Die Centralen des einem Dreieck um- und der ihm eingeschriebenen Kreise; desgleichen die Centrale der Kreise solcher Vierecke, denen ein Kreis um- und eingeschrieben werden kann.

I.

1) Im Dreieck A B C (Fig. 1), an welchem $BC > AC > AB$ vorausgesetzt sein soll, sei M der Mittelpunkt des umgeschriebenen, m der des eingeschriebenen Kreises. Unter der gemachten Voraussetzung wird die Centrale M m, gehörig verlängert, stets die grösste und kleinste Dreiecksseite, B C und A B, selbst treffen, die mittlere Seite A C dagegen in ihrer Verlängerung oder sie wird derselben parallel sein.

Denn ist das Dreieck bei A rechtwinklig, so fällt M in die Mitte von B C, die Halbirungslinie des Winkels A, da $AC > AB$ ist, zwischen A M und A B, also m als ein Punkt dieser Geraden ebenfalls zwischen jene Linien; folglich muss in dem Dreiecke A M B die Ecktransversale M m die gegenüberstehende Seite A B selbst treffen. — Ist A ein spitzer Winkel, so liegt der Punkt M, da er zufolge der Voraussetzung näher an B C als an A C liegen muss, zwischen C m und C B, und aus demselben Grunde zwischen B m und B C; folglich schneidet in dem Dreieck C m B die Ecktransversale M m die gegenüberstehende Seite B C, und, da m auch zwischen B M und A M liegen muss, so trifft in dem Dreiecke A M B die Ecktransversale M m die Seite A B. — Ist endlich der Winkel A ein stumpfer, so fällt der Punkt M ausserhalb des Dreiecks nach der Seite von B C hin, m, wie immer, in das Dreieck, also muss M m die Seite B C schneiden. Da ferner die Halbirungslinie des Winkels A, also auch der Punkt m, zwischen A M und A B liegen muss, so trifft in dem Dreieck A M B die Ecktransversale M m die Seite A B.

Projicirt man nun die Centrale M m auf die Seiten des Dreiecks, indem man von ihren Endpunkten die Lothe M N, M P, M Q, m n, m p, m q beziehlich auf A B, B C und A C herablässt, so sind bekanntlich N, P und Q die Mitten dieser Seiten, und n, p und q ihre Berührungspunkte mit dem eingeschriebenen Kreise. Man hat demnach

$$Cp = Cq$$
$$Aq = An$$
$$Bn = Bp,$$

also auch

$$CP + Pp = CQ + Qq$$
$$AQ - Qq = AN - Nn$$
$$BN + Nn = BP - Pp.$$

Addirt man diese Gleichungen und berücksichtigt, dass $CP = BP$, $CQ = AQ$, und $BN = AN$, so findet man

$$Pp - Qq + Nn = Qq - Nn - Pp$$
$$\text{oder } Pp + Nn = Qq,$$

und somit den Satz:

a) die Summe der Projectionen der Centrale des einem Dreieck um- und eingeschriebenen Kreises auf die grösste und kleinste Dreiecksseite ist gleich der Projection auf die mittlere Seite.

Es ist ferner $Qq = AQ - Aq$,

$$AQ = \tfrac{1}{2} AC$$
$$\text{und } Aq = \frac{AC + AB - BC}{2};$$
$$\text{folglich ist } Qq = \frac{BC - AB}{2}.$$

Da nun nach a) $Pp + Nn = Qq$,

so ist $Pp + Nn + Qq = BC - AB$.

In jedem Dreiecke ist demnach

b) die Summe der Projectionen der Centrale des um- und eingeschriebenen Kreises auf die Seiten gleich dem Unterschiede zwischen der grössten und kleinsten Dreiecksseite.

Man übersieht sogleich, dass, da im gleichschenkligen Dreieck die Centrale der beiden Kreise durch die Spitze geht und lothrecht auf der Grundlinie ist, die Projectionen derselben auf die Schenkel gleich werden und die Projection auf die Grundlinie sich auf einen Punkt reducirt. Eben so findet man leicht, dass jede Projection auf einen Schenkel gleich ist dem halben Unterschiede zwischen Schenkel und Grundlinie. Die Sätze a) und b) modificiren sich daher bei dem gleichschenkligen Dreiecke dahin, dass erstens die Projectionen der Centrale auf die Schenkel gleich sind, die Projection auf die Grundlinie Null ist, und dass zweitens die Summe der Projectionen gleich ist dem Unterschiede zwischen Schenkel und Grundlinie.

Die Centrale Mm schneide die Seite BC unter dem Winkel φ, so schneidet sie AB unter dem Winkel $2R - (B + \varphi)$ und die Seite AC unter dem Winkel $\varphi - C$. Alsdann ist $Pp = Mm \cos \varphi$, $Nn = Mm \cos (2R - [B + \varphi])$ und $Qq = Mm \cos (\varphi - C)$; folglich nach a)

$$Mm \cos (\varphi - C) = Mm \cos \varphi + Mm \cos (2R - [B + \varphi])$$
$$\text{oder } \cos (\varphi - C) = \cos \varphi - \cos (B + \varphi), \quad \ldots \quad 1$$

woraus sich ergibt

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1 - \cos B - \cos C}{\sin B - \sin C}. \quad \ldots \quad 2$$

Die Richtung der Centrale gegen die Seite BC ist demnach nur von den beiden an dieser liegenden Winkeln abhängig.

Ist die Centrale der mittlern Seite AC parallel, so ist $\varphi = C$ und die Gleichung 1 geht alsdann über in

$$1 = \cos C - \cos (B + C)$$
$$\text{oder } 1 = \cos C + \cos A \quad \ldots \quad 3$$

Da dieser Gleichung nur durch zwei spitze Winkel A und C Genüge geschieht, so kann die Centrale nur in einem spitzwinkligen Dreiecke einer Seite parallel sein*). Es schliesst sich hieran die

---

*) Anmerkung. Wäre über das Grössenverhältniss der Dreiecksseiten nichts festgesetzt, so würden die Gleichungen

$$\cos A + \cos B = 1$$
$$\text{und } \cos C + \cos B = 1$$

Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, zu dem eine Seite und ein anliegender Winkel gegeben und in dem die Centrale des um- und eingeschriebenen Kreises jener Seite parallel ist.

Aufl. A B C (Fig. 2) sei der gegebene Winkel. Man beschreibe aus B mit beliebigem Radius B A einen Halbkreis, fälle aus dem Punkte C, in welchem der andere Schenkel von dem Halbkreise getroffen wird, das Loth C D auf B A; mache alsdann $BE = DA$, errichte E F lothrecht auf B C und ziehe B F, so ist C B F der zweite anliegende Winkel und die weitere Construction kommt auf die einfache: ein Dreieck aus einer Seite und den anliegenden Winkeln zu construiren, zurück.

Die Richtigkeit der Auflösung ist aus dem Vorstehenden einleuchtend.

2) Die Mittelpunkte der dem Dreieck A B C von aussen eingeschriebenen Kreise seien mit m', m'', m''' bezeichnet in der Ordnung, dass die aus diesen Punkten beschriebenen Kreise beziehlich die Seiten B C, A C und A B selbst, die übrigen in der Verlängerung berühren. Diese Punkte mit M verbunden geben die Centralen Mm', Mm'' und Mm''', von denen die beiden ersten offenbar die Seiten A B und A C selbst, B C dagegen in der Verlängerung schneiden; die dritte aber die Seiten B C und A B selbst, dagegen A C in der Verlängerung trifft.

Es sei die Centrale Mm''' (Fig. 3) auf die Dreiecksseiten projicirt, die Bezeichnung der in 1 entsprechend, so ist

$$
\begin{aligned}
&Cp''' = Cq''' \\
&Bp''' = Bn''' \\
&An''' = Aq''' \\
\text{mithin auch: } &CP + Pp''' = CQ + Qq''' \\
&Pp''' - BP = BN - Nn''' \\
&AN + Nn''' = Qq''' - AQ.
\end{aligned}
$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man wiederum mit Berücksichtigung der gleichen Strecken

$$Pp''' + Nn''' = Qq''',$$

und da sich Aehnliches von den andern Centralen Mm' und Mm'' nachweisen lässt, so folgt:

c) in jedem Dreiecke ist die Summe der Projectionen der Centrale des um- und eines von aussen eingeschriebenen Kreises auf die von der Centrale getroffenen Seiten gleich der Projection auf die nicht (in der Verlängerung) getroffene.

---

die Bedingungen angeben, unter denen die Centrale M m resp. den Seiten AB und BC parallel läuft, wie man findet, wenn man in Gl. 1 im ersten Falle $\varphi = 180^0 - B$, im zweiten $\varphi = 0$ setzt; so dass allgemein die Summe der Cosinus der beiden einer Seite anliegenden Winkel gleich 1 sein muss, wenn die Centrale dieser Seite parallel sein soll.

Unter der gemachten Annahme können aber diese Gleichungen nicht Statt finden. Denn, was die erste betrifft, so ist, da C als der kleinste Winkel kleiner als 60^0 sein muss, $A + B > 120^0$ etwa $= 120^0 + \alpha$. Da nun

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

und $\cos \frac{A+B}{2} = \cos(60^0 + \frac{\alpha}{2}) = \sin(30^0 - \frac{\alpha}{2}) < 1/2$, folglich $2 \cos \frac{A+B}{2} < 1$ und $\cos \frac{A-B}{2}$ ebenfalls < 1, so ist in diesem Falle immer

$$\cos A + \cos B < 1.$$

In Ansehung der zweiten Gleichung überzeugt man sich leicht durch die trigonometrischen Tafeln, dass zu jedem Winkel C ein der Gleichung genügender Winkel B gehört, der grösser als der daraus sich ergebende A ist, so dass in diesem Falle nicht A, sondern B der grösste Winkel des Dreiecks wäre.

Es stimmt daher diese Untersuchung mit dem Anfangs Bewiesenen dahin überein, dass die Centrale nur der mittlern Seite parallel sein kann.

Weiter ist $Qq''' = Cq''' - CQ$

$$Cq''' = \frac{BC + AC + AB}{2} \text{ und } CQ = \tfrac{1}{2} AC;$$

$$\text{also ist } Qq''' = \frac{BC + AB}{2}$$

und demnach mit Rücksicht auf Satz c

$$Pp''' + Nn''' + Qq''' = BC + AB.$$

In gleicher Weise findet man die Summe der Projectionen der Centralen Mm'' und Mm' gleich $BC + AC$. Demnach ist

d) die Summe der Projectionen der Centrale des einem Dreiecke um- und eines demselben von aussen eingeschriebenen Kreises auf die Dreiecksseiten gleich der Summe der beiden Seiten, welche von der Centrale getroffen werden.

Ist das Dreieck ABC gleichschenklig, so unterliegen die Sätze c) und d) denselben Modificationen, wie dies im Art. 1 bei derselben Annahme der Fall war.

Bezeichnet man den Winkel, unter dem Mm''' die Seite BC schneidet mit φ''', so ist $Pp''' = Mm''' \cos \varphi'''$, $Qq''' = Mm''' \cos (C - \varphi''')$, $Nn''' = Mm''' \cos (A + \varphi''')$ (verlängert man nämlich $m'''n'''$ und zieht durch M eine Parallele Mo zu AB, so ist in dem Dreiecke m''' Mo der Winkel bei M gleich $B + \varphi'''$ und $Mo = Nn'''$), und man erhält zufolge Satz c:

$$\cos \varphi''' + \cos (B + \varphi''') = \cos (C - \varphi'''), \qquad 4$$

$$\text{und hieraus } \operatorname{tg} \varphi''' = \frac{1 + \cos B - \cos C}{\sin B + \sin C}. \qquad 5$$

Setzt man in der ersten dieser Gleichungen $\varphi''' = C$, so findet man

$$\cos C + \cos (B + C) = 1$$

$$\text{oder } \cos C - \cos A = 1 \qquad 6$$

Es muss also der Unterschied der Cosinus der einer Seite anliegenden Winkel gleich 1 sein, wenn eine der in Rede stehenden Centralen jener Seite parallel sein soll. Der Gl. 6 kann jedoch nur Genüge geleistet werden, wenn A ein stumpfer Winkel ist; daher kann die Centrale Mm''' nur in einem bei A stumpfwinkligen Dreiecke einer Seite parallel sein. Ein Gleiches gilt, wie man leicht sieht, für die Centrale Mm''. Dagegen kann die Centrale Mm' der Seite AB niemals parallel sein, weil die Gleichung

$$\cos A - \cos B = 1$$

weder für zwei spitze Winkel, noch auch Statt finden kann, wenn A ein stumpfer Winkel ist.

Die Auflösung der sich hieran knüpfenden Aufgabe: ein Dreieck zu construiren, wozu eine Seite und ein anliegender Winkel gegeben und in welchem die Centrale des um- und eines von aussen eingeschriebenen Kreises jener Seite parallel läuft, ist der vorhin in 1 gegebenen so ähnlich, dass sie keiner weitern Ausführung bedarf.

3) ABCD (Fig. 4) sei ein Viereck, um und in welches sich ein Kreis beschreiben lässt, M der Mittelpunkt des umgeschriebenen, m der des eingeschriebenen Kreises. Die Centrale Mm schneidet zwei gegenüberliegende Seiten oder sie ist Diagonale des Vierecks, wie sich dies aus den Untersuchungen in III am einfachsten ergeben wird.

Projicirt man die Centrale Mm auf die Seiten des Vierecks und sind Nn, Oo, Pp, Qq beziehlich die Projectionen auf die Seiten AB, BC, CD, DA, so ist

$$\begin{aligned} An &= Aq \\ Bo &= Bn \\ Cp &= Co \\ Dq &= Dp \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{also auch } AN + Nn &= AQ + Qq \\ BO + Oo &= BN - Nn \\ CP - Pp &= CO - Oo \\ DQ - Qq &= DP + Pp. \end{aligned}$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man, da die gleichen Strecken A N und B N, B O und C O, u. s. w. fortfallen,

$$Nn + Oo - Pp - Qq = Qq - Nn - Oo + Pp$$

also $Nn + Oo = Pp + Qq$, d. h.

e) in jedem Viereck, dem ein Kreis um- und eingeschrieben werden kann, ist die Summe der Projectionen der Centrale beider Kreise auf die Viereckseiten auf beiden Seiten der Centrale dieselbe.

Bezeichnet man die Seiten A B, B C, C D, D A der Reihe nach mit a, b, c und d, so hat man

$$An = a - Bn = a - Bo = a - (b - Co) = a - b + Co$$
$$Aq = d - Dq = d - Dp = d - (c - Cp) = d - c + Cp.$$

Da nun $An = Aq$ und $Co = Cp$, so ist

$$2\,An = (a + d) - (b + c) + 2\,Cp$$

oder $2\left(\frac{a}{2} + Nn\right) = (a + d) - (b + c) + 2\left(\frac{c}{2} - Pp\right)$

$$a + 2Nn = (a + d) - (b + c) + c - 2Pp;$$

folglich $2(Nn + Pp) = d - b$.

In gleicher Weise erhält man

$$2(Oo + Qq) = a - c;$$

mithin ist $Nn + Oo + Pp + Qq = \frac{(a - b) + (d - c)}{2}$,

in Worten:

f) in jedem einem Kreise ein- und einem andern Kreise umgeschriebenen Virecke ist die Summe der Projectionen der Centrale beider Kreise auf die Viereckseiten gleich der halben Summe der Unterschiede derjenigen Seiten, auf denen die Summe der Projectionen nach e) einander gleich ist.

Schneidet die Centrale M m die Seite A B unter dem Winkel φ, so bildet sie mit den Richtungen der Seiten B C, C D, D A der Reihe nach die Winkel $2R - (B + \varphi)$, $B - A + \varphi$, $A - \varphi$. Drückt man die Projectionen durch M m und diese Winkel aus, so erhält man zur Bestimmung des Winkels φ die Gleichung

$$\cos\varphi - \cos(B + \varphi) = \cos(B - A + \varphi) + \cos(A - \varphi) \quad . \quad . \quad 7$$

indem man jene Ausdrücke in die Gleichung des Satzes e substituirt.

II.

4) Es seien wiederum M und m die Mittelpunkte des dem beliebigen Dreiecke A B C um- und eingeschriebenen Kreises (Fig. 5). Zieht man A m und B m, verlängert die letztere Gerade bis zu ihrem Durchschnitte mit dem Kreise M in E, so halbirt B E den Winkel B, mithin auch den Bogen A C und es ist $AE = EC$. Ferner ist $\angle EmA = \angle mAB + \angle mBA$, $\angle EAm = \angle mAC + \angle EAC$. Da nun $\angle mAB = \angle mAC$ und $\angle EAC = \angle CBE = \angle mBA$ ist, so folgt: $\angle EmA = \angle EAm$, mithin auch $AE = Em$.

Zieht man noch den Durchmesser E F, alsdann C F und fällt von m das Loth m G auf A B, so sind die Dreiecke m G B und E C F ähnlich (denn $\angle mBG = \angle CFE$ und $\angle mGB = \angle ECF$) und man hat daher

$$Bm : mG = EF : CE,$$

woraus sich $mG = \frac{Bm.\,CE}{EF}$

oder, da $CE = AE = Em$,

$$mG = \frac{Bm.\,Em}{EF}$$

ergibt. Bezeichnet man den Radius des Kreises M mit R, den des Kreises m mit r, so lässt sich die vorstehende Gleichung auch schreiben:

$$r = \frac{Bm.\,Em}{2R} \quad \dots\dots\dots\dots \quad 8$$

Da sowohl das Product $Bm.\,Em$ der Abschnitte aller durch den Punkt m gehender Sehnen als auch R constant ist, so ist dieser Ausdruck für r von der besondern Lage des Punktes B unabhängig und bleibt derselbe, wie auch dieser Punkt auf dem Umfange des Kreises M fortrückt. Oder mit andern Worten:

g) es gibt unzählig viele Dreiecke, welche demselben Kreise ein- und einem andern Kreise umgeschrieben sind.

Legt man daher in den Kreis M eine Sehne $A'B'$, welche den Kreis m berührt und zieht von A' und B' Tangenten an den Kreis m, so wird ihr Durchschnittspunkt C' auf dem Umfange von M liegen.

Verlängert man die Centrale Mm, bis sie dem Umfange des Kreises M in H und I begegnet, so ist

$$Bm.\,Em = Hm.\,Im = (R + Mm)(R - Mm) = R^2 - Mm^2;$$

also $Mm^2 = R^2 - Bm.\,Em$

und zufolge Gl. 8

$$Mm^2 = R^2 - 2Rr = R(R - 2r) \quad \dots\dots\dots \quad 9$$

Diese Gleichung zeigt nicht nur, in welchem Grössenverhältniss die Radien der beiden Kreise und die Centrale stehen müssen, wenn es möglich sein soll, dem einen Kreise ein Dreieck einzuschreiben, welches zugleich dem andern umgeschrieben ist; sondern es lässt sich aus ihr auch derselbe Schluss ziehen, wie der aus Gl. 8 abgeleitete. Nämlich, da ihr zufolge von den drei Grössen R, r, Mm eine jede von den beiden andern abhängig ist, ein Dreieck aber zu seiner vollständigen Bestimmung dreier unabhängiger Stücke bedarf, so ist ein solches durch jene drei Grössen nicht vollständig bestimmt und es muss demnach unzählig viele Dreiecke geben, welche in denselben übereinstimmen.

Sind daher zwei Kreise gegeben, welche der Grösse und Lage nach die Gl. 9 befriedigen, so ist die Aufgabe: dem grössern ein Dreieck einzuschreiben, dessen Seiten von dem kleinern berührt werden, eine ganz unbestimmte und es muss noch irgend ein Stück des Dreiecks oder irgend eine Bedingung zwischen dessen Bestandtheilen hinzukommen, um sie zu einer bestimmten zu machen.

Aufgabe. Ein Dreieck zu construiren, zu dem gegeben ist eine Seite AB, der Radius R des umgeschriebenen und der Radius r des eingeschriebenen Kreises.

Auflösung. Zufolge Gl. 9 muss $2r < R$ sein. Die Grenzen, innerhalb welcher AB genommen werden darf, sind aus der Lage der Kreise leicht zu bestimmen. Man construire zuerst Mm als mittlere geometrische Proportionale zwischen R und $R - 2r$, beschreibe alsdann aus M mit R und aus m mit r einen Kreis; lege in den Kreis M eine Sehne gleich AB und beschreibe aus M mit der Entfernung dieses Punktes von AB einen dritten Kreis. Legt man an diesen und den Kreis m eine gemeinschaftliche Tangente und zieht von deren Durchschnittspunkten mit dem Umfange des Kreises M Tangenten an den Kreis m, so bilden diese drei Tangenten das verlangte Dreieck.

Es wird von der Lage der beiden letzten Kreise abhängen, ob vier, drei oder nur zwei gemeinschaftliche Tangenten möglich sind. Es ist aber leicht einzusehen, dass in den beiden ersten Fällen nur zwei verschiedene Dreiecke resultiren, im dritten Falle sich nur ein Dreieck ergibt.

Die Richtigkeit der Auflösung ist nach den vorangegangenen Sätzen sogleich einleuchtend.

Aufgabe. Zu einem Dreieck sei gegeben ein Winkel α, der Radius R des umgeschriebenen Kreises und der Radius r des eingeschriebenen; das Dreieck zu construiren.

Auflösung. Man construire zuerst, wie in voriger Aufgabe, M m und die Kreise M und m, vorlängere M m beiderseits bis zum Umfange des Kreises M in A und B; lege alsdann an den Kreis m zwei Tangenten, welche den Winkel α einschliessen; ihr Durchschnittspunkt mag P heissen. Beschreibt man nun aus m mit m P einen Kreis, der den Kreis M in Q und R schneidet, so ist jeder dieser Punkte ein Eckpunkt des verlangten Dreiecks und das Weitere klar.

Ist A der von m entferntere und B der nähere Endpunkt des Durchmessers A B, so darf der Winkel α nicht kleiner sein, als der, den die von A aus, und nicht grösser, als der, den die von B aus an den Kreis m gelegten Tangenten einschliessen. Ist dieser letztere Winkel ein stumpfer, so kann α auch ein rechter sein, in welchem Falle die gegenüberliegende Seite offenbar ein Durchmesser des Kreises M wird und die Construction sich vereinfacht.

Der Beweis der Richtigkeit darf dem Leser überlassen bleiben.

5) Es sei (Fig. 6) m' der Mittelpunkt des dem Dreieck A B C von aussen eingeschriebenen Kreises, welcher die Seite B C selbst, die andern Seiten aber in der Verlängerung berührt, r' der Radius dieses Kreises. Zieht man m' B, verlängert diese Gerade, bis sie den Kreis M in E trifft; zieht ferner E A, E C und den Durchmesser E F, so steht dieser auf A C lothrecht in deren Mitte und es ist daher $AE = EC$. Verbindet man noch A mit m' so ist, wenn man die innern Winkel des Dreiecks A B C der Kürze wegen mit A, B und C bezeichnet, $\angle CEm' = A$, $\angle AEC = B$, also $\angle AEm' = A + B$; $\angle ABE = 90^0 - \frac{B}{2}$, folglich $\angle BAE = 90^0 - (A + \frac{B}{2})$. Ferner ist $\angle m'AE = m'AB + BAE = \frac{A}{2} + 90^0 - (A + \frac{B}{2}) = 90^0 - \frac{A+B}{2}$; daher ist auch $\angle Am'E = 90^0 - \frac{A+B}{2}$, mithin $AE = Em' = EC$.

Endlich sei von m' das Loth m' G auf A B gefällt und noch C F gezogen, so hat man aus den ähnlichen Dreiecken B m' G und E F C

$$Bm' : m'G = EF : CE,$$

woraus $m'G = \frac{Bm'.\ CE}{EF}$,

oder, da $CE = Em'$ ist,

$$m'G = \frac{Bm'.\ Em'}{EF}$$

folgt. Es ist aber $m'G = r'$ und $EF = 2R$, also

$$r' = \frac{Bm'.\ Em'}{2R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 10$$

Da nun das Product $Bm'.\ Em'$ für alle Secanten, welche von m' aus an den Kreis M gezogen werden können, constant ist, so folgt aus vorstehender Gleichung in derselben Weise wie früher:

h) es gibt unzählig viele Dreiecke, denen derselbe Kreis M umgeschrieben und welchen derselbe Kreis m' von aussen eingeschrieben ist.

Man darf daher nur, wenn zwei Kreise gegeben sind, welche die Möglichkeit solcher Dreiecke gestatten, von einem beliebigen Punkte A' im Umfange des Kreises M zwei Tangenten an den Kreis m' legen und deren Durchschnittspunkte B' und C' mit dem Kreise M durch eine Gerade verbinden, so wird auch $B'C'$ den Kreis m' berühren.

Es schneide die Centrale Mm' den Kreis M in H und I, so ist

$$Bm'.Em' = Hm'.Im' = (R + Mm')(Mm' - R) = Mm'^2 - R^2,$$

also $Mm'^2 = R^2 + Bm'.Em'$,

und zufolge 10 $Mm'^2 = R^2 + 2Rr' = R(R + 2r')$; 11

ferner nach Analogie

$$Mm''^2 = R^2 + 2Rr'' = R(R + 2r''), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 12$$

$$Mm'''^2 = R^2 + 2Rr''' = R(R + 2r'''), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots 13$$

wenn m'', m''' die Mittelpunkte und r'', r''' die Radien der beiden andern dem Dreieck ABC von aussen eingeschriebenen Kreise bedeuten.

Dass auch aus diesen Gleichungen sich der Satz h herleiten lässt, bedarf keiner weitern Ausführung; eben so wenig die Auflösung der den Aufgaben in 4 entsprechenden, wenn man statt des Radius r des eingeschriebenen Kreises den eines von aussen eingeschriebenen setzt.

6) Es sei AD (Fig. 7) ein Durchmesser des Kreises M. Von A aus sei in diesen Kreis das gleichschenklige Dreieck ABC, worin $AB = AC$ sein soll, construirt und demselben der Kreis m eingeschrieben. Ferner sei von D aus das Dreieck DEF construirt, so dass es dem Kreise M ein- und dem Kreise m umgeschrieben ist; es wird auch dieses Dreieck gleichschenklig sein und die Grundlinien BC und EF der beiden Dreiecke werden lothrecht auf dem Durchmesser AD stehen.

Zieht man nun BE, CF, EC und FB, so werden sich die beiden erst genannten Geraden in einem Punkte O des Durchmessers AD und die letzt genannten in einem Punkte P auf seiner Verlängerung schneiden. Denn $EFBC$ ist ein Trapez, in welchem bekannter Massen die Mitten a und d der parallelen Seiten, der Durchschnittspunkt O der Diagonalen und der Durchschnittspunkt P der nicht parallelen Seiten in einer Geraden liegen.

Die Punkte O und P theilen die Durchmesser AD und ad der beiden Kreise harmonisch, so dass sowohl A, O, D und P als auch a, O, d und P harmonische Punkte sind. Für die erstern ergibt sich dies unmittelbar aus den bekannten Eigenschaften des einem Kreise eingeschriebenen Vierecks $EFBC$. Errichtet man nun in P das Loth QR auf AP, so ist dasselbe die Polare des Punktes O und das in O auf AD errichtete Loth VW die Polare des Punktes P. Da nun die Secante EP in den Punkten H und C harmonisch getheilt ist, so verhält sich

$$EH : CH = EP : CP.$$

Es ist aber weil EF, VW und BC parallel sind,

$$EH : CH = aO : dO$$

und $EP : CP = aP : dP$,

folglich auch $aO : dO = aP : dP$;

mithin ist ad in O und P gleichfalls harmonisch getheilt und es wird daher jede Secante, welche durch einen der Punkte O oder P geht, durch dessen Polare und die Durchschnittspunkte der Secante mit jedem der Kreise M oder m harmonisch geschnitten. Es sind z. B. für die Secante $A'K$ nicht allein A', O, D' und K, sondern auch b, O, c und K harmonische Punkte.

Nun sei $A'B'C'$ ein beliebiges dem Kreise M ein- und dem Kreise m umgeschriebenes Dreieck, durch A' und O die Sehne $A'D'$ gezogen, und vom Punkte D' das Dreieck $D'E'F'$

construirt, so dass es denselben Kreisen M und m ein- und umgeschrieben ist. Man kann sich vorstellen, die Dreiecke A B C und D E F seien in der Art veränderlich, dass die Ecken stets auf dem Umfange des Kreises M sich bewegen, während die Seiten stets Tangenten am Kreise m bleiben. Kommen nun die Dreiecke A B C und D E F in die Lage von A′B′C′ und D′E′F′, und es geht die der Geraden A D entsprechende A′D′ durch den Punkt O, so müssen auch die den Geraden B E und C F entsprechenden B′E′ und C′F′ durch den Punkt O gehen, so dass die Verbindungslinien der gegenüber liegenden Ecken sich in demselben Punkte schneiden.

Verlängert man die gegenüber liegenden Seiten A′B′ und D′E′, B′C′ und E′F′, C′A′ und F′D′ dieser Dreiecke bis zu ihrem Durchschnitte in S, Q und R, so liegen diese Punkte auf derselben Geraden P Q, der Polare des Punktes P. Denn nach der Lehre von den Polaren am Kreise schneiden sich die Gegenseiten eines eingeschriebenen Vierecks A′B′D′E′ auf der Polare des Durchschnittspunktes O der Diagonalen; mithin liegt der Punkt S in der Geraden Q R und eben so ergibt sich dieses für die Punkte Q und R.

Aus dem Vorstehenden ziehen wir daher den Schluss:

i) unter den unzählig vielen Dreiecken, welche denselben Kreisen ein- und umgeschrieben sind, gibt es unzählig viele Paare in der Art zusammengehörige, dass die Verbindungslinien der gegenüber liegenden Ecken durch denselben Punkt (O) gehen, und dass die gegenüber liegenden Seiten sich auf derselben Geraden (Q R), der Polare jenes Punktes, schneiden.

III.

7) Bezeichnet man die Seiten A B, B C, C D, D A eines Vierecks A B C D (Fig. 4), welches einem Kreise M ein-, und einem andern m umgeschrieben ist, der Reihe nach mit a, b, c, d; die Winkel mit A, B, C, D; den Radius des umgeschriebenen Kreises mit R und den des eingeschriebenen mit r; zieht noch A m und B m, so wie m n lothrecht auf A B, so ist, wie leicht zu sehen,

$$AB = a = r\left(\operatorname{cotg}\frac{A}{2} + \operatorname{cotg}\frac{B}{2}\right) = r\,\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}.$$

Eben so ergibt sich

$$b = r\,\frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}} = r\,\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}},$$

$$c = r\,\frac{\sin\frac{C+D}{2}}{\sin\frac{C}{2}\sin\frac{D}{2}} = r\,\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}},$$

$$d = r\,\frac{\sin\frac{D+A}{2}}{\sin\frac{D}{2}\sin\frac{A}{2}} = r\,\frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}.$$

Demnach ist

$$ac = r^2 \frac{\sin^2 \frac{A+B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} = 4\, r^2 \frac{\sin^2 \frac{A+B}{2}}{\sin A \sin B}, \quad . \; . \; . \quad 14$$

$$b\,d = r^2 \frac{\cos^2 \frac{A-B}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}} = 4\, r^2 \frac{\cos^2 \frac{A-B}{2}}{\sin A \sin B}. \quad . \; . \; . \; . \quad 15$$

Ferner ist $R = \frac{BD}{2 \sin A} = \frac{AC}{2 \sin B}$,

folglich $R^2 = \frac{BD.\, AC}{4 \sin A \sin B} = \frac{ac + bd}{4 \sin A \sin B} = r^2 \frac{\sin^2 \frac{A+B}{2} + \cos^2 \frac{A-B}{2}}{\sin^2 A \sin^2 B} =$

$$r^2 \left(\frac{1 + \sin A \sin B}{\sin^2 A \sin^2 B}\right). \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 16$$

Aus den Gl. 14 und 15 ersieht man, dass die Producte oder Rechtecke aus den Gegenseiten solcher Vierecke im Allgemeinen ungleich sind und nur in dem besondern Falle gleich werden, wenn

$$\sin^2 \frac{A+B}{2} = \cos^2 \frac{A-B}{2}$$

ist. Entwickelt man diese Quadrate, so findet man nach einer leichten Umformung

$$tg^2 \frac{A}{2} + tg^2 \frac{B}{2} = 1 + tg^2 \frac{A}{2}\, tg^2 \frac{B}{2}.$$

Dieser Gleichung wird nur durch die Werthe $tg \frac{A}{2} = 1$ oder $tg \frac{B}{2} = 1$ genügt, so dass entweder der Winkel A oder der Winkel B ein rechter sein muss, wenn jene Producte gleich sein sollen. In diesem Falle muss die Centrale M m offenbar in eine Diagonale des Vierecks fallen.

Es sei A′ B′ C′ D′ (Fig. 8) ein Viereck im Kreise M, woran die anstossenden Seiten A′ B′ und A′ D′ gleich sind und worin A′ C′ ein Durchmesser des Kreises ist. Es werden alsdann auch die Seiten B′ C′ und C′ D′ gleich sein, so dass $A'B' + C'D' = A'D' + B'C'$ ist. Folglich lässt sich auch in das Viereck ein Kreis m beschreiben. Da die Diagonale A′ C′ die Winkel A′ und C′ halbirt, so liegt der Mittelpunkt m auf dieser Diagonale.

Nun ist $A'm = R + Mm$ und $C'm = R - Mm$,
also $A'm.\, C'm = R^2 - Mm^2$,
folglich $Mm^2 = R^2 - A'm.\, C'm$.

Ferner ist $A'm \sin \frac{A'}{2} = r$ und $C'm \cos \frac{A'}{2} = r$,

mithin $A'm.\, C'm = \frac{r^2}{\sin \frac{A'}{2} \cos \frac{A'}{2}} = \frac{2\, r^2}{\sin A'}$

und, wenn man diesen Ausdruck in die obige Gleichung für Mm^2 einsetzt,

$$Mm^2 = R^2 - \frac{2\, r^2}{\sin A'}.$$

Aus Gl. 16 erhält man für den vorliegenden Fall, dass $B' = 90^\circ$ ist,

$$R^2 = r^2 \left(\frac{1 + \sin A'}{\sin^2 A'}\right),$$

und hieraus $\sin A' = \frac{r^2 \pm \sqrt{4 R^2 r^2 + r^4}}{2 R^2}$;

mithin durch Substitution in die vorhergehende Gleichung

$$Mm^2 = R^2 + r^2 \mp \sqrt{4 R^2 r^2 + r^4} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 17$$

Von dem Doppelzeichen vor der Wurzelgrösse darf natürlich nur das Minuszeichen genommen werden.

Da nun zufolge dieser Gleichung jede von den drei Grössen M m, R und r von den beiden andern abhängig ist, ein Viereck in und um den Kreis aber zu seiner vollständigen Bestimmung dreier unabhängiger Stücke bedarf, so folgt:

k) es gibt unzählig viele Vierecke, welche denselben Kreisen ein- und umgeschrieben sind.

Ist also A' B' C' D' ein Viereck, welches einem Kreise M eingeschrieben und einem andern Kreise m umgeschrieben ist, so lassen sich noch unendlich viele andere Vierecke construiren, welche denselben Kreisen ein- und umgeschrieben sind, indem man im Kreise M eine beliebige Sehne A B zieht, die den Kreis m berührt, alsdann von A und B aus Tangenten A D und B C an den Kreis m legt und deren Durchschnittspunkte D und C mit dem Kreise M durch eine Gerade verbindet. Es muss dann auch D C den Kreis m berühren.

8) Die Diagonalen A' C' und B' D' des Vierecks A' B' C' D' schneiden sich lothrecht und es halbirt die erstere, welche zugleich ein Durchmesser ist, die letztere. Verlängert man die Gegenseiten des Vierecks bis zu ihren Durchschnitten in Q und R, und verbindet diese Punkte durch eine Gerade, so ist sie bekanntlich die Polare des Durchschnittspunktes O der Diagonalen. Trifft die Verlängerung von A' C' die Gerade Q R in P, so ist dieser Punkt der Pol von B' D' oder B' D' die Polare des Punktes P.

Es sei A B C D ein beliebiges Viereck von denen, welche denselben Kreisen M und m ein- und umgeschrieben werden können. Halbirt man zwei gegenüber liegende Winkel A und C durch die Geraden A E und C F, und zieht E F, so ist diese Gerade ein Durchmesser des Kreises M, der die Diagonale B D, welche durch die andern Eckpunkte geht, im Punkte I lothrecht halbirt. Denn A E halbirt den Bogen B C D und C F den Bogen B A D, also ist Bog. B E + Bog. B F gleich dem halben Umfange, mithin E F ein Durchmesser, der den zur Sehne B D gehörenden Bogen halbirt. Aus denselben Gründen muss auch, wenn man die Winkel B und D durch B G und D H halbirt, die Gerade G H ein Durchmesser sein, welcher die Diagonale A C in ihrer Mitte K lothrecht halbirt. Da diese Eigenschaft offenbar allen in Rede stehenden Vierecken zukommt, also auch dem Viereck A' B' C' D', so liegen die Halbirungspunkte sämmtlicher Diagonalen auf dem Umfange eines Kreises, der M O zum Durchmesser hat. Hieraus ergibt sich unmittelbar weiter der Satz:

l) die Diagonalen aller Vierecke, welche denselben Kreisen ein- und umgeschrieben sind, schneiden sich in demselben Punkte;

und nach dem schon früher angewandten Satze aus der Lehre von den Polaren am Kreise:

m) die Gegenseiten aller denselben Kreisen ein- und umgeschriebenen Vierecke schneiden sich auf derselben Geraden, der Polare des Durchschnittspunktes ihrer Diagonalen.

Die Punkte O und P theilen die Durchmesser A' C' und a c der beiden Kreise M und m harmonisch. Um dies zu zeigen, construire man das Viereck A'' B'' C'' D'' so, dass A'' D'' lothrecht auf A' C' steht und den Kreis m in a berührt. Alsdann wird auch B'' C'' lothrecht auf A' C' sein und die Seiten A'' B'' und D'' C'' werden verlängert in P zusammen treffen. Es ist daher D'' C'' in ihrem Durchschnittspunkte d mit der Polare von P und in P selbst harmonisch getheilt, so dass sich verhält

$$D''d : C''d = D''P : C''P.$$

Es ist aber, weil D'' A'', B' D' und B'' C'' parallel sind,

$$D''d : C''d = aO : cO$$

und $D''P : C''P = aP : cP$,

folglich auch $aO : cO = aP : cP$.

Da demnach bd die Polare des Punktes P für den Kreis m ist, so sind die Durchschnittspunkte der Diagonale $D'B'$ mit dem Kreise m die Berührungspunkte der Seiten $D''C''$ und $A''B''$ an diesem Kreise und da auch die Durchschnittspunkte a und c der andern Diagonale die Berührungspunkte der Seiten $A''D''$ und $B''C''$ sind, so gehen die Diagonalen des Vierecks $A'B'C'D'$ durch die Berührungspunkte der Seiten des Vierecks $A''B''C''D''$ mit dem Kreise m.

Hier ist nunmehr der Ort, die in I. 3) aufgestellte Behauptung, dass die Centrale Mm der beiden Kreise entweder zwei gegenüber liegende Seiten des Vierecks schneiden oder durch zwei gegenüber liegende Eckpunkte gehen müsse, zu begründen. Nämlich da die Centrale verlängert stets durch den Durchschnittspunkt der Diagonalen geht, so wird sie in zwei in diesem Punkte zusammen stossenden und Scheitelwinkel angehörigen Dreiecken AOD und BOC eine Ecktransversale und kann deshalb nur die Gegenseiten AD und BC schneiden, oder sie fällt mit einer Diagonale $A'C'$ zusammen und geht in diesem Falle durch zwei gegenüber stehende Ecken.

9) Die Dreiecke BDm und HGm (Fig. 8) sind wegen Uebereinstimmung in den Winkeln ähnlich; es ist daher

$$mD : mG = BD : HG$$
$$= ID : MG.$$

Daher sind auch, wenn man noch Im und mK zieht, die Dreiecke mDI und mGM ähnlich, woraus folgt:

1) $mI : mM = DI : GM = BD : HG$,

d. h. es verhält sich die Entfernung der Mitte einer Diagonale vom Mittelpunkte des eingeschriebenen Kreises zur Centrale beider Kreise wie diese Diagonale zum Durchmesser des umschriebenen Kreises;

2) ist $\angle DIm = \angle GMm$, also auch $\angle mIO = \angle mMK$. Da nun beides Peripheriewinkel in dem über OM als Durchmesser beschriebenen Kreise sind, und gleiche Peripheriewinkel auf gleichen oder demselben Bogen stehen, so muss der Schenkel Im des Winkels mIO verlängert den Punkt K treffen, und es bilden Im und mK eine einzige Gerade. Da dasselbe in allen andern Vierecken eben so Statt finden muss, so erhält man den Satz:

n) in allen denselben Kreisen ein- und umgeschriebenen Vierecken geht die Gerade, welche die Mitten der Diagonalen verbindet, durch den Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.

3) Folgt noch $\angle DmI = \angle GmM = \angle OmB$ und $\angle GmM = \angle DmI = \angle KmH$, so dass die Geraden MO und IK sowohl mit den von m aus nach den Endpunkten der Diagonale BD gezogenen Geraden mD und mB, als auch mit den nach den Endpunkten des Durchmessers GH gezogenen gleiche Winkel bildet.

Unter den Aufgaben über das Viereck in und um den Kreis lösen sich die, wenn ausser den Radien dieser Kreise noch gegeben ist eine Seite oder ein Winkel in derselben Weise wie die entsprechenden Aufgaben über das Dreieck in II. 4). Ist dagegen ausser jenen Radien eine Diagonale des Vierecks gegeben, so kann man die Aufgabe auf folgende Weise lösen.

Zufolge Gl. 17 ist $Mm = \sqrt{R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}}$. Construirt man darnach Mm, beschreibt aus M mit R und aus m mit r einen Kreis, construirt alsdann in den ersten ein Viereck, welches den andern berührt, und zieht dessen Diagonalen, so muss durch deren Durchschnittspunkt O auch die gegebene Diagonale gehen. Legt man diese Diagonale als Sehne beliebig in den Kreis M, beschreibt mit ihrem Abstande von M aus diesem Punkte einen dritten Kreis, und legt durch O eine Tangente an diesen, welche den Kreis M in A und C

schneiden möge, so hat man schliesslich von A und C aus Tangenten an den Kreis m zu ziehen; diese werden das verlangte Viereck bilden. —

Die Auflösung der Aufgabe: ein Viereck zu construiren, um und in welches man einen Kreis beschreiben kann, wenn eine Seite und die anliegenden Winkel gegeben sind, bietet keine Schwierigkeit und ist allgemein bekannt. Sind drei Seiten gegeben, etwa AB, BC nnd CD, so ist, weil $AB + CD = BC + AD$ auch AD gegeben und es kommt diese Aufgabe daher auf die bekannte zurück: ein Kreisviereck zu construiren, zu dem man die vier Seiten kennt.

Es möge schliesslich hier noch die Aufgabe Platz finden, ein Viereck in und um den Kreis zu construiren, wenn zwei anstossende Seiten AB, AD und der eingeschlossene Winkel A, oder, was auf dasselbe herauskommt, zwei anstossende Seiten und die Diagonale, welche deren Endpunkte verbindet, gegeben sind.

Auflösung. Man construire zuerst aus den gegebenen Stücken das Dreieck ABD (Fig. 8) und beschreibe um dasselbe den Kreis M, halbire BD in I und construire alsdann den geometrischen Ort des Punktes, dessen Entfernungen von I und M sich verhalten, wie DI zum Radius des Kreises M. Der Durchschnittspunkt dieses Ortes mit der Halbirungslinie des Winkels A gibt den Punkt m. Aus diesem beschreibe man mit seinem Abstande von AB den Kreis m, und lege endlich von B und D aus Tangenten an diesen Kreis, welche sich in C treffen mögen; so ist ABCD das verlangte Viereck.

Die Richtigkeit dieser Auflösung ergibt sich unmittelbar aus den in den letzten Artikeln erörterten Eigenschaften der in Rede stehenden Vierecke.