ZUR THEORIE

DER

ELLIPTISCHEN MODULFUNCTIONEN,

VON

D^{R.} C. ISENKRAHE.

REALGYMNASIUM DÜSSELDORF BIBLIOTHEK

Beilage zum Programm des Realprogymnasiums in Bonn.

BONN
UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI VON CARL GEORGI
1886.

1886. Progr. Nr. 448.

960 7 (1886)

129, 11 b

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zur Theorie der elliptischen Modulfunktionen.

Bei Gelegenheit einer kürzlich veröffentlichten Untersuchung über die Inversion der vollständigen elliptischen Integrale erster Gattung für ihre reellen Moduln[1]) habe ich die aus den Relationen:

$$\vartheta_3(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} q^{\nu^2} e^{2\nu x i} \text{ und } \vartheta_3(0) = \sqrt{\frac{2K}{\pi}}$$

abgeleitete Gleichung:

$$q + q^4 + q^9 + \ldots q^{n^2} + \ldots = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2K}{\pi}} - 1\right) = \frac{1}{2}(\vartheta_3(0) - 1) = u$$

durch Inversion auf die Form:

$$q = u - u^4 + 4u^7 - u^9 + 22u^{10} + 13u^{12} + 140u^{13} - 136u^{15}$$
$$+ 969u^{16} + 9u^{17} + 844u^{18} + 6316u^{19} - 42u^{20} \pm \ldots..$$

gebracht und den Satz aufgestellt, dass die Convergenz dieser Reihe nicht über den Wert $u = \frac{1}{2}$, oder, was dasselbe bedeutet: $K = 2\pi$ hinausgehe. Weil aber ein näheres Eingehen auf die Bestimmung der Convergenzgrenze invertierter Reihen und auf die Eigenschaften der elliptischen Modulfunktionen nicht im Plane der genannten Arbeit lag, so habe ich mir den Beweis desselben ausdrücklich für eine spätere Gelegenheit vorbehalten und gedenke ihn nun in der gegenwärtigen Abhandlung zu erbringen, allein — um den behördlicherseits über den Inhalt der Schulprogramme erlassenen Vorschriften zu genügen — auf eine solche Weise, dass in engem Anschluss an ihn auch gewisse Gebiete der elementaren Arithmetik berührt und durch eine Gruppe von, wenn ich nicht irre, neuen Lehrsätzen bereichert werden.

1) Zeitschr. für Math. und Physik. 1886, pag. 34 u. ff.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

I.

Die von Kerz aufgestellten Bedingungen der Convergenz invertierter Potenzreihen.

Zur Feststellung der Bedingungen und Grenzen für die Convergenz invertierter Potenzreihen sind schon vielfach Untersuchungen angestellt worden, von denen bei weitem die meisten sich mehr oder weniger eng an die berühmte Reversionsformel von Lagrange anlehnen. Eine Ausnahme, welche zudem wegen des elementaren Charakters aller Entwickelungen uns hier noch besonders interessiert, bilden zwei Abhandlungen von Kerz[1]), worin auf eine selbständige und eigentümliche Weise zur Lösung des bezeichneten Problems vorzudringen versucht wird.

UNIVERSITÄTS- UND LANDESBIBLIOTHEK DÜSSELDORF

Ausgehend von der Reihe:

$$x = Ay + By^2 + Cy^3 + \ldots.$$

entwickelt Kerz die neue Reihe:

$$y = \frac{x}{A} - B\frac{x^2}{A^3} - (AC - 2\,B^2)\frac{x^3}{A^5} - (A^2D - 5\,ABC + 5\,B^3)\frac{x^4}{A^7} - \ldots..$$

und sagt dann p. 16 Folgendes:

„... Legt man x, sowie den Coëfficienten $A, B, C\ldots$ bestimmte Werthe bei, so muss auch y einen bestimmten von diesen Grössen abhängigen Zahlenwerth erhalten, und könnte vermittelst dieser Umkehrungsformel, insofern eine Convergenz der entwickelten Glieder stattfände, bestimmt werden. Zu einer praktischen Bestimmung von y wäre sogar eine schnelle Convergenz nothwendig. Die Angabe, wann für die verschiedenen Werthe der Coëfficienten $B, C, D\ldots.$ eine solche stattfinden muss, ist grossen Weitschweifigkeiten unterworfen; begnügen wir uns mit einer Untersuchung, unter welchen Voraussetzungen Convergenz stattfinden kann. Wir sehen, es hat das $n$te Glied der Entwickelung den Faktor

$$\frac{x^n}{A^{2n-1}},$$

bedeutet daher $\frac{x}{A}$ einen kleinen echten Bruch, so ist klar, dass auch dieser Faktor eine dem Werth von Null um so näher kommende Grösse bezeichnen muss, je grösser n ist, sodass alsdann jedes folgende Glied einen immer mehr und mehr sich der Null nähernden Faktor enthält. Finden wir daher Mittel, $\frac{x}{A}$ so zu bestimmen, dass diese Grösse kleiner als die Einheit wird, so werden wir auch in den meisten Fällen Convergenz und je nach Massgabe der Kleinheit dieser Grösse eine schnellere Convergenz in der Umkehrung erhalten."

Diese offenbar wenig befriedigende Behandlung der Sache hat dem Verfasser

---

1) Die allgemeine Umkehrung der Reihen, von Ferd. Kerz, Giessen 1850; zweite Abtheilung Darmstadt 1861.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

selbst nicht genügt. In einer zweiten, elf Jahre später erschienenen Abhandlung nimmt er daher das Problem nochmals, und zwar in etwas ausgedehnterem Masse vor. Dabei geht er aus von der Gleichung:

$$0 = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \ldots$$

und ordnet die invertierte Reihe in eigentümlicher Weise so an, dass sie zerfällt in eine endlose Zahl von „staffelförmig" sich aneinander anschliessenden, „vertikal aufgebauten" unendlichen Reihen. Sodann heisst es p. 24: „Wir wollen nun die in No. 20 (damit ist die vorhin citierte Stelle der Abhandlung von 1850 bezeichnet) vernachlässigte nähere Untersuchung über die Bedingungen der Convergenz der durch die Umkehrung erhaltenen Reihen allgemein vornehmen und unterscheiden dabei:

1) die Convergenz der Vertikalreihen,
2) Horizontales Abnehmen der korrespondirenden Reihen,
3) Staffelförmige Convergenz der korrespondirenden Reihen."

Das Ergebnis der hierauf folgenden, zum Teil ganz ausserordentlich weitläufigen Entwickelungen ist nun folgendes:

ad 1) pag. 25: „Findet die Ungleichung $B^2 > 4\,AC$ statt, so sind sämmtliche Vertikalreihen für sehr hohe Gliederzahlen abnehmend."

ad 2) pag. 32: „Findet die Ungleichung $2\,C^2 > BD$ statt, so nehmen alle Vertikalreihen in ihren ersten Gliedern horizontal ab."

ad 3) pag. 33: „Wir sehen, dass . . . staffelförmige Convergenz der korrespondirenden Reihen für die ersten Glieder ihrer Vertikalreihen besteht bei der Bedingung: $4\,B^3 > 17\,A^2 D$."

Damit ist aber die Sache immer noch nicht erledigt, sondern es heisst weiter pag. 34: „Da indessen die entwickelten Vertikalreihen aus einer unendlichen Anzahl korrespondirender Reihen bestehen, so ist das Convergenzgesetz zwar auf jede korrespondirende Reihe für sich anwendbar, es bleibt aber noch das Verhältniss neu zuwachsender korrespondirender Reihen bezüglich ihres Anschlusses an die Vertikalreihen vorhergehender Hauptgruppen zu untersuchen übrig . . . ."

Diese Untersuchungen führen nun p. 35 zu den Ungleichungen:

$$2\,BE > 3\,AF$$
$$2\,BF > 3\,AG$$
$$2\,BG > 3\,AH$$
$$2\,BH > 3\,AJ \text{ etc.}$$

zu denen auf Seite 38 noch die weitere hinzugefügt wird:

$$2\,BD > 3\,AE.$$

Wir sehen, die Zahl der Relationen, durch welche die Convergenzbedingungen festgestellt werden sollen, ist für endlose Reihen — mit denen wir es in der gegenwärtigen Abhandlung lediglich zu thun haben — ebenfalls eine endlose, und wenn wir daher von manchen sehr berechtigten Zweifeln an der Stringenz der von Kerz vorgetragenen Schlüsse auch ganz absehen wollten, so würde es doch immer ein aussichtsloses Unternehmen sein, auf dem von ihm eingeschlagenen Wege unser vorgestecktes Ziel zu

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

verfolgen. Die Kerz'schen Arbeiten haben das Verdienst, dass sie zur Ermittelung der Coëfficienten der invertierten Reihen recht brauchbare Formeln liefern, aber bezüglich der Feststellung der Convergenzgrenzen bezeichnen sie im Vergleich mit den schon hundert Jahre früher veröffentlichten Untersuchungen von Lagrange einen entschiedenen Rückschritt.

II.

Lagrange's Untersuchung über die Convergenzgrenze seiner Reversionsformel.

In den Berichten der Berliner Akademie vom Jahre 1768 veröffentlichte Lagrange seine berühmte Abhandlung „Nouvelle méthode pour résoudre les équations littéraires" und leitete dann, ausgehend von der Gleichung:

$$\alpha - x + \varphi(x) = 0,$$

wobei

$$\varphi(x) = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots$$

gesetzt ist, seine bekannte Reversionsformel:

$$\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \psi(y) + \frac{\varphi(\alpha y)\ \psi'(y)}{\alpha} + \frac{d\left[(\varphi(dy))^2\ \psi'(y)\right]}{2\,\alpha^2\,dy} + \frac{d^2\left[(\varphi(\alpha y))^3\ \psi'(y)\right]}{3!\ \alpha^3\ dy^2} + \ldots.$$

ab. Sodann diskutiert er das allgemeine Glied:

$$\frac{d^{i-1}\left[(\varphi(\alpha y))^i \psi'(y)\right]}{i!\ a^i\ dy^{i-1}}$$

und schreibt zunächst die allgemeine Form für irgend einen Term der $i$ten Potenz des Polynoms $\varphi(\alpha y)$ auf, welche lautet:

$$\frac{i!}{m!\,n!\,p!\ldots.}\,A^m\,B^n\,C^p\ldots(\alpha y)^{am+bn+cp+\ldots.}$$

wobei m, n, p ganze Zahlen sind, deren Summe dem Stellenzeiger i gleich ist.

Lässt sich nun auch die Funktion $\psi'(y)$ in eine konvergente Reihe entwickeln, deren allgemeines Glied etwa $F.y^f$ sein möge, so hat man als Repräsentanten eines beliebigen Gliedes von $(\varphi(\alpha y))^i.\psi'(y)$ den Ausdruck:

$$\frac{i!\ F.\,A^m B^n C^p \ldots..\ \alpha^u}{m!\ n!\ p!\ldots..}.\,y^{u+f},$$

wobei $u = am + bn + cp + \ldots.$ gesetzt ist. Differentiiert man diese Grösse $i-1$ mal nach y, dividiert durch $i!\,\alpha^i$, und setzt nachher, wie der Sinn der obigen Reversionsformel das erfordert, $y=1$, so kommt zum Vorschein:

$$\frac{(u+f)(u+f-1)(u+f-2)\ldots(u+f-i+2)}{m!\ n!\ p!\ldots.}\,F.\,A^m\,B^n\,C^p\ldots\alpha^{u-i},$$

und nun untersucht Lagrange, was daraus entsteht, wenn map den Stellenzeiger i ohne Ende wachsen lässt. Zunächst wird mit Hülfe eines Satzes von Stirling, wonach für ein sehr grosses x die Gleichung gilt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$x! = \frac{\sqrt{\pi}\,.\,x^{x+\frac{1}{2}}}{e^x}$$

obiger Term in die Form gebracht:

$$\frac{F\sqrt{V}(u+g)^u.\,B^n.\,C^p\,\ldots\,\alpha^{u-i}}{m!\,n!\,p!\,\ldots\,(u+g-i)^{u-i}},$$

wobei

$$V = \frac{(u+g)^{2g-1}}{\pi^{\lambda}(u+g-1)^{2g+1}.\,m.\,n.\,p\,\ldots},$$

$g = f+1$ und λ gleich der Anzahl von Gliedern ist, welche in der ursprünglichen Funktion $\varphi(x)$ enthalten sind.

Dieser Ausdruck erfährt sodann eine nochmalige Umwandlung durch Einführung der Grössen:

$$v = \frac{u}{i},\ \mu = \frac{m}{i},\ \nu = \frac{n}{i},\ \pi = \frac{p}{i} \text{ etc.,}$$

wobei er unter der Voraussetzung $i = \infty$ die Form annimmt:

$$\frac{F\sqrt{M}.\,N^i}{i^{\frac{\lambda+2}{2}}}.$$

Hier ist

$$M = \frac{v^{2f+1}}{\pi^{\lambda}(v-1)^{2f+3}.\,\mu.\,\nu.\,\pi\ldots},$$

also ein Ausdruck, in welchem der Stellenzeiger i nicht vorkommt. Hiernach schliesst Lagrange unmittelbar folgendermassen: „Ainsi cette quantité sera infinie ou nulle, suivant que N aura une valeur soit positive ou négative, plus grande que l'unité, ou non. D'où il est aisé de conclure, que la serie.. sera convergente si l'on a, abstraction faite du signe: $N = ou < 1$."

Dieser Schluss Lagrange's scheint nun aber bezüglich der Grösse M das Bedenken zuzulassen, dass dieselbe, obschon sie i nicht explicite enthält, doch von i nicht unabhängig ist, also möglicherweise für $i = \infty$ ebenfalls unendlich werden könnte. Allein dieses Bedenken kann gehoben werden, wenn mit dem Schlussresultat Lagrange's noch folgende Umformung vorgenommen wird. Man hat:

$$M = \frac{v^{2f+1}}{\pi^{\lambda}(v-1)^{2f+3}.\,\mu.\,\nu.\,\pi\ldots} = \frac{1}{\pi^{\lambda}}.\,\frac{v^{2f+1}}{(v-1)^{2f+3}}.\,\frac{1}{\mu.\,\nu.\,\pi\ldots}.$$

Der erste Faktor $\frac{1}{\pi^{\lambda}}$ ist von i unabhängig. Die Grösse π bedeutet nämlich hier die Constante 3,14159 ..., während das π des dritten Faktors von i abhängig, weil gleich $\frac{p}{i}$ gesetzt ist.

Im zweiten Faktor ist v von i abhängig. So lange v einen endlichen Wert hat,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hat dieser Faktor auch einen endlichen Wert. Sollte $v = 0$ werden, so wird derselbe ebenfalls zu Null. Sollte indessen $v = \infty$ werden können, so ergibt sich wiederum:

$$\frac{v^{2f+1}}{(v-1)^{2f+3}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{v}\right)^{2f+1}(v-1)^{2}} = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{\infty}\right)^{2f+1}(\infty-1)^{2}} = 0.$$

Der dritte Faktor ist vermöge der früher für μ, ν, π ... angegebenen Gleichungen gleich:

$$\frac{i}{m}\cdot\frac{i}{n}\cdot\frac{i}{p}\cdots\cdots = \frac{i^{\lambda}}{m.\ n.\ p.\ \ldots},$$

nimmt also für $i = \infty$ die Form $\frac{\infty}{\infty}$ an, weil mit i auch die Grössen m, n, p .... ohne Ende wachsen. Zieht man aber, wie vorgeschrieben, aus M die Quadratwurzel, so erhält man im Zähler dieses dritten Faktors $i^{\frac{\lambda}{2}}$. Diese Grösse hebt sich gegen die im Nenner des ganzen Terms befindliche Potenz $i^{\frac{\lambda+2}{2}}$ auf und lässt in demselben noch die Grösse i übrig. Bezeichnet man also das, was nach dieser Operation noch unter dem Wurzelzeichen stehen bleibt, mit M_1, so ergibt sich der Ausdruck:

$$\frac{F\sqrt{M_1}\ .\ N^{i}}{i},$$

wobei F konstant ist und M_1 für $i = \infty$ zu Null wird. Von diesem Ausdruck erscheint es nun nicht mehr zweifelhaft, dass er für

$$N < 1$$

bei endlos wachsendem i sich der Null stetig nähert. Die Grösse N, auf deren Wert also alles ankommt, ist dabei definiert durch die Gleichung:

$$N = v\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{v-1}\cdot\left(\frac{A}{\mu}\right)^{\mu}\cdot\left(\frac{B}{\nu}\right)^{\nu}\cdot\left(\frac{C}{\pi}\right)^{\pi}\cdots\cdots$$

Von dem im Vorigen markierten Punkte aus geht nun Lagrange noch einen Schritt weiter, indem er allgemein die Bedingungen aufstellt, unter welchen bei irgend einem der in dem allgemeinen Gliede der invertierten Reihe vorkommenden Terme der Faktor N seinen grössten Wert annimmt und konkludiert dann: wenn auch dieses N noch nicht die Einheit überschreite, so sei die Reihe konvergent, andernfalls sei sie es nicht.

Auch diese Argumentation erscheint nicht einwandfrei. Abgesehen davon, dass es bekanntlich für die Convergenz einer Reihe keineswegs ausreicht nachzuweisen, dass die aufeinanderfolgenden Glieder mit wachsendem Stellenzeiger i sich der Null stetig nähern und für $i = \infty$ verschwinden, könnte aus den von Lagrange vorgetragenen Gründen höchstens dies folgen, dass die Serie der grössten Terme, die in den einzelnen Gliedern der invertierten Reihe vorkommen, an und für sich betrachtet, eine konvergente Reihe darstellt. Ein Schluss a fortiori für die übrigen Terme dieser Glieder und sodann für die Glieder selbst, zu dem man sich wohl versucht fühlen könnte, scheint mir unstatthaft, weil die Summe zweier nichtgrösster Terme schon den einen grössten Term möglicherweise übertreffen könnte, und weil überdies mit wachsendem Stellen-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zeiger i die Anzahl der in dem betreffenden Gliede vorkommenden Terme endlos weiter wächst. —

In dem inhaltreichen „Handbuch der höheren Algebra" von Serret, Bd. I § 195 findet sich unter der Überschrift: „Die Formel von Lagrange" eine längere Entwickelung, an deren Schlusse es heisst: „Trotz ihrer grossen Eleganz kann uns die vorstehende Entwickelung nicht genügen. Sie zeigt nämlich an, dass gewisse Bedingungen erfüllt sein müssen, wenn die erhaltene Formel in aller Strenge gelten soll, aber sie liefert kein Kennzeichen, nach dem man entscheiden könnte, in welchen Fällen diese Bedingungen erfüllt sind[1])."

Serret hat in seine betr. Entwickelungen Argumente eingeführt, welche bei Lagrange nicht vorkommen und dadurch die Stringenz derselben erhöht. Das von Lagrange aufgestellte „Kennzeichen":

$$N \overline{<} 1$$

hat er aber nicht diskutiert. Und wenn er den vorhin citierten Worten die Bemerkung beifügt: „Wir werden am Ende dieses Kapitels auf diesen Gegenstand zurückkommen", so ist das insofern zutreffend, als er auf den Beweis der Reversionsformel wirklich zurückkommt und auch ein korrektes Kriterium der Convergenzgrenze ableitet. Von einer Beziehung der letzteren zu dem eben angeführten „Kennzeichen" Lagrange's ist aber gar keine Rede, und doch wäre eine Aufdeckung derselben insofern interessant, als Lagrange mit Hülfe seines „Kennzeichens" wirklich Grenzbestimmungen ausgeführt hat, welche durchaus richtig sind und mit den durch das von Serret vorgetragene Verfahren ermittelten Resultaten vollkommen übereinstimmen. Der innere Grund dieser Übereinstimmung wird im folgenden Abschnitt zu Tage treten.

III.

Die späteren Bestimmungen der Convergenzgrenze und ihr Verhältnis zu dem Kriterium von Lagrange.

Es kann nicht unsere Absicht und würde wegen der Beschränktheit des zur Verfügung gestellten Raumes auch völlig unmöglich sein, die ausgedehnte Litteratur über die Reihe von Lagrange, welche sich im Laufe des letzten Jahrhunderts angesammelt hat, durchzugehen und den Weg zu verfolgen, der schliesslich zu einer exakten und einfachen Fixierung der Convergenzgrenze geführt hat. Das wesentlichste Verdienst um die Erreichung dieses Resultates hat sich Cauchy erworben, indem er den Beweis dafür fand, dass bei einer Gleichung von der Form:

$$y = x \, . \, f(y)$$

diejenige Wurzel y, welche mit x zugleich verschwindet, in eine Reihe entwickelt werden kann, solange als die Variable x nicht einen Wert erreicht, für welchen zwei Wurzeln obiger Gleichung einander gleich werden — oder was dasselbe bedeutet, bis zu dem-

1) Übersetzung von Wertheim, I. p. 364.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

jenigen Werte von x, für den diese Gleichung und ihre Derivierte noch y eine gemeinschaftliche Wurzel bekommen[1]). Die Anwendbarkeit dieses Satzes auf die Gleichung von Lagrange:

$$\alpha - x + Ax^a + Bx^b + Cx^c + \ldots. = 0$$

tritt zu Tage, wenn man in dieser Reihe dasjenige Glied, bei welchem der Exponent von x etwa gleich Null sein sollte (es möge M heissen), von den übrigen Gliedern trennt und x als Faktor absondert; dann erhält man eine Gleichung von der Form:

$$\alpha + M - x(1 - \psi(x)) = 0.$$

Setzt man jetzt:

$$\alpha + M = \xi;\ x = \eta;\ \psi(x) = 1 - \frac{1}{f(\eta)},$$

so ergibt sich:

$$\xi - \eta \frac{1}{f(\eta)} = 0;\ \eta = \xi . f(\eta).$$

Nun geht also die Convergenz derjenigen Reihe, in welche nach der Formel von Lagrange der Wert von η sich entwickeln lässt, bis zu dem Werte von ξ, welcher bewirkt, dass die beiden Gleichungen:

$$\eta = \xi . f(\eta) \text{ und } 1 = \xi .\ f'(\eta)$$

eine gemeinschaftliche Wurzel haben.

Auf Cauchy's Schultern steht auch eine Abhandlung von Rouché, welche unter dem Titel: „Mémoire sur la serie de Lagrange" 1862 im Journal de l'école Polytechnique erschien, und deren wesentlicher Inhalt auch von Serret Bd. I § 204—210 reproduciert wird.

Rouché legt die Gleichung:

$$z - \alpha . \varphi(x + z) = 0$$

zu Grunde und findet, dass die gesuchte Grenze, welche bei ihm den Titel: „module principal" führt, eine Wurzel der Gleichung:

$$z . \varphi'(x + z) - \varphi(x + z) = 0$$

ist. Dann fährt er fort:

„Or cette équation est précisément celle que l'on serait amené à résoudre si l'on cherchait la valeur de α, qui fait acquérir à l'équation:

(I) $$z - \alpha .\ \varphi(x + z) = 0$$

deux racines égales. On sait, en effet, qu'il faut pour cela prendre l'équation derivée:

$$1 - \alpha .\ \varphi'(x + z) = 0$$

puis éliminer α entre cette équation et la proposée (I): élimination qui reproduit précisement l'équation:

$$z .\ \varphi'(x + z) - \varphi(x + z) = 0.$$

Un tel résultat est instructif en ce qu'il établit la concordance entre notre règle et celle qui résulte du theorème général de Cauchy, appliqué au développement des fonctions implicites."

1) vgl. Moigno, „Leçons de calcul differential", I p. 162.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Nicht minder „instruktiv" wird es nun auch wohl sein, wenn es uns gelingt im Folgenden zu zeigen, wie schon die ursprüngliche Grenzbestimmung von Lagrange in einer sehr komplizierten Umhüllung als wesentlichen Kern doch nichts anderes enthielt, als eben dasselbe Kriterium, welches uns auch in den Sätzen von Cauchy und Rouché entgegentritt.

Die Gleichung, von welcher Lagrange ausging, lautete:

(1) $$\alpha - x + \varphi(x) = 0,$$

wobei

(2) $$\varphi(x) = Ax^a + Bx^b + Cx^c + \dots$$

gesetzt war. Nun hiess, wie früher schon erwähnt, die Convergenzbedingung:

(3) $$N = v\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^{v-1} \cdot \left(\frac{A}{\mu}\right)^{\mu} \cdot \left(\frac{B}{\nu}\right)^{\nu} \cdot \left(\frac{C}{\pi}\right)^{\pi} \cdots \lesseqgtr 1.$$

Hierbei war gesetzt:

$$v = a\mu + b\nu + c\pi + \dots,$$

und es bestand die Relation:

$$\mu + \nu + \pi + \dots = 1.$$

Dazu kommen aber noch die Bedingungsgleichungen, welche unter der Anzahl der in jedem einzelnen Gliede der Reversionsformel vorkommenden Terme denjenigen charaktersieren, bei welchem der Faktor N seinen grössten Wert annimmt. Diese Gleichungen heissen bei Lagrange:

(5) $$\frac{A}{\mu}\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^a = \frac{B}{\nu}\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^b = \frac{C}{\pi}\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^c = \dots = \frac{1}{\lambda}$$

oder auch:

(6) $$A(a-v)\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^a + B(b-v)\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^b + C(c-v)\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^c + \dots = 0$$

(7) $$\lambda = \left\{A\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^a + B\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^b + C\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^c + \dots\right\}^{-1}.$$

Setzen wir nun zur Abkürzung:

(8) $$\frac{\alpha v}{v-1} = z,$$

so folgt aus (6):

$$A(a-v)z^a + B(b-v)z^b + C(c-v)z^c + \dots = 0$$

oder:

(9) $$aAz^a + bBz^b + cCz^c + \dots = v\{Az^a + Bz^b + Cz^c + \dots\}.$$

Die Klammer auf der rechten Seite kann man zufolge (2) mit $\varphi(z)$ bezeichnen; dann geht (9) über in die Form:

(10) $$aAz^a + bBz^b + cCz^c + \dots = v \, . \, \varphi(z).$$

Wir differentiieren nunmehr die Gleichung (2) nach x, multiplizieren beiderseits mit x und vertauschen sodann x mit z, so ergiebt sich:

$$z \, . \, \varphi'(z) = aAz^a + bBz^b + cCz^c + \dots$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Demnach hat man aus (10) jetzt:

$$z \,.\, \varphi'(z) = v \,.\, \varphi(z),$$

oder:

(11)
$$v = z \cdot \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

Zufolge (8) geht die Gleichung (7) über in:

$$\lambda = \{Az^a + Bz^b + Cz^c + ..\}^{-1},$$

also nach (2):

(12)
$$\lambda = [\varphi(z)]^{-1} = \frac{1}{\varphi(z)}.$$

Ferner hat man nach (5):

$$\frac{A}{\mu}\left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^a = \frac{1}{\lambda} = \varphi(z),$$

also:

$$\mu = \frac{A}{\varphi(z)} \cdot \left(\frac{\alpha v}{v-1}\right)^a = \frac{Az^a}{\varphi(z)},$$

ebenso zeigt sich:

$$\nu = \frac{Bz^b}{\varphi(z)}, \quad \pi = \frac{Cz^c}{\varphi(z)} \text{ etc.},$$

oder auch:

(13)
$$\frac{A}{\mu} = \frac{\varphi(z)}{z^a}, \quad \frac{B}{\nu} = \frac{\varphi(z)}{z^b}, \quad \frac{C}{\pi} = \frac{\varphi(z)}{z^c} \text{ etc.}$$

Nun können wir mit den so fixierten Substitutionen in den Wert von N eingehn und erhalten aus (3):

$$N = v \,.\, z^{v-1} \left(\frac{\varphi(z)}{z^a}\right)^{A\frac{z^a}{\varphi(z)}} \cdot \left(\frac{\varphi(z)}{z^b}\right)^{B\frac{z^b}{\varphi(z)}} \cdot \left(\frac{\varphi(z)}{z^c}\right)^{C\frac{z^c}{\varphi(z)}} \cdots$$

oder:

$$N = \frac{v}{z} \cdot z^v \cdot \frac{\varphi(z)^{(Az^a + Bz^b + Cz^c + \ldots)\frac{1}{\varphi(z)}}}{z^{(aAz^a + bBz^b + cCz^c + \ldots)\frac{1}{\varphi(z)}}}$$

$$N = \frac{v}{z} \cdot z^v \cdot \frac{\varphi(z)^{\varphi(z) \cdot \frac{1}{\varphi(z)}}}{z^{z\varphi'(z)\frac{1}{\varphi(z)}}}$$

(14)
$$N = \frac{v}{z} \cdot z^v \frac{\varphi(z)}{z^{\frac{z\varphi'(z)}{\varphi(z)}}}.$$

Berücksichtigt man jetzt die Gleichung (11), so ergiebt sich:

(15)
$$N = \frac{v}{z} \cdot z^v \frac{\varphi(z)}{z^v} = \frac{v}{z}\, \varphi(z).$$

Aus derselben Gleichung (11) folgt aber auch:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{v}{z}=\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

also geht (15) über in die Form:

$$N=\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\varphi(z)=\varphi'(z).$$

Demnach reduziert sich die so sehr komplizierte Convergenzbedingung Lagrange's auf die überraschend einfache Relation:

(16) $$\varphi'(z) \overline{\gtrless} 1.$$

Wir bestimmen jetzt mit der Gleichung (8) die Grösse α und erhalten:

$$\alpha=z\left(1-\frac{1}{v}\right).$$

Daher ist nach (11):

(17) $$\alpha=z\left(1-\frac{\varphi(z)}{z\,.\,\varphi'(z)}\right)=z-\frac{\varphi(z)}{\varphi'(z)}.$$

Handelt es sich nun um die Bestimmung der Grenze, bis zu welcher die Convergenz sich erstreckt, so ist nach (16) zu setzen:

(18) $$\varphi'(z)=1,$$

wonach (17) übergeht in:

$$\alpha=z-\varphi(z),$$

oder:

(19) $$\alpha-z+\varphi(z)=0.$$

Nun greifen wir auf die ursprüngliche Gleichung (1):

$$\alpha-x+\varphi(x)=0$$

zurück und bezeichnen diejenige Wurzel, welche diese und ihre Derivierte nach x miteinander gemeinschaftlich haben, mit z, so kommen die Gleichungen (18) und (19) augenscheinlich wieder genau zum Vorschein.

Damit ist der Nachweis geliefert, dass die Bestimmung der Convergenzgrenze nach Lagrange ebensowohl, wie die Ermittelung des Prinzipalmodulus nach Rouché und wie das vorhin citierte Kriterium von Cauchy darauf hinausläuft, denjenigen Wert von α zu suchen, welcher bewirkt, dass die gegebene Gleichung zwei gleiche Wurzeln bekommt. —

Zur Illustration dieser Übereinstimmung kann es dienen, hier auf ein Beispiel aufmerksam zu machen, welches zuerst Lagrange sofort nach Ableitung seines Kriteriums[1]), nachher aber auch Rouché, ohne die Rechnung des Ersteren zu erwähnen, auf Grund des seinigen behandelt hat[2]). Lagrange giebt sich die Gleichung:

$$\alpha-x+Ax^a=0,$$

Rouché die Gleichung:

$$u=x+\alpha\,.\,u^m.$$

1) l. c. p. 321. 2) l. c. p 207.

Bringt man letztere auf Null, bezeichnet in beiden Gleichungen die mit Hülfe der Reversionsformel zu entwickelnde Variable mit x, den Exponenten mit n, den Coëffizienten mit p, das absolute Glied mit y, so erhält man beidesmal:

$$y-x+px^n=0.$$

Nun heisst das von Lagrange entwickelte Resultat:

$$p=\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{ny}\right)^{n-1},$$

das von Rouché entwickelte heisst:

$$p=\frac{(n-1)^{n-1}}{n^n}\cdot\frac{1}{y^{n-1}}$$

und stimmt augenscheinlich mit dem vorigen überein.

IV.

Anwendung auf die Inversion der Funktion $\vartheta_3(0)$ für den Modulus q.

Um aus der im letzten Abschnitt behandelten Methode zur Bestimmung der Convergenzgrenze nunmehr für die Inversion der im Eingange angeführten Gleichung:

(1) $$\frac{1}{2}\Big(\vartheta_3(0)-1\Big)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2K}{\pi}}-1\right)=u=q+q^4+q^9+\ldots.$$

Nutzen zu ziehen, muss der Modulus des kleinsten Wertes von u bestimmt werden, für welchen diese Gleichung und ihre Derivierte nach q eine gemeinschaftliche Wurzel bekommen.

Wir differentiieren also No. 1 nach q und erhalten:

(2) $$\frac{d\vartheta_3(0)}{dq}=\vartheta'_3(0)=0,$$

oder auch:

(3) $$1+4q^3+9q^8+16q^{15}+\cdots=\sum_{n=1}^{n=\infty}n^2q^{n^2-1}=0$$

und haben nun diese Gleichung für q aufzulösen.

Geht man mit elementarer Rechnung an diese Aufgabe heran, so überzeugt man sich bald, dass $\sum\limits_{n=1}^{n=\infty}n^2q^{n^2-1}$ für $q=1$ einen unendlich grossen Wert hat, für

$$1>q>0$$

zwischen ∞ und 1 liegt, für $q=0$ den Wert 1 annimmt und für

$$0>q>-1$$

zwischen 1 und 0 liegt. Je näher man den Wert von q an die negative Einheit heranbringt, desto mehr nähert sich der Wert der Reihe der Null, und man kann diese Annäherung beliebig weit treiben; aber sobald exakt $q=-1$ gesetzt wird, entsteht die Zahlenfolge:

$$1-4+9-16+25-36+-\ldots$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

eine Reihe also, welche in stets wachsenden Oscillationen um die Null hin- und herpendelt und ebensowenig einen bestimmten Wert erkennen lässt, wie ein Ausdruck von der Form $\frac{0}{0}$, $\infty . 0$ etc.

Dass daher für $q = -1$ der Wert von $\vartheta'_3(0, q)$ ohne Fehler gleich Null gezetzt werden dürfe, kann auf Grund solcher Rechnungen nicht als eine bewiesene Sache betrachtet werden. Nun haben wir aber für die Funktion $\vartheta_3(0,q)$ bekanntlich zwei verschiedene Darstellungen zur Verfügung, nämlich:

(4) $$\vartheta_3(0, q) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots$$

und:

(5) $$\vartheta_3(0, q) = \frac{1+q}{1-q} \cdot \frac{1-q^2}{1+q^2} \cdot \frac{1+q^3}{1-q^3} \cdot \frac{1-q^4}{1+q^4} \cdots$$

Diese beiden Darstellungen zeigen überhaupt bezüglich der Grenzwerte $q = \pm 1$ den charakteristischen Unterschied, dass die erstere für $q = +1$ den Werth $\vartheta_3(0) = \infty$ bestimmt angiebt, während die letztere in diesem Falle

$$\vartheta_3(0, -1) = \frac{2}{0} \cdot \frac{0}{2} \cdot \frac{2}{0} \cdot \frac{0}{2} \cdots = \infty \cdot 0 \cdot \infty \cdot 0 \cdots,$$

also einen unbestimmten Ausdruck darbietet. Bei dem Grenzwerte $q = -1$ aber ist das Verhältnis grade das umgekehrte; die Gleichung (4) giebt in Form der pendelnden Reihe $1 - 2 + 2 - 2 + 2 - + \cdots$ einen unbestimmten Ausdruck, die Gleichung (5) aber liefert ganz bestimmt:

$$\vartheta_3(0, -1) = \frac{0}{2} \cdot \frac{0}{2} \cdot \frac{0}{2} \cdot \frac{0}{2} \cdots = 0.$$

Daher war wohl vorauszusehen, dass für den vorhin betrachteten Grenzfall $q = -1$ die durch Differentiation der Gleichung (4) entstehende Gleichung (3) eine ungeeignete Form sein würde, und wir werden von selbst darauf hingewiesen, den Wert von $\vartheta'_3(0, -1)$ durch eine Relation zu ermitteln, welche aus der Differentiation von Gleichung (5) hervorgeht. Diese Differentiation ergiebt:

(6) $$\vartheta'_3(0, q) = \begin{cases} \frac{2}{(1-q)^2} \cdot \frac{1-q^2}{1+q^2} \cdot \frac{1+q^3}{1-q^3} \cdot \frac{1-q^4}{1+q^4} \cdots \\ + \frac{1+q}{1-q} \cdot \frac{-4q}{(1+q^2)^2} \cdot \frac{1+q^3}{1-q^3} \cdot \frac{1-q^4}{1+q^4} \cdots \\ + \frac{1+q}{1-q} \cdot \frac{1-q^2}{1+q^2} \cdot \frac{6q^2}{(1-q^3)^2} \cdot \frac{1-q^4}{1+q^4} \cdots \\ + \frac{1+q}{1-q} \cdot \frac{1-q^2}{1+q^2} \cdot \frac{1+q^3}{1-q^3} \cdot \frac{-8q^3}{(1+q^4)^2} \cdots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Setzen wir in diesem Ausdruck $q = -1$, so ergiebt sich als Wert des ersten Produktes $\frac{1}{2} \cdot \frac{0}{2} \cdot \frac{0}{2} \cdot \frac{0}{2} \cdots$, also offenbar Null. Der Wert des zweiten Produktes ist:

$\frac{0}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot\frac{0}{2}\cdot\frac{0}{2}\cdots$ oder $0\cdot\frac{2}{2^2}\cdot\frac{0}{2}\cdot\frac{0}{2}\cdot\frac{0}{2}\cdots$, also gleichfalls Null, ebenso des dritten:

$0\cdot 0\cdot\frac{3}{2^3}\cdot\frac{0}{2}\cdot\frac{0}{2}\cdot\frac{0}{2}\cdots = 0.$

Der Wert des n-ten Produktes enthält ausser den Nullen noch den Faktor $\frac{n}{2^n}$, und wenn man n weiter und weiter wachsen lässt, so nähert auch dieser sich noch ohne Aufhören der Null. Demnach kann geschlossen werden, dass sämtliche Produkte, welche den Wert von $\vartheta'_3(0,q)$ ausmachen, völlig verschwinden, dass also die Gleichung $\vartheta'_3(0,-1)=0$ richtig ist[1]).

Setzen wir nun den Wert $q=-1$, welcher die Gleichung (2) befriedigt, in (1) ein, so ergiebt sich:

$$u = -1+1-1+1-+\cdots,$$

also wiederum ein unbestimmter Ausdruck in Form einer nicht konvergenten pendelnden Reihe. Die hier entstandene Form der letzteren ist übrigens die nämliche, welche entsteht, wenn man in der bekannten Relation:

$$f(x) = \frac{x}{1-x} = x+x^2+x^3+x^4+\cdots$$

den Wert $x=-1$ einsetzt. Während aber die rechte Seite obige Gestalt annimmt, erhält man auf der linken Seite $f(x) = -\frac{1}{2}$.

Auch im vorliegenden Falle ist leicht nachzuweisen, dass u ganz denselben Wert $-\frac{1}{2}$ bekommt. Denn aus (1) hat man allgemein:

$$u = \frac{1}{2}\Big(\vartheta_3(0,q)-1\Big)$$

und da, wie vorhin erwähnt, aus (5) für $q=-1$ sich ergiebt $\vartheta_3(0,q)=0$, so hat man für $q=-1$ offenbar $u=-\frac{1}{2}$.

Demnach ist bewiesen, dass für diesen Wert $u=-\frac{1}{2}$ die Gleichung (1) und ihre Derivierte nach q eine und dieselbe Wurzel, nämlich $q=-1$ haben, und hieraus folgt unmittelbar, dass bei der eingangs angeführten Inversion:

$$(7)\qquad q = u-u^4+4u^7-u^9+22u^{10}+13u^{12}+140u^{13}-136u^{15}+-\cdots$$

das Argument u keinen grösseren Modulus bekommen darf als denjenigen, welchen es in der Gleichung $u=-\frac{1}{2}$ hat.

---

1) Vergl. p. 22 und 23, Anmerkung.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Denkt man sich demgemäss in der Zahlenebene mit dem Radius $\frac{1}{2}$ um den Nullpunkt einen Kreis beschrieben, so würde die Reihe (7) sicherlich nicht mehr konvergent sein, wenn man mit dem Wert der komplexen Variabeln u den Bereich dieses Kreises verliesse.

Der Natur desjenigen Problems, zu dessen Lösung obige Inversion vollzogen worden ist, entspricht es nun aber, den Wert von u nur auf dem positiven Teil des reellen Durchmessers dieses Kreises zu nehmen. Die Grenze, über welche die Convergenz nicht hinausgeht, wird dann durch den Wert $u = \frac{1}{2}$ markiert, und zu diesem gehört in Folge der Relation:

$$u = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2K}{\pi}} - 1\right)$$

den Wert $K = 2\pi$.

Hiermit ist der Beweis des zu Anfang dieser Abhandlung angeführten Satzes erledigt.

Die weitere Frage, ob die Convergenz der obigen Reihe (7) sich überhaupt bis zu dieser Grenze erstreckt, ist damit aber noch nicht in bejahendem Sinne entschieden, weil möglicherweise noch ein anderer, mit kleinerem Modulus versehener Wert von u existieren könnte, welcher ebenfalls die Eigenschaft hätte, den Gleichungen (1) und (2) eine gemeinschaftliche Wurzel zu verschaffen.

An die vorstehenden Erörterungen über die Funktion $\vartheta_3(0, q)$ und ihren Differentialquotienten nach q lassen sich nun aber leicht noch einige weitere Betrachtungen anknüpfen, welche zu eigentümlichen und für die Zahlenlehre interessanten Resultaten führen.

V.

Faktoriellen von der Form $\prod\limits_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} \frac{n^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2}$ und ihre Beziehung zu der Funktion $\vartheta_3(0, q)$.

Schreibt man den Binomialkoëffizienten $\binom{n}{p}$, worin n und p positive ganze Zahlen, und $0 \overline{\lessgtr} p \overline{\lessgtr} n$ sein möge, in der Form auf:

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots.(n-(p-1))}{1\;.\;2\;.\;3\ldots\ldots\;p},$$

und quadriert alle darin vorkommenden Zahlen einzeln, so entsteht die Grösse:

$$\frac{n^2\,(n^2-1^2)\,(n^2-2^2)\ldots.\,(n^2-(p-1)^2)}{1^2\;.\;2^2\;.\;3^2\ldots\ldots\;p^2},$$

von welcher man sofort sieht, dass sie das Produkt der beiden Binomialkoëffizienten $\binom{n}{p}$ und $\binom{n+p-1}{p}$, also stets eine ganze Zahl ist. Wenn man hingegen setzt:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\;\ldots\;(n-(p-1))}{p\,(p-1)(p-2)\;\ldots\;(p-(p-1))},$$

und nun die vorkommenden Zahlen einzeln quadriert, so entsteht der Ausdruck:

$$\frac{n^2\,(n^2-1^2)\,(n^2-2^2)\;\ldots\;(n^2-(p-1)^2)}{p^2\,(p^2-1^2)(p^2-2^2)\;\ldots\;(p^2-(p-1)^2)},$$

welcher mit dem in der Überschrift genannten Produkte $\prod\limits_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} \frac{n^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2}$ identisch ist.

Zieht man aus diesem die Grösse $\binom{n}{p}$ als ersten Faktor heraus, so bleibt als zweiter übrig:

$$\frac{n\,(n+1)\,(n+2)\;\ldots\;(n+(p-1))}{p\,(p+1)\,(p+2)\;\ldots\;(2p-1)},$$

und dies ist keineswegs immer eine ganze Zahl. Es lässt sich aber auch der Binomialkoëffizient $\binom{n+p-1}{2p-1}$ herausheben, dann bleibt blos noch $\frac{n}{p}$ übrig, also eine Grösse, die nur in seltenen Fällen ganzzahlig sein wird. Dennoch kann leicht dargethan werden, dass das ganze in Rede stehende Produkt stets diese Eigenschaft besitzt. Man hat nämlich:

$$\prod_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} \frac{n^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2} = \frac{n^2\,(n^2-1^2)\,(n^2-2^2)\;\ldots\;(n^2-(p-1)^2)}{p^2\,(p^2-1^2)(p^2-2^2)\;\ldots\;(p^2-(p-1)^2)}$$

$$= \frac{(n-p+1)\,(n-p+2)\ldots(n-2)\,(n-1)\,n\,.\,n\,(n+1)\,(n+2)\ldots(n+p-2(n+p-1)}{1\quad.\quad2\quad.\quad(p-2)(p-1)\,p\,.\,p\,(p+1)(p+2)\ldots(2p-2)\,(2p-1)}$$

$$= \frac{n}{p}\cdot\binom{n+p-1}{2p-1} = \frac{n}{p}\binom{n+p-1}{n-p} \tag{1}$$

$$= \frac{n}{p}\cdot\frac{(n+p-1)\,(n+p-2)\;\ldots\ldots\;(2p+1)\,2p}{(n-p)!}$$

$$= \frac{2n\,.\,(n+p-1)\,(n+p-2)\;\ldots\;(2p+1)}{(n-p)!}$$

$$= \frac{[(n+p)+(n-p)]\,(n+p-1)\,(n+p-2)\ldots(2p+1)}{(n-p)!}$$

$$= \frac{(n+p)\,(n+p-1)\;\ldots\;(2p+1)}{(n-p)!} + \frac{(n-p)(n+p-1)\;\ldots\;(2p+1)}{(n-p)!}$$

$$= \frac{(n+p)\,(n+p-1)\;\ldots\;(2p+1)}{(n-p)!} + \frac{(n+p-1)\,(n+p-2)\;\ldots\;(2p+1)}{(n-p-1)!}$$

$$= \binom{n+p}{n-p} + \binom{n+p-1}{n-p-1},\ \text{oder auch:}$$

$$= \binom{n+p}{2p} + \binom{n+p-1}{2p}. \tag{2}$$

Das in der Überschrift angegebene Produkt ist also gleich der Summe zweier Binomialkoëffizienten, mithin stets eine ganze Zahl. — Dasselbe lässt sich übrigens ebenso leicht als Differenz zweier Binomialkoëffizienten darstellen. Wendet man nämlich den bekannten Satz:

$$\binom{u}{v} + \binom{u}{v+1} = \binom{u+1}{v+1},\quad \text{oder}\quad \binom{u}{v} = \binom{u+1}{v+1} - \binom{u}{v+1}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

an, so ergiebt sich z. B. aus (2):

$$\prod_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} \frac{n^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2} = \binom{n+p}{2p} + \binom{n+p}{2p+1} - \binom{n+p-1}{2p+1} = \binom{n+p+1}{2p+1} - \binom{n+p-1}{2p+1}. \tag{3}$$

Überdiess lässt sich noch auf verschiedene Weise dieselbe Grösse als Summe oder Differenz von anderen Binomialkoëffizienten darstellen — eine Arbeit indessen, die kein nahe liegendes Interesse hat.

Um nun von dem hier erreichten Punkte einen Übergang zu der Funktion $\vartheta_3(0, q)$ zu gewinnen, denken wir uns bei dem bisher behandelten Produkte die Zahl p fest, die Zahl n aber variabel, und zwar so, dass sie von $n = p$ bis $n = \infty$ alle positiven ganzen Zahlen durchläuft. Die auf diese Weise entstehenden Grössen benutzen wir als Coëffizienten einer Reihe und fügen jedem einzelnen die Potenz $x^{n^2-p^2}$ bei, wobei x eine komplexe variable Grösse bedeuten soll. Addieren wir alle Glieder dieser Reihe und bezeichnen ihre Summen mit $\tau(p, x)$, so erhalten wir:

$$\tau(p, x) = \sum_{n=p}^{n=\infty} \left\{ \prod_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} \frac{n^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2} x^{n^2-p^2} \right\}. \tag{4}$$

Sucht man nun zunächst die Funktion festzustellen, welche entsteht, wenn in dieser Gleichung $p = 0$ gesetzt wird, dann findet sich sofort, dass über den Wert des Produktes $\prod_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} \frac{n^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2}$ für $p = 0$ und $n \gtreqless 0$ noch erst einige Bestimmungen getroffen werden müssen, welche den bekannten, auf einfache Binomialkoëffizienten bezüglichen Relationen:

$$0! = 1; \binom{0}{0} = 1; \binom{1}{0} = 1; \binom{2}{0} = 1 \text{ etc. } \binom{r}{s} = 0 \text{ für } r < s$$

entsprechen. Unter Zugrundelegung dieser Sätze ergiebt sich nun aus (2), dass das in Rede stehende Produkt:

$$\text{für } p = 0 \text{ und } n = 0 \text{ den Wert } \binom{0}{0} + \binom{-1}{0} = 1 + 0 = 1,$$

$$\text{für } p = 0 \text{ und } n = 1 \text{ den Wert } \binom{1}{0} + \binom{0}{0} = 1 + 1 = 2,$$

$$\text{für } p = 0 \text{ und } n = 2 \text{ den Wert } \binom{2}{0} + \binom{1}{0} = 1 + 1 = 2,$$

$$\text{für } p = 0 \text{ und } n = 3 \text{ den Wert } \binom{3}{0} + \binom{2}{0} = 1 + 1 = 2$$

u. s. w. für $p = 0$ und alle folgenden Werte von n stets denselben Wert 2 behält.

Legt man andererseits die Gleichung (3) zu Grunde, so findet sich genau dasselbe Resultat, nämlich:

$$\text{für } p = 0 \text{ und } n = 0 \text{ der Wert } \binom{1}{1} - \binom{-1}{1} = 1 - 0 = 1,$$

$$\text{für } p = 0 \text{ und } n = 1 \text{ der Wert } \binom{2}{1} - \binom{0}{1} = 2 - 0 = 2,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

für $p=0$ und $n=2$ der Wert $\binom{3}{1}-\binom{1}{1}=3-1=2,$

für $p=0$ und $n=3$ der Wert $\binom{4}{1}-\binom{2}{1}=4-2=2.$

. . . .

Nach diesen Festsetzungen erhalten wir sofort aus (4):

$$\tau(0,x)=1+2x+2x^4+2x^9+2x^{16}+\ldots=\vartheta_3(0,x). \tag{5}$$

Damit ist also die Funktion $\vartheta_3(0)$ als ein Spezialfall der in (4) angegebenen Funktionen erkannt.

Um nun zunächst den Convergenzbereich der letzteren zu untersuchen, dividieren wir das $(n+1)$-te Glied der allgemeinen Reihe (4) durch das n-te Glied und erhalten dadurch den Ausdruck:

$$\frac{\prod\limits_{\lambda=0}^{\lambda=p-1}\dfrac{(n+1)^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2}\,x^{(n+1)^2-p^2}}{\prod\limits_{\lambda=0}^{\lambda=p-1}\dfrac{n^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2}\,x^{n^2-p^2}},$$

welcher unter Benutzung des Satzes (1) übergeht in:

$$\frac{\binom{n+p}{2p-1}\cdot\dfrac{n+1}{p}}{\binom{n+p-1}{2p-1}\cdot\dfrac{n}{p}}\,x^{2n+1}=$$

$$=\frac{(n+p)(n+p-1)\,\ldots\ldots\,(n+p-(2p-2))\,(n+1)}{(n+p-1)(n+p-2)\,\ldots\ldots\,(n+p-1-(2p-2))\,n}\cdot x^{2n+1}$$

$$=\frac{(n+p)(n+1)}{(n-p+1)\,n}\cdot x^{2n+1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1+\dfrac{p}{n}}{1-\dfrac{p-1}{n}}\cdot x^{2n+1}.$$

Bezeichnet man den analytischen Modulus der komplexen Variable x mit ϱ, so wird der Modulus des letztgenannten Ausdrucks den Wert:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1+\dfrac{p}{n}}{1-\dfrac{p-1}{n}}\,\varrho^{2n+1}$$

haben, und die Reihe wird konvergieren, wenn dieser Modulus kleiner als die Einheit ist. Ist $\varrho<1$, so kann ϱ^{2n+1} beliebig klein gemacht werden, wenn man n gross genug wählt. Zu gleicher Zeit nähert sich mit wachsendem n der Faktor:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1+\dfrac{p}{n}}{1-\dfrac{p-1}{n}}$$

ohne Ende der Einheit, also wird die Bedingung:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{1+\frac{p}{n}}{1-\frac{p-1}{n}}\,\varrho^{2n-1}<1$$

für $\varrho<1$ von einem gewissen Gliede der Reihe ab stets erfüllt sein, mithin sind die in (4) angegebene Reihen für jeden beliebigen endlichen Wert von p stets konvergent, so lange die Variable x innerhalb eines Kreises bleibt, welcher den Nullpunkt zum Centrum und die Einheit zum Radius hat. Wird aber $\varrho=1$, so nähert sich der Quotient zweier aufeinander folgenden Glieder stetig der Einheit, hat also zum Grenzwert denjenigen Quotienten, welchen auch je zwei aufeinander folgende Glieder der einfachen geometrischen Progression $\sum\limits_{n=0}^{n=\infty} z^n$ für den Fall $z=1$ besitzen; und so wie letztere für $z=-1$ die unbestimmte Form einer nicht konvergenten pendelnden Reihe annimmt, ist das auch mit allen in der Gleichung (4) enthaltenen Reihen der Fall, wenn man $x=-1$ setzt. Dabei tritt aber eine sehr bemerkenswerte Erscheinung zu Tage, wenn man auf die Coëffizienten den Satz (2) anwendet. Aus (4) ergiebt sich nämlich:

$$\begin{aligned}\tau(p,x) &= \sum_{n=p}^{n=\infty}\left\{\binom{n+p-1}{2p}+\binom{n+p}{2p}\right\}x^{n^2-p^2}\\ &= \sum_{n=p}^{n=\infty}\left\{\binom{n+p-1}{2p}x^{n^2-p^2}+\binom{n+p}{2p}x^{n^2-p^2}\right\}.\end{aligned}$$

Entwickelt man nun, so kommt:

$$\tau(p,x)=\binom{2p-1}{2p}x^0+\binom{2p}{2p}x^0+\binom{2p}{2p}x^{(p+1)^2-p^2}+\binom{2p+1}{2p}x^{(p+1)^2-p^2}+\binom{2p+1}{2p}x^{(p+2)^2-p^2}+\cdots\cdots$$

Nun ist aber $\binom{2p-1}{2p}$ offenbar gleich Null, also bleibt:

$$\begin{aligned}\tau(p,x) &= \binom{2p}{2p}x^0+\binom{2p}{2p}x^{(p+1)^2-p^2}+\binom{2p+1}{2p}x^{(p+1)^2-p^2}+\binom{2p+1}{2p}x^{(p+2)^2-p^2}+\cdots\\ &= \binom{2p}{2p}\left\{1+x^{2p+1}\right\}+\binom{2p+1}{2p}\left\{x^{2p+1}+x^{4p+4}\right\}+\binom{2p+2}{2p}\left\{x^{4p+4}+x^{6p+9}\right\}+\cdots\\ &= \binom{2p}{2p}\left\{1+x^{2p+1}\right\}+\binom{2p+1}{2p}x^{2p+1}\left\{1+x^{2p+3}\right\}+\binom{2p+2}{2p}x^{4p+4}\left\{1+x^{2p+5}\right\}+\cdots\\ &= \sum_{r=0}^{r=\infty}\binom{2p+r}{2p}x^{2rp+r^2}\left\{1+x^{2(p+r)+1}\right\},\ \text{oder auch, wenn } p+r=n \text{ gesetzt wird,}\end{aligned}$$

(6) $$= \sum_{n=p}^{n=\infty}\binom{n+p}{2p}x^{n^2-p^2}\left\{1+x^{2n+1}\right\}.$$

Giebt man nun der Variablen x den Wert -1, so ist offenbar $1+x^{2n+1}=0$, d. h. jedes Glied derjenigen Summe, durch welche die Funktion $\tau(p,x)$ dargestellt wird, bekommt den Faktor Null. Allein dieser Umstand berechtigt nicht zu dem Schlusse:

$$\tau(p,-1)=0,$$

weil die Reihe für $x=-1$ überhaupt nicht mehr konvergiert. Er genügt auch nicht, um

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

auszusagen, dass der Wert von $\tau(p, x)$ sich immer mehr der Null nähere, je näher x an die negative Einheit heranrückt. Denn nimmt man z. B. die einfache Funktion:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots \\ &= (1+x)+x^2(1+x)+x^4(1+x)+\cdots \\ &= \sum_{n=0}^{n=\infty}(1+x)x^{2n}, \end{aligned}$$

so erhält für $x=-1$ jedes Glied der Summe offenbar den Faktor Null, und doch konvergiert, im Falle x sich der negativen Einheit nähert, $f(x)$ einleuchtender Weise nicht gegen die Null, sondern gegen den Wert $\frac{1}{2}$. Schreibt man: $f(x)=(1+x)\cdot\sum_{n=0}^{n=\infty} x^{2n}$, so entsteht für $f(-1)$ die Grösse $0.\infty$, also ein ganz unbestimmter Ausdruck.

Anders gestaltet sich die Sache, sobald jedes einzelne Glied obiger geometrischen Progression in zwei Summanden zerlegt wird. Dann ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2}+\cdots \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+x)+\frac{x}{2}(1+x)+\frac{x^2}{2}(1+x)+\cdots \\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1+x)\sum_{n=0}^{n=\infty} x^n, \end{aligned}$$

und hieraus darf offenbar geschlossen werden, dass $f(-1)=\frac{1}{2}$ sei. Denn die Grösse $(1+x)\sum_{n=0}^{n=\infty} x^n$ muss für $x=-1$ zweifellos verschwinden, da einerseits $1-1=0$ und andererseits $\sum_{n=0}^{n=\infty} x^n$ in diesem Falle zwar die unbestimmte Form der nicht konvergenten pendelnden Reihe $1-1+1-1+\cdots$ annimmt, aber deshalb weder negativ noch grösser als $+1$ werden kann, mithin sicherlich einen endlichen Wert hat. —

Bringt man nun auch bei der Funktion:

$$\tau(p, x) = \sum_{n=p}^{n=\infty}\binom{n+p}{2p}x^{n^2-p^2}(1+x^{2n+1})$$

den Faktor $1+x$ vor das Summenzeichen, so ergiebt sich:

$$\tau(p, x) = (1+x)\sum_{n=p}^{n=\infty}\left[\binom{n+p}{2p}x^{n^2-p^2}\cdot\sum_{m=0}^{m=2n}(-1)^m x^m\right],$$

woraus man für $x=-1$ erhält:

$$\tau(p, -1) = 0\cdot\sum_{n=p}^{n=\infty}\left[\binom{n+p}{2p}(2n+1)(-1)^{n^2-p^2}\right].$$

Von den hier neben der Null auftretenden Summen kann man nun nicht behaupten, dass ihr Wert unendlich sei, aber man darf auch nicht ohne Weiters sagen, dass er endlich sei; denn die Reihe enthält abwechselnde Zeichen und ist nicht nur nicht konvergent,

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

sondern im Gegensatz zu der Reihe 1—1+1 . . . wachsen die Pendelschläge zu beiden Seiten der Null bis ins Unendliche, und verhindern dadurch die Aufstellung endlicher Grenzen, zwischen denen der Wert gelegen sein muss.

Wie es nun Mittel giebt, um unbestimmte Ausdrücke von der Form $\frac{0}{0}$ auszuwerten, d. h. diejenigen Grenzwerte zu bestimmen, denen sich die Quotienten zweier gleichzeitig gegen die Null abnehmenden Funktionen nähern, so lassen sich vielleicht auch Mittel finden, um die Grösse zu bestimmen, gegen welche eine Reihe in dem Falle konvergiert, wo sie für einen gewissen Wert der Variablen divergente Pendelschläge aufweist. Im vorliegenden Falle indessen kann auch ein anderer Weg eingeschlagen werden, um über das Verhalten der Funktion $\tau(p,x)$ bei Annäherung der Variablen x an die negative Einheit etwas Sicheres zu ermitteln. —

Vorhin wurde schon in Gleichung (5) die Identität:

$$\tau(0,x) = \vartheta_3(0,x)$$

abgeleitet, und da, wie mehrfach erwähnt, $\vartheta_3(0,-1) = 0$, so ist ebenso $\tau(0,-1) = 0$. Versuchen wir nun auch die folgenden Funktionen $\tau(1,x)$, $\tau(2,x)$ etc. zu derselben Reihe $\vartheta_3(0)$ in Beziehung zu setzen, so ist hierbei ein Satz über die Differentialquotienten der Funktion $\tau(p,x)$ von grossem Nutzen, welcher aussagt:

$$\frac{d}{dx}[\tau(p,x)] = \tau'(p,x) = (2p+1)(2p+2)\,x^{2p}.\,\tau(p+1,x).$$

Es folgt nämlich aus (4) durch Differentiation:

$$\tau'(p,x) = \sum_{n=p}^{n=\infty} \left\{ \prod_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} \frac{n^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2} \cdot (n^2-p^2)\, x^{n^2-p^2-1} \right\}.$$

In dieser Summe verschwindet das erste Glied von selbst, weil für $n=p$ der Faktor $n^2-p^2=0$ ist, daher ist offenbar:

$$\tau'(p,x) = \sum_{n=p+1}^{n=\infty} \left\{ \prod_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} \frac{n^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2} \cdot (n^2-p^2)\, x^{n^2-p^2-1} \right\}.$$

Die kleinste nunmehr noch vorkommende Potenz von x heisst $x^{(p+1)^2-p-1^2} = x^{2p}$; sie kann abgesondert und vor das Summenzeichen gesetzt werden. Hierdurch geht der allgemeine Ausdruck für die in den einzelnen Summanden noch übrig bleibenden Potenzen von x über in die Form $x^{n^2-p^2-1-2p}$, oder $x^{n^2-(p+1)^2}$, und wir haben nunmehr:

$$\tau'(p,x) = x^{2p} \cdot \sum_{n=p+1}^{n=\infty} \left\{ \prod_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} \frac{n^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2} (n^2-p^2)\, x^{n^2-(p+1)^2} \right\}.$$

Was nun die Coëffizienten betrifft, so ist:

$$\prod_{\lambda=0}^{\lambda=p-1} \frac{n^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2} \cdot (n^2-p^2) = \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots(n^2-(p-1)^2)(n^2-p^2)}{p^2(p^2-1^2)(p^2-2^2)\ldots(p^2-(p-1)^2).\,1}.$$

Multipliciert man Zähler und Nenner mit dem Produkt:

$$(p+1)^2((p+1)^2-1^2)((p+1)^2-2^2)\ldots((p+1)^2-p^2),$$

so geht die Form der Coëffizienten über in:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{(p+1)^2((p+1)^2-1^2)((p+1)^2-2^2)\ldots((p+1)^2-(p-1)^2).((p+1)^2-p^2).n^2(n^2-1)\ldots(n^2-(p-1)^2)(n^2-p^2)}{(p^2)(p^2-1^2)(p^2-2^2)\ldots(p^2-(p-1)^2).1.(p+1)^2((p+1)^2-1^2)\ldots((p+1)^2-(p-1)^2)((p+1)^2-p^2)}$$
$$=\prod_{\lambda=0}^{\lambda=p-1}\frac{(p+1)^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2}\cdot(2p+1)\cdot\prod_{\lambda=0}^{\lambda=p}\frac{n^2-\lambda^2}{(p+1)^2-\lambda^2}.$$

Nun folgt aber aus (1), dass:

$$\prod_{\lambda=0}^{\lambda=p-1}\frac{(p+1)^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2}=\binom{2p}{1}\cdot\frac{p+1}{p}=2p\cdot\frac{p+1}{p}=2p+2,$$

also werden die Coëffizienten gleich:

$$(2p+1)(2p+2)\prod_{\lambda=0}^{\lambda=p}\frac{n^2-\lambda^2}{(p+1)^2-\lambda^2},$$

und wenn man diejenigen Faktoren, welche den Index n nicht mehr enthalten, vor das Summenzeichen setzt, so entsteht:

$$\tau'(p,x)=(2p+1)(2p+2)\,x^{2p}\sum_{n=p+1}^{n=\infty}\left\{\prod_{\lambda=0}^{\lambda=p}\frac{n^2-\lambda^2}{(p+1)^2-\lambda^2}\cdot x^{n^2-(p+1)^2}\right\}.$$

Da aber die jetzt auf der rechten Seite stehende Summe nach (4) die Funktion $\tau(p+1,x)$ darstellt, so ist:

(7) $$\tau'(p,x)=(2p+1)(2p+2)\,x^{2p}\,\tau(p+1,x).\,-$$

Auf Grund dieses Satzes nun lassen sich alle Functionen $\tau(p,x)$ durch die Funktion $\vartheta_3(0,x)$ und deren Differentialquotienten darstellen. Geht man nämlich aus von dem Werte $p=0$, so ist zufolge (5):

$\vartheta_3(0,x)=\tau(0,x)$ und nun zufolge (7) der Reihe nach:

(8) $\vartheta_3'(0,x)=\tau'(0,x)=1.2.x^0.\tau(1,x)=2!\,\tau(1,x)$

(9) $\vartheta_3''(0,x)=2!\,\tau'(1,x)=2!\,3.4.x^2\,\tau(2,x)=4!\,x^2\,\tau(2,x)$

$\vartheta_3'''(0,x)=4![2x.\tau(2,x)+x^2\tau'(2,x)]=4![2x\tau(2,x)+x^2.5.6.x^4\tau(3,x)]$

(10) $=4!\,2x.\tau(2,x)+6!\,x^6.\tau(3,x)=4!\,2.x^{4-3}.\tau(2,x)+6!\,x^{9-3}\tau(3,x)$

$\vartheta_3''''(0,x)=4!\,2\,x^{4-4}\tau(2,x)+6!\,8x^{9-4}\tau(3,x)+8!\,x^{16-4}\tau(4,x)$

$\vartheta_3'''''(0,x)=\quad 0 \quad +6!\,42.x^{9-5}\tau(3,x)+8!\,20.x^{16-5}\tau(4,x)+10!\,x^{25-5}\tau(5,x)$

. . . .

$\vartheta_3^{(\alpha)}(0,x)=2!\,A_{1,\alpha}.x^{1^2-\alpha}.\tau(1,x)+4!\,A_{2,\alpha}\,x^{2^2-\alpha}.\tau(2,x)+\ldots\ldots(2\alpha)!\,A_{\alpha,\alpha}\,x^{\alpha^2-\alpha}.\tau(\alpha,x),$

wobei die Faktoren $A_{1,\alpha}$, $A_{2,\alpha}$ etc. zuerst wachsen, dann aber wieder abnehmen und der Reihe nach zu Null werden. So wird $A_{t,\alpha}$ in dem Augenblick zu Null, wo $t^2-\alpha$ negativ werden würde. Dies hängt damit zusammen, dass weder $\vartheta_3^{(\alpha)}(0,x)$ noch $\tau(\alpha.x)$ Potenzen mit negativen Exponenten enthalten können. Der letzte Eaktor $A_{\alpha,\alpha}$ ist stets gleich Eins.

Wie nun aus (5) folgt, dass $\tau(0,-1)=0$, weil $\vartheta_3(0,-1)=0$, so folgt aus (8), dass $\tau(1,-1)=0$, weil, wie im vorigen Abschnitt schon nachgewiesen worden, $\vartheta'_3(0,-1)=0$ ist[1]).

---

1) Es könnte vielleicht nötig erscheinen, dieses Resultat gegen die Ansicht zu vertheidigen, als ob bei Ableitung desselben der Trugschluss untergelaufen sei, dass eine Reihe deswegen gleich Null gesetzt wurde, weil sämtliche Summanden derselben verschwinden. Dieses Argument ist, wie vorhin schon erwähnt, allerdings im Allgemeinen nicht beweisend, allein bei dem in Gleichung (6) des Abschnitts IV vorliegenden Falle enthält

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Wenn nun ferner nachgewiesen werden kann, dass auch $\vartheta_3''(0,-1)=0$, $\vartheta_3'''(0,-1)=0$ ist etc., so würde aus den Gleichungen (9), (10) etc. augenscheinlich folgen, $\tau(2,-1)=0$; $\tau(3,-1)=0$ etc.

Dieser Nachweis erscheint aber möglich, wenn man erwägt, dass bei der Darstellung der Funktion $\vartheta_3(0,q)$ als unendliches Produkt:

$$\vartheta_3(0,q)=\frac{1+q}{1-q}\cdot\frac{1-q^2}{1+q^2}\cdot\frac{1+q^3}{1-q^3}\cdots\cdots$$

jeder einzelne Faktor des Zählers durch $1+q$ dividierbar ist, während kein einziger Faktor des Nenners diese Eigenschaft hat. Folglich enthält die Funktion $\vartheta_3(0,q)$ den Faktor $1+q$ unendlich oft, müsste also nach einem bekannten Satz der Algebra für $q=-1$ nicht nur selbst verschwinden, sondern unendlich viele aufeinanderfolgende Differentialquotienten derselben müssten ebenfalls verschwinden.

Nun pflegt aber bei Ableitung des hier benutzten algebraischen Lehrsatzes der Fall, dass die betreffende Funktion unendlich viele Faktoren hat, nicht in Rücksicht gezogen zu werden, und auch aus sonstigen Gründen mag die unmittelbare Applikation dieses Satzes auf den vorliegenden Fall nicht ohne Bedenken sein; wir wollen daher auf

---

jeder Summand neben einem einzigen Faktor, welcher für $q=-1$ von Null verschieden bleibt, mehr als einen, ja unendlich viele Faktoren, welche für diesen Wert von q zu Null werden. Allein auch abgesehen von diesem Umstande lässt sich das erwähnte Resultat leicht sicher stellen durch folgende Betrachtung. — Wir definieren eine Funktion $T(q)$ durch die Gleichung:

$$T(q)=(1+q)\frac{2}{(1-q)^2}\cdot\frac{1-q}{1+q^2}+(1+q)\frac{-4q}{(1-q)(1+q^2)^2}+(1+q)\frac{6q^2}{(1-q)(1+q^2)(1-q^3)^2}$$
$$+(1+q)\frac{-8q^3}{(1-q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q^4)^2}+(1+q)\frac{10q^4}{(1-q)(1+q^2)(1-q^3)(1+q_4)(1-q^5)^2}+\cdots$$

Dann folgt:

$$T(-1)=(1-1)\frac{1}{2}+(1-1)\frac{2}{4}+(1-1)\frac{3}{8}+(1-1)\frac{4}{16}+(1-1)\frac{5}{32}+\cdots\cdots$$
$$=(1-1)\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n}{2^n}.$$

Nun überzeugt man sich auf leichte Weise, dass $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{n}{2^n}$ bei endlos wachsendem n die Zahl 2 zur Grenze hat, also kann $T(-1)$ weder negativ, noch komplex, noch auch grösser sein als $(1-1).2$, d. h. $T(-1)=0$.

Betrachtet man jetzt die in IV (6) aufgeführten Summanden von $\vartheta'_3(0)$, so sieht man erstens, dass für $q=-1$ keiner von ihnen komplex oder negativ werden kann, zweitens, dass der erste Summand von $\vartheta'_3(0)$ für $q=-1$ unmöglich grösser sein kann, als der erste Summand von $T(q)$, weil die Faktoren, welche der erstere mehr enthält als der letztere, ohne Ausnahme für den genannten Wert von q teils zu Null werden, teils echte Brüche darstellen. Ganz dasselbe ist bei dem zweiten und allen folgenden Summanden der Fall. Demnach kann $\vartheta'_3(0)$ für $q=-1$ einerseits weder komplex noch negativ werden, andererseits aber auch keinen grössern Wert annehmen, als derjenige ist, welchen $T(q)$ für $q=-1$ annimmt. Hieraus ergiebt sich, dass $\vartheta'_3(0)$ bei Annäherung der Grösse q an die negative Einheit gegen keine andere Grösse als gegen die Null konvergieren kann.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

einem anderen Wege über die Werte, welche die Differentialquotienten von $\vartheta_3(0,q)$ für $q=-1$ annehmen, resp. gegen welche sie konvergieren, wenn q sich der negativen Einheit ohne Ende nähert, ins Klare zu kommen suchen.

Für diesen Zweck bietet sich zunächst schon die Aussicht, dass der in der vorhin beigefügten Anmerkung benutzte a fortiori-Schluss, welcher bei $\vartheta'_3(0,q)$ zum Ziele führte, auch auf $\vartheta''_3(0,q)$ etc. mit Erfolg anwendbar sein dürfte, allein das Problem[1]) lässt sich auch auf eine andere Weise behandeln, welche elementarer, allgemeiner, und überdies an und für sich schon von Interesse ist.

VI.

Aggregate von additiven Combinationen beliebig vieler gegebener Elemente, sowie von Potenzen und Faktoriellen dieser Combinationen.

Für die Erörterungen dieses Abschnitts bedürfen wir eines Hülfssatzes, welcher Folgendes aussagt:

(*A.*) „Wenn man von einer beliebigen positiven ganzen Zahl n alle geteilten fallenden Faktoriellen von der nullten bis zur n-ten bildet und nun einerseits diejenigen, deren Zähler und Nenner aus einer geraden Zahl von Faktoren besteht, anderseits auch alle übrigen zu einander addiert, so sind die beiden entstehenden Summen einander gleich."

Der Beweis dieses Theorems ergiebt sich zwar unmittelbar aus dem binomischen Lehrsatz, wenn man in der Gleichung:

$$(1-z)^n = \binom{n}{0}1^0 - \binom{n}{1}z^1 + \binom{n}{2}z^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}z^{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n}z^n$$

die Grösse z gleich Eins setzt. Allein in dem zur Ableitung des binomischen Lehrsatzes für den Grenzwert $z=1$ dienenden Gedankengang findet sich mitunter das Argument benutzt, dass ein Bruch $\frac{p}{q}$, bei welchem p eine positive Zahl ist und q der Reihe nach alle positiven ganzen Zahlen durchläuft, bei einem gewissen Werte von q anfangen müsse, kleiner als die Einheit zu werden[2]). Dieser Schluss ist offenbar stichhaltig, solange p konstant und eine endliche Grösse ist; wenn man aber p selbst immer weiter und weiter wachsen lässt, so verliert das Argument seine Evidenz. Nun ist es aber für unseren

---

1) Aus manchen Gründen, namentlich aber wegen des elementareren Charakters der vorliegenden Abhandlung, erschien es unthunlich, dasselbe in Beziehung zu bringen zu den Resultaten gewisser Untersuchungen von Riemann, Dedekind und Fuchs „über das Verschwinden der Thetafunktionen", über „Grenzfälle der elliptischen Modulfunktionen" etc., welche teils in den gesammelten mathematischen Werken Riemann's, teils im 83. Bande von Borchardt's Journal erschienen sind.

2) Vgl. Lipschitz, Lehrbuch der Analysis I p. 584 mit Rücksicht auf p. 582 (4) und p. 547 (6), ferner Worpitzky, Elemente I, p. 91.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Zweck wesentlich, die folgenden Erörterungen so einzurichten, dass unter den benutzten Gründen keiner aufhört stichhaltig zu bleiben, wenn man den dabei in Frage kommenden Grössen erlaubt, ohne Ende zu wachsen. Um also auch in Betreff des vorgenannten Hülfssatzes in dieser Beziehung keinen Zweifel zu lassen, wollen wir ihm einen einfachen und elementaren Beweis beifügen, welcher der gestellten Anforderung entspricht. —

Dass Gleichungen wie die folgenden:

$$a=a;\ a-a=0;\ \frac{a}{a}=1;\ a+b-b=a;\ a(b+c)=ab+ac \text{ etc.}$$

auch bei endlosem Wachsen der Grössen a, b, c zuverlässig richtig bleiben, unterliegt keinem Bedenken. Dasselbe gilt demnach auch von solchen arithmetischen Sätzen, bei deren Ableitung nichts weiter als die Richtigkeit dieser Gleichungen vorausgesetzt wird, z. B. von der Relation $\frac{a!}{a!}=1$, sowie von den bekannten Sätzen: $\binom{a+b}{a}=\binom{a+b}{b}$ und:

$$\binom{a+1}{b+1}=\binom{a}{b}+\binom{a}{b+1}, \tag{1}$$

deren Deduktion auf der angegebenen Basis in allen Handbüchern zu finden ist.

Nehmen wir jetzt eine endliche, positive, ganze, ungerade Zahl $2\nu+1$, so lassen sich von derselben $2\nu+2$, also eine gerade Anzahl von geteilten fallenden Faktoriellen bilden, welche, wenn man die Einheit als erste Faktorielle mit dem gebräuchlichen Symbol $\binom{2\nu+1}{0}$ bezeichnet, folgende Reihe darstellen:

$$\binom{2\nu+1}{0};\ \binom{2\nu+1}{1};\ \binom{2\nu+1}{2}\ldots\ldots\binom{2\nu+1}{\nu-1};\ \binom{2\nu+1}{\nu};\ \binom{2\nu+1}{\nu+1};\ \binom{2\nu+1}{\nu+2}\ldots\ldots\binom{2\nu+1}{2\nu};\ \binom{2\nu+1}{2\nu+1}.$$

Nun sind für jeden beliebigen Wert von ν die beiden in der Mitte stehenden Binomialkoëffizienten von allen die grössten und überdies unter sich gleich, weil offenbar:

$$\binom{2\nu+1}{\nu}=\frac{(2\nu+1)\,2\nu\,(2\nu-1)\ldots.(\nu+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots.\ \nu}=\frac{(2\nu+1)\,2\nu\,(2\nu-1)\ldots.(\nu+2)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots.\ \nu}\cdot\frac{(\nu+1)}{(\nu+1)}=\binom{2\nu+1}{\nu+1}.$$

Ebenso ist:

$$\binom{2\nu+1}{\nu-1}=\binom{2\nu+1}{\nu+2},\ \binom{2\nu+1}{\nu-2}=\binom{2\nu+1}{\nu+3} \text{ etc. bis } \binom{2\nu+1}{1}=\binom{2\nu+1}{2\nu}, \text{ und } \binom{2\nu+1}{0}=\binom{2\nu+1}{2\nu+1}=1.$$

Ganz dasselbe ergiebt sich unmittelbar aus den Relationen:

$$\binom{a+b}{a}=\binom{a+b}{b} \text{ und } \frac{a!}{a!}=1.$$

Demnach zeigt sich in obiger Reihe, wenn man mit den mittleren Gliedern beginnt und von da aus vorwärts und rückwärts bis zu den beiden Enden fortschreitet, dass je eine Faktorielle, bei welcher $2\nu+1$ über einer geraden Zahl steht, gleich einer solchen ist, bei welcher $2\nu+1$ über einer ungeraden Zahl steht. Addiert man also einerseits die ersteren und andererseits die letzteren, so sind die entstehenden Summen einander gleich.

Bilden wir zweitens von einer endlichen positiven geraden Zahl 2ν alle Binomialkoëffizienten:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\binom{2\nu}{0};\ \binom{2\nu}{1};\ \binom{2\nu}{2}\ldots\binom{2\nu}{\nu-1};\ \binom{2\nu}{\nu};\ \binom{2\nu}{\nu+1}\ldots\binom{2\nu}{2\nu-1};\ \binom{2\nu}{2\nu},$$

so ist die Anzahl derselben eine ungerade, und der mittelste unter allen der grösste. Wir teilen jetzt sämtliche Glieder dieser Reihe mit Ausnahme des ersten und letzten nach Gleichung (1) in je 2 Summanden und erhalten:

$$\begin{array}{cccccc}
\binom{2\nu}{0} & \binom{2\nu}{1} & \binom{2\nu}{2} & \cdots\cdots\cdots & \binom{2\nu}{\nu-1} & \binom{2\nu}{\nu} \\
1; & \overbrace{\binom{2\nu-1}{0}+\binom{2\nu-1}{1}}; & \overbrace{\binom{2\nu-1}{1}+\binom{2\nu-1}{2}}; & \ldots & \overbrace{\binom{2\nu-1}{\nu-2}+\binom{2\nu-1}{\nu-1}}; & \overbrace{\binom{2\nu-1}{\nu-1}+\binom{2\nu-1}{\nu}};
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\binom{2\nu}{\nu+1} & \cdots\cdots\cdots & \binom{2\nu}{2\nu-2} & \binom{2\nu}{2\nu-1} & \binom{2\nu}{2\nu}. \\
\overbrace{\binom{2\nu-1}{\nu}+\binom{2\nu-1}{\nu+1}}; & \ldots & \overbrace{\binom{2\nu-1}{2\nu-3}+\binom{2\nu-1}{2\nu-2}}; & \overbrace{\binom{2\nu-1}{2\nu-2}+\binom{2\nu-1}{2\nu-1}}; & 1.
\end{array}$$

Hieraus sieht man sofort, dass die Summanden derjenigen Faktoriellen, bei denen 2ν über einer geraden Zahl steht, mit den Summanden der übrigen Faktoriellen paarweise vollkommen identisch sind, und dass bei dieser Paarung kein einziger Summand unberücksichtigt bleibt. Also ist auch in diesem Falle die Summe der ersteren Faktoriellen der der letzteren zweifellos gleich.

Damit ist der Beweis des Hülfssatzes für jede beliebige endliche positive ganze Zahl n, mag sie gerade oder ungerade sein, erledigt. Lassen wir nun aber ν, und damit auch n immer weiter wachsen, so werden alle Binomialkoëffizienten mit Ausnahme des ersten und letzten ebenfalls wachsen, aber die dargelegten Identitäten, welche lediglich auf den eingangs angeführten Gleichungen beruhen, bleiben davon gänzlich unbeeinträchtigt, und da der Beweis sich nur auf diese Identitäten stützt, nicht aber auf die Grösse, welche die Binomialkoëffizienten an und für sich haben, so wird durch ein beliebiges Anwachsen der Zahl ν die Stringenz des Beweises nicht alteriert.

Auf der hiermit gewonnenen Basis können wir nunmehr folgende Sätze ableiten.

(*B.*) Es seien n beliebige Zahlengrössen (Elemente) gegeben, welche mit $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ bezeichnet werden mögen. Wir verbinden dieselben durch Addition so, dass alle ohne Wiederholung möglichen Combinationen der ersten, zweiten, dritten etc. bis zur n-ten Klasse entstehn. Nun bilden wir einerseits die Summe aller Kombinationen 1ter, 3ter, 5ter etc., also aller ungeraden Klassen, andererseits auch die Summe aller Kombinationen der geraden Klassen: dann sind diese beiden Summen identisch, d. h. sie enthalten genau dieselben Elemente, und jedes Element kommt in beiden gleich oft vor. —

Um dies darzuthun, fassen wir zunächst das Element ε_1 ins Auge. Dasselbe kommt unter den Kombinationen erster Klasse nur einmal vor, unter den Kombinationen dritter Klasse so oft, als die $n-1$ übrigen Elemente sich zu zweien ohne Wiederholung kombinieren lassen, also $\binom{n-1}{2}$ mal, unter den Kombinationen fünfter Klasse $\binom{n-1}{4}$ mal etc. — Bei der zweiten Summe kommt ε_1 unter den Kombinationen zweiter Klasse

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

so oft vor, als die übrigen Elemente ε_2 bis ε_n sich einzeln mit ihm kombinieren lassen, also $(n-1)$ mal; unter den Kombinationen vierter Klasse so oft, als ε_2 bis ε_n sich zu dreien ohne Wiederholung kombinieren lassen, also $\binom{n-1}{3}$ mal, unter den Kombinationen 6ter Klasse $\binom{n-1}{5}$ mal etc. Also kommt nach dem vorigen Satze (A) das Element ε_1 in beiden Summen genau gleich oft vor.

Nun aber sieht man sofort, dass ganz dieselben Gründe auch für ε_2 zutreffend sind und ebenso für alle übrigen Elemente. Daher kommt jedes Element in beiden Summen genau gleich oft vor. Etwas anderes als diese Elemente enthalten die letzteren aber gar nicht, folglich sind beide Summen identisch.

Hieran knüpft sich nun sofort folgende wesentliche Erweiterung:

$(C.)$ Wenn man die im vorigen Satze angegebenen Combinationen sämtlich in die p te Potenz erhebt und dann ebenso wie vorhin die Summen der ungeraden und der geraden Klassen bildet, so sind diese Summen wiederum identisch, falls p eine positive ganze Zahl und kleiner als n ist. —

Zum Zweck des Beweises ist zunächst daran zu erinnern, dass stets, wenn irgend eine Summe $(a+b+\cdots k+l+m+\cdots+z)$ in die N te Potenz erhoben wird, der Coëffizient eines beliebigen in der Entwickelung dieser Potenz vorkommenden Produktes: $k^{\varkappa}.l^{\lambda}.m^{\mu}.....$ vollkommen unabhängig ist, nicht nur von dem Werte, sondern auch von der Zahl der in der Summe $(a+b+\cdots+z)$ enthaltenen Summanden. Denn zur Bildung des bezeichneten Produktes wirken nur die darin vorkommenden Elemente $k, l, m\ldots.$ mit, und sein Coëffizient ist in jedem Falle gleich der Grösse $\frac{N!}{\varkappa!\,\lambda!\,\mu!\ldots.}$. Die Existenz oder Nichtexistenz aller in dem bez. Produkte nicht vorkommenden Elemente ist für diesen Coëffizienten gleichgültig[1]).

Wählen wir nun unter den Combinationen der gegebenen Elemente ε_1 bis ε_n irgend eine, erheben sie in die p te Potenz und wählen aus der entstehenden Anzahl von Produkten wiederum irgend ein einzelnes Produkt $P = \varepsilon_k^{\varkappa}.\varepsilon_l^{\lambda}.\varepsilon_m^{\mu}\ldots.$ aus. Bezeichnen wir die Anzahl der darin vorkommenden Elemente mit s, dann ist offenbar $1 \overline{\overline{<}} s \overline{\overline{<}} p$, und man sieht zunächst, dass das Produkt P in den Potenzen irgend welcher Combinationen von der ersten, zweiten etc. bis zur $(s-1)$ ten Klasse gar nicht vorkommen kann, weil diese Combinationen überhaupt noch nicht soviele Elemente in sich enthalten, als deren zur Bildung des Produktes P erforderlich sind. — In den Potenzen der Combinationen aller übrigen Klassen, von der s ten angefangen bis zur n ten, kann aber das Produkt P vorkommen, und zwar kommt es dann vor, wenn die betr. Combination die eben ausgewählten Elemente ε_k, ε_l, ε_m etc. auch wirklich ohne Ausnahme in sich enthält. Ferner

1) So heisst z. B., mag man $(a+b)$, oder $(a+b+c)$, oder $(a+b+c+\ldots z)$ in die dritte Potenz erheben, der Coëfficient von a^2b stets 3.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

ist es immer mit einem und demselben Coëffizienten versehen, welcher der Kürze wegen mit C bezeichnet werden soll.

Nach dieser Überlegung ist leicht auszurechnen, wie oft $C.P$ überhaupt erscheint. Unter den Combinationen $s$ter Klasse ist nur eine, welche die sämtlichen s ausgewählten Elemente ε_k, ε_l, $\varepsilon_m \ldots$ enthält, also kann $C.P$ in dieser Klasse nur einmal auftreten. — Unter den Combinationen $(s+1)$ter Klasse erscheint die vollzählige Summe der genannten s Elemente nur so oft, als die übrigen $(n-s)$ Elemente sich einzeln mit ihr vereinigen lassen, d. h. $(n-s)$ mal. Mithin erscheint auch das Produkt $C.P$ beim Ausmultiplizieren der Potenzen dieser Combinationen $(n-s)$ mal. — Unter den Combinationen $(s+2)$ter Klasse erscheint die Summe der gewählten Elemente so oft, als die übrigen $(n-s)$ Elemente sich, zu je zweien kombiniert, mit ihr vereinigen lassen, d. h. $\binom{n-s}{2}$ mal. Ebenso oft erscheint daher auch das Produkt $C.P$. Aus entsprechenden Gründen erhalten wir bei den Combinationen $(s+3)$ter Klasse dasselbe Produkt $\binom{n-s}{3}$ mal etc. Bei den Combinationen $n$ter Klasse erscheint es $\binom{n-s}{n-s} = 1$ mal. Wendet man daher den Satz (A) an, so ist ersichtlich, dass $C.P$ in beiden Summen genau gleich oft vorkommt.

Wir setzen nun zunächst $s=1$; dann ergiebt sich, dass alle Potenzen ε_1^p, $\varepsilon_2^p, \ldots \varepsilon_n^p$ beiderseits gleich oft vorhanden sind. Setzt man sodann $s=2$, so findet man das Gleiche von den Produkten: $\varepsilon_1^{p-1}.\varepsilon_2$, $\varepsilon_1^{p-2}.\varepsilon_2^2, \ldots \varepsilon_{n-1}.\varepsilon_n^{p-1}$. Und so kann fortgefahren werden bis $s=p$, d. h. bis zu den Produkten, welche p voneinander verschiedene Faktoren und demnach jeden von ihnen in der ersten Potenz enthalten; alle diese Produkte sind in beiden Summen gleich oft enthalten. Damit ist aber auch die Zahl der in den letzteren überhaupt vorhandenen Produkte vollständig erschöpft, und der in Rede stehende Satz ist bewiesen.—

$(D.)$ Lässt man $p=n$ werden, so gilt bezüglich all der Combinationen, bei denen $s<p$, also auch $s<n$ ist, genau dasselbe, wie vorhin, d. h. diejenigen Produkte, welche nicht sämtliche gegebenen Elemente von ε_1 bis ε_n in sich enthalten, kommen in jeder der beiden Summen gleich oft vor. Das Produkt $\varepsilon_1.\varepsilon_2.\varepsilon_3\ldots.\varepsilon_n$ hingegen erscheint nur bei den Combinationen $n$ter Klasse, und sein Coëffizient ist offenbar die Grösse $n!$ Weil aber nur eine Combination $n$ter Klasse überhaupt möglich ist, so ergiebt sich, dass diejenige Summe, welche die Combination $n$ter Klasse in sich enthält, die andere Summe genau um das Produkt $n!\,\varepsilon_1.\varepsilon_2.\varepsilon_3\ldots.\varepsilon_n$ übertrifft.

$(E.)$ Wird p grösser als n, so gilt wiederum für alle Produkte, bei denen die Anzahl der voneinander verschiedenen Faktoren kleiner als n ist, der unter (C) bewiesene Satz. Der Überschuss der einen Summe über die andere besteht also auch wieder nur in denjenigen Produkten, welche sämtliche Elemente ε_1 bis ε_n als Faktoren in sich enthalten. Diese Produkte haben im allgemeinen die Form: $\varepsilon_1^\lambda.\varepsilon_2^\mu.\varepsilon_3^\nu\ldots.\varepsilon_n^\omega$, wobei $\lambda+\mu+\nu+\cdots\omega=p$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und ausserdem $\lambda \gtreqless 1$; $\mu \gtreqless 1$; $\nu \gtreqless 1$; .... $\omega \gtreqless 1$ sein muss. Die Coëffizienten dieser Produkte heissen: $\frac{p!}{\lambda!\,\mu!\,\nu!\ldots.}$.

(*F.*) Wenn man von jeder der in (*B*) angegebenen Combinationen die p te geteilte oder ungeteilte, steigende oder fallende Faktorielle bildet und diese Faktoriellen dann ebenso vereinigt, wie in (*B*) die einfachen Combinationen vereinigt wurden, dann sind die beiden erhaltenen Summen wiederum identisch, falls $p < n$ ist. —

Der Beweis hierfür ergiebt sich aus (*C*). Wählen wir als Repräsentanten der in den bezeichneten Summen vorkommenden Combinationen irgend eine beliebige aus und bezeichnen sie mit Cb, so dürfen wir nach dem Satze (*C*), ohne die Identität der beiden Summen zu stören, die Grösse Cb in die 2te, 3te, 4te etc. bis $(n-1)$ te Potenz erheben, wenn wir nur mit allen Combinationen das Gleiche thun. Gilt der Satz aber für Cb und zugleich für $(Cb)^2$, so gilt er auch für $(Cb)^2 \pm Cb$, weil in dieser Zusammenfügung nur je zwei identische Grössen beiderseits durch Addition resp. Subtraktion miteinander verknüpft werden; also gilt er auch für $Cb\,(Cb \pm 1)$. Dividiert man sämtliche Glieder beider Summen durch 2, so wird sofort ersichtlich, dass der Satz auch für $\binom{Cb}{2}$ gilt. In ähnlicher Weise lässt sich leicht darthun, dass er allgemein für $\binom{Cb}{p}$ gilt, falls $p < n$ ist.

(*G.*) *a*) Bringt man die unter (*A*) bewiesene Gleichung auf Null, so ergiebt sich unmittelbar:

$$\sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{n}{p} = 0.$$

Ebenso ergiebt sich aus (*B*) der Satz:

b) Wenn man n gegebene Elemente durch Addition zu allen ohne Wiederholung möglichen Combinationen 1 ter bis n ter Klasse vereinigt und dann die Combinationen gerader Klassen mit einem Pluszeichen, die Combinationen ungerader Klassen mit einem Minuszeichen versieht oder auch umgekehrt, so ist das ganze Aggregat identisch gleich Null.

c) Aus (*C*) findet man den Satz, dass das eben bezeichnete Aggregat ebenfalls verschwindet, wenn man jede in demselben vorkommende Combination in die p te Potenz erhebt, falls $p < n$ ist.

d) Unter derselben Bedingung kann nach (*F*) von jeder Combination die p te geteilte oder ungeteilte steigende oder fallende Faktorielle gebildet werden, und das Aggregat wird ebenfalls verschwinden.

e) Dieses Aggregat erhält nach (*D*) den Wert $n!\,\varepsilon_1 . \varepsilon_2 . \varepsilon_3 \ldots . \varepsilon_n$, wenn $p = n$ ist, und man bei Verteilung der abwechselnden Zeichen $+ - \cdots$ mit den Combinationen der n ten Klasse beginnt.

f) Befolgt man diese Regel auch für $p > n$, so nimmt das Aggregat aller Potenzen der gebildeten Combinationen den Wert an:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\Sigma \frac{p!}{\lambda!\,\mu!\,\nu!\ldots\ldots}\,\varepsilon_1^{\lambda}\cdot\varepsilon_2^{\mu}\cdot\varepsilon_3^{\nu}\ldots\varepsilon_n^{\omega},$$

wobei $\lambda+\mu+\nu+\cdots\omega=p$; $\lambda\geqq 1$; $\mu\geqq 1$; $\nu\geqq 1$; .... $\omega\geqq 1$ ist.

Diese Summe ist der durch den sog. polynomischen Lehrsatz definierten Summe durchaus analog; sie unterscheidet sich von ihr einzig durch die Bedingungen $\lambda\geqq 1$ etc., welche bei letzterem $\lambda\geqq 0$ etc. heissen.

Man sieht übrigens leicht, dass, sobald die Bedingung $p>n$ fallen gelassen wird, der gegenwärtige Satz die beiden vorhergehenden c) und e) als Specialfälle in sich enthält. Denn wenn $p=n$ ist, so giebt es nur ein einziges Produkt, welches den gestellten Bedingungen entspricht, nämlich dasjenige, bei welchem $\lambda=\mu=\nu=\ldots\omega=1$ ist; alle anderen Produkte verschwinden also aus der Summe. Ist hingegen $p<n$, so verschwindet auch dieses noch und die Summe reduciert sich auf Null[1]). — —

Um aus der grossen Menge von Specialfällen, welche die unter (G) aufgeführten Sätze in sich schliessen, hier im Vorübergehn nur eine kleine Zahl herauszuheben, so setzen wir $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon_3=\ldots\varepsilon_n=1$. Dann fliesst aus ($G$), b sofort:

$$1\binom{n}{1}-2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}\cdots\cdot+(-1)^{n+1}n\binom{n}{n}=0,$$

und da es nichts verschlägt, auf der linken Seite noch $0.\binom{n}{0}$ beizufügen, so hat man nach Umkehrung aller Zeichen:

$$\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\binom{n}{p}p=0. \tag{2}$$

Dies ist aber nur ein einzelner Fall des aus (G), c entstehenden Satzes:

$$\binom{n}{1}1^k-\binom{n}{2}2^k+\binom{n}{3}3^k+\cdots(-1)^{n+1}\binom{n}{n}n^k=0,$$

wobei unter k eine positive ganze Zahl verstanden wird, die kleiner als n ist. Hieraus erhält man durch Beifügung von $\binom{n}{0}0^k$ und Umkehrung der Zeichen:

$$\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\binom{n}{p}p^k=0. \tag{3}$$

Da jedes Glied dieser Reihe den Faktor n enthält, so kann durch denselben dividiert werden; dann entsteht nach einer kleinen Umformung die Gleichung:

$$\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\binom{n}{p}(p+1)^k=0 \text{ für } k<n. \tag{4}$$

Der Satz (G), e liefert unmittelbar die Relation:

$$\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\binom{n}{p}(n-p)^n=n! \tag{5}$$

---

1) Dasselbe geschieht für $p \lesseqgtr n$ offenbar auch dann, wenn von den gegebenen Elementen eines oder mehrere gleich Null werden.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Auch diese lässt sich durch n dividieren, worauf man nach einer einfachen Substitution erhält:

(6)
$$\sum_{p=0}^{p=n}(-1)^p\binom{n}{p}(n+1-p)^n=n!$$

Wird der bisher betrachtete Specialfall $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots\varepsilon_n=1$ auf (G), d angewandt, so entsteht bei Benutzung geteilter fallender Faktoriellen die Gleichung:

$$\binom{n}{1}\binom{1}{k}-\binom{n}{2}\binom{2}{k}+\cdots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}\binom{n}{k}=0;\text{ für } k<n.$$

Da aber $\binom{1}{k}=\binom{2}{k}=\ldots.\binom{k-1}{k}=0$, so ist offenbar auch:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{k}-\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{k}+\cdots\cdots(-1)^{n+1}\binom{n}{n}\binom{n}{k}=0,$$

oder:

$$\binom{n}{k}\binom{k}{0}-\binom{n}{k+1}\binom{k+1}{1}+\cdots(-1)^{n+1}\binom{n}{n}\binom{n}{n-k}=0,$$

oder:

(7)
$$\sum_{p=0}^{p=n-k}(-1)^p\binom{n}{k+p}\binom{k+p}{p}=0;\ k<n.$$

Bei Benutzung geteilter steigender Faktoriellen ergiebt sich:

$$\binom{n}{1}\binom{k}{k}-\binom{n}{2}\binom{k+1}{k}+\cdots\cdots+(-1)^{n+1}\binom{n}{n}\binom{k+n-1}{k}=0,$$

oder:

(8)
$$\sum_{p=0}^{p=n-1}(-1)^p\binom{n}{p}\binom{k+p}{k}=\sum_{p=0}^{p=n-1}(-1)^p\binom{n}{p}\binom{k+p}{p}=0;\ k<n.$$

Bildet man bei n gegebenen Elementen von jeder Combination die $n$te geteilte fallende oder steigende Faktorielle und fügt diese Faktoriellen nach der unter (G), b angegebenen Weise zu einem Aggregat zusammen, so ist leicht ersichtlich, dass letzeres zufolge (F) und (G), e den Wert $\varepsilon_1 . \varepsilon_2 . \varepsilon_3 \ldots . \varepsilon_n$ bekommen muss. Für diese komplicierten Aggregate gelten also all jene einfachen Gesetze, welche für gewöhnliche Produkte gültig sind, z. B. dass sie verschwinden, wenn ein beliebiges Element gleich Null gesetzt wird, dass sie sich nicht verändern, wenn man ein beliebiges Element durch die Zahl x dividiert und zugleich ein anderes beliebiges mit x multipliziert; dass sie den $x$fachen Wert annehmen, wenn man ein beliebiges Element mit x multipliziert; dass sie mit x potenziert und radiziert werden können, indem man jedes einzelne Element mit x potenziert resp. radiziert etc.

Werden ungeteilte Faktoriellen gebildet, so bleiben bezüglich des Multiplizierens und Dividierens dieselben Gesetze gültig; bezüglich des Potenzierens und Radizierens aber ist eine kleine Veränderung vorzunehmen, weil das ganze Aggregat in diesem Falle den Wert $n!\,\varepsilon_1 . \varepsilon_2 . \varepsilon_3 \ldots . \varepsilon_n$ annimmt.

Will man nun den Spezialfall: $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\cdots\varepsilon_n=1$ auch auf die $n$ten geteilten fal-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

lenden Faktoriellen anwenden, so entsteht kein bemerkenswertes Resultat, bei geteilten steigenden aber erhält man den Satz:

(9) $$\sum_{p=0}^{p=n-1} (-1)^p \binom{n}{p}\binom{2n-p-1}{n} = 1.$$

Es steht jedoch nichts im Wege, auch $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots \varepsilon_n = z$ zu setzen, wobei z eine beliebige reelle oder komplexe Grösse bedeutet, dann findet sich bei fallenden Faktoriellen die Relation:

$$\binom{n}{0}\binom{nz}{n} - \binom{n}{1}\binom{(n-1)z}{n} + \binom{n}{n-2}\binom{(n-2)z}{n} - \cdots + (-1)^n \binom{n}{n-1}\binom{z}{n} = z^n,$$

wofür unter Beifügung des irrelevanten Gliedes $\binom{n}{n}\binom{0 \,.\, z}{n}$ auch geschrieben werden kann:

(10) $$\sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{n}{p}\binom{(n-p)z}{n} = z^n.$$

Wird hier an Stelle von z irgend eine unter den $n$ten Wurzeln der Einheit eingesetzt, so entsteht:

(11) $$\sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{n}{p}\binom{(n-p)e^{\frac{2s\pi}{n}i}}{n} = 1.$$

In gleicher Weise hätte auch bei derjenigen Betrachtung, welche zu der Relation (7) führte, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \cdots \varepsilon_n = z$ gesetzt werden können, und es würde sich ergeben haben:

(12) $$\sum_{p=0}^{p=n} (-1)^p \binom{n}{p}\binom{p \,.\, z}{k} = 0;\ k < n.$$

Die unter $(G), d$ und $(G), e$ aufgeführten Sätze lassen übrigens noch eine sehr wesentliche Erweiterung zu. Bezeichnet man nämlich ein nach Anleitung von $(G), b$ gebildetes Aggregat von Combinationen der Elemente $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n$ zur Abkürzung mit dem Symbol $Ag\,[\pm\, Cb_n]$ und mit $z_1,\ z_2 \ldots z_n$ beliebige reelle oder komplexe Grössen, so ist stets:

(13) $$Ag\,[\pm(Cb_n + z_1)(Cb_n + z_2)(Cb_n + z_3)\ldots(Cb_n + z_p)] = (-1)^{n+1} z_1 \,.\, z_2 \ldots z_p;\ \text{für } p < n.$$

Wenn also eine oder mehrere von den Grössen z_1 bis z_p verschwinden, so verschwindet das ganze Aggregat.

Ferner ist stets:

(14) $$Ag[\pm(Cb_n + z_1)(Cb_n + z_2)\ldots(Cb_n + z_n)] = n!\,\varepsilon_1 \,.\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n + (-1)^{n+1} z_1 \,.\, z_2 \ldots z_n.$$

Der Beweis dieser Sätze ist leicht zu finden. Aus (14) folgt für $z_n = 0$:

(15) $$Ag\,[\pm\, Cb_n\,(Cb_n + z_1)(Cb_n + z_2)\ldots\ldots(Cb_n + z_{n-1})] = n!\,\varepsilon_1 \,.\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n.$$

Da nichts im Wege steht, beliebig viele unter den Grössen z_1 bis z_n mit irgend welchen Elementen ε_1 bis ε_n oder mit einem positiven oder negativen Multiplum derselben zu identifizieren, so geben die letzten drei Sätze Mittel an die Hand, um auch in die Combinationen selbst mannigfachen Zeichenwechsel hineinzubringen und eröffnen damit die Aussicht auf eine neue Gruppe von Relationen. Weil aber hier der Raum fehlt, um die Reihe der bisher schon entwickelten — von denen übrigens manche auf mehr oder

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

weniger umständliche Weise bereits abgeleitet worden sind — noch mehr zu verlängern, so müssen wir es bei dieser Andeutung bewenden lassen und wollen nunmehr dazu übergehen, den Connex der gewonnenen Resultate mit der Funktion $\vartheta_3(0, q)$ und deren Differentialquotienten darzulegen.

VII.

Anwendung der entwickelten Sätze auf die Funktion $\vartheta_3(0, q)$ und deren Differentialquotienten.

Nachdem von dem Satze (A) des vorigen Abschnitts ausdrücklich festgestellt worden, dass er bei beliebig wachsendem n stets richtig bleibt, muss nunmehr auch bezüglich der Sätze (B) bis (F) untersucht werden, ob unbeschadet ihrer Gültigkeit den darin vorkommenden Elementen ε_1 bis ε_n ebenfalls ein unbegrenztes Wachsen gestattet werden kann. — Dies ist in der That zulässig, denn wenn zwei Summen zwar auf verschiedene Weise gebildet worden sind, aber dennoch genau dieselben Summanden und zwar jeden von ihnen auch genau gleich oft enthalten, so sind und bleiben diese Summen zweifellos vollkommen identisch, mögen jene Summanden Werte annehmen, welche sie irgend wollen, mögen sie beliebig ab- oder zunehmen, mögen sie reell bleiben oder komplex werden.

Daraus folgt, dass in allen Fällen, wo die Summanden der einen Summe mit Pluszeichen, die der anderen mit Minuszeichen in der Rechnung auftreten, das Resultat stets gleich Null sein muss, unabhängig von dem Werte der auftretenden Elemente. Für die folgenden Entwickelungen genügt es übrigens, die Grössen ε_1 bis ε_n als Repräsentanten positiver ganzer Zahlen zu betrachten.

Fassen wir nach dieser Vorbemerkung das Produkt:

(1) $$(1-z^{\varepsilon_1})(1-z^{\varepsilon_2})(1-z^{\varepsilon_3})\ldots\ldots(1-z^{\varepsilon_n}) = \Pi(z, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n)$$

ins Auge, wobei z eine komplexe variable Grösse bedeuten soll, und denken uns auf der linken Seite die Klammern ausmultipliziert, so kommt:

(2) $$\begin{aligned}\Pi(z, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n) = 1 &- z^{\varepsilon_1} - z^{\varepsilon_2} - z^{\varepsilon_3} \ldots\ldots - z^{\varepsilon_n} + z^{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + z^{\varepsilon_1+\varepsilon_3} + \ldots\ldots z^{\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n} \\ &- z^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3} - z^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_4} - \ldots\ldots z^{\varepsilon_{n-2}+\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n} + \ldots\ldots - \ldots\ldots \\ &+ (-1)^n z^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\ldots\ldots\varepsilon_n}.\end{aligned}$$

Für $z = 1$ wird daraus:

$$\Pi(1, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n) = 1 - n + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + - \cdots\cdots (-1)^n \binom{n}{n} = 0.$$

Wir differentiieren nun die Gleichung (2) nach z und erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}\Pi(z, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n) = &- \varepsilon_1 z^{\varepsilon_1-1} - \varepsilon_2 z^{\varepsilon_2-1} - \ldots\ldots - \varepsilon_n z^{\varepsilon_n-1} + (\varepsilon_1+\varepsilon_2) z^{\varepsilon_1+\varepsilon_2-1} + (\varepsilon_1+\varepsilon_3) z^{\varepsilon_1+\varepsilon_3-1} + \ldots\ldots \\ &+ (\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n) z^{\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n-1} - (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) z^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-1} - \ldots\ldots - (\varepsilon_{n-2}+\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n) z^{\varepsilon_{n-2}+\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n-1} \\ &+ \cdots\cdots - \cdots\cdots + (-1)^n (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\varepsilon_n) z^{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\ldots\ldots\varepsilon_n-1},\end{aligned}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

also für $z=1$:

$$\frac{d}{dz}\Pi(1,\ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots . \varepsilon_n) = -(\varepsilon_1)-(\varepsilon_2)-(\varepsilon_3) \ldots . -(\varepsilon_n)+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+(\varepsilon_1+\varepsilon_3)+\cdots+(\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n)$$
$$(3) \qquad -(\varepsilon_1+\vartheta_2+\varepsilon_3)-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_4)-\cdots-(\varepsilon_{n-2}+\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n)$$
$$+\cdots-\cdots+(-1)^n(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots\varepsilon_n).$$

Man sieht, dass auf der rechten Seite alle ohne Wiederholung möglichen Combinationen erster bis n ter Klasse vorhanden sind, und zwar bei geraden Klassen mit Plus-, bei ungeraden mit Minuszeichen versehn. Folglich ist nach dem Satze (B) des vorigen Abschnitts:

$$\frac{d}{dz}\Pi(z,\ \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n) = 0 \text{ für } z=1.$$

Differentiieren wir weiter nach z und setzen in dem Resultat $z=1$, so entstehen die Gleichungen:

$$\frac{d^2}{dz^2}\Pi(1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n) = -\varepsilon_1(\varepsilon_1-1)-\varepsilon_2(\varepsilon_2-1)-\varepsilon_3(\varepsilon_3-1)\cdots-\varepsilon_n(\varepsilon_n-1)+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2-1)$$
$$+(\varepsilon_1+\varepsilon_3)(\varepsilon_1+\varepsilon_3-1)+\cdots+(\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n)(\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n-1)-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-1)$$
$$-\cdots-(\varepsilon_{n-2}+\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n)(\varepsilon_{n-2}+\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n-1)+\cdots-\cdots$$
$$+(-1)^n(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots\varepsilon_n)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3+\cdots\varepsilon_n-1),$$

$$\frac{d^3}{dz^3}\Pi(1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n) = -\varepsilon_1(\varepsilon_1-1)(\varepsilon_1-2)-\varepsilon_2(\varepsilon_2-1)(\varepsilon_2-2)-\varepsilon_3(\varepsilon_3-1)(\varepsilon_3-2)\cdots-\varepsilon_n(\varepsilon_n-1)(\varepsilon_n-2)$$
$$+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(\varepsilon_1+\varepsilon_2-1)(\varepsilon_1+\varepsilon_2-2)+\cdot\cdot+(\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n)(\varepsilon_{n-1}+\nu_n-1)(\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n-2)$$
$$-(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-1)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-2)-\cdots-(\varepsilon_{n-2}+\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n)(\varepsilon_{n-2}+\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n-1)(\varepsilon_{n-2}+\varepsilon_{n-1}+\varepsilon_n-2)$$
$$+\cdots-\cdots+(-1)^n(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\varepsilon_n)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\varepsilon_n-1)(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\cdots\varepsilon_n-2),$$

und so weiter. Fährt man auf diese Weise fort, so entstehn auf der rechten Seite die aufeinander folgenden ungeteilten fallenden Faktoriellen derselben Combinationen, welche schon in Gleichung (3) aufgetreten sind, und zwar mit demselben Zeichenwechsel. Daher folgt aus dem Satze (F) des vorigen Abschnitts unmittelbar, dass diese Aggregate sämtlich verschwinden müssen, so lange die Anzahl der in den Faktoriellen enthaltenen Faktoren kleiner bleibt, als die Anzahl der Elemente ε_1 bis ε_n. Demnach ist allgemein:

$$(4) \qquad \frac{d^k}{dz^k}\Pi(1,\ \varepsilon_1,\ \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_n) = 0 \text{ für } k < n.$$

Lässt man daher die Zahl n beliebig anwachsen, so wächst zugleich der Spielraum für k ohne Ende weiter. —

Wir gehn nun dazu über, den Grössen ε_1 bis ε_n bestimmte Werte beizulegen, sind aber hierin offenbar weder an irgend eine Reihenfolge, noch an irgend eine obere oder untere Grenze gebunden. Es sei:

$$\Pi(z) = (1-z)(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^3)\ldots\ldots(1-z^{2n-1})(1-z^{2n-1})(1-z^{2n}),$$

wobei n ohne Ende wachsend gedacht wird; dann ist, wie leicht nachzuweisen, das Produkt konvergent für jeden Wert von z, dessen analytischer Modulus kleiner als die Ein-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

heit ist. Für $z = +1$ aber wird das Produkt augenscheinlich zu Null, aber nicht nur das Produkt selbst, sondern nach (4) auch der erste, zweite, und alle folgenden beliebig hohen Differentialquotienten desselben.

Nun darf man aber offenbar, ohne die Gültigkeit dieses Satzes anzutasten, die Reihenfolge der Exponenten oder, was dasselbe bedeutet, die für ε_1 bis ε_n substituierten Werte auch so wählen, dass man hat:

$$\Pi(z) = (1-z)(1-z^3)(1-z^5)\ldots\ldots(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)\ldots\ldots,$$

und dieser Ausdruck ist identisch gleich dem folgenden:

$$\Pi(z) = \frac{1-z}{1}\cdot\frac{1-z^3}{1}\cdot\frac{1-z^5}{1}\cdots\frac{1-z^2}{1+z}\cdot\frac{1-z^4}{1+z^2}\cdot\frac{1-z^6}{1+z^3}\cdot\frac{1-z^8}{1+z^4}\cdots$$

Demnach erscheinen jetzt im Zähler als Exponenten von z alle positiven ganzen Zahlen ohne Lücke nnd ohne Wiederholung, und im Nenner ist das Gleiche der Fall, weshalb man schreiben kann:

$$\Pi(z) = \frac{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)\ldots.}{(1+z)(1+z^2)(1+z^3)(1+z^4)\ldots.}.$$

Von hier aus ist der Schritt zur Funktion $\vartheta_3(0, q)$ sehr einfach. Denn führt man eine neue Variable q ein durch die Gleichung $q = -z$, so ist:

$$\Pi(z) = \Pi(-q) = \frac{1+q}{1-q}\cdot\frac{1-q^2}{1+q^2}\cdot\frac{1+q^3}{1-q^3}\cdot\frac{1-q^4}{1+q^4}\cdots = \vartheta_3(0, q).$$

Mithin folgt aus dem Satze (4) unmittelbar, dass für $z = 1$, oder was dasselbe besagt, für $q = -1$ jeder beliebig hohe, nach q genommene Differentialquotient der Funktion $\vartheta_3(0, q)$ verschwindet.

Mit diesem Resultat ist zugleich die Grundlage gewonnen, auf welcher den am Schlusse des Abschnittes V entwickelten Gründen zufolge der Satz aufgebaut werden kann, dass für jeden endlichen, positiven, ganzzahligen Wert von p die Funktion:

$$\tau(p, x) = \sum_{n=p}^{n=\infty}\left\{\prod_{\lambda=0}^{\lambda=p-1}\frac{n^2-\lambda^2}{p^2-\lambda^2}\,x^{n^2-p^2}\right\}$$

gegen die Null konvergiert, wenn x an die negative Einheit heranrückt.

heit ist. Für $z = +1$ aber wir ull, aber nicht nur das
Produkt selbst, sondern nach (lgenden beliebig hohen
Differentialquotienten desselben

Nun darf man aber off Satzes anzutasten, die
Reihenfolge der Exponenten o ε_1 bis ε_n substituierten
Werte auch so wählen, dass m

$$\Pi(z) = (1-z)(1- \quad -z^4) \ldots\ldots,$$

und dieser Ausdruck ist identis

$$\Pi(z) = \frac{1-z}{1} \cdot \ldots$$

Demnach erscheinen jetzt im Z sitiven ganzen Zahlen
ohne Lücke nnd ohne Wiederh che der Fall, weshalb
man schreiben kann:

$$\Pi(z) =$$

Von hier aus ist der Sc ach. Denn führt man
eine neue Variable q ein durch

$$\Pi(z) = \Pi(- \quad (0, q).$$

Mithin folgt aus dem S 1, oder was dasselbe
besagt, für $q = -1$ jeder beliebig lquotient der Funktion
$\vartheta_3(0, q)$ verschwindet.

Mit diesem Resultat ist auf welcher den am
Schlusse des Abschnittes V entw ufgebaut werden kann,
dass für jeden endlichen, positi Funktion:

gegen die Null konvergiert, we ückt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf