coefficienten von Null verschieden sind, indem der Fall, wo $a_{14} = 0$ ist, in der Gleichung (20) und der Fall, wo a_{22} oder $a_{33} = 0$ ist, in der Gleichung (17) enthalten ist.

1. a_{22} und a_{33} haben gleiche Vorzeichen. Die Gleichung lässt sich dann schreiben

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} + 2 \frac{x}{\delta} = 0. \quad (26)$$

Die YZ -Ebene berührt die Fläche im Anfangspunkte der Coordinaten, im Scheitel der Fläche. — Diese liegt ganz auf einer Seite der YZ -Ebene. Alle reellen Schnitte parallel der YZ -Ebene sind Ellipsen von gleichem Axenverhältnis und parallelen Axen, sie sind um so grösser, je weiter ihre Ebenen vom Anfangspunkt entfernt sind.

Die XZ -Ebene sowohl wie die YZ -Ebene und alle ihnen parallelen Ebenen schneiden die Fläche in Parabeln, deren Axen sämtlich in der Richtung der X -Axe und sämtlich nach derselben Seite hin liegen. — Die Fläche heisst elliptisches Paraboloid. Wenn $\beta = \gamma$, so ist sie eine Revolutionsfläche, welche durch Umdrehung einer Parabel um ihre Axe entsteht.

2. a_{22} und a_{33} haben entgegengesetzte Vorzeichen. Die Gleichung lässt sich dann schreiben

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} + 2 \frac{x}{\delta} = 0. \quad (27)$$

Die YZ -Ebene hat mit der Fläche zwei grade Linien gemein, welche sich im Anfangspunkte, dem Scheitel der Fläche, schneiden. Jede Ebene parallel der YZ -Ebene schneidet die Fläche in einer Hyperbel; alle diese Hyperbeln haben ihre Asymptoten den beiden in der YZ -Ebene enthaltenen Linien der Fläche parallel; alle Hyperbeln auf der einen Seite der YZ -Ebene gehören dem einen Asymptotenwinkel, alle auf der andern Seite dem andern Asymptotenwinkel an. Alle Schnitte parallel der XY -Ebene, und ebenso alle parallel der XZ -Ebene sind Parabeln; alle ihre Axen sind parallel der X -Axe, aber in den Parabeln der einen Gruppe sind sie nach der einen Seite, in denen der andern Gruppe nach der entgegengesetzten Seite gerichtet. Die Fläche heisst hyperbolisches Paraboloid.

Jeder Punkt, welcher gleichzeitig den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} &= x \\ x \left(\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} \right) &= -2 \frac{x}{\delta} \end{aligned}$$

genügt, liegt in der Fläche (27). Ebenso jeder Punkt, welcher gleichzeitig den Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} &= x \\ x \left(\frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} \right) &= -2 \frac{x}{\delta} \end{aligned}$$

genügt. Daraus ergibt sich, dass die Fläche zwei Systeme von unendlich vielen graden Linien enthält. Wie beim einschaligen Hyperboloid lässt sich auch hier zeigen, dass zwei Grade desselben Systems nie einen Punkt gemein haben, dass aber jede Grade des einen Systems mit jeder Grade des andern Systems einen Punkt gemein hat. Die Ebene, welche die Grade

$$\begin{aligned} \frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} &= x & \frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} &= x_1 \\ x \left(\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} \right) &= -2 \frac{x}{\delta} & x_1 \left(\frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} \right) &= -2 \frac{x}{\delta} \end{aligned}$$

enthält, hat die Gleichung

$$2 \frac{x}{\delta} + (x + x_1) \frac{y}{\beta} + (x - x_1) \frac{z}{\gamma} - xx_1 = 0. \quad (28)$$

Für jedes beliebige Werthepaar von x und x_1 hat also diese Ebene mit der Fläche zwei Grade gemein.

C. Die in der Gleichung (20) enthaltenen Flächen.

I. a_{44} sei von Null verschieden. Wir dividiren durch $-a_{44}$

1. $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$ und $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ seien beide negativ. Die Fläche ist imaginär.
2. $-\frac{a_{22}}{a_{44}}$ und $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ seien beide positiv. Die Gleichung lässt sich dann schreiben

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0. \quad (29)$$

Alle Schnitte parallel der YZ -Ebene sind congruente Ellipsen mit parallelen Axen. Jede Ebene, deren Gleichung $\frac{z}{\gamma} = \varepsilon$ ist, schneidet die Fläche in zwei parallelen Graden, sofern ε zwischen $+1$ und -1 liegt; für $\varepsilon = \pm 1$ fallen die beiden Graden in eine zusammen. Ebenso für jede Ebene, deren Gleichung $\frac{y}{\beta} = \varepsilon$ ist. — Die Fläche ist ein elliptischer Cylinder. Wenn man einen der elliptischen Schnitte, welche der YZ -Ebene parallel sind, um die grosse Axe dreht, so gelangt man in zwei Stellungen, welche mit der YZ -Ebene gleiche Winkel bilden, zu Kreisschnitten. Wenn $\beta = \gamma$, so fallen diese beiden in einen zusammen, die Fläche ist ein Umdrehungs-Cylinder.

3. — $\frac{a_{22}}{a_{44}}$ und $-\frac{a_{33}}{a_{44}}$ haben entgegengesetzte Vorzeichen. Die Gleichung lässt sich dann schreiben

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0. \quad (30)$$

Alle Schnitte parallel der YZ -Ebene sind congruente Hyperbeln mit parallelen Axen. Jede Ebene, parallel der XY -Ebene, schneidet die Fläche in zwei parallelen Graden; jede Ebene, deren Gleichung $\frac{y}{\beta} = \varepsilon$ ist, schneidet die Fläche in zwei parallelen Graden, sofern $\varepsilon^2 > 1$; für $\varepsilon = \pm 1$ fallen die beiden Graden in eine zusammen. Die Fläche ist ein hyperbolischer Cylinder.

4. Von den beiden Coefficienten a_{22} und a_{33} sei einer Null. Die Gleichung lässt sich dann schreiben

$$\pm \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0. \quad (31)$$

Sie stellt ein System zweier Ebenen, welche der XZ -Ebene parallel sind und zu beiden Seiten derselben in der Entfernung β liegen, oder eine imaginäre Fläche dar.

II. a_{44} sei Null.

1. a_{22} und a_{33} haben gleiche Vorzeichen. Die Gleichung lässt sich dann schreiben

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 0. \quad (32)$$

Die Fläche reducirt sich auf die X -Axe.

2. a_{22} und a_{33} haben entgegengesetzte Vorzeichen. Die Gleichung geht dann über in

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0. \quad (33)$$

Die Fläche besteht aus zwei Ebenen, welche auf der YZ -Ebene senkrecht stehen und mit der Y -Axe gleiche Winkel bilden; ebenso mit der Z -Axe.

3. Von den Coefficienten a_{22} und a_{33} sei einer Null, so nimmt die Gleichung folgende Gestalt an:

$$\frac{y^2}{\beta^2} = 0. \quad (34)$$

Die Fläche reducirt sich auf die XZ -Ebene.

D. Die in der Gleichung (17) enthaltenen Flächen. —

Jeder Schnitt parallel der XY -Ebene ist eine Gerade; alle diese Geraden sind parallel. Alle Schnitte parallel der XZ -Ebene sind congruente Parabeln von gleicher Axenrichtung; ebenso alle Schnitte parallel der YZ -Ebene. Die Fläche ist ein parabolischer Cylinder. Die Gestalt der Fläche tritt noch leichter hervor, wenn man die Linie

$$2a_{14}x + 2a_{24}y + a_{44} = 0 \quad z = 0$$

zur Y -Axe, irgend eine in der XY -Ebene darauf senkrechten Linie zur X -Axe, und die im Durchschnittspunkte auf beiden senkrechte Linie zur Z -Axe macht. Dann erhält die Gleichung die Gestalt

$$\frac{z^2}{\gamma^2} + 2\frac{x}{\delta} = 0. \quad (35)$$

§ 8. Fundamentalsätze von Tangenten und Polaren.

1. Die Entfernung des Punktes $x y z$ vom Punkte $x_1 y_1 z_1$ wird durch den Punkt

$$\frac{\lambda x_1 + \lambda_1 x}{\lambda + \lambda_1}, \quad \frac{\lambda y_1 + \lambda_1 y}{\lambda + \lambda_1}, \quad \frac{\lambda z_1 + \lambda_1 z}{\lambda + \lambda_1}$$

in dem Verhältnisse $\lambda : \lambda_1$ getheilt. Soll der letztgenannte Punkt in der Fläche (1) liegen, so wird diese Bedingung durch die Gleichung ausgedrückt, welche man erhält, wenn man die Coordinaten dieses Punktes in die Gleichung (1) substituirt. Diese Gleichung wird dann, nach λ und λ_1 geordnet, wenn man $f(x y z)$ mit U , $f(x_1 y_1 z_1)$ mit U_1 und

$$a_{11}xx_1 + a_{22}yy_1 + a_{33}zz_1 + a_{12}(xy_1 + x_1y) + a_{13}(xz_1 + x_1z) + a_{23}(yz_1 + y_1z) \\ + a_{14}(x + x_1) + a_{24}(y + y_1) + a_{34}(z + z_1) + a_{44}$$

mit V bezeichnet,

$$U\lambda_1^2 + U_1\lambda^2 + 2V\lambda\lambda_1 = 0. \quad (36)$$

Diese Gleichung ergibt zwei Werthe für das Verhältniss $\lambda : \lambda_1$ weil im Allgemeinen die Fläche mit der Linie zwei Punkte gemein hat. Sollen die beiden Werthe für $\lambda : \lambda_1$ einander gleich sein, d. h. sollen die beiden Punkte in einen zusammenfallen, so muss

$$V^2 - UU_1 = 0 \quad (37)$$

sein. Diese Gleichung drückt also die Bedingung dafür aus, dass der Punkt $x y z$ in einer vom Punkte $x_1 y_1 z_1$ an die Fläche gelegten Tangenten liegt, d. h. sie ist die Gleichung einer Fläche, welche alle vom Punkte $x_1 y_1 z_1$ an die Fläche (1) gelegten Tangenten enthält. Das ist eine Kegelfläche.

Man erhält die Gleichung einer Fläche, welche alle den Flächen

$$U = 0 \\ V^2 - UU_1 = 0$$

gemeinsamen Punkte enthält, indem man die erstere mit U_1 multiplicirt und dann zur zweiten addirt. Man erhält dadurch die Gleichung

$$V^2 = 0$$

und schliesst daraus, dass die Berührungspunkte aller von einem Punkte an eine Fläche zweiten Grades gelegten Tangenten in einer Ebene liegen, also einen Kegelschnitt erfüllen.

Wenn insbesondere der Punkt $x_1 y_1 z_1$ ein Punkt der Fläche (1) ist, so ist $U_1 = 0$; die Gleichung (37) reducirt sich also dann auf die $V^2 = 0$ oder $V = 0$, d. h. sämtliche Tangenten in einem Punkte einer Fläche zweiten Grades liegen in einer Ebene, der Tangentialebene. Ihre Gleichung ist

$$(a_{11} x_1 + a_{12} y_1 + a_{13} z_1 + a_{14}) x + (a_{21} x_1 + a_{22} y_1 + a_{23} z_1 + a_{24}) y + (a_{31} x_1 + a_{32} y_1 + a_{33} z_1 + a_{34}) z + (a_{41} x_1 + a_{42} y_1 + a_{43} z_1 + a_{44}) = 0. \quad (38)$$

Für die besonderen Formen der Gleichungen (21) bis (35) nimmt die Gleichung der Tangentialebene besonders einfache Formen an; ihre Entwicklung ist eine einfache gute Übung; sie sollen hier nicht aufgezählt werden.

2. Die Bedingung, dass die beiden Werthe für $\lambda : \lambda_1$ in der Gleichung (36) gleiche absolute Werthe aber entgegengesetzte Vorzeichen haben, d. h. dass die beiden Punkte $x y z$ und $x_1 y_1 z_1$ und die Durchschnittspunkte mit der Fläche harmonische Punkte sind, ist gegeben durch die Gleichung

$$V = 0.$$

Demnach ist der geometrische Ort des vierten harmonischen Punktes zu den beiden Schnitten einer graden Linie, welche von einem festen Punkte ausgeht, mit einer Fläche zweiten Grades und zu dem festen Punkte eine Ebene. Sie heisst die Polarebene des Punktes.

Wenn der Punkt in der Fläche liegt, so ist seine Polarebene die Tangentialebene. Wenn der Punkt ausserhalb der Fläche liegt, so ist seine Polarebene diejenige Ebene, welche die Berührungspunkte des bezüglichen Berührungskegels enthält.

Aus der Symmetrie der Gleichung $V = 0$ in Bezug auf den Punkt $x_1 y_1 z_1$ einerseits und den Punkt $x y z$ andererseits ergibt sich, dass die Polarebenen aller Punkte einer Ebene sich in einem Punkte, dem Pole der Ebene schneiden, und dass die Pole aller Ebenen, die einen Punkt gemeinsam haben, in einer Ebene liegen, der Polarebene des Punktes. Ferner: Die Polarebenen aller Punkte einer Graden haben eine Grade gemein, und die Pole aller Ebenen, welche eine Grade gemein haben, liegen in einer Graden.

3. Die Bedingung, dass die Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (39)$$

Tangentialebene der Fläche (1) sei, ist dieselbe wie die, dass es einen Punkt $x_1 y_1 z_1$ gebe, welcher erstens die Gleichung (38) der Gleichung (39) identisch mache, und welcher zweitens auf der Fläche $U = 0$, oder was dasselbe ist, auf der Ebene (39) liege.

Die erste dieser beiden Bedingungen wird durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} y_1 + a_{13} z_1 + a_{14} + \lambda A &= 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} y_1 + a_{23} z_1 + a_{24} + \lambda B &= 0 \\ a_{31} x_1 + a_{32} y_1 + a_{33} z_1 + a_{34} + \lambda C &= 0 \\ a_{41} x_1 + a_{42} y_1 + a_{43} z_1 + a_{44} + \lambda D &= 0 \end{aligned}$$

dargestellt; die zweite durch die Gleichung

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0.$$

Die Bedingung, dass diese fünf Gleichungen zusammen bestehen können, ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & A \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & B \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & C \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & D \\ A & B & C & D & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (40)$$

Wenn man z. B. diese Bedingungen auf die Gleichungen (23) und (28) anwendet, so erkennt man, dass diese Ebenen Tangentialebenen der betreffenden Flächen sind; diese Tangentialebenen haben also mit der berührten Fläche nicht einen Punkt, sondern zwei grade Linien gemein; sie enthalten alle Tangenten der Fläche, welche durch den Durchschnittspunkt der beiden Graden gehen, und berühren die Flächen in diesem Punkte.

4. Die Bedingung, dass eine Grade

$$\begin{cases} A x + B y + C z + D = 0 \\ A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \end{cases} \quad (41)$$

Tangente an die Fläche (1) sei, lässt sich folgendermassen entwickeln. Die Gleichung irgend einer Ebene, welche durch die Grade (41) geht ist.

$$(A + \lambda A_1) x + (B + \lambda B_1) y + (C + \lambda C_1) z + (D + \lambda D_1) = 0.$$

Die Bedingung, dass diese Ebene die Fläche (1) berühre ist

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & A + \lambda A_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & B + \lambda B_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & C + \lambda C_1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & D + \lambda D_1 \\ A + \lambda A_1 & B + \lambda B_1 & C + \lambda C_1 & D + \lambda D_1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Gleichung ist in Bezug auf λ vom zweiten Grade, d. h. durch eine gegebene Grade lassen sich im Allgemeinen zwei Berührungsebenen an eine Fläche zweiten Grades legen. Die Bedingung, dass die Linie (41) Tangente an die Fläche sei, ist im Allgemeinen, nämlich abgesehen von Besonderheiten, welche bei den Regelflächen und speciell beim Kegel eintreten, keine andere als die, dass die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung einander gleich seien. Dieser Bedingung kann man folgende Form geben

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & A & A_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & B & B_1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & C & C_1 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & D & D_1 \\ A & B & C & D & 0 & 0 \\ A_1 & B_1 & C_1 & D_1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0. \quad (42)$$

Die Umformung führt sich am einfachsten durch den in Brioschi's Determinantentheorie § 6 Gleichung 56 enthaltenen Satz aus. Will man diesen Satz nicht voraussetzen,

sondern sich nur auf die elementarsten Eigenschaften der Determinanten stützen, so wird die Rechnung allerdings erheblich länger, hat aber gar keine Schwierigkeit; sie wird deshalb hier nicht ausgeführt.

§ 9. Die graden Linien und die Tangentialebenen der Flächen zweiten Grades.

1. Eine Fläche, welche grade Linien enthält, heisst Regelfläche. Die einfachste Regelfläche zweiten Grades ist der Kegel, als dessen Spezialfälle die Cylinder anzusehen sind.

Die Gleichung des Kegels, welche wir unter Voraussetzung rechtwinkliger Coordinaten der Betrachtung zu Grunde legen, ist

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0. \quad (43)$$

Demnach erfüllen alle Richtungen $(a \ b \ c)$, welche der Kegelfläche angehören, und nur sie, die Bedingung

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - \frac{c^2}{\gamma^2} = 0.$$

Wenn drei Zahlen $p \ q \ r$ die Bedingung $p^2 + q^2 - r^2 = 0$ erfüllen, so gibt es immer eine Zahl t von solcher Beschaffenheit, dass $p \ q \ r$ den Zahlen $t^2 - 1$, $2t$ und $t^2 + 1$ proportional sind und zwar ist $t = \frac{q}{r - p}$. Demnach sind allgemein die Gleichungen jeder Grade, welche in der Kegelfläche liegt

$$\frac{x}{\alpha(\lambda^2 - 1)} = \frac{y}{2\beta\lambda} = \frac{z}{\gamma(\lambda^2 + 1)}. \quad (44)$$

Für jede Grade, durch den Mittelpunkt, welche im Innern des Kegels liegt, d. h. durch innere Punkte der Ellipsenschnitte geht, ist

$$\frac{a^2}{\alpha^2} + \frac{b^2}{\beta^2} - \frac{c^2}{\gamma^2} < 0.$$

ihre Gleichungen also allgemein

$$\frac{x}{\alpha(\lambda^2 - 1)} = \frac{y}{2\beta\lambda} = \frac{\varepsilon z}{\gamma(\lambda^2 + 1)}$$

wenn $\varepsilon^2 < 1$. Dieselbe Gleichung stellt, wenn $\varepsilon^2 > 1$ ist, eine Grade dar, welche im äusseren Raume liegt.

2. Jede Linie durch den Mittelpunkt des Kegels ist nach § 8. 4. Tangente des Kegels; jede Ebene durch den Mittelpunkt des Kegels ist nach § 8. 3. Tangentialebene des Kegels. — In hervorragendem Sinne führen diesen letzteren Namen diejenigen Ebenen, welche mit der Kegelfläche zwei zusammenfallende Grade gemein haben. Jede Ebene durch den Mittelpunkt hat nämlich entweder mit dem Kegel nur diesen Mittelpunkt gemein, jede ihr parallele Ebene schneidet den Kegel in einer Ellipse; oder sie hat mit dem Kegel zwei Grade gemein, jede ihr parallele Ebene schneidet dann den Kegel in einer Hyperbel; oder, und das ist der Grenzfall zwischen beiden, sie hat mit ihr

eine Grade gemein, in welcher zwei Kegelkanten zusammenfallend gedacht werden müssen; jede ihr parallele Ebene schneidet den Kegel in einer Parabel. — Die Bedingung, dass die Ebene

$$Ax + By + Cz = 0$$

mit dem Kegel

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$$

zwei zusammenfallende Grade gemein habe, lässt sich dadurch entwickeln, dass man zwischen beiden Gleichungen x eliminirt, also die Projection der Schnittfigur auf die YZ -Ebene durch ihre Gleichung darstellt; das ergibt eine homogene Gleichung zweiten Grades mit zwei Variablen, welche sich stets in zwei reelle oder imaginäre Factoren zerlegen lässt, je nachdem

$$A^2 \alpha^2 + B^2 \beta^2 - C^2 \gamma^2 \geq 0 \quad (45)$$

ist; der Grenzfall, dass die beiden Factoren einander gleich sind, ist gegeben durch die Bedingung

$$A^2 \alpha^2 + B^2 \beta^2 - C^2 \gamma^2 = 0. \quad (46)$$

Demnach ist aus gleichen Gründen wie unter (1) die allgemeine Form der Gleichung einer Ebene, welche mit der Kegelfläche zwei zusammenfallende Grade gemein hat

$$\frac{\lambda^2 - 1}{\alpha} x + \frac{2\lambda}{\beta} y - \frac{\lambda^2 + 1}{\gamma} z = 0. \quad (47)$$

Die Vorzeichen der Glieder dieser Gleichung sind offenbar ganz willkürlich; die hier vorliegenden sind gewählt, weil bei dieser Wahl die Ebene (47) die Linie (44) enthält.

Jede durch den Anfangspunkt, den Mittelpunkt des Kegels, gelegte Ebene, lässt sich durch die Gleichung

$$\frac{\lambda^2 - 1}{\alpha} x + \frac{2\lambda}{\beta} y - \frac{\varepsilon(\lambda^2 + 1)}{\gamma} z = 0. \quad (48)$$

darstellen. Aus der Bedingung (45) ergibt sich, dass wenn $\varepsilon^2 > 1$ ist, die Ebene (48) mit der Kegelfläche nur den Mittelpunkt gemein hat, dass jede ihr parallele Ebene den Kegel in einer Ellipse schneidet; dass wenn $\varepsilon^2 < 1$ ist, die Ebene (48) mit der Kegelfläche zwei grade Linien gemein hat, dass jede ihr parallele Ebene den Kegel in einer Hyperbel schneidet, deren Asymptoten jenen beiden Graden parallel sind.

3. Die Gleichung

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} + \omega = 0 \quad (49)$$

stellt eine Schaar von unendlich vielen einschaligen und zweisechaligen Hyperboloiden dar, wenn ω alle Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft, während $\alpha \beta \gamma$ ungeändert bleiben; alle diese Hyperboloide haben gleiche Axenverhältnisse; ein Spezialfall derselben, für $\omega = 0$, ist der Kegel. Wir erkennen die gegenseitigen Beziehungen dieser Schaar von Flächen, wenn wir nur die drei Flächen (22) (24) (25)

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0 \quad (22)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} + 1 = 0 \quad (24)$$

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0 \quad (25)$$

in Betracht ziehen.

Legen wir dem z einen beliebigen constanten Werth z_1 bei, so werden alle drei Flächen in ähnlichen Ellipsen geschnitten; (die drei Flächen werden von jeder Ebene in ähnlichen, ähnlich liegenden Figuren geschnitten). Die drei Ellipsen haben ihren gemeinsamen Mittelpunkt in der Z -Axe; die grösste Ellipse gehört dem einschaligen Hyperboloide (22), die mittlere dem Kegel (25), die kleinste dem zweischaligen Hyperboloide (24) an. Die beiden elliptischen Ringe zwischen den drei Ellipsen sind stets gleich gross, und, da wir rechtwinklige Coordinaten angenommen haben, $= \alpha\beta\pi$. Ihre Grösse ist also von der Grösse der z_1 unabhängig; sie werden also um so schmaler, je grösser z_1 wird, und wenn z_1 unendlich wird, so werden die Ringe unendlich schmal, d. h. der Kegel ist gemeinsamer Asymptotenkegel für die Hyperboloide (22) u. (24), oder auch für alle Hyperboloide (49).

Diese Beziehungen treten durch die folgenden Betrachtungen noch viel schärfer hervor. Jede Ebene lässt sich durch die Gleichung

$$\frac{\lambda^2 - 1}{\alpha} x + \frac{2\lambda}{\beta} y - \frac{\varepsilon(\lambda^2 + 1)}{\gamma} z + \kappa = 0 \quad (50)$$

darstellen. Diese Ebene wird, wie sich aus der Bedingungsgleichung (40) in § 8 ergibt, Tangentialebene der Fläche (22) sein, wenn

$$\kappa^2 = (\lambda^2 + 1)^2 (1 - \varepsilon^2) \quad (51)$$

ist. Diese Gleichung ergibt nur dann reelle Werthe für κ , wenn $\varepsilon^2 < 1$ ist. Wenn $\varepsilon^2 > 1$ ist, so schneidet die Ebene (50) die Fläche stets in einer Ellipse, welche sich nie auf einen Punkt reduciren und nie imaginär werden kann. Wenn $\varepsilon^2 < 1$ ist, so hat die Ebene (50) mit der Fläche (22) eine Hyperbel gemein, welche in ein System zweier grader Linien übergeht, wenn κ den besonderen durch die Gleichung (51) bestimmten Werth hat.

Jede Tangentialebene der Fläche (22) lässt sich also durch die Gleichung

$$\frac{\lambda^2 - 1}{\alpha} x + \frac{2\lambda}{\beta} y - \frac{\varepsilon(\lambda^2 + 1)}{\gamma} z \pm (\lambda^2 + 1) \sqrt{1 - \varepsilon^2} = 0 \quad (52)$$

darstellen*). Durch Vergleichung der unteren dieser beiden Gleichungen mit der Gleichung (38), welche für die Fläche (22) die besondere Gestalt

$$\frac{xx_1}{\alpha^2} + \frac{yy_1}{\beta^2} - \frac{zz_1}{\gamma^2} - 1 = 0$$

annimmt, erhält man für die Coordinaten der Berührungspunkte

$$x_1 = \frac{(\lambda^2 - 1)\alpha}{(\lambda^2 + 1)\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad y_1 = \frac{2\lambda\beta}{(\lambda^2 + 1)\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad z_1 = \frac{\varepsilon\gamma}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \quad (53)$$

*) Diese Gleichung (52) lässt sich unmittelbar auf die Gleichung (23) zurückführen und somit darthun, dass auch die Gleichung (23) alle Tangentialebenen darstellt, mithin auch die ihr vorhergehenden Gleichungen alle Graden des Hyperboloids.

Die Gleichungen der beiden Graden, welche dieselbe Ebene mit der Fläche (22) gemein hat, sind

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\alpha} - \frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda^2 + 1) \sqrt{1 - \varepsilon^2}} &= \frac{y}{\beta} - \frac{2\lambda}{(\lambda^2 + 1) \sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{z}{\gamma} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ (\lambda^2 - 1)\varepsilon - 2\lambda\sqrt{1 - \varepsilon^2} &= (\lambda^2 - 1)\sqrt{1 - \varepsilon^2} + 2\varepsilon\lambda = \lambda^2 + 1 \end{aligned} \right\} (54)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\alpha} - \frac{\lambda^2 - 1}{(\lambda^2 + 1) \sqrt{1 - \varepsilon^2}} &= \frac{y}{\beta} - \frac{2\lambda}{(\lambda^2 + 1) \sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{z}{\gamma} - \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} \\ (\lambda^2 - 1)\varepsilon + 2\lambda\sqrt{1 - \varepsilon^2} &= (\lambda^2 - 1)\sqrt{1 - \varepsilon^2} - 2\varepsilon\lambda = \lambda^2 + 1 \end{aligned} \right\}$$

Die Ebene (50) wird Tangentialebene der Fläche (24), wenn

$$z^2 = (\lambda^2 + 1)^2 (\varepsilon^2 - 1). \quad (55)$$

Diese Gleichung ergibt nur dann reelle Werthe für z , wenn $\varepsilon^2 > 1$. Wenn $\varepsilon^2 < 1$ ist, so schneidet die Ebene (50) die Fläche (24) in einer Hyperbel, welche sich nie auf zwei grade Linien reducirt. Wenn $\varepsilon^2 > 1$ ist, so schneidet die Ebene (50) die Fläche (27) in einer Ellipse, welche auch imaginär werden kann, und welche in dem Falle, wo z die Bedingung (55) erfüllt, sich auf einen Punkt reducirt. Jede Berührungsebene der Fläche (24) lässt sich also durch die Gleichung

$$\frac{\lambda^2 - 1}{\alpha} x + \frac{2\lambda}{\beta} y - \frac{\varepsilon(\lambda^2 + 1)}{\gamma} z \pm (\lambda^2 + 1) \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = 0 \quad (56)$$

darstellen. Die Coordinaten des Berührungspunktes der durch die obere dieser beiden Gleichungen dargestellten Ebenen sind

$$x_1 = \frac{(\lambda^2 - 1)\alpha}{(\lambda^2 + 1)\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \quad y_1 = \frac{2\lambda\beta}{(\lambda^2 + 1)\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \quad z_1 = \frac{\varepsilon\gamma}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}}. \quad (57)$$

Wenn $\varepsilon = 1$ ist, so fallen die Gleichungen (52) und (56) in eine einzige, und zwar in die Gleichung (47) zusammen; die Berührungspunkte fallen ins Unendliche; die Linien (54) werden einander und der Linie (44) parallel. D. h. Alle Graden des Kegels (25) berühren die Flächen (22) und (24) in unendliche Entfernungen; alle Ebenen, welche den Kegel (25) längs einer Graden berühren, berühren die Flächen (22) und (24) in unendlicher Entfernung und haben mit der Fläche (22) zwei diametral gegenüberstehende Grade gemein, welche einander und den Graden des Kegels parallel sind.

Hiernach übersieht man alle gegenseitigen Lagenbeziehungen der in der Gleichung (49) enthaltenen Flächen vollständig.

4. Auf ganz gleichem Wege findet man, dass jede Tangentialebene des Ellipsoids (21)

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0. \quad (21)$$

sich durch die Gleichung

$$\frac{\lambda^2 - 1}{\alpha} x + \frac{2\lambda}{\beta} y + \frac{\varepsilon(\lambda^2 + 1)}{\gamma} z \pm (\lambda^2 + 1) \sqrt{1 + \varepsilon^2} = 0$$

darstellen lässt, und dass die Coordinaten der Berührungspunkte der durch die untere Gleichung dargestellten Ebene sind:

$$x_1 = \frac{(\lambda^2 - 1) \alpha}{(\lambda^2 + 1) \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad y_1 = \frac{2 \lambda \beta}{(\lambda^2 + 1) \sqrt{1 + \varepsilon^2}} \quad z_1 = \frac{\varepsilon \gamma}{\sqrt{1 + \varepsilon^2}}$$

5. Jede Tangential-Ebene des elliptischen Paraboloids (26)

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} + 2 \frac{x}{\delta} = 0 \quad (26)$$

wird durch die Gleichung

$$x + \frac{\lambda}{\beta} y + \frac{\mu}{\gamma} z - \frac{\lambda^2 + \mu^2}{2 \delta} = 0 \quad (58)$$

dargestellt. Es ergibt sich daraus, dass bei dieser Fläche die Tangential-Ebenen nicht paarweise parallel sind, was bei den vorigen der Fall war. Die Coordinaten des Berührungspunktes sind

$$x_1 = -\frac{\lambda^2 + \mu^2}{2 \delta} \quad y_1 = \frac{\lambda \beta}{\delta} \quad z_1 = \frac{\mu \gamma}{\delta}$$

Jede der Ebene (58) parallele Ebene schneidet die Fläche in einer Ellipse, welche auf der einen Seite der Tangential-Ebene reell, auf der andern imaginär ist.

6. Jede Tangentialebene des hyperbolischen Paraboloids (27)

$$\frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} + 2 \frac{x}{\delta} = 0 \quad (27)$$

wird dargestellt durch die Gleichung

$$x + \frac{\lambda}{\beta} y + \frac{\mu}{\gamma} z - \frac{\lambda^2 - \mu^2}{2 \delta} = 0 \quad (59)$$

Auch bei dieser Fläche sind also die Tangentialebenen nicht paarweise parallel. Die Coordinaten des Berührungspunktes sind

$$x_1 = -\frac{\lambda^2 - \mu^2}{2 \delta} \quad y_1 = \frac{\lambda \beta}{\delta} \quad z_1 = -\frac{\mu \gamma}{\delta}$$

Die Tangentialebene hat mit der Fläche ausser dem Berührungspunkte zwei Grade gemein, deren Gleichungen sich folgendermassen schreiben lassen:

$$\left. \begin{aligned} \frac{x}{\lambda - \mu} + \frac{\lambda + \mu}{2 \delta} &= -\frac{y}{\beta} + \frac{\lambda}{\delta} = \frac{z}{\gamma} + \frac{\mu}{\delta} \\ \frac{x}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda - \mu}{2 \delta} &= -\frac{y}{\beta} + \frac{\lambda}{\delta} = -\frac{z}{\gamma} - \frac{\mu}{\delta} \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Es ist sofort ersichtlich, dass die erste der beiden Linien der Ebene $\frac{y}{\beta} + \frac{z}{\gamma} = 0$ parallel ist, die zweite der Ebene $\frac{y}{\beta} - \frac{z}{\gamma} = 0$. Die sämtlichen Richtungen der beiden Systeme von Graden des Paraboloids (27) sind also in diesen beiden Ebenen enthalten. (Vgl. § 7 B. 2).

7. Aus § 8 3. ergibt sich, dass jede Ebene, welche den graden Linien eines Cylinders parallel ist, als eine Berührungsebene des Cylinders angesehen werden muss. Der Berührungspunkt liegt im Allgemeinen in unendlicher Entfernung. Die Ebene hat im Allgemeinen zwei parallele Grade mit dem Cylinder gemein, welche reell und verschieden oder imaginär sein und im Grenzfalle zusammenfallen können. In diesem Grenzfalle nennt man die Ebene im engeren Sinne eine Tangentialebene des Cylinders. In diesem Sinne ist die Gleichung jeder Tangentialebene des elliptischen Cylinders (29)

$$\frac{\lambda}{\beta} y + \frac{\mu}{\gamma} z \pm \sqrt{\lambda^2 + \mu^2} = 0, \quad (61)$$

und die Linien, längs deren die Berührung stattfindet, haben die Gleichungen

$$\frac{y}{\beta} \pm \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = 0 \quad \frac{z}{\gamma} \pm \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}} = 0$$

wo die Zeichen einander entsprechen.

In demselben engeren Sinne ist die Gleichung jeder Tangentialebene des hyperbolischen Cylinders (30)

$$\frac{\lambda}{\beta} y - \frac{\mu}{\gamma} z \pm \sqrt{\lambda^2 - \mu^2} = 0 \quad (62)$$

und die Gleichungen der Berührungslinie

$$\frac{y}{\beta} \pm \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} = 0 \quad \frac{z}{\gamma} \mp \frac{\mu}{\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}} = 0.$$

Ebenso ist für den parabolischen Cylinder, dessen Gleichung wir des Anschlusses an die letzten Entwicklungen wegen etwas anders wie unter (35) schreiben wollen, nämlich

$$\frac{y^2}{\beta^2} + 2 \frac{z}{\delta} = 0$$

die Gleichung der Tangentialebene

$$y + \mu z - \frac{\beta^2}{2 \mu \delta} = 0, \quad (63)$$

und die Gleichungen der Berührungslinie sind

$$y = \frac{\beta^2}{\mu \delta} \quad z = - \frac{\beta^2}{2 \mu^2 \delta}.$$

§ 10. 1. Unter welcher Bedingung stellt die Gleichung (1) einen Kegel dar?

Die nothwendige und genügende Bedingung dafür, dass die Gleichung (1) einen Kegel darstelle, ist die, dass sie sich durch Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten in eine homogene Gleichung zweiten Grades verwandeln lasse. (Vgl. § 7 A. II. 2). — Die Bedingung dafür ist die, dass sich drei Zahlen p, q, r so bestimmen lassen, dass

$$a_{11} p + a_{12} q + a_{13} r + a_{14} = 0$$

$$a_{21} p + a_{22} q + a_{23} r + a_{24} = 0$$

$$a_{31} p + a_{32} q + a_{33} r + a_{34} = 0$$

und

$$f(p, q, r) = 0.$$

Die letzte Gleichung geht unter Voraussetzung der drei ersten in die

$$a_{41} p + a_{42} q + a_{43} r + a_{44} = 0$$

über, und die Bedingung, dass diese mit den drei ersten zusammen bestehen könne, ist die, dass

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0. \quad (64)$$

2. Unter welchen Bedingungen stellt die Gleichung (1) ein System zweier Ebenen dar?

Diese Frage ist gleichbedeutend mit der: Unter welcher Bedingung ist die allgemeine Function zweiten Grades mit drei Variablen in zwei lineare Factoren zerlegbar? Die Behandlung dieser Aufgabe wird einfacher, wenn wir die homogene Function zweiten Grades mit vier Variablen behandeln. Der Uebersicht wegen wollen wir die Bedingungen der Zerlegbarkeit für homogene Functionen zweiten Grades mit zwei und mit drei Variablen voranstellen.

$$\text{Die Function} \quad a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{12} x_1 x_2 \quad (65)$$

ist stets in zwei lineare Factoren zerlegbar; dieselben sind reell, wenn $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} > 0$ ist.

Die Function

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 \quad (66)$$

ist in zwei lineare Factoren zerlegt, wenn 6 Zahlen $\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$ gefunden sind, so dass die Function (66) identisch gleich wird der Function

$$(\kappa_1 x_1 + \kappa_2 x_2 + \kappa_3 x_3) (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3). \quad (67)$$

Zwei lineare Functionen, wie die beiden Factoren von (67) lassen sich im Allgemeinen durch die linearen Substitutionen

$$x_1 = x_1' + p_1 x_3' \quad x_2 = x_2' + p_2 x_3' \quad x_3 = x_3' \quad (68)$$

auf die Formen $\kappa_1 x_1' + \kappa_2 x_2'$ und $\lambda_1 x_1' + \lambda_2 x_2'$ zurückführen, indem man p_1 und p_2 so bestimmt, dass

$$\left. \begin{aligned} \kappa_1 p_1 + \kappa_2 p_2 + \kappa_3 &= 0 \\ \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Dies ist immer auf endliche und bestimmte Weise möglich, sobald nicht $\kappa_1 : \lambda_1 = \kappa_2 : \lambda_2$. Da die Function (67) in Bezug auf x_1, x_2, x_3 homogen ist, so folgt hieraus, dass mit Ausnahme des Falles, wo $\kappa_1 : \lambda_1 = \kappa_2 : \lambda_2 = \kappa_3 : \lambda_3$ ist, wo also (67) das Quadrat einer linearen homogenen Function der drei Variablen ist, sich diese Function stets in ein Product zweier linearen Functionen mit zwei Variablen transformiren lässt

Wenn also die Function (66) nicht ein vollständiges Quadrat ist, d. h. wenn nicht gleichzeitig

$$a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0 \quad a_{13}^2 - a_{11} a_{33} = 0 \quad a_{23}^2 - a_{22} a_{33} = 0$$

ist, wo dann die Zerlegung von selbst ausgeführt ist, ist die Bedingung der Zerlegbarkeit keine andre wie die, dass sich die Function (66) durch Substitutionen von der Gattung wie die (68) auf

zwei Variable zurückführen lässt. — Es sei insbesondere $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} \geq 0$, was sich bei der Homogenität der Function ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen lässt. Es ergibt sich als Bedingung der Zerlegbarkeit

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (69)$$

und als Bedingung der Realität der Zerlegung die, dass $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} > 0$ ist.

Durch ganz gleiche Schlüsse gelangt man zu der Bedingung der Zerlegbarkeit der homogenen Function

$$a_{11} x_1^2 + a_{22} x_2^2 + a_{33} x_3^2 + a_{44} x_4^2 + 2a_{12} x_1 x_2 + 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{14} x_1 x_4 + 2a_{23} x_2 x_3 + 2a_{24} x_2 x_4 + 2a_{34} x_3 x_4. \quad (70)$$

Falls dieselbe nicht ein vollständiges Quadrat, falls also nicht gleichzeitig

$$\begin{aligned} a_{12}^2 - a_{11} a_{22} = 0 & \quad a_{13}^2 - a_{11} a_{33} = 0 & \quad a_{14}^2 - a_{11} a_{44} = 0 & \quad a_{23}^2 - a_{22} a_{33} = 0 \\ a_{24}^2 - a_{22} a_{44} = 0 & \quad a_{34}^2 - a_{33} a_{44} = 0 \end{aligned}$$

ist, in welchem Falle die Zerlegung von selbst ausgeführt ist, falls also insbesondere $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} \geq 0$ ist, so wird die Function zerlegbar sein, wenn sie sich durch die Substitutionen

$$x_1 = x_1' + p_1 x_4' \quad x_2 = x_2' + p_2 x_4' \quad x_3 = x_3' + p_3 x_4' \quad x_4 = x_4'$$

auf eine homogene Function der drei Variablen x_1', x_2', x_3' zurückführen lässt und wenn diese Function zerlegbar ist. — Die erste Bedingung erfordert, dass p_1, p_2, p_3 so bestimmt werden, dass

$$\left. \begin{aligned} a_{11} p_1 + a_{12} p_2 + a_{13} p_3 + a_{14} &= 0 \\ a_{21} p_1 + a_{22} p_2 + a_{23} p_3 + a_{24} &= 0 \\ a_{31} p_1 + a_{32} p_2 + a_{33} p_3 + a_{34} &= 0 \\ a_{41} p_1 + a_{42} p_2 + a_{43} p_3 + a_{44} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (71)$$

Damit das möglich sei muss

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad (72)$$

sein. Damit die dadurch erhaltene Function zerlegbar sei, muss

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad (73)$$

sein. Damit die Gleichungen (71) endliche Werthe für p_1, p_2, p_3 ergeben, müssen die neun übrigen Unterdeterminanten dritter Ordnung der Determinante (72) einzeln Null sein. Die zehn letzten Bedingungen lassen sich im Allgemeinen auf zwei unter ihnen zurückführen.

Wenden wir die gewöhnliche Bezeichnung an, wonach diejenige Unterdeterminante dritter Ordnung der Determinante (72), welche in ihr mit a_{rs} multiplicirt ist, α_{rs} heisst, so schreibt sich die Bedingung (73)

$$\alpha_{44} = 0.$$

Die Bedingung (72) und (73) und die Bedingung $\alpha_{33} = 0$ haben die übrigen acht zur Folge. — Denn (s. Baltzer Determinanten 2. Aufl. § 6. 5), da vermöge der Bedingung (72)

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{13} \\ \alpha_{13} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{14} \\ \alpha_{14} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \alpha_{22} & \alpha_{24} \\ \alpha_{24} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{34} & \alpha_{44} \end{vmatrix} = 0$$

so folgt aus den Bedingungen $\alpha_{33} = 0 \quad \alpha_{44} = 0$

$$\alpha_{13} = 0 \quad \alpha_{14} = 0 \quad \alpha_{23} = 0 \quad \alpha_{24} = 0 \quad \alpha_{34} = 0.$$

Ferner ist

$$a_{11} \alpha_{11} + a_{12} \alpha_{12} = 0$$

$$a_{12} \alpha_{12} + a_{22} \alpha_{22} = 0$$

$$a_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = 0$$

Folglich

$$\alpha_{11} = - \frac{a_{12} \alpha_{12}}{a_{11}}$$

$$\alpha_{22} = - \frac{a_{12} \alpha_{12}}{a_{22}}$$

$$\alpha_{12}^2 \left(\frac{a_{12}^2}{a_{11} a_{22}} - 1 \right) = 0$$

mithin

$$\alpha_{12} = 0.$$

Demnach ist vermöge der Gleichung $a_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12}^2 = 0$ jedenfalls eine der beiden Zahlen α_{11} und α_{22} Null; es sei $\alpha_{22} = 0$, so ergibt sich $a_{11} \alpha_{11} = 0$ also mit Ausnahme des besonderen Falles, wo $a_{11} = 0$ ist, ist auch $\alpha_{11} = 0$. Die Bedingung der Realität der Zerlegung ist die, dass $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} > 0$ ist.

Setzt man von den Variablen der Function (70) eine gleich der Einheit, die drei andern gleich x, y, z , so gelangt man zu einer Function von der Form (1) und demnach stellt die Gleichung (1) ein System zweier reellen Ebenen dar, wenn die Bedingung (72) (vgl. 64) erfüllt ist, wenn ihre Unterdeterminanten dritter Ordnung einzeln Null sind, welche letzteren zehn Bedingungen sich im Allgemeinen auf zwei zurückführen lassen, und wenn $a_{12}^2 - a_{11} a_{22} > 0$ oder $a_{11} a_{33} - \alpha_{33}^2 > 0$ ist oder eine der vier übrigen analog gebildeten Bedingungen erfüllt ist.

Die weitere Ausführung der Grenzfälle unterlassen wir hier, weil sie für unsere Zwecke nicht erforderlich ist.

§ 11. Die Kreisschnitte der Flächen zweiten Grades.

In § 7 sind schon einige kreisförmige Schnitte von Flächen zweiter Ordnung erwähnt worden. Es sollen hier allgemein die Bedingungen erörtert werden, unter welchen ebene Schnitte von Flächen zweiter Ordnung Kreise sind. — Es soll dabei zunächst der Fall der Umdrehungsflächen ausgeschlossen sein, um am Schlusse erledigt zu werden.

Wenn eine Fläche zweiten Grades von einer Ebene in einem Kreise geschnitten wird, so lässt sich durch diesen Kreis eine Kugel legen. Bezeichnet man die Gleichung der Fläche mit $U = 0$ und die der Kugel mit $U_1 = 0$, so stellt $\lambda U + U_1 = 0$ jede Fläche zweiten Grades dar, welche alle die beiden gegebenen Flächen gemeinsamen Punkte enthält. Es kann also λ auch so bestimmt werden, dass $\lambda U + U_1 = 0$ eine Fläche darstellt, von welcher die Kreisebene ein Theil ist, d. h. dass sie ein System zweier Ebenen darstellt. Durch diese Erwägung soll die vorliegende Frage gelöst werden.

1. Es sei die Gleichung eines Ellipsoids

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0.$$

Die Gleichung der Kugel ist, da wir rechtwinklige Coordinaten voraussetzen,

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 - r^2 = 0.$$

Folglich ist die Gleichung der Fläche zweiten Grades, welche die beiden Flächen gemeinsamen Punkte enthält

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha^2} + 1\right)x^2 + \left(\frac{\lambda}{\beta^2} + 1\right)y^2 + \left(\frac{\lambda}{\gamma^2} + 1\right)z^2 - 2x_1x - 2y_1y - 2z_1z + x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - (\lambda^2 + r^2) = 0. \quad (74)$$

Die Function auf der linken Seite ist kein vollständiges Quadrat. Wenden wir auf diese Gleichung die bisherige Bezeichnung an, um die Bedingungen dafür zu ermitteln, dass sie ein System zweier Ebenen darstellt, so hat die Bedingung $\alpha_{44} = 0$ hier die Form

$$\left(\frac{\lambda}{\alpha^2} + 1\right) \left(\frac{\lambda}{\beta^2} + 1\right) \left(\frac{\lambda}{\gamma^2} + 1\right) = 0.$$

Da α, β, γ von einander verschieden sind, so kann nur einer der drei Factoren Null sein; es sei $\lambda = -\beta^2$. — Die Bedingung $\alpha_{24} = 0$ heisst hier

$$y_1(\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \beta^2) = 0$$

und ergibt $y_1 = 0$. Dadurch ist die Bedingung (72) erfüllt. Die Bedingung $\alpha_{22} = 0$ ergibt dann

$$r^2 = \beta^2 \left\{ -\frac{x_1^2}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{z_1^2}{\gamma^2 - \beta^2} + 1 \right\}. \quad (75)$$

Hiermit sind alle Bedingungen der Zerlegbarkeit erfüllt. Durch Substitution der gefundenen Werthe in die Gleichung (74) nimmt dieselbe folgende Gestalt an

$$\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2} x^2 + \frac{\gamma^2 - \beta^2}{\gamma^2} z^2 - 2x_1 x - 2z_1 z + \frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} x_1^2 + \frac{\gamma^2}{\gamma^2 - \beta^2} z_1^2 = 0.$$

Die Bedingung der Realität der Zerlegung der Function links ist, dass

$$(\alpha^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \beta^2) < 0$$

ist, d. h. dass β der Grösse nach zwischen α und γ liegt; wir bezeichnen demnach wieder wie früher mit α die grösste, mit γ die kleinste Halbaxe. Durch Zerlegung erhalten wir die Gleichung

$$\left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha} x + \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} x_1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}} z_1 \right) \\ \times \left(\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha} x - \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} x_1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}} z_1 \right) = 0. \quad (76)$$

Es gibt demnach zwei Systeme von unendlich vielen Ebenen, welche das Ellipsoid in Kreisen schneiden; die Ebenen des einen Systems sind einander parallel, ebenso die Ebenen des andern Systems; die Ebenen beider Systeme stehen auf der Ebene der grössten und kleinsten Axe senkrecht; sie sind also alle der mittlern Axe parallel; je zwei Ebenen, welche verschiedenen Systemen angehören, bilden sowohl mit der längsten wie mit der kürzesten Axe gleiche Winkel.

Die Ebenen, welche in der Gleichung (76) enthalten sind, sind sämtlich reell, wie auch x_1, z_1 , d. h. wo auch der Mittelpunkt der Kugel gewählt werden möge, aber sie schneiden nicht immer das Ellipsoid in reellen Kreisen. Zunächst ergibt die Gleichung (75), dass die Kugel nur dann reell ist, wenn

$$\frac{x_1^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{z_1^2}{\gamma^2 - \beta^2} - 1 < 0$$

d. h. wenn der Punkt x_1, z_1 auf der konvexen Seite der Hyperbel

$$\frac{x^2}{\alpha^2 - \beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2 - \beta^2} - 1 = 0 \quad (77)$$

liegt. Diese Hyperbel ist der Ellipse

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$$

d. h. dem Schnitte der XZ-Ebene mit dem Ellipsoid confocal und schneidet dieselbe in den Punkten

$$x = \pm \alpha \sqrt{\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha^2 - \gamma^2}} \quad z = \pm \gamma \sqrt{\frac{\beta^2 - \gamma^2}{\alpha^2 - \gamma^2}}$$

Für jeden Punkt der Hyperbel, insbesondere für die eben bezeichneten vier Punkte, welche man Nabelpunkte des Ellipsoids nennt, ist der Radius der Kugel Null; in den vier Punkten selbst ist jedesmal eine der Ebenen (76) Berührungsebene. Aber auch wenn der Punkt x_1, z_1 auf der konvexen Seite der Hyperbel (77) gewählt wird, hat die Kugel deshalb noch nicht einen reellen Kreis mit dem Ellipsoid gemein. — Damit die durch den ersten Factor der Gleichung (76) gegebene Ebene das Ellipsoid treffe, muss, vermöge der Gleichung (61) der Punkte x_1, z_1 innerhalb des durch die Doppelgleichung

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} x - \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}} z = \pm \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} \quad (78)$$

in der XZ-Ebene gegebenen Parallelstreifens liegen; diese beiden Geraden berühren die Hyperbel in zwei diametral entgegengesetzten Nabelpunkten und stehen auf der einen Gruppe der Ebenen (76)

senkrecht. Ebenso, damit die durch den zweiten Factor der Gleichung (76) gegebene Ebene das Ellipsoid treffe, muss der Punkt x_1, z_1 innerhalb des durch die Doppelgleichung

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} x + \frac{\gamma}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} z = \pm \sqrt{\alpha^2 - \gamma^2} \quad (79)$$

gegebenen Parallelstreifens liegen. Diese beiden Graden berühren die Hyperbel (77) in den beiden andern Nabelpunkten, und stehen auf der zweiten Gruppe der Ebenen (76) senkrecht. Die Linien (78) und (79) umschliessen einen Rhombus, dessen Eckpunkte in der grössten und kleinsten Axe liegen. — Wählt man den Punkt x_1, z_1 im Innern dieses Rhombus, so schneidet die Kugel das Ellipsoid in zwei reellen Kreisen; wählt man ihn in einem der Eckpunkte, so berührt die Kugel das Ellipsoid in zwei Nabelpunkten; wählt man ihn ausserhalb des Rhombus aber auf der konvexen Seite der Hyperbel (77), so wird einer der beiden Kreise oder werden beide imaginär; eine der beiden Ebenen (77) oder beide treten dann zu der Kugel und dem Ellipsoid in dieselbe Beziehung, welche schon in den Elementen in der Ebene gleicher Potenzen (Chordalebene) zweier Kugeln oder in der Linie gleicher Potenzen (Chordallinie) zweier Kreise vorkommt. Wenn der Punkt x_1, z_1 auf der konkaven Seite der Hyperbel gewählt wird, so erscheinen die Ebenen (76) als Träger der gemeinsamen (imaginären) Punkte eines Ellipsoids und einer imaginären Kugel.

Je zwei Kreisschnitte der beiden verschiedenen Systeme liegen auf einer und derselben Kugel.

Wenn man von der Beziehung der Kreisschnitte zu der Kugel absehen will, so kann man die Gleichungen der Ebenen (76) kürzer schreiben

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha} x + \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z + p &= 0 \\ \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{\alpha} x - \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z + q &= 0. \end{aligned}$$

Diese Ebenen schneiden das Ellipsoid in reellen Kreisen, sofern p^2 resp. $q^2 < \alpha^2 - \gamma^2$.

2. Für das einschalige Hyperboloid

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$$

ergibt sich auf gleichem Wege Folgendes. Unter der Voraussetzung, dass $\alpha < \beta$ schneidet jede Kugel, deren Mittelpunkt in der XZ-Ebene liegt und die Coordinaten x_1, z_1 hat, und deren Radius durch die Gleichung

$$r^2 = \beta^2 \left\{ \frac{x_1^2}{\beta^2 - \alpha^2} + \frac{z_1^2}{\beta^2 + \gamma^2} + 1 \right\}$$

bestimmt ist, in zwei reellen Kreisen, deren Ebenen folgende Gleichungen haben

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\alpha} x + \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\gamma} z + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} x_1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} z_1 &= 0 \\ \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\alpha} x - \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\gamma} z + \frac{\alpha}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} x_1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} z_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (80)$$

Diese Gleichungen kann man abgekürzt schreiben

$$\frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\alpha} x + \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\gamma} z + p = 0 \quad \frac{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}}{\alpha} x - \frac{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}}{\gamma} z + q = 0 \quad (81)$$

wo p und q alle Werthe annehmen können.

3. Für das zweischalige Hyperboloid

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} + 1 = 0$$

ergibt sich ebenso: Wenn $\alpha < \beta$ ist, so schneidet im Allgemeinen eine Kugel, deren Mittelpunkt in der XZ -Ebene liegt und die Coordinaten x_1, z_1 hat, und deren Radius durch die Gleichung

$$r^2 = \beta^2 \left\{ \frac{x_1^2}{\beta^2 - \alpha^2} + \frac{z_1^2}{\beta^2 + \gamma^2} - 1 \right\}$$

bestimmt ist, die Fläche in zwei Kreisen, deren Ebenen die Gleichungen (80) haben. Wenn der Punkt x_1, z_1 ausserhalb der Ellipse

$$\frac{x^2}{\beta^2 - \alpha^2} + \frac{z^2}{\beta^2 + \gamma^2} - 1 = 0 \quad (82)$$

liegt, welche der in der XZ -Ebene liegenden Hyperbel confocal ist und dieselbe in den Punkten

$$x = \pm \alpha \sqrt{\frac{\beta^2 - \alpha^2}{\alpha^2 + \gamma^2}} \quad z = \pm \gamma \sqrt{\frac{\beta^2 + \gamma^2}{\alpha^2 + \gamma^2}} \quad (83)$$

schneidet, so ist die Kugel reell. Wenn derselbe Punkt ausserhalb der beiden Parallelstreifen liegt, die von den Linien gebildet werden, welche die Ellipse (82) in den Punkten (83) berühren und auf den Ebenen (80) senkrecht stehen, so schneidet die Kugel das Hyperboloid in zwei reellen Kreisen. — Die Ebenen (81) schneiden das zweischalige Hyperboloid in reellen Kreisen, wenn p^2 resp. $q^2 > \alpha^2 + \gamma^2$ ist.

4. Wenn in dem Kegel

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 0$$

$\alpha < \beta$ ist, so schneidet jede Kugel, deren Mittelpunkt in der XZ -Ebene liegt und die Coordinaten x_1, z_1 hat, und deren Radius durch die Gleichung

$$r^2 = \beta^2 \left\{ \frac{x_1^2}{\beta^2 - \alpha^2} + \frac{z_1^2}{\beta^2 + \gamma^2} \right\}$$

bestimmt ist, die Fläche in zwei reellen Kreisen, deren Ebenen die Gleichungen (80) haben; schreibt man diese Gleichungen in der Form (81), so sind p und q keinen Grenzbedingungen unterworfen.

5. Wenn in dem elliptischen Paraboloid

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} + 2 \frac{x}{\delta} = 0$$

$\beta^2 > \gamma^2$ ist, so schneidet im Allgemeinen eine Kugel, deren Mittelpunkt in der XZ -Ebene liegt und die Coordinaten x_1, z_1 hat, und deren Radius durch die Gleichung

$$r^2 = \beta^2 \left\{ \frac{z_1^2}{\beta^2 - \gamma^2} - 2 \frac{x_1}{\delta} - \frac{\beta^2}{\delta^2} \right\}$$

bestimmt ist, die Fläche in zwei Kreisen deren Ebenen folgende Gleichungen haben:

$$\left. \begin{aligned} x + \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z - \left(\frac{\beta^2}{\delta} + x_1 \right) + \frac{\gamma z_1}{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}} &= 0 \\ x - \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z - \left(\frac{\beta^2}{\delta} + x_1 \right) - \frac{\gamma z_1}{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

Wenn der Punkt x_1, z_1 ausserhalb (auf der convexen Seite) der Parabel

$$\frac{z^2}{\beta^2 - \gamma^2} - 2 \frac{x}{\delta} - \frac{\beta^2}{\delta^2} = 0 \quad (85)$$

liegt, welche der in der XZ -Ebene liegenden Parabel confocal ist und dieselbe in den Punkten

$$x = -\frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\delta} \quad z = \pm \frac{\gamma}{\delta} \sqrt{\beta^2 - \gamma^2} \quad (86)$$

schneidet, so ist die Kugel reell; darüber, ob die Schnitte der reellen Kugel und des Paraboloids reell sind, entscheiden die beiden Linien, welche die Parabel in den Punkten (86) berühren und auf den Ebenen (84) senkrecht stehen. Liegt der Punkt x_1, z_1 in demjenigen Winkel dieser beiden Linien in welchem die Parabel (85) liegt, so ist keiner der beiden Kreise reell, liegt er im Scheitelwinkel, so sind beide Kreise reell; liegt er im Nebenwinkel, so ist einer der beiden Kreise reell, der andre imaginär.

Schreibt man die Gleichungen (84) abgekürzt

$$x + \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z + \delta p = 0 \quad x - \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z + \delta q = 0$$

so werden die Ebenen mit dem Paraboloid reelle Kreise gemein haben, wenn p resp. $q > \frac{\beta^2 - \gamma^2}{2\delta^2}$ ist.

Das hyperbolische Paraboloid hat keine Kreisschnitte.

6. Wenn in dem elliptischen Cylinder

$$\frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} - 1 = 0$$

$\beta^2 > \gamma^2$ ist, so schneidet jede Kugel, deren Mittelpunkt in der XZ -Ebene liegt, deren Mittelpunkt die Coordinaten x_1, z_1 hat, und deren Radius durch die Gleichung

$$r^2 = \beta^2 \left\{ \frac{z_1^2}{\beta^2 - \gamma^2} + 1 \right\}$$

bestimmt ist, die Fläche in zwei reellen Kreisen, deren Ebenen die Gleichungen

$$x - \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z - x_1 - \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}} z_1 = 0$$

$$x + \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z - x_1 + \frac{\gamma}{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}} z_1 = 0$$

haben.

Schreibt man die Gleichungen abkürzend

$$x - \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z + p = 0 \quad x + \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\gamma} z + q = 0$$

so sind p und q keinen Grenzbedingungen unterworfen.

Der hyperbolische und der parabolische Cylinder haben keine Kreisschnitte.

7. In allen Revolutionsflächen mit Ausnahme der Kugel gibt es nur ein System von Kreisschnitten, deren Ebenen sämtlich parallel sind und die alle auf der Rotationsaxe senkrecht stehen. Die Mittelpunkte der Kugeln, welche die Fläche in Kreisflächen schneiden, liegen alle in der Rotationsaxe; ihr Radius ist unbestimmt. — Die Kugel wird von jeder Ebene in einem Kreise geschnitten.

Die vorstehende Abhandlung gibt im Wesentlichen den Gang, nach welchem ich seit mehreren Jahren in der Ober-Prima unsrer Anstalt die Flächen zweiter Ordnung behandelt habe. — In unserem Unterrichte in der analytischen Geometrie handelt es sich darum, dass der Schüler sich innerhalb gewisser, immerhin enger Grenzen Verständnis der analytischen Methoden und eine gewisse Fertigkeit in ihrer Anwendung aneigne, dass er zugleich lebendige und fruchtbare geometrische Anschauungen gewinne und die geometrischen Beziehungen mit Leichtigkeit in den Gleichungen erkennen lerne. — Für diesen Zweck sind die Elemente der analytischen Geometrie des Raumes besonders wichtig, die Anfangsgründe der Lehre von den Flächen zweiter Ordnung besonders fruchtbar. — Der Masstab dafür, wie weit darin zu gehen ist, wird dadurch gegeben, dass die Schüler unsrer obersten Klassen befähigt werden sollen, ihre Studien auf den polytechnischen Hochschulen mit Erfolg fortzusetzen und zu vollenden. — Dazu ist, wenn diejenigen Ziele, welche der Verein deutscher Ingenieure in seiner trefflichen Denkschrift: „Principien der Organisation polytechnischer Schulen“ aufgestellt hat, wirklich erreicht werden sollen, unerlässlich, dass die Schüler eine gründliche und umfassende allgemeine Bildung und für den ihren Fachstudien zunächst liegenden Wissenschaftskreis eine so tiefgehende specielle Vorbereitung erhalten, dass sie selbstständig wissenschaftlich arbeiten können und im Stande sind, insbesondere die Mathematik als die Sprache und das stets bereite Werkzeug der technischen und Naturwissenschaften handhaben zu lernen. — Wie unsere Anstalt beiden Aufgaben der Vorbereitung für die höheren technischen Studien, welche meines Erachtens in § 2 der oben genannten Denkschrift nicht hinreichend betont sind, gerecht zu werden sucht, geht im Allgemeinen aus den Schulnachrichten hervor. Die vorstehende Abhandlung hat diesem Bilde nach einer Seite schärfer ausgeprägte Züge geben wollen, wie es in dem vorletzten Programm nach Seite der Chemie geschehen ist und demnächst hoffentlich auch nach anderen Seiten geschehen wird.

Gallenkamp.