I. Teil.

Statische Entwicklung des Brückenbaues.

§ 1. Der wagrechte Balken.

Ein wagrechter, regelmässiger Balken AB (Fig. 5) von $l=4$ m Länge und $G=50$ kg Eigengewicht sei durch die Gewichte 72 kg, 120 kg und 158 kg in Punkten belastet, die 1 m, 2,5 m und 3 m von A entfernt sind.

Wenn nun der Balken in den Endpunkten A und B unterstützt wird, wie gross ist dann die Kraft, mit der er auf die Unterstützungs-Punkte drückt?

Berechnung: X und Y seien die Kräfte, die von den Unterstützungs-Punkten geleistet werden müssen, damit Gleichgewicht herrscht. Dann muss:

1. die Summe aller positiven und negativen Kräfte gleich Null sein. Positiv sind X und Y; negativ 72, 120, 158 und das Gewicht des Balkens 50. Daher ist

$$X+Y-72-120-158-50=0; \quad \text{oder} \quad X+Y=400 \text{ kg},$$

2. die Summe aller statischen Momente in Bezug auf einen beliebigen Punkt gleich Null sein.

Nehmen wir dann A zum Drehpunkte, so sucht Y am Hebelarm 4 positiv, dagegen 72, 120, 158 sowie 50 an den Hebelarmen 1, 2,5, 3 und 2 negativ zu drehen. Daher ist dann

$$Y.4-72.1-120.2{,}5-158.3-50.2=0, \quad \text{woraus} \quad Y=236{,}5 \text{ kg}.$$

Ebenso wenn B Drehpunkt ist, haben wir

$$-X.4+72.3+120.1{,}5+158.1+50.2=0 \quad \text{und hieraus} \quad X=163{,}5 \text{ kg}.$$

*) Die zu diesem Teile gehörenden Figuren finden sich, soweit sie nicht dem Texte eingefügt sind, auf den am Schlusse der Abhandlung angehefteten Blättern.

Die durch beide Gleichgewichts-Bedingungen gewonnenen Gleichungen $X+Y=400$ kg und $X=163{,}5$ kg $Y=236{,}5$ kg stimmen mit einander überein. Die Unterstützungspunkte in A und B müssen mithin einem Drucke von 163,5 bezw. 236,5 kg widerstehen, wenn Gleichgewicht herrschen soll.

§ 2. Der schräge Balken, das Spreng- und Hängewerk.

Werden zwei gleichartige Balken mit den Köpfen so zusammengeneigt, dass durch die Verbindung der Fusspunkte ein vertikal gestelltes gleichschenkliges Dreieck A_1BA_2 entsteht, so ist klar, dass die Unterlage in A_1 und A_2 jedesmal das Gewicht G eines Balkens zu tragen hat und dass jede Unterlage also eine aufwärtsgerichtete Kraft G an jedem Punkte A_1 bezw. A_2 entwickeln muss, wenn die Balken nicht einsinken sollen. An diesem Gleichgewichts-Zustande wird auch in Bezug auf A_1B nichts geändert, wenn wir BA_2 wegnehmen und statt seiner eine senkrechte glatte Wand zur Stütze von A_1B anbringen, wie Fig. 6 es zeigt. Dann drückt B durch die Schwere des Balkens in wagrechter Richtung gegen die Wand, und diese antwortet mit der gleichen, aber entgegengesetzten Kraft. Nennen wir die letztere H und betrachten A_1 als Drehpunkt, so wirkt positiv drehend H am Hebelarm A_1D, negativ drehend G, welches, im Mittelpunkte von A_1B angreifend, den Hebelarm A_1F besitzt. Die Summe beider statischen Momente ist dann $H.A_1D-G.A_1F=0$, woraus

$H = G\frac{A_1 F}{A_1 D}$. Da aber $A_1 D = CB = A_1 B \sin\alpha$ und $A_1 F = \frac{1}{2} A_1 B \cos\alpha$ ist, so ist $H = G . \frac{\frac{1}{2} A_1 B \cos\alpha}{A_1 B \sin\alpha}$ $= \frac{1}{2} G \operatorname{ctg}\alpha$. Entferne ich jetzt auch noch die Wand, so kann ich ihre Wirksamkeit ersetzen durch die wagrechte Kraft $H = \frac{1}{2} G \operatorname{ctg}\alpha$, ohne dass dadurch eine Gleichgewichts-Störung auftritt. Nun verlangt aber die zweite Bedingung des Gleichgewichts, dass die Summe der in einer Richtung wirkenden Kräfte gleich Null sei. Es wirkt aber im vertikalen Sinne das Gewicht des Balkens mit $-G$ und der Druck des Unterstützungs-Punktes A_1 mit $+G$. Beide geben zusammen Null und daher findet im vertikalen Sinne keine Verschiebung statt. Damit auch im horizontalen Sinne keine solche stattfindet, muss der in B wirkenden Kraft $-H$ irgendwo eine Horizontalkraft $+H$ entgegenwirken, um die Summe der Horizontal- oder Schubkräfte gleich Null zu machen. Aus der Praxis weiss auch jeder, dass ein schräger Balken BA_1 auf der Unterlage ausgleiten würde, wenn die Reibung oder irgend eine Vorkehrung ihn nicht daran hinderte. Mithin muss der in B wirkenden Schubkraft $-H = -\frac{G}{2} \operatorname{ctg}\alpha$ in A_1 eine Schubkraft $+H = +\frac{G}{2} \operatorname{ctg}\alpha$ entgegenwirken. Der Unterstützungspunkt A_1 hat also zwei Kräfte, nämlich $+G$ nach oben und $+\frac{G}{2} \operatorname{ctg}\alpha$ nach rechts wirkend zu leisten, weil der Balken mit den Kräften $-G$ und $-\frac{G}{2} \operatorname{ctg}\alpha$ auf ihn wirkt. Bilden wir die Resultante $R = \sqrt{G^2 + \left(\frac{G}{2} \operatorname{ctg}\alpha\right)^2}$ $= \frac{G}{2}\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$, so wirken in A_1 Balken und Unterstützungspunkt mit den Kräften $\pm R$ einander entgegen.

Dasselbe, was wir hier von A_1 gesagt haben, gilt entsprechend von A_2, nur dass hier die vom Balken ausgeübte Schubkraft gleich $+\frac{G}{2} \operatorname{ctg}\alpha$ ist. Die Vertikalkräfte G in A_1 und in A_2 muss der Unterstützungspunkt jedesmal tragen, die Schubkräfte $\pm\frac{G}{2} \operatorname{ctg}\alpha$ können aber auf verschiedene Weise unschädlich gemacht werden. Ist α gross, und damit $\operatorname{ctg}\alpha$ und H klein, so kann unter Umständen die Reibung am Boden genügen. Ist H aber zu gross hierfür, so können wir die Schubkraft durch besondere Stützpunkte oder Widerlager beseitigen; die Konstruktion heisst dann ein Sprengwerk. Wir können aber auch die nach aussen gerichteten Schubkräfte beider Balken sich gegenseitig aufheben lassen, indem wir A_1 und A_2 oder zwei andere Punkte der schrägen Balken durch ein Seil, eine Stange oder einen Balken mit einander verbinden. Diese Verbindung nennt man einen Unterzug, und die ganze aus den beiden Streben (Schrägbalken) und dem Unterzuge bestehende Konstruktion bezeichnet man als Hängewerk. Derartige Hängewerke kann man in mehr oder weniger komplicierter Gestalt als Dachstuhl bei Satteldächern beobachten, bei denen der Schub der (schrägen) Streben durch den Unterzug beseitigt werden muss, wenn nicht die Mauern des Gebäudes nach aussen weichen sollen. Bekannte Beispiele bieten auch die Dachkonstruktionen der Bonner Schwimmanstalten, sowie der Spielhalle unseres Schulhofes, von denen Fig. 7a u. b schematische Ansichten bieten. Die uns hier interessierende Verwendung des Hängewerkes aber liegt im Brückenbau.

§ 3. Das Hängewerk als Brückenträger.

Jede Brücke besteht im allgemeinen aus dem Unterbau (Pfeiler, Widerlager) und dem Überbau. Letzterer setzt sich abgesehen von den einfachsten Fällen zusammen aus den Brückenträgern und der Brückenbahn nebst Zubehör (Geländer etc.). Ist die zu überbrückende Weite d. h. die Spannung gering, so können als Brückenträger zwei oder mehrere neben einander gelagerte parallele Balken oder eiserne I-Träger dienen, deren Köpfe in entsprechend starken Lagern auf beiden Ufern ruhen; auf den Balken liegen dann die Bohlen oder Bretter der Brückenbahn. Wird aber die Spannung zu gross für einen Balken und will man zugleich den Horizontalschub vermeiden, so kann man sich zweier oder mehrerer Hängewerke als Brückenträger bedienen, wie Fig. 8a es zeigt. Der aus einem langen oder aus zwei in C zusammenstossenden Balken*) bestehende Unterzug $A_1 A_2$ dient hier zugleich als Auflager der Brückenbahn (Streckbaum). Die Verbindung von C und B heisst Hängesäule; sie unterstützt den Punkt C und überträgt den in C herrschenden Druck nach B und mit Hülfe der Streben BA_1 und BA_2 nach A_1 und A_2 auf das dort als Auflager dienende Mauerwerk. Stützt sich nun die ganze Brücke gleichmässig auf vier Punkte A_1, A^1_1, A_2 und A^1_2, so ist von vorneherein klar, dass A_1 und A_2 zusammen die halbe Last der Brückenbahn und der beiden Brückenträger zu übernehmen haben. Dieser Umstand soll später als Probe auf die Rechnung dienen, die wir hier folgen lassen wollen.

Berechnung: Hat jede Strebe (AB) das Gewicht g_1, so verursacht sie, wie wir soeben (§ 2) gesehen, in A_1 und A_2 die Druckkraft g_1 und die Schubkraft $\frac{g_1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. Denken wir uns ferner das Gewicht der Brückenbahn nebst den Unterzügen gleichmässig auf die Brückenlänge verteilt und bezeichnen es mit $4p$, so entfällt auf A_1C hiervon $1p$ und dieses p können wir im Schwerpunkte (Mittelpunkte) S_1 von A_1C angreifen lassen (Fig. 8b). Nehmen wir nun an, dass die Unterzugbalken unter einander und mit der Hängesäule drehbar verbunden seien, so können wir das statische Moment $p \cdot \frac{A_1 C}{2}$ ersetzen durch $\frac{p}{2} \cdot A_1 C$ d. h. an Stelle der in S_1 angreifenden Kraft p können wir in C die Kraft $\frac{p}{2}$ angreifen lassen, ohne dass das statische Moment geändert wird. Mithin trägt dann C die Hälfte von p, die andere Hälfte muss natürlich von A_1 getragen werden.

Ein Gleiches gilt von A_2C, auch hier trägt C und A_2 jedesmal wieder $\frac{p}{2}$ von dem in S_2 angreifenden Gewicht p. Mithin tragen jetzt A_1 und A_2 vom Gewichte der Brückenbahn je $\frac{p}{2}$, C dagegen $\frac{p}{2}+\frac{p}{2}=p$. Aufgabe des Hängewerkes ist es jetzt, dieses p von C aus nach A_1 und A_2 zu übertragen. Der Gang hierbei ist folgender: Statt in C können wir p in B angreifen lassen (Phys. Einl. B. 2a) und das Gewicht der Hängesäule g_2 noch hinzufügen; dann greift in B jetzt $p+g_2$ an, und diese Kraft zerlegen wir durch das Kräfteparallelogramm in zwei in Richtung der Streben wirkende Kraftkomponenten $BE_1=BE_2=z$. Zur Berechnung von z ziehen wir E_1E_2 parallel A_1A_2 und halbieren dadurch $p+g_2$. Dann ist $\sin\alpha=\frac{\frac{p+g_2}{2}}{z}$; $z=\frac{p+g_2}{2\sin\alpha}$. Diese Kraftkomponenten versetzen wir nach A_1 bez. A_2 und zerlegen sie dort wieder in Druck- und Schubkraft durch das Kräfte-Parallelogramm oder besser Kräfte-Rechteck. Da der von z und der Schubkraft eingeschlossene Winkel wieder gleich α ist, so ist $\sin\alpha=\frac{v}{z}$; $\cos\alpha=\frac{h}{z}$, worin v und h die Druck- und die Schubkraft bezeichnen. Dann ist also $v=z\sin\alpha=\frac{p+g_2}{2\sin\alpha}\sin\alpha=\frac{p+g_2}{2}$; $h=z\cos\alpha=\frac{p+g_2}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. Nun hatten wir aber schon in A_1 und A_2 von der Brückenbahn her den Druck $\frac{p}{2}$ und von den Streben den Druck g_1

*) Unter Balken sind hier und im Folgenden neben Holzbalken auch eiserne Träger zu verstehen.

und den Schub $\frac{g_1}{2}$ctg α. Mithin beträgt jetzt der ganze Druck und Schub in A_1 (bezw. A_2) $V=g_1+\frac{p}{2}+\frac{p+g_2}{2}=g_1+p+\frac{g_2}{2}$; $H=\frac{g_1}{2}\operatorname{ctg}\alpha+\frac{p+g_2}{2}\operatorname{ctg}\alpha$ $H=\frac{g_1+g_2+p}{2}\operatorname{ctg}\alpha$. Da jedes Brückenende zwei Auflagepunkte A_1 und A^1_1 bezw. A_2 und A^1_2 besitzt, so ist der Druck an jedem Ende $2V=2g_1+2p+g_2$ und der Schub $2H=(g_1+g_2+p)\operatorname{ctg}\alpha$, und der Druck der ganzen Brücke auf beide Enden beträgt $4V=4g_1+2g_2+4p$, worin $4g_1+2g_2$ das Gewicht der 4 Streben und 2 Hängesäulen, $4p$ das Gewicht der Brückenbahn nebst den beiden Unterzügen bezeichnet. Die Schubkräfte an beiden Ufern wirken einander entgegen, sie werden von den Unterzügen aufgenommen und entziehen sich, wenn die Verbindung in C stark genug ist, unserer weiteren Beobachtung.

Ist die zu überwindende Spannweite noch zu gross, um die Verwendung nur zweier Balken im Unterzuge zu gestatten, so kann man, wie Fig. 9 schematisch zeigt, mit Hülfe des Spannriegels B_1B_2 zwei Hängesäulen und 3 Balken im Unterzuge verwenden. Möge die gleichmässig verteilte Belastung einer jeden Strecke A_1C_1, C_1C_2, C_2A_2 mit p bezeichnet werden, so können wir das p jedesmal im Mittelpunkte der Strecken angreifen lassen, und dann verteilt es sich wieder genau wie vorher so, dass A_1 und A_2 je $\frac{p}{2}$, C_1 und C_2 dagegen je p tragen. [Vom Gewichte der Hängesäulen, Spannriegel und Streben sehen wir dieses Mal ab.] Dann können wir die nach B_1 bezw. B_2 versetzten Kräfte p nach Strebe und Spannriegel durch das Kräfte-Parallelogramm in z und h zerlegen, wobei $\sin\alpha=\frac{p}{z}$ und $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{h}{p}$ und hieraus $z=\frac{p}{\sin\alpha}$; $h=p\operatorname{ctg}\alpha$ ist. Die beiden Kräfte h wirken einander im Spannriegel entgegen und heben sich gegenseitig auf. Die Kräfte z versetzen wir nach A_1 bezw. A_2 und zerlegen sie dort in Druck- und Schub-Kräfte $v=z\sin\alpha=\frac{p}{\sin\alpha}\sin\alpha=p$, $h_1=z\cos\alpha=\frac{p}{\sin\alpha}\cos\alpha=p\operatorname{ctg}\alpha$. Diese Schubkräfte h_1 heben sich auch hier auf, da sie im Unterzuge einander entgegen wirken. Die im Spannriegel und im Unterzuge wirkenden Kräfte h und h_1 sind einander gleich, aber während die im Spannriegel wirkenden einander entgegenstreben und den Spannriegel zu zerbrechen suchen, ist hier im Unterzuge ihr Bestreben, die Balken auseinander zu reissen. Daher sagt man, der Spannriegel, den wir weiterhin als Obergurt bezeichnen wollen, ist auf Druck, der Unterzug oder Untergurt auf Zug beansprucht. Da man bei Brückenbauten meist auch ungleichmässige Belastungen zu berücksichtigen hat, so beugt man einer gefahrdrohenden Verschiebung des Spannriegels und der Streben dadurch vor, dass man die Diagonalen B_1C_2 und B_2C_1 einfügt. Unser Hängewerk, welches von seiner Gestalt den Namen Trapez-Hängewerk bekommen hat, heisst dann versteift.

Bei noch grösseren Spannweiten kann man unter Vermehrung der Hängesäulen und Spannriegel auch noch ein einzelnes Hängewerk verwenden, jedoch nimmt man dann lieber noch ein zweites zur Unterstützung, wie Fig. 10 es schematisch zeigt. Tragen wieder die Punkte A je $\frac{p}{2}$ und die Punkte C je p, so muss, wie durch die Figur nach dem Vorigen leicht verständlich, am Schlusse der Rechnung jedes A wieder als Druck $2\frac{1}{2}\,p$ und als Schub $H=p\operatorname{ctg}\alpha_1+p\operatorname{ctg}\alpha_2=p(\operatorname{ctg}\alpha_1+\operatorname{ctg}\alpha_2)=p\left(\frac{AC_1}{B_1C_1}+\frac{A\,C_2}{B_2C_2}\right)=p\,\frac{3\,A\,C_1}{B_1\,C_1}=3\,p\operatorname{ctg}\alpha_1$ erhalten. Dieses H wirkt als Spannung oder Zug im Untergurt. Im Obergurt (Spannriegel) dagegen wirkt von B_1 aus zur Mitte hin $h_1=p\operatorname{ctg}\alpha_1$ und ausserdem noch von B_2 aus $h_2=p\operatorname{ctg}\alpha_2$. Mithin wirkt im Mittelfeld des Obergurtes der Druck $h_1 + h_2 = p\,(\mathrm{ctg}\,\alpha_1 + \mathrm{ctg}\,\alpha_2) = 3\,p\ \mathrm{ctg}\,\alpha_1$ (wie vorher), da die Aussenfelder des Obergurtes ihren Druck auf das Mittelfeld übertragen.

Auch hier muss man durch entsprechende Verbindungen und Diagonalen das Hängewerk gegen einseitigen Druck versteifen, wenn die Konstruktion genügende Sicherheit gewähren soll.

Betrachten wir den Weg, den wir bisher gegangen, so sehen wir, dass an die Stelle des für geringe Spannungen ausreichenden Holzbalkens oder vollwandigen eisernen I-Trägers das einfache und weiterhin das doppelte Hängewerk getreten ist. Das Hängewerk ist also ein Ersatz des natürlichen Balkens und könnte in dieser Beziehung als ein Kunstbalken oder besser noch als ein aus Ober- und Untergurt und dem Steg bestehender Träger bezeichnet werden, der den bekannten eisernen I-Trägern nachgebildet ist, nur mit dem Unterschiede, dass der beim I-Träger vollwandige Steg hier durch senkrechte und schräge Stäbe (Hängesäulen, Streben oder Diagonalen) ersetzt ist. Da wir die Höhe des Steges beliebig bestimmen können, die Tragfähigkeit aber (siehe physik. Einl. 8) mit dem Quadrate der Höhe wächst, so ist klar, dass die Hängewerke bei geringem Eigengewicht eine verhältnismässig hohe Tragfähigkeit besitzen. Aber auch sie leiden an dem Uebelstand, dass bei grösseren Spannweiten die Länge und damit das Gewicht der Streben ($A\,B_2$) schliesslich zu gross wird, um eine vorteilhafte Verwendung des Hängewerkes zuzulassen. Dieses wird vermieden, wenn wir die Strebe von B_2 aus nicht nach A, sondern nach C_1 führen. Ist dieses einmal geschehen, so steht auch nichts im Wege, die Zahl der Felder, wie $B_1 C_1 C_2 B_2$ ein solches darstellt, beliebig zu vermehren. Die hierdurch entstehende Konstruktion bezeichnet man als Fachwerk, und ihm soll der folgende Abschnitt gewidmet sein.

§ 4. Fachwerk-Konstruktionen.

Denken wir uns wieder das Gewicht der Brückenkonstruktion gleichmässig verteilt und nennen p die Belastung eines jeden der 5 Punkte C, die eines der beiden Punkte A aber $\frac{p}{2}$ entsprechend dem Früheren, so stellt uns $C_2 B_3 C_2$ (Fig. 11) ein einfaches Hängewerk ohne Spannriegel dar, und der in C_3 wirkende Druck p wird (vgl. Fig. 8b) durch die Streben $B_3 C_2$ nach C_2 übertragen, so dass an jedem Punkte C_2 der neue Druck (vertikal) $\frac{p}{2}$ und der Schub (horizontal) $x = \frac{p}{2}\,\mathrm{ctg}\,\alpha$ nach aussen auftritt. Jetzt ist $C_1 B_2 B_2 C_1$ ein Trapez-Hängewerk und, da in jedem Punkte C_2 die Kraft $\frac{p}{2} + p = \frac{3}{2}\,p$ nach unten wirkt, so überträgt sich diese Kraft (siehe Trapezhängewerk Fig. 9) so, dass in jedem C_1 der Druck $\frac{3}{2}\,p$ und der nach aussen wirkende Schub $3x = \frac{3}{2}\,p\ \mathrm{ctg}\,\alpha$ auftritt; ausserdem aber ist in B_2 derselbe, aber nach innen wirkende Schub $3\,x$ aufgetreten. Die Belastung in C_1 ist jetzt $p + \frac{3}{2}\,p = \frac{5}{2}\,p$, und betrachten wir wieder $A B_1 B_1 A$ als Trapez-Hängewerk, so überträgt sich der Druck $\frac{5}{2}\,p$ einfach von C_1 bezw. B_1 nach A, und zugleich tritt in A ein nach aussen und in B_1 ein nach innen wirkender Schub $5x = \frac{5}{2}\,p\ \mathrm{ctg}\,\alpha$ auf. Jeder Stützpunkt A trägt jetzt $3\,p$, d. i. die Hälfte der auf den einen Träger entfallenden Brückenlast und zwar durch die ursprüngliche Belastung $\left(\frac{p}{2}\right)$ und durch die Uebertragung $\left(\frac{5\,p}{2}\right)$. Der Untergurt ist, da die Schubkräfte nach aussen wirken, auf Zug, der Obergurt dagegen bei den nach innen wirkenden Schubkräften auf Druck beansprucht. Da durch die Uebertragungen der Schub in A gleich $5\,x$, in C_1 gleich $3x$ und in C_2 gleich x ist, diese Kräfte aber in derselben Richtung wirken und sich deshalb addieren, so ist das Mittelstück C_2C_2 durch die Kraft $9x = \frac{9}{2}p$ ctg α, C_1C_2 dagegen nur durch $8x=4p$ .ctg α und endlich AC_1 durch $5x = \frac{5}{2}p$ ctg α in Anspruch genommen. Mithin nimmt die Beanspruchung des Untergurtes nach der Mitte hin zu. Genau dasselbe gilt vom Obergurte, wo in B_1B_2 der Schub $5x$, in B_2B_3 dagegen $8x = 4p$ ctg α wirkt. Die Schubkräfte des Ober- und des Untergurtes gleichen sich selbstverständlich in jedem Gurte gegenseitig aus und treten deshalb, solange die Gefahr des Zerreissens im Untergurte oder des Einknickens im Obergurte nicht vorliegt, nicht in die Erscheinung. Die auf Zug beanspruchten Teile, nämlich den Untergurt und die senkrechten Stäbe, kann man, wenn eiserne Träger verwandt werden, aus Flacheisen bilden, dagegen wird man den Obergurt und die Schrägstäbe, die hier auf Druck beansprucht werden und deshalb der Gefahr des Einknickens ausgesetzt sind, gerne aus Winkeleisen von I- oder ⊏- oder ┐-förmigem Querschnitte herstellen.

Den Fig. 11 dargestellten Fachwerk-Träger nennt man auch Parallelträger mit zur Mitte steigenden Schrägstäben, wogegen Fig. 12 einen Parallelträger mit zur Mitte fallenden Schrägstäben darstellt. Lassen wir bei letzterem vorläufig B_3C_3 fort und bezeichnen wieder die ursprünglichen Belastungen eines jeden Punktes C mit p, so müssen wir uns das in C_3 wirkende p in zwei Komponenten z nach den Schrägstäben B_2C_3 zerlegen; dann ist $z = \frac{p}{2\sin\alpha}$. Diese z, nach B_2 versetzt und dort nach Obergurt und Vertikale in die Komponenten x und v_1 zerlegt, geben $x = z\cos\alpha = \frac{p}{2}$ ctg α als Schub im Obergurt und $v_1 = z\sin\alpha = \frac{p}{2\sin\alpha}\sin\alpha = \frac{p}{2}$ als Druck in der Vertikale. Mithin haben wir in C_2 jetzt $\frac{3p}{2}$ als Vertikal-Druck. Diesen Druck zerlegen wir nach dem Untergurte und dem Schrägstabe B_1C_2 und erhalten $\frac{3}{2}p$ ctg $\alpha = 3x$ und $\frac{3p}{2\sin\alpha} = 3z$. Fahren wir so weiter fort, so finden wir bei B_1 im Obergurte $3x = \frac{3}{2}p$ ctg α, in der Vertikale $\frac{3}{2}p$ und also bei C_1 wieder $\frac{5p}{2}$ als Vertikal-Druck. Der letztere liefert wieder $5x = \frac{5}{2}p$ ctg α im Untergurte und $\frac{5p}{2\sin\alpha} = 5z$ im Schrägstabe BC_1; bei B wirkt dann im Obergurte $5x = \frac{5}{2}p$ ctg α, im Vertikalstabe $\frac{5}{2}p$, und also bei A jedes Mal $3p$, die halbe Last des einen Trägers. Im Obergurte herrscht in BB_1 der nach innen wirkende Schub $5x$, in B_1B_2 desgleichen der Schub $8x$ und endlich in B_2B_2 der Schub $9x$, wobei $x = \frac{p}{2}$ ctg α ist; im Untergurte findet sich der Zug $5x$ in C_2C_1, und $8x$ in C_3C_2 vor. Die Schrägstäbe sind dieses Mal auf Zug beansprucht, und zwar wachsen diese Zugkräfte, wenn wir von den inneren zu den äusseren Stäben fortschreiten, im Verhältnis 1 : 3 : 5. Die Vertikalstäbe sind dagegen vorwiegend auf Druck beansprucht, und die Druckkräfte wachsen auch hier von innen nach aussen. Auch hier muss man die Konstruktion durch Diagonalen und den mittleren Vertikalstab gegen ungleichmässige Belastungen noch versteifen.

Ausserdem muss man bei allen Brücken, bei denen die Höhe der Träger nicht ganz gering ist, die in den Gurten verhältnismässig schmalen Träger unter einander verbinden und so das Ganze zu einem hohlen Balken vereinigen, damit nicht seitliche Kräfte den einzelnen Träger umwerfen können. Diese Verbindungen bestehen meist aus geraden und schrägen Stäben, welche die beiden Obergurte und ebenso die beiden Untergurte mit einander verbinden. Dem Auge stellen sie sich als Rechtecke mit Diagonalen dar. Sie tragen, weil die seitlichen Kräfte vielfach im Winddruck bestehen, den Namen Wind-Verband.

Statt der Fachwerkträger mit geraden Gurten, wie wir sie hier besprochen haben, verwendet man auch solche mit gebogenen Gurten. Dieselben werden uns später (§ 8) beschäftigen.

§ 5. Das Sprengwerk als Brückenträger.

Kehren wir auf kurze Zeit nochmals zu unserem Hängewerk (Fig. 7, 8) zurück, lassen aber den, den Horizontalschub aufnehmenden, Unterzug weg, so muss das Widerlager den Schub aufnehmen, und wir haben statt des Hängewerkes ein Sprengwerk*). Nach dem, was wir vorher besprochen haben, bietet das Sprengwerk nichts wesentlich Neues und Fig. 13 wird auch ohne Erklärung verständlich sein. Auch die Verbindung von Hänge- und Sprengwerk, wie manche Dachstuhl-Konstruktion sie bietet, enthält kaum etwas Neues. Interessanter wird für uns das Sprengwerk, wenn wir es als Ueberleitung zum Gewölbe benutzen. Denken wir uns nämlich BC sowie den Spannriegel BB durch Steinbalken ersetzt und diese dann zu keilförmigen Steinen verkürzt, so entsteht (Fig. 14) ein Gewölbe von drei Steinen, deren mittelster der Schlussstein, deren seitliche an die Widerlager anstossende die Kämpfer genannt werden. Wir wollen hier dieses nicht weiter verfolgen, da wir uns dem Gewölbe von einer anderen Seite her nähern werden.

§ 6. Das Seil-Vieleck und die Hängebrücke.

In A und B (Fig. 15) sei ein Seil angeknüpft, welches in den Punkten P_1, P_2 bis P_6 durch die Gewichte $G_1, G_2 \dots G_6$ gespannt werde. Gegenüber den angehängten Gewichten sei die Schwere des Seiles selbst so unbedeutend, dass wir sein Gewicht vernachlässigen und das Seil als schwerelos betrachten dürfen, dann sind die Verbindungen AP_1, P_1P_2 etc. gerade Strecken. Ersetzen wir jetzt die Festigkeit von A und B durch entsprechende Kräfte S_1 und S_6 (vgl. Einleit. B4), so müssen diese Kräfte, wenn der vorhandene Zustand erhalten bleiben soll, in der Richtung P_1A bezw. P_6B wirken, und wir können sie daher auch (vgl. Einl. B 2a) von A bezw. B nach P_1 bezw. P_6 verschieben, ohne dadurch eine wesentliche Veränderung hervorzurufen. Denken wir uns jetzt S_1 bezw. S_6 in die Vertikalkomponenten V_1 und V_6 und die Horizontalkomponenten H_1 und H_6 zerlegt, so können wir G_1 und G_6 ohne Gleichgewichtsstörungen beseitigen, wenn wir zugleich V_1 und V_6 um dieselben Kräfte G_1 und G_6 vermindern; es sei dann $V_2 = V_1 - G_1$ und $V_5 = V_6 - G_6$. Die aus H_1 und V_2 bezw. aus H_6 und V_5 gebildeten Resultanten S_2 und S_5 müssen dann wieder in die Richtung von P_2P_1 bezw. P_5P_6 fallen, und wir können deshalb wieder S_2 und S_5 nach P_2 bezw. P_5 verschieben. Zerlegen wir auch hier wieder S_2 in H_1 und V_2, S_5 in H_6 und V_5 und beseitigen G_2 und G_5, indem wir zugleich V_2 und V_5 um G_2 bezw. G_5 verkleinern, so bleibt auch hier das Gleichgewicht ungestört. Wieder sei $V_3 = V_2 - G_2$ und $V_4 = V_5 - G_5$. Die Komponenten V_3 und H_1 geben S_3 in Richtung P_3P_2 und ebenso V_4 und H_6 geben S_4 in Richtung P_4P_5, und daher lassen sich S_3 und S_4 nach P_3 bezw. P_4 verschieben. Zerlegen wir in Anbetracht unserer Figur jetzt nur S_4 in V_4 und H_6, beseitigen G_4 unter gleichzeitiger Verminderung von V_4 um G_4, wobei $V^1{}_3 = V_4 - G_4$ sei, so muss die aus $V^1{}_3$ und H_6 gebildete Resultante $S^1{}_3$ in die Richtung P_3P_4 fallen und deshalb $S^1{}_3$ sich nach P_3 versetzen lassen. Jetzt wirken am Punkte P_3 die Kräfte S_3, $S^1{}_3$ und G_3; zerlegen wir die ersten in V_3 und H_1 bezw. $V^1{}_3$ und H_6, so müssen V_3 und $V^1{}_3$, die nach oben wirkenden Vertikalkomponenten, zusammen gleich dem nach unten wirkenden G_3 und ebenso H_1 und H_6 einander gleich sein, weil sonst P_3 nicht in

*) Man unterscheidet auch wohl Hänge- und Sprengwerk je nachdem, ob die Brückenbahn am Träger hängt oder auf dem Träger liegt, und hat dann weiter Hänge- und Sprengwerke mit oder ohne Unterzug.

Ruhe bleiben könnte. Mithin haben wir gefunden:

1. Da die Horizontalkomponenten durch die Verlegung der Angriffspunkte der Kräfte nicht beeinflusst worden waren und $H_1 = H_6$ ist, so ist die Horizontalspannung H des Seiles in allen Punkten dieselbe.

2. Da $V_2 = V_1 - G_1$; $V_3 = V_2 - G_2$ und ebenso $V_5 = V_6 - G_6$; $V_4 = V_5 - G_5$; $V^1_3 = V_4 - G_4$ und endlich $V_3 + V^1_3 = G_3$, so ist auch $V_1 + V_6 = G_1 + G_2 + G_3 + G_4 + G_5 + G_6$. Die Summe der Vertikalkomponenten der beiden, an den Enden des Seiles auftretenden Zugspannungen ist gleich der Summe der Belastungen.

3. Bezeichnet α_1 den von S_1 und H oder den von P_1A und der Horizontale gebildeten Winkel und entsprechend α_p den von S_p und H gebildeten Winkel, so ist $\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{V_1}{H}$; $\operatorname{tg} \alpha_p = \frac{V_p}{H}$.

Nehmen wir jetzt an, dass A und B horizontal in derselben Höhe lägen, die Gewichte alle einander gleich wären und gleiche Horizontalabstände von einander besässen, so wird das Seilvieleck aus zwei symmetrischen Hälften bestehen, und deshalb $V_1 = V_6 = 3\,G$ sein. Nennen wir dann den tiefsten Punkt P_0, bezeichnen von dort aus die symmetrischen Punkte mit gleichen fortlaufenden Ziffern 1, 2 .... u. s. w., denken uns ferner die Zahl der Gewichte sehr vermehrt und mit $2\,n$ bezeichnet, so ist die Vertikalkomponente einer jeden Zugspannung an den Seilenden $V_n = nG$, und für den $p$ten Punkt von der Mitte aus gerechnet ist $V_p = pG$ und $\operatorname{tg} \alpha_p = \frac{V_p}{H} = p\frac{G}{H}$. Setzen wir dann noch (s. Fig. 16) $AB = 2w$; $AM = w$, nennen den Angriffspunkt des $p$ten Gewichtstückes P, des $(p+1)$ten P_1 und fällen PQ und P_1Q_1 senkrecht MP_0, ebenso PF und P_1F_1 senkrecht AM, so ist $FF_1 = P_1R_1 = PR = \frac{w}{n}$ und $\sphericalangle P_1PR = \alpha_p$. In dem Dreiecke P_1PR haben wir jetzt $\operatorname{tg} \alpha_p = \frac{P_1R}{RP}$ und, wie vorher, $\operatorname{tg} \alpha_p = \frac{V_p}{H}$. Hieraus ist $\frac{P_1R}{PR} = \frac{V_p}{H}$ oder $P_1R = PR\,\frac{V_p}{H}$. Nun ist aber $PR = \frac{w}{n}$ und $V_p = pG$, und deshalb $P_1R = \frac{w}{n}p.\frac{G}{H}$ oder $PR_1 = \frac{p}{n}w\frac{G}{H}$. In diese Gleichung führen wir noch $G = \frac{V_n}{n}$ (aus $V_n = nG$) ein, dann ist $PR_1 = \frac{p}{n^2}w\frac{V_n}{H}$. Was wir hier für den p^{ten} Teilpunkt durchgeführt haben, denken wir uns für alle Teilpunkte von P_0 aus vollzogen, dann zerfällt die Strecke P_0Q in p Strecken von der Art PR_1 bezw. QQ_1, nur dass in der Formel für PR_1 der Reihe nach statt p die Zahlen 1, 2, 3 .... p auftreten. Die Formeln lauten dann der Reihe nach $1.\frac{w}{n^2}\frac{V_n}{H}$, $2.\frac{w}{n^2}\frac{V_n}{H}$, ... $p\frac{w}{n^2}\frac{V_n}{H}$ und, wenn P_0Q mit x bezeichnet wird, so ist $x = (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + p)\,\frac{w}{n^2}\,\frac{V_n}{H} = p\,\frac{(p+1)}{1\,.\,2}\,\frac{w}{n^2}\,\frac{V_n}{H}$ (s. Einl. A 1.) oder $2\,w\,x = \frac{pw}{n}.\frac{(p+1)w}{n}\,\frac{V_n}{H}$. Nun ist aber $\frac{pw}{n} = MF$ und $\frac{(p+1)w}{n} = MF_1$ und, wenn wir n sehr gross, $\frac{w}{n}$ also sehr klein setzen, so ist der Unterschied von MF und MF_1 so klein, dass wir sie beide einander gleich setzen und mit y bezeichnen können, ohne einen wesentlichen Fehler zu begehen. Dann lautet also unsere Gleichung:

$2\,w\,x = y \cdot y \cdot \frac{V_n}{H}$ oder $y^2 = 2w\frac{H}{V_n}x$. Hierin bezeichnet x die Strecke P_0Q, y die Strecke QP oder MF, und die ganze Gleichung ist die Gleichung einer Kurve oder gekrümmten Linie, die man Parabel nennt. Eine solche Kurve erhält man z. B. [allerdings in umgekehrter Lage d. h. die Hohlseite nach unten gekehrt], wenn man einen Wasserstrahl schräg nach oben richtet.

Uebersetzen wir das, was wir soeben gefunden haben, in die Praxis, so lautet es folgendermassen: Hängen wir eine horizontale, allenthalben gleich schwere Brückenbahn mit Hülfe von sogenannten Hängeeisen, die in gleichen Abständen zu beiden Seiten der Brückenbahn angebracht sind, an eine Kette oder ein Seil, dessen höchste Punkte in derselben Horizontale liegen, so nimmt die Kette bezw. das Seil die Form einer Parabel an, wenn die Schwere des Trägers (Seiles) gegenüber dem Gewichte der Brückenbahn als gering angesehen werden kann. Diese Art der Brückenkonstruktion wird als Hängebrücke bezeichnet. Figur 17 bietet die Ansicht einer solchen. Ist aber das Gewicht der Kette zu gross gegenüber dem Gewicht der ganzen Brücke, als dass man es vernachlässigen dürfte, so hängt die Kette nicht in einer Parabel, sondern in einer Kurve, die von der Parabel um so mehr abweicht, je geringer das Gewicht der allenthalben gleich schweren Brückenbahn gegenüber dem Träger ist. Hängt das Seil endlich ganz ohne weitere Belastung und ist es in allen Teilen gleich schwer, so nimmt die Kurve eine Gestalt an, die man als Kettenlinie bezeichnet. Die Behandlung dieser geht aber über die Grenzen hinaus, die dieser Abhandlung gesteckt sind.

§ 7. Kräfte-Polygon (-Dreieck).

Das Seilvieleck hat uns gelehrt, dass, wenn das mit gleichen, symmetrisch verteilten Gewichten belastete Seil in gleichen Horizontalhöhen A und B angeknüpft ist, die an diesen Endpunkten auftretenden Spannungen S_n ihrer Grösse und Richtung nach als Diagonalen von Rechtecken erhalten werden, deren Vertikalseite V_n gleich nG, deren Horizontalseite gleich H ist. Da aber das Rechteck aus zwei rechtwinkligen Dreiecken besteht, so ist auch S_n die Hypotenuse eines solchen Dreiecks, dessen Katheten nG und H sind, und entsprechend ist S_p die Hyptenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten pG und H. Diese Dreiecke, deren Seiten Kräfte darstellen, nennt man Kräftedreiecke; dieselben sind nur dann rechtwinklig, wenn die in Betracht kommenden Kraftrichtungen auf einander senkrecht stehen, wie es hier mit V und H der Fall ist. Benutzen wir nun noch den Umstand, dass die Kräfte S mit entsprechenden Seilstrecken der Richtung nach übereinstimmen, so können wir mit Hülfe der Kräftedreiecke die entsprechenden Seilvielecke konstruieren. Ein Beispiel wird dieses am besten erläutern: Sollen 13 gleiche Gewichte G mit gleichen Horizontalabständen an einem Seile angeknüpft werden, dessen Endpunkte A und B in gleicher Höhe liegen, so legen wir (Fig. 18a) eine vertikale Strecke $P_0P_{13}=13G$ hin, errichten in ihrem Mittelpunkt D eine Senkrechte $DE=H$ und verbinden E der Reihe nach mit den Endpunkten $P_0 P_1 \ldots . P_{13}$ der einzelnen G. Jetzt teilen wir (Fig. 18b) AB in 14 gleiche Teile $AQ_1=Q_1Q_2=\ldots .=Q_{13}B$, errichten in den Punkten Q auf AB Senkrechte und ziehen durch A und B Parallele zu EP_0 bezw. EP_{13} bis zum Schnittpunkt mit der ersten bezw. 13^ten^ Senkrechten; von diesem aus dann Parallelen zu EP_1 (EP_{12}) bis zur 2^ten^ (12^ten^) Senkrechten u. s. w.; schliesslich treffen sich die von beiden Seiten fortschreitenden Parallelen auf der 7^ten^ Senkrechten, und wir haben so ein Seilvieleck erhalten, welches bei weiterer Vermehrung der verwendeten gleichen Gewichte allmählich in eine Parabel übergehen würde.

Ist uns umgekehrt ein Seilvieleck gegeben, so können wir dazu ein Kräftevieleck konstruieren, dessen Seiten uns die Verhältnisse der auftretenden Spannungen (S) sowie der Vertikal (V)- und Horizontal (H)-Komponenten ergeben. Diese Kräftefigur wird nur dann ein Dreieck sein, wenn die am Seil angreifenden Kräfte einander parallel sind.

§ 8. Gewölbe-Konstruktionen.

Nachdem wir im Vorigen das Seil- und Kräfte-Vieleck kennen gelernt, wenden wir uns jetzt zum Gewölbe-Bogen, mit dessen einfachster Form wir uns schon bei Besprechung der Sprengwerke beschäftigt haben. Bei Verwendung zahlreicher Steine wäre unsere dreiseitige Fig. 14 in eine vielseitige übergegangen, welche sich irgend einer Kurve angeschmiegt hätte, wie sich das soeben konstruierte offene Vieleck der Parabel einfügt. In der Baukunst werden die unteren und oberen Gewölbe-Flächen innere und äussere Laibung genannt. Die Bezeichnung Gewölbe-Bogen könnte vielleicht zu der Ansicht verleiten, dass diese Laibungen gekrümmte Flächen sein müssten; es gibt jedoch auch Gewölbe [z. B. an den oberen Fensterbrüstungen mancher Häuser], deren Laibungen ebene Flächen darstellen (Fig. 19a). Das Gewölbe trägt sich dann durch die Keilform der Steine. Das Charakteristische des Gewölbes haben wir deshalb nicht in der Wölbung der Laibungen, sondern nur in der Divergenz bez. Convergenz der mehr oder weniger radialen Fugen zwischen den Gewölbesteinen zu sehen.

Die steinernen Brückenbogen werden entweder nach einem Halbkreise (Rundbogen Fig. 19b) oder nach einem Kreisbogenstück (Stich- oder Flachbogen Fig. 19c) oder nach einer Ellipse (Fig. 19d) oder nach einem Korbbogen (Fig. 20) konstruiert. Der Horizontalschub der im Altertume und Mittelalter zu Brückenbauten viel verwandten Rundbogen ist nicht sehr gross. (Näheres § 9.) Heute wendet man diesen Bogen im Brückenbau fast nur noch dort an, wo man grössere Höhen erzielen will, z. B. bei Aquädukten und Viadukten im engeren Sinne. Für Brückenbauten unter normalen Verhältnissen benutzt man ihn kaum noch, da sein Pfeilverhältnis (Höhe des Bogens zur Spannung) nur gleich $\frac{1}{2}$ ist. Infolgedessen müsste man bei nicht sehr hohen Ufern und wagrechter Brückenbahn viele stromverengende Bogen und Pfeiler oder bei wenigen Bogen eine stark ansteigende Fahrbahn bauen.

Die Stichbogen geben, namentlich wenn sie sehr flach sind, einen bedeutenden Horizontalschub und erfordern deshalb, soweit nicht der Schub eines Bogens durch den der Nachbarn aufgehoben wird, starke Widerlager, aber sie haben ein sehr günstiges Pfeilverhältnis, beengen daher das Flussbett am wenigsten und werden aus diesem Grunde mit Vorliebe bei schiffbaren Strömen verwandt.

Die elliptischen Bogen stehen ihren Eigentümlichkeiten nach zwischen den beiden vorigen, werden aber im Brückenbau nur selten verwandt, sondern meistens durch die ihnen sehr ähnlichen Korbbögen ersetzt. Diese setzen sich aus einer Reihe von Kreisbögen zusammen, deren Radien vom Kämpfer her gegen den Scheitel zu wachsen. Figur 20 bietet eine schematische Darstellung der Hälfte eines solchen aus 9 Kreisbogenstücken zusammen gesetzten Korbbogens. Der Mittelpunkt M_1 des ersten Kreisbogenstückes AP_1 liegt auf der Kämpfer-Verbindungslinie; der mittelste M_5 auf der Scheitelvertikalen BC; die Mittelpunkte M_2, M_3, M_4 leiten von der ersten zur letzten Krümmung über und sind in unserem Beispiele so gewählt, dass ihre gegenseitigen Entfernungen einander gleich (d) sind. Die Centriwinkel der Kreisbogenstücke erfüllen hierbei die Gleichungen $\varphi_5 = \frac{1}{2}\varphi_4 = \frac{1}{3}\varphi_3 = \frac{1}{4}\varphi_2 = \frac{1}{5}\varphi_1$ und, da die Summe der φ gleich 90^0 ist, so ist $\varphi_5 = 6^0$. Durch die verschiedenen φ sind auch die Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ und durch φ, α, r_1 und d die Strecken AR_1, $P_1R_2, \ldots P_4R_5$, sowie P_1R_1 bis BR_5 gegeben und, da die Summe der ersteren die halbe Spannung, die der letzteren die Höhe h ergibt, so erhalten wir nach einigen Rechnungen hieraus die Gleichungen $d = 0{,}8913\,(w-h)$; $r_1 = 1{,}6643h - 0{,}6643w$. Hiermit sind dann auch r_2, r_3, r_4, r_5 gegeben und somit alles bestimmt.

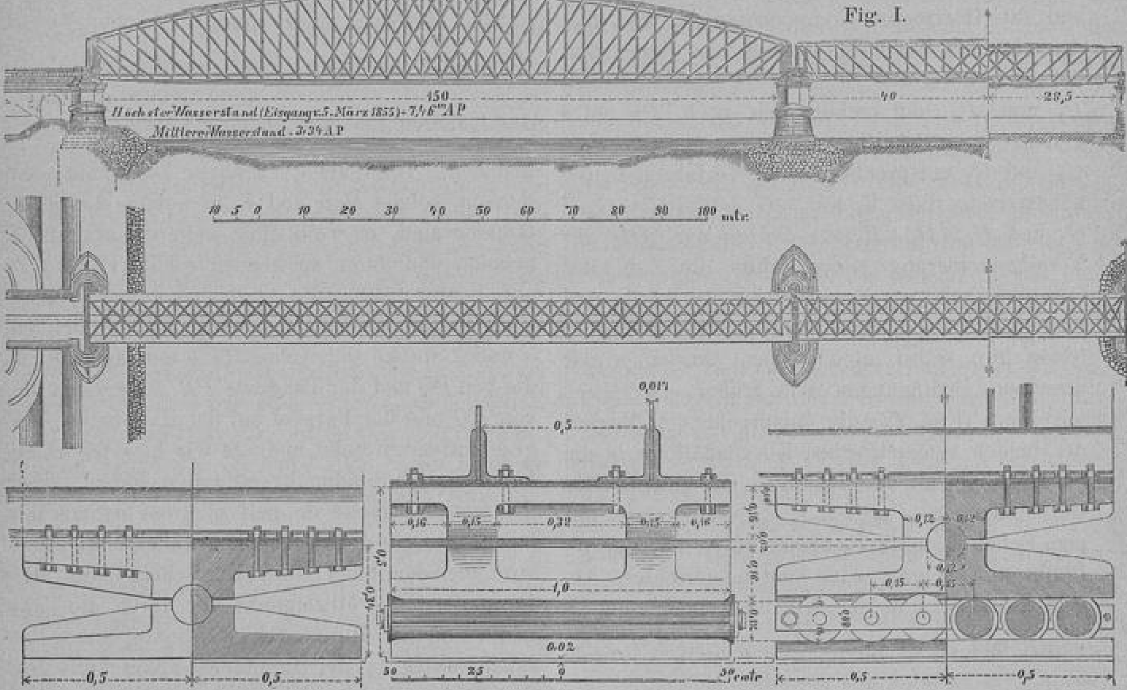
Ausser den genannten Gewölbebogen wird namentlich bei Eisen-Brücken gerne der Parabelbogen angewandt. Denken wir uns, um dessen Theorie kennen zu lernen, wir hätten ein Gewölbe, welches selbst schwerelos in gleichen Horizontalabständen von gleichen Schwer-kräften angegriffen würde, so hätten wir abgesehen von der Krümmungsrichtung des Trägers wieder dieselben Bedingungen wie § 6 und, wie wir dort eine nach unten gekrümmte Parabel als Krümmungslinie erhielten, so können wir uns auch hier eine nach oben gekrümmte, aus entsprechend starken Stäben oder Platten gebildete Parabel als Brückenträger konstruiert denken. Eines der bekanntesten Beispiele dieser Art ist die Fachwerkbrücke über den Leck bei Kuilenburg in der Eisenbahnlinie Utrecht-Hertogenbusch, deren Spannung (150 m) längere Zeit die grösste mit Balkenträgern *) erzielte war. Fig. I stellt die genannte Brücke dar (Näh. s. § 14 u. Fig. 23). Da hier nur der Obergurt gekrümmt, der Untergurt aber gerade ist, so bezeichnet man diese Art der Träger als Halb-Parabel-Träger.

Da es wegen Uebertragung der Theorie des Seil- und Kräftevielecks auf die Gewölbelehre nicht unzweckmässig erscheint, wenigstens an einem Beispiele das Zutreffende dieser Uebertragung nachzuweisen, so wollen wir hier die Rechnungen von § 6 mit den erforderlichen Abänderungen für einen Gewölbebogen nochmals durchführen:

Ein offenes Fünfeck P_1 bis P_5 (Fig. 21), welches aus vier schwerelosen, unbiegsamen, aber in den Endpunkten gelenkig verbundenen Stäben besteht, werde in einer Vertikalebene, die Wölbung nach oben, aufgestellt und in den Punkten P mit den Gewichten G_1 bis G_5 belastet. Gegen Verschiebungen aus der Vertikalebene soll unsere Figur auf irgend eine Weise gesichert sein.

Wir geben jetzt den Winkeln P_2, P_3, P_4

Fig. I.



*) Balkenträger nennt der Ingenieur diejenigen Brückenträger, welche nur einen senkrechten Druck auf die Widerlager, aber keinen Zug, wie die Hängebrücken oder Schub, wie die Stützbrücken (Sprengwerke und Bogenbrücken) ausüben.

eine solche Lage und Grösse, dass das ganze System sich mit Hülfe zweier in P_1 und P_5 schräg nach oben wirkender Kräfte S_1 und S_5 im Gleichgewicht hält. Denken wir uns dann noch zwei, den vorigen entsprechende Stäbe hinzugefügt und geben diesen die Richtung von S_1 und S_5, so können wir diese Kräfte an diesen Stäben beliebig verschieben, ohne das Gleichgewicht zu stören. Wir wählen die Angriffspunkte A und B jetzt so, dass ihre Verbindungslinie horizontal läuft, und zerlegen S_1 und S_5 in die Vertikal-Komponenten V_1 und V_5 und die Horizontal-Komponenten H_1 und H_5; dann können wir durch schrittweise Versetzung der Kräfte S_1 und S_5 nach P_1 und P_5, nach P_2 und P_4 und schliesslich nach P_3 unter gleichzeitiger Beseitigung von G_1 und G_5 bezw. G_2 und G_4 entsprechend dem Verfahren in § 6 nachweisen, dass $V_1+V_5=G_1+G_2+G_3+G_4+G_5$ und $H_1=H_5=H$ ist. Setzen wir jetzt zur Verallgemeinerung voraus, dass die Zahl der Gewichte sehr gross und gleich $2n$ würde und dass die Horizontalabstände sowie die Kräfte (Gewichte) selbst gleich seien, so haben wir dieselben Bedingungen wie früher. Versehen wir dann (Fig. 22) die entsprechenden Punkte der beiden symmetrischen Kurvenhälften, in die unser Seilvieleck übergegangen ist, mit gleichen Bezeichnungen $P_0 P_1 P_2 \ldots P_n$, indem wir mit dem Scheitelpunkte P_0 beginnen, so hat der p^{te} Punkt die schräg nach unten gerichtete Angriffskraft S_p mit der Vertikalkomponente $V_p = pG$, und es ist $\operatorname{tg} a_p = \frac{V_p}{H} = p\frac{G}{H} = \frac{p\,V_n}{n\,H}$, da ja $V_n = nG$ und also $G = \frac{V_n}{n}$ ist. Fällen wir jetzt $PQ = y$ senkrecht auf die mittlere Vertikale MP_0, verlängeren S_p bis zum Schnittpunkte mit MP_0 in R und setzen $QR = z$, so ist $\operatorname{tg} a_p = \frac{z}{y} = \frac{p\,V_n}{n\,H}$, und daher $y\frac{p}{n} = \frac{H}{V_n}z$. Da aber $AB (= 2w)$ in $2n$ gleiche Teile geteilt und P der $p$te Teilpunkt von P_0 aus ist, so ist $y = p\frac{w}{n}$ und $\frac{p}{n} = \frac{y}{w}$, und somit geht unsere Gleichung $y\frac{p}{n} = \frac{H}{V_n}z$ über in $y\frac{y}{w} = \frac{H}{V_n}z$ oder $y^2 = \frac{wH}{V_n}z$; dieses ist aber wieder die Gleichung einer Parabel. Hierdurch ist bewiesen, dass auch ein schwereloses Gewölbe, welches in gleichen Horizontalabständen von sehr vielen, gleichen Vertikal-Kräften angegriffen wird, die Gestalt einer Parabel annimmt, und zugleich ist für unser Beispiel nachgewiesen, dass die Beziehungen des Seilvielecks auf das Gewölbe übertragen werden dürfen. Aber unsere Gleichung $y^2 = \frac{Hw}{V_n}z$ sagt uns noch mehr, wenn wir sie mit der früheren Parabelgleichung $y^2 = 2\frac{Hw}{V_n}x$ vergleichen. Dass beide Parabeln kongruent sein müssen, sobald H, w und V_n in beiden dieselben Grössen sind, ist wohl ohne weiteres zuzugeben; nehmen wir dann auch noch solche Punkte P auf beiden, dass die zugehörigen y dieselben sind, so muss auch $z = 2x$ sein. Nun bezeichnen x und z Stücke der Achse MP_0, und zwar ist z die von PQ und der Tangente PR, x dagegen die von PQ und der Parabel auf der Hauptachse abgeschnittene Strecke und, da wir hier für einen beliebigen Parabelpunkt gefunden haben, dass die erstere Strecke doppelt so gross ist, als die letztere, so gilt dieses für alle Parabelpunkte, und wir haben damit den Satz: „Der Scheitelpunkt der Parabel ist der Mittelpunkt der durch die Tangente und die Horizontale (Ordinate) eines Parabelpunktes, auf der Hauptachse abgeschnittenen Strecke". Hieraus folgt, dass die in A angelegte Tangente AM_1 und die Horizontale AM auf der Mittel-Vertikalen eine Strecke $MM_1 = 2\,MP_0 = 2\,h$ herausschneiden, wenn h die Höhe des Scheitelpunktes der Parabel über der Kämpferlinie AB bezeichnet. Da aber die Tangente mit der Kraftrichtung S_n zusammenfällt und, wie diese, den Winkel a_n mit der Horizontale bildet, so haben wir die beiden Gleichungen $\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{V_n}{H}$ und $\operatorname{tg} \alpha_n = \frac{2h}{w}$ und hieraus $H = V_n \cdot \frac{w}{2h}$. Nun bezeichnet V_n das Gewicht der an dem Parabelhalbbogen AP_0 hängenden Last, und wir brauchen dieses Gewicht somit nur noch mit einem Bruche, dessen Zähler die halbe Spannweite, dessen Nenner die doppelte Höhe des Bogens ist, zu multiplicieren, um den Horizontalschub zu erhalten.

Diesen Schub kann man nun auf die entsprechend stark konstruierten Widerlager (Pfeiler) nach Art der Sprengwerke wirken lassen, man kann ihn aber auch durch einen Unterzug wie bei den Hängewerken beseitigen. Gerne benutzt man in solchen Fällen als Unterzug den Streckbaum der Fahrbahn, der dann die gerade Verbindung von A und B darstellt. Diese Konstruktion wird als Bogensehnen-Träger bezeichnet. Beim Halb-Parabel-Träger (Fig. 23) liegt jedoch die Fahrbahn A_1B_1 unterhalb AB und, um sie trotzdem als Unterzug zu benutzen, bedürfen wir ausser den beiden Vertikalen noch der Streben AF bezw. BF_1. Um die Spannung k, die in BF_1, und den Druck d, der in BB_1 herrscht, zu berechnen, zerlegen wir k in die horizontale und vertikale Komponente $k \cos \beta$ und $k \sin \beta$, dann muss die Summe der Horizontalkräfte gleich Null sein, und hieraus ist $H = k \cos \beta$, $k = \frac{H}{\cos \beta}$. Als Vertikalkomponenten haben wir zunächst V_n und dann $k \sin \beta = H \operatorname{tg} \beta$, so dass der in AA_1 und BB_1 herrschende Druck $d = V_n + H \operatorname{tg} \beta$ ist. Bei der Leckbrücke (Fig. 1 S. 15) sind von A und B je 3 Diagonalen zur Fahrbahn gezogen, die den Horizontalschub auf die Brückenbahn übertragen und dadurch beseitigen. Die übrigen Diagonalen dieses Trägers sind zum Ausgleich wechselnder ungleichmässiger Belastungen der Fahrbahn eingezogen und übertragen die Spannungen als nach innen wirkenden Schub auf den Obergurt und als nach unten wirkenden Druck auf die Vertikalen und weiterhin als nach aussen gerichteten Zug auf den Untergurt. Da aber im Ober- und Untergurt diese Kräfte nach der Mitte hin entsprechend den Verhältnissen beim Parallel-Fachwerkträger (§ 3) sich annähernd addieren, so sehen wir beide Gurte in unserer Abbildung nach der Mitte zu in zwei Absätzen entsprechend verstärkt.

§ 9. Stabilitäts-Untersuchung eines Gewölbe-Bogens.

Um ein Gewölbe auf seine Standfestigkeit zu untersuchen, bedient man sich am einfachsten der graphischen Methode, der auch wir hier folgen wollen:

Es sei ABB_1A_1 (Fig. 24a) die Hälfte eines Gewölbes mit der darauf ruhenden vertikal wirkenden Last. Wir teilen dann das Ganze durch Vertikalschnitte von gleichem Horizontal-Abstand in mehrere (hier 6) Abschnitte, bestimmen die Schwerpunkte der fast trapezartigen Teile und lassen in ihnen das jedesmalige durch Vertikal-Pfeile dargestellte Gewicht angreifen. Diese Gewichte, die sich annähernd verhalten wie die vertikalen Mittellinien der Trapeze, tragen wir der Reihe nach (von oben beginnend) auf einer vertikalen Geraden P_0P_6 (Fig. 24b) ab, errichten in P_0 eine Senkrechte, auf der wir (eine vorläufig noch nicht bestimmte Strecke) $P_0R = H$ abtragen. Den Endpunkt R verbinden wir dann der Reihe nach mit den Punkten P_1 bis P_6 und erhalten so das Kräftedreieck RP_0P_6. Um hierzu das entsprechende Seilvieleck zu konstruieren, ziehen wir durch den Mittelpunkt M des Gewölbescheitels AB eine Horizontale bis zum Schnittpunkt C_1 mit der Richtung von G_1; sodann C_1C_2 parallel RP_1; C_2C_3 parallel RP_2 u. s. f., so dass die Punkte $C_2, C_3, \ldots C_6$ jedes Mal im Schnittpunkte mit der betreffenden Kraftrichtung G liegen. Geht bei dieser Konstruktion die letzte von C_6 zu RP_6 gezogene Parallele nicht durch die Mitte M_1 der Kämpferfläche A_1B_1, so verkürzen oder verlängern wir $P_0R = H$ so weit, bis dieses Ziel erreicht ist. Das Gewölbe gilt dann als richtig veranlagt, wenn das so gewonnene Seilvieleck mit allen seinen Strecken innerhalb des mittleren Drittels zwischen beiden Laibungen verläuft. Nähert es sich aber an einer Stelle der äusseren oder inneren Laibung mehr, tritt vielleicht gar aus einer Laibung heraus, so liegt die Gefahr vor, dass das Gewölbe an dieser Stelle nach aussen oder innen durchbreche, und der Baumeister wird dann dementsprechend flacher bezw. stärker wölben. Wünschenswert ist es natürlich, dass das Seilvieleck die Gewölbefugen und besonders die Kämpferfläche annähernd senkrecht treffe, weil sonst das Gewölbe das Bestreben zeigen wird, sich an den betreffenden Fugen zu verschieben. Bei den Rund- oder Halbkreisbogen ist es, wie eine einfache Ueberlegung lehren wird, unmöglich, das Seilvieleck senkrecht zur Kämpferfläche zu führen, weil sonst RP_6 (Fig. 24) vertikal und also parallel P_1P_6 sein müsste; dann würde aber entweder der Horizontalschub H gleich Null sein (und das ist unmöglich), oder es müsste P_0P_6 sehr gross, eigentlich unendlich gross sein, da sich Parallelen erst im Unendlichen schneiden. In den meisten Fällen wird es beim Rundbogen sogar unmöglich sein, mit dem Seilvieleck die Kämpferfläche zu erreichen, da das Seilvieleck meist schon früher aus der äusseren Laibung heraustreten wird. In diesen und ähnlichen Fällen hilft man sich dadurch, dass man dem Bogen schon oberhalb des Kämpfers ein Widerlager bietet, indem man z. B. bei zwei neben einander stehenden Bogen den Bogenzwickel d. h. den zwischen den äusseren Laibungen verbleibenden Raum durch Mauerwerk ausfüllt.

§ 10. Stabilität von Widerlagern.

Stellt uns der von lauter Rechtecken begrenzte, nur an der Kante DD_1 abgeschrägte Körper AC_1 (Fig. 25) ein Widerlager dar, auf dessen schräger Fläche ein Gewölbe mit der Kraft S ruht, so wird diese Kraft bestrebt sein, das Widerlager um die Kante BB_1 mit dem Moment $S \cdot l$ zu drehen, wenn l die Länge der auf S und BB_1 stehenden Senkrechten bezeichnet. Andererseits setzt das im Schwerpunkt (Mittelpunkt) angreifende Gewicht G des Widerlagerkörpers dieser Drehung einen Widerstand entgegen, der von dem statischen Momente des Gewichtes G in Bezug auf BB_1 abhängt. Setzen wir die Länge der von der Kante BB_1 auf G gefällten Senkrechten gleich der halben Kantenlänge ($AB = a$), so ist das statische Moment von G in Bezug auf BB_1 gleich $G \cdot \frac{a}{2}$. Von der Grösse dieses statischen Momentes hängt offenbar die Standfestigkeit des Körpers ab, und man nennt kurz $G \cdot \frac{a}{2}$ selbst die Standfestigkeit und spricht den bezüglichen Satz in der Form aus: Ist die Standfestigkeit eines Körpers $G \cdot \frac{a}{2}$ in Bezug auf eine bestimmte Kante grösser als die Summe der statischen Momente der entgegenwirkenden Kräfte in Bezug auf dieselbe Kante, so vermögen diese Kräfte nicht, den Körper um diese Kante umzustürzen.

Auch hier ist es wie beim Gewölbe wünschenswert, dass die aus dem seitlichen Schub S und dem Gewichte G des Widerlagers gebildete Resultante R im mittleren Drittel des Körpers verläuft und also die Fundamentsohle im mittleren Drittel trifft, weil sonst der Verband des Materials über Gebühr in Anspruch genommen würde, mit anderen Worten EF (s. Fig. 25) muss kleiner als $\frac{1}{6} AB$ sein.