Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen.

Bei Gelegenheit einer kürzlich veröffentlichten Untersuchung über die Inversion der vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung für ihre reellen Moduln[1]) habe ich die aus den Relationen:

$$\vartheta_3(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu x i} \text{ und } \vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$$

abgeleitete Gleichung:

$$q + q^4 + q^9 + \ldots q^{n^2} + \ldots = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2K}{\pi}} - 1\right) = \frac{1}{2}(\vartheta_3(0) - 1) = u$$

durch Inversion auf die Form:

$$q = u - u^4 + 4u^7 - u^9 + 22u^{10} + 13u^{12} + 140u^{13} - 136u^{15}$$
$$+ 969u^{16} + 9u^{17} + 844u^{18} + 6316u^{19} - 42u^{20} \pm \ldots.$$

gebracht und den Satz aufgestellt, dass die Convergenz dieser Reihe nicht über den Wert $u = \frac{1}{2}$, oder, was dasselbe bedeutet: $K = 2\pi$ hinausgehe. Weil aber ein näheres Eingehen auf die Bestimmung der Convergenzgrenze invertierter Reihen und auf die Eigenschaften der elliptischen Modulfunktionen nicht im Plane der genannten Arbeit lag, so habe ich mir den Beweis desselben ausdrücklich für eine spätere Gelegenheit vorbehalten und gedenke ihn nun in der gegenwärtigen Abhandlung zu erbringen, allein — um den behördlicherseits über den Inhalt der Schulprogramme erlassenen Vorschriften zu genügen — auf eine solche Weise, dass in engem Anschluss an ihn auch gewisse Gebiete der elementaren Arithmetik berührt und durch eine Gruppe von, wenn ich nicht irre, neuen Lehrsätzen bereichert werden.

1) Zeitschr. für Math. und Physik. 1886, pag. 34 u. ff.