Zur Theorie der linearen Differenzialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten.

Nach dem gegenwärtigen Standpunkte der Wissenschaft stellt man sich in der Theorie der Differenzialgleichungen nicht sowohl die Aufgabe, eine gegebene Differenzialgleichung auf Quadraturen zurückzuführen, als vielmehr die, den Verlauf ihrer Integrale, für alle Punkte der Ebene, d. h. für alle Werthe der unbeschränkt Veränderlichen aus der Differenzialgleichung selbst abzuleiten. Die Analysis lehrt eine Funktion determiniren, wenn man das Verhalten derselben in der Umgebung derjenigen Punkte ermitteln kann, für welche sie unstetig oder mehrdeutig wird. Es ist daher die wesentliche Aufgabe bei der Integration einer gegebenen Differenzialgleichung, die Lage dieser Punkte und das Verhalten der Integrale in deren Umgebung festzustellen. — In diesem Sinne haben *Briot* und *Bouquet* im Journal de l'école polytechnique cah. 36 die Differenzialgleichungen der Form $F\left(y, \frac{dy}{dx}\right) = o$ behandelt, wenn $F\left(y, \frac{dy}{dx}\right)$ eine ganze Funktion von y und $\frac{dy}{dx}$ bedeutet. — In den Abhandlungen der Societät der Wissenschaften zu Göttingen vom Jahre 1857 hat *Riemann* die Differenzialgleichung hergeleitet, welcher die durch die *Gauss*'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen genügen; und man kann umgekehrt die dortige Abhandlung als eine solche ansehen, wodurch die Integration jener Differenzialgleichung geleistet ist. — Im Folgenden erlaube ich mir einige Ergebnisse einer über lineare Differenzialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten angestellten Untersuchung mitzutheilen, zu welcher ich durch das Studium der *Riemann*'schen Abhandlung veranlasst wurde. Es ergab sich hierbei ein für alle linearen Differenzialgleichungen gültiger Satz (No. 3), der naturgemäss ein Problem herbeiführt, welches in No. 4 und No. 5 behandelt ist, ein Problem, durch dessen Lösung eine gewisse Klasse linearer Differenzialgleichungen abgeschlossen wird. Zu dieser Klasse gehört als specieller Fall die von *Riemann* in der ebenerwähnten Abhandlung erhaltene Differenzialgleichung, so dass die Eigenschaften der durch die *Gauss*'sche Reihe darstellbaren Funktionen, von denen *Riemann* ausgeht, auch von einem anderen Gesichtspunkte aus, als denselben characteristische erkannt werden (No. 6). — Es ist auch von Interesse, dass zu derselben Klasse von Differenzialgleichungen auch diejenigen linearen Differenzialgleichungen gehören, denen nur algebraische Funktionen genügen (No. 7). — Im Sommer 1863 hielt *Weierstrass* eine Vorlesung über *Abel*'sche Funktionen, worin er als Einleitung die Fundamente der Theorie der linearen Differenzialgleichungen entwickelte. Dieser Vorlesung werde ich mich in der Art der begrifflichen Feststellung der Integrale einer linearen Differenzialgleichung, wie sie in No. 1 angedeutet ist, im Wesentlichen anschliessen. — Ich bemerke schliesslich, dass ich mich im Folgenden auf solche lineare Differenzialgleichungen beschränke, welche kein von der abhängigen Variabeln und ihren Ableitungen freies Glied enthalten.

1.

Es sei:

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y$$

eine lineare Differenzialgleichung m^{ter} Ordnung, deren Coefficienten $p_1, p_2, \ldots p_m$ Funktionen von x sind, die innerhalb eines einfach zusammenhangenden Flächentheils T der x Ebene nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unstetig werden, im Uebrigen aber innerhalb dieser Fläche eindeutig und continuirlich sind. Diejenigen Punkte innerhalb T, für welche eine oder mehrere der Funktionen p unstetig sind, werden wir im Folgenden, nach dem Vorgange von *Weierstrass*, singuläre Punkte nennen. — Es sei ferner x_0 irgend ein Punkt in T und um denselben ein Kreis beschrieben, welcher sich bis zum nächsten singulären Punkte erstreckt, so bezeichnen wir das durch diesen Kreis abgegrenzte Flächengebiet, ebenfalls nach *Weierstrass*, als die Umgebung des Punktes x_0.

Ist nun x_0 ein Punkt, der nicht zu den singulären gehört, so giebt es innerhalb T eine in der Umgebung desselben überall endliche, eindeutige und continuirliche Funktion y, welche der Differenzialgleichung (1) genügt und so beschaffen ist, dass $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ für $x = x_0$ beliebig gegebene Werthe annehmen. Dieses lässt sich folgendermassen beweisen:

In der Umgebung von x_0 innerhalb T seien die Maxima der Moduln der Funktionen $p_1, p_2, \ldots p_m$ resp. $M_1, M_2, \ldots M_m$. Ist a_1 der dem Punkte x_0 zunächst liegende singuläre Punkt, und setzt man mod $(a_1 - x_0) = r$, und

$$\frac{M_1}{1 - \frac{x - x_0}{r}} = \varphi_1, \quad \frac{M_2}{1 - \frac{x - x_0}{r}} = \varphi_2, \ \ldots \ \frac{M_m}{1 - \frac{x - x_0}{r}} = \varphi_m,$$

so ist bekanntlich (s. *Briot* et *Bouquet* Journal de l'école polytechnique cah. 36 pag. 137) für jedes ganzahlige α

$$\text{mod}\left(\frac{d^\alpha p_1}{dx^\alpha}\right)_0 < \left(\frac{d^\alpha \varphi_1}{dx^\alpha}\right)_0, \ \text{mod}\left(\frac{d^\alpha p_2}{dx^\alpha}\right)_0 < \left(\frac{d^\alpha \varphi_2}{dx^\alpha}\right)_0, \ldots \ \text{mod}\left(\frac{d^\alpha p_m}{dx^\alpha}\right)_0 < \left(\frac{d^\alpha \varphi_m}{dx^\alpha}\right)_0,$$

wo wir mit $(f(x))_0$ den Werth einer Funktion $f(x)$ für $x = x_0$ bezeichnen.

Die sämmtlichen Ableitungen einer der Differenzialgleichung (1) genügenden Funktion y lassen sich auf die Form bringen:

$$(2) \qquad \frac{d^\alpha y}{dx^\alpha} = \underset{\alpha 1}{\mathfrak{A}}(x) \cdot \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \underset{\alpha 2}{\mathfrak{A}}(x) \cdot \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + \underset{\alpha m}{\mathfrak{A}}(x) \cdot y,$$

worin die Grössen $\mathfrak{A}$ sich aus den Grössen p und deren Ableitungen durch die Operationen der Addition und Multiplication zusammensetzen.

Man bilde nunmehr die Differenzialgleichung

$$(3) \qquad \frac{d^m u}{dx^m} = \varphi_1 \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \varphi_2 \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \cdots + \varphi_m u,$$

so lassen sich die sämmtlichen Ableitungen einer derselben genügenden Funktion u in der ähnlichen Form

$$(4) \qquad \frac{d^a u}{d x^a} = \underset{a1}{\mathfrak{B}(x)} \frac{d^{m-1} u}{d x^{m-1}} + \underset{a2}{\mathfrak{B}(x)} \frac{d^{m-2} u}{d x^{m-2}} + \cdots + \underset{am}{\mathfrak{B}(x)}\, u$$

darstellen. Die Grössen $\mathfrak{B}$ werden aus den entsprechenden Grössen $\mathfrak{A}$ abgeleitet, indem man an die Stelle einer jeden Funktion p und ihrer Ableitungen die entsprechende Funktion φ und ihre entsprechenden Ableitungen setzt. Hieraus folgt, dass

$$\underset{a1}{\mathfrak{B}(x_0)} > \operatorname{mod} \underset{a1}{\mathfrak{A}(x_0)},\ \underset{a2}{\mathfrak{B}(x_0)} > \operatorname{mod} \underset{a2}{\mathfrak{A}(x_0)},\ \ldots\ \underset{am}{\mathfrak{B}(x_0)} > \operatorname{mod} \underset{am}{\mathfrak{A}(x_0)}.$$

Wenn sich daher eine in der Umgebung von x_0 eindeutige, continuirliche und endliche Funktion u bestimmen lässt, derart, dass sie der Differenzialgleichung (3) genügt und dass für $x = x_0$ die Grössen u, $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\ldots$ $\frac{d^{m-1} u}{d x^{m-1}}$ beliebig gegebene positive Werthe annehmen, so existirt auch eine in der Umgebung von x_0 eindeutige, continuirliche und endliche Funktion y von der Beschaffenheit, dass sie der Differenzialgleichung (1) genügt, und dass y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\ldots$ $\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$ für $x = x_0$ beliebig gegebene Werthe annehmen.

Setzt man $\frac{x - x_0}{r} = z$, so lässt sich die Differenzialgleichung (3) auf die Gestalt bringen:

$$(3^a) \qquad (1-z) \frac{d^m u}{d z^m} = M_1 r \frac{d^{m-1} u}{d z^{m-1}} + M_2 r^2 \frac{d^{m-2} u}{d z^{m-2}} + \cdots + M_m r^m u.$$

Versucht man dieser Differenzialgleichung durch eine Reihe $u = \sum_0^\infty {}_a\, b_a z^a$ zu genügen, so findet man für jeden ganzzahligen Werth von k die Relation:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (m+k)\ (m+k-1)\ \ldots\ (k+1)\ b_{m+k} = \\ (m+k-1)\,(m+k-2) \ldots (k+1)\,[k + M_1 r] \,.\, b_{m+k-1} \\ + M_2 r^2 \,.\, (m+k-2)\,(m+k-3) \ldots (k+1) \,.\, b_{m+k-2} \\ \qquad + \cdots + M_m r^m b_k \end{array} \right.$$

Nimmt man b_0, b_1, $\ldots$ b_{m-1} positiv an, so sind daher alle Grössen b positiv, und es ist $b_{m+k} = \frac{k + M_1 r}{m + k} \,.\, b_{m+k-1} + \psi$, wo ψ eine positive Grösse ist.

Man kann annehmen, dass $M_1 r > m$. Denn wenn dieses nicht stattfindet, so bleiben alle vorhergehenden Schlüsse a potiori gültig, wenn man M_1 so gross annimmt, dass dieser Bedingung Genüge geschieht.

Daher ist $b_{m+k} > b_{m+k-1}$ für jedes ganzzahlige k, d. h. die Grössen b wachsen mit ihrem Index, und deswegen ist $\frac{b_r}{b_s}$ nicht unendlich, wenn $r < s$, für alle Werthe von r und s.

Dividirt man die Gleichung (5) durch

$$(m+k)\ (m+k-1)\ \ldots\ (k+1)\ .\ b_{m+k-1},$$

so erhält man

$$\frac{b_{m+k}}{b_{m+k-1}} = \frac{k+M_1 r}{m+k} + \frac{M_2\ r^2}{(m+k)\ (m+k-1)} \cdot \frac{b_{m+k-2}}{b_{m+k-1}} + \cdots + \frac{M_m\ r^m}{(m+k)(m+k-1)\ldots(k+1)} \cdot \frac{b_m}{b_{m+k-1}}.$$

Hieraus folgt

$$\lim \frac{b_{m+k}}{b_{m+k-1}} = 1 \text{ für } k = \infty,$$

mithin ist

$$\lim \frac{b_{m+k}\ .\ z^{m+k}}{b_{m+k-1} . z^{m+k-1}} = z \text{ für } k = \infty,$$

d. h. die Reihe $u = \sum_0^\infty{}_\alpha\ b_\alpha\ .\ z^\alpha$ ist convergent, so lange der Modul von z kleiner ist als 1; oder die Differenzialgleichung (3) hat innerhalb T ein in der Umgebung von x_0 gültiges Integral der Form $\sum_0^\infty{}_\alpha\ b_\alpha\ (x-x_0)^\alpha$, derart dass $b_0,\ b_1,\ b_2,\ \ldots\ b_{m-1}$ oder auch u_0, $\left(\frac{du}{dx}\right)_0$, $\left(\frac{d^2 u}{dx^2}\right)_0 \cdots \left(\frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}}\right)_0$ beliebige positive Werthe erhalten können. —

Hiermit ist die Existenz einer Funktion y von der oben angegebenen Beschaffenheit erwiesen. —

Umgiebt man jeden der singulären Punkte mit einem beliebig kleinen endlichen Kreise, so ist der übrig bleibende Theil der Fläche T, der T' heissen möge, eine mehrfach zusammenhangende Fläche. Ziehen wir von jedem Kreise aus eine sich selbst und die übrigen nicht schneidende Linie, z. B. eine gerade Linie, bis zur Begrenzung von T, so wird die Fläche T' durch diese Querschnitte in eine einfach zusammenhangende T'' zerlegt. Innerhalb dieser Fläche lässt sich die eben definirte Funktion y nur auf eine Weise fortsetzen, so dass man eine innerhalb der Fläche T'' eindeutige, continuirliche und endliche Funktion y erhält, welche der Differenzialgleichung (1) genügt und so beschaffen ist, dass für einen Punkt x_0 dieser Fläche y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\ldots$ $\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$ beliebig gegebene Werthe annehmen.

Geht man in T' von x_0 aus und kehrt nach einer oder mehrmaliger Ueberschreitung eines oder mehrerer Querschnitte nach x_0 zurück, so erhalten y und dessen Ableitungen im Allgemeinen von den ursprünglichen verschiedene Werthe. Mit diesen als Anfangswerthen ist innerhalb T'' eine im Allgemeinen von y verschiedene Funktion bestimmt. Auf diese Weise erlangt man im Allgemeinen unendlich viele solcher Funktionen. Denkt man sich die Fläche T' von unendlich vielen Blättern bedeckt, alle mit denselben Querschnitten, und jedem dieser Blätter eine solche Funktion (einen Zweig) zuertheilt, so hangen diese Blätter längs der Querschnitte so zusammen, dass wenn x in der Fläche T' einen Querschnitt überschreitet, sich ein Zweig continuirlich in einen anderen der unendlich vielen Zweige fortsetzt, da die Werthe der Funktionen in T'' zu beiden Seiten eines Querschnitts im Allgemeinen von einander verschieden sind.

Hiermit ist der Verlauf eines Integrals der Differenzialgleichung (1) innerhalb T' vollständig bestimmt, wenn in einem Punkte dieser Fläche für $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ beliebig gegebene Anfangswerthe festgesetzt sind.

2.

Wenn man im Punkte x_0 für $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ m verschiedene Werthsysteme festsetzt, so erhält man m particuläre Integrale $y_1, y_2, \ldots y_m$. Wir wählen, was offenbar immer möglich ist, diese Werthsysteme so, dass die Determinante:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_1}{dx^{m-2}} & \ldots y_1 \\ \frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_2}{dx^{m-2}} & \ldots y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2}y_m}{dx^{m-2}} & \ldots y_m \end{vmatrix}$$

für $x = x_0$ nicht verschwindet. Alsdann kann jedes Integral η, welches dadurch bestimmt ist, dass $\eta, \frac{d\eta}{dx}, \frac{d^2\eta}{dx^2}, \ldots \frac{d^{m-1}\eta}{dx^{m-1}}$ für $x = x_0$ resp. die beliebig gegebenen Anfangswerthe η_0, $\eta_0', \eta_0'', \ldots \eta_0^{(m-1)}$ annehmen, als lineare homogene Funktion von $y_1, y_2 \ldots y_m$ mit constanten Coefficienten dargestellt werden, also

$$(1) \qquad \eta = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m,$$

wo $c_1, c_2, \ldots c_m$ Constanten sind.

Denn unter der gemachten Voraussetzung liefert das System linearer Gleichungen:

$$\begin{aligned} \eta_0 &= c_1 (y_1)_0 + c_2 (y_2)_0 + \cdots + c_m (y_m)_0 \\ \eta_0' &= c_1 \left(\frac{dy_1}{dx}\right)_0 + c_2 \left(\frac{dy_2}{dx}\right)_0 + \cdots + c_m \left(\frac{dy_m}{dx}\right)_0 \\ &\vdots \\ \eta_0^{(m-1)} &= c_1 \left(\frac{d^{m-1}y_1}{dx^{m-1}}\right)_0 + c_2 \left(\frac{d^{m-1}y_2}{dx^{m-1}}\right)_0 + \cdots + c_m \left(\frac{d^{m-1}y_m}{dx^{m-1}}\right)_0 \end{aligned}$$

für $c_1, c_2, \ldots c_m$ endliche und bestimmte Werthe; und wenn die Funktion η nebst ihren $m-1$ ersten Ableitungen mit der Funktion $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_m y_m$ und deren entsprechenden Ableitungen für $x = x_0$ übereinstimmt, so findet nach der vorigen Nummer diese Uebereinstimmung für alle Werthe von x statt.

Ein solches System von Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_m$, für welches die Determinante D in einem innerhalb T' liegenden Punkte nicht verschwindet, durch welches sich also alle particulären Integrale in der Form der Gleichung (1) ausdrücken lassen, werde ich im Folgenden ein Fundamentalsystem, und $y_1, y_2, \dots y_m$ dessen Elemente nennen.

Jeder Zweig einer Funktion y kann als ein particuläres Integral innerhalb T'' mit bestimmten Anfangswerthen angesehen werden, und lässt sich daher als lineare homogene Funktion von $y_1, y_2, \dots y_m$ mit constanten Coefficienten darstellen.

Hieraus ergiebt sich der Satz:

Zwischen je $m+1$ Zweigen derselben Funktion y findet eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten statt.

Denn es seien $y, y', y'', \dots y^{(m)}$ $m+1$ solche Zweige, so hat man folgende $m+1$ lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned} y &= c_1\, y_1 + c_2\, y_2 + \cdots + c_m\, y_m \\ y' &= c_1'\, y_1 + c_2'\, y_2 + \cdots + c_m'\, y_m \\ &\vdots \\ \overset{(m)}{y} &= \overset{(m)}{c_1}\, y_1 + \overset{(m)}{c_2}\, y_2 + \cdots + \overset{(m)}{c_m}\, y_m, \end{aligned}$$

wo die Grössen c sämmtlich bestimmte Constanten sind. Eliminirt man aus denselben die Grössen $y_1, y_2, \dots y_m$, so erhält man als Eliminationsresultante eine lineare homogene Gleichung zwischen $y, y', \dots y^{(m)}$ mit constanten Coefficienten.

Um einzusehen, dass bei der Bestimmung einer Funktion, welche der Differenzialgleichung (1) der vorigen Nummer genügt, der Ausgangspunkt x_0 gleichgültig sei, muss noch gezeigt werden, dass

die Determinante D eines Fundamentalsystems für die ganze Fläche T' endlich und von Null verschieden ist.

Aus den m Gleichungen:

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d^m y_1}{dx^m} &= p_1 \frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_1}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_1 \\ \frac{d^m y_2}{dx^m} &= p_1 \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_2}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_2 \\ &\vdots \\ \frac{d^m y_m}{dx^m} &= p_1 \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_m}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_m \end{aligned} \right.$$

folgt:

$$D \cdot p_1 = D^1,$$

wo D^1 aus D erhalten wird, wenn man $\frac{d^{m-1} y_1}{dx^{m-1}}, \frac{d^{m-1} y_2}{dx^{m-1}}, \dots \frac{d^{m-1} y_m}{dx^{m-1}}$ resp. durch $\frac{d^m y_1}{dx^m}$, $\frac{d^m y_2}{dx^m}, \dots \frac{d^m y_m}{dx^m}$ ersetzt. Bekanntlich ist D^1 die Ableitung von D, daher ist

$$\frac{d \log D}{dx} = p_1 \text{ oder}$$

$$(3)\qquad D = C \cdot e^{\int p_1 dx},$$

wo C eine Constante bedeutet, die durch die Anfangswerthe von $y_1, y_2, \dots y_m$ und ihren Ableitungen für $x = x_0$ bestimmt und der Voraussetzung gemäss von Null verschieden ist. Da $\int p_1\,dx$ nur für einen singulären Punkt unendlich werden kann, so folgt, dass $e^{\int p_1 dx}$ und folglich auch D innerhalb T' überall endlich und von Null verschieden ist.

Hieraus folgt auch, dass wenn die Funktionen $y_1,\ y_2,\ \dots\ y_m$ ein Fundamentalsystem bilden, sie noch ein solches System ausmachen, wenn man jede derselben auf demselben Wege um singuläre Punkte herum bis zu dem Punkte x_0 zurück fortgesetzt hat.

Die gegebene Definition eines Fundamentalsystems kann auch durch die folgende ersetzt werden:

Ein System von Integralen $\eta_1,\ \eta_2,\ \dots\ \eta_m$ bildet ein Fundamentalsystem, wenn eine Gleichung der Form

$$c_1\eta_1 + c_2\eta_2 + \cdots + c_m\eta_m = 0$$

für keine endlichen bestimmten Werthe der Constanten $c_1,\ c_2,\ \dots\ c_m$ Statt haben kann.

Denn es sei $y_1,\ y_2,\ \dots\ y_m$ irgend ein Fundamentalsystem (im Sinne der ersten Definition), so darf man setzen:

$$\begin{aligned} \eta_1 &= f_{11}\,y_1 + f_{12}\,y_2 + \cdots + f_{1m}\,y_m \\ \eta_2 &= f_{21}\,y_1 + f_{22}\,y_2 + \cdots + f_{2m}\,y_m \\ &\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \eta_m &= f_{m1}\,y_1 + f_{m2}\,y_2 + \cdots + f_{mm}\,y_m, \end{aligned}$$

wo die Grössen f Constanten sind. — Die Determinante

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1m} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{m1} & f_{m2} & \dots & f_{mm} \end{vmatrix}$$

darf nicht verschwinden, da sonst zwischen $\eta_1,\ \eta_2,\ \dots\ \eta_m$ eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten Statt finden müsste. Daher lassen sich $y_1,\ y_2,\ \dots\ y_m$ und folglich alle particulären Integrale der linearen Differenzialgleichung als lineare homogene Funktionen der Grössen $\eta_1,\ \eta_2,\ \dots\ \eta_m$ mit constanten Coefficienten darstellen. Dieses erfordert aber, dass die Determinante

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^{m-1}\eta_1}{dx^{m-1}} & \dfrac{d^{m-2}\eta_1}{dx^{m-2}} & \dots & \eta_1 \\ \dfrac{d^{m-1}\eta_2}{dx^{m-1}} & \dfrac{d^{m-2}\eta_2}{dx^{m-2}} & \dots & \eta_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{d^{m-1}\eta_m}{dx^{m-1}} & \dfrac{d^{m-2}\eta_m}{dx^{m-2}} & \dots & \eta_m \end{vmatrix}$$

innerhalb T' überall endlich und von Null verschieden ist. Hierdurch ist die Uebereinstimmung der beiden Definitionen erwiesen.

Bekanntlich kann man folgendermassen verfahren, um m particuläre Integrale der Differenzialgleichung

$$(4)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1\,\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2\,\frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m\,y,$$

zu erhalten. Es sei y_1 ein particuläres Integral derselben, welches nicht identisch verschwindet, und man setze

$$y = y_1 \int z\, dx,$$

so genügt z einer linearen Differenzialgleichung $m - 1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(5) \qquad \frac{d^{m-1} z}{d x^{m-1}} = q_1 \frac{d^{m-2} z}{d x^{m-2}} + q_2 \frac{d^{m-3} z}{d x^{m-3}} + \cdots + q_{m-1} z.$$

Es sei z_1 ein particuläres Integral dieser Differenzialgleichung, welches nicht identisch verschwindet, so ist

$$y_2 = y_1 \int z_1\, dx$$

ein zweites particuläres Integral der Differenzialgleichung (4). Man setze

$$z = z_1 \int u\, dx,$$

so genügt u einer linearen Differenzialgleichung $m - 2^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(6) \qquad \frac{d^{m-2} u}{d x^{m-2}} = r_1 \frac{d^{m-3} u}{d x^{m-3}} + r_2 \frac{d^{m-4} u}{d x^{m-4}} + \cdots + r_{m-2} u.$$

Ist u_1 ein particuläres Integral dieser Differenzialgleichung, welches nicht identisch verschwindet, so ist

$$z_2 = z_1 \int u_1\, dx$$

ein zweites particuläres Integral der Differenzialgleichung (5) und

$$y_3 = y_1 \int dx \cdot z_1 \int u_1\, dx$$

ein drittes particuläres Integral der Differenzialgleichung (4). Fährt man so fort, so gelangt man schliesslich zu einer linearen Differenzialgleichung erster Ordnung:

$$(7) \qquad \frac{dw}{dx} = t\, w,$$

und man erhält auf diese Weise m particuläre Integrale der Differenzialgleichung (4).

Wir behaupten nun,

dass die so erhaltenen particulären Integrale ein Fundamentalsystem bilden.

Ohne der Allgemeinheit zu schaden, nehmen wir $m = 3$ an. In diesem Falle ist die Differenzialgleichung (6) erster Ordnung. Bildeten nun y_1, y_2, y_3 kein Fundamentalsystem, so hätte man eine Gleichung:

$$(8) \qquad c_1 y_1 + c_2 y_1 \int z_1\, dx + c_3 y_1 \int dx \cdot z_1 \int u_1\, dx = 0,$$

wo c_1, c_2, c_3 Constanten sind. Da y_1 nicht identisch verschwindet, so darf man diese Gleichung durch y_1 dividiren; differenzirt man alsdann, so erhält man

$$c_2 z_1 + c_3 z_1 \int u_1\, dx = 0.$$

Da z_1 nicht identisch verschwindet, so darf man wieder durch z_1 dividiren, und erhält alsdann durch Differenziation

$$c_3 u_1 = 0.$$

Da nun u_1 nicht identisch verschwindet, so hätte man $c_3 = 0$. Es müsste alsdann

$$c_1 y_1 + c_2 y_1 \int z_1\, dx = 0$$

sein. Hieraus würde auf ähnliche Weise folgen $c_2 z_1 = 0$, und daher $c_2 = 0$, und folglich auch $c_1 = 0$.

Es ergiebt sich also, dass die Gleichung (8) nicht bestehen kann, und dass daher die auf die angegebene Weise ermittelten Integrale ein Fundamentalsystem bilden.

3.

Nach der No. 1 kommt die Aufgabe der Integration einer linearen Differenzialgleichung auf die Untersuchung der Frage hinaus, was aus einer durch die Anfangswerthe in einem Punkte x_0 bestimmten Funktion wird, wenn man sie innerhalb T' um einen singulären Punkt herum bis zum Punkte x_0 zurück fortsetzt. In dieser Beziehung stellen wir folgenden Satz auf:

Es sei

$$\frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y \tag{1}$$

eine lineare Differenzialgleichung m^{ter} Ordnung, wo über die Coefficienten p dieselben Voraussetzungen gemacht werden, wie am Anfange der No. 1, und a_1 irgend einer der singulären Punkte, so giebt es stets ein Fundamentalsystem, wovon wenigstens ein Element mit einer Potenz von $x - a_1$ multiplicirt in der Umgebung von a_1 eindeutig wird.

Es sei $y_1, y_2, \cdots y_m$ ein Fundamentalsystem der Differenzialgleichung (1), und es mögen nach einem Umlaufe um den singulären Punkt a_1 die Funktionen $y_1, y_2, \cdots y_m$ resp. übergehen in $y_1', y_2', \cdots y_m'$, so hat man nach der vorigen Nummer ein System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} y_1' &= \alpha_{11} y_1 + \alpha_{12} y_2 + \cdots + \alpha_{1m} y_m \\ y_2' &= \alpha_{21} y_1 + \alpha_{22} y_2 + \cdots + \alpha_{2m} y_m \\ &\vdots \\ y_m' &= \alpha_{m1} y_1 + \alpha_{m2} y_2 + \cdots + \alpha_{mm} y_m, \end{aligned} \tag{2}$$

wo die Grössen α_{rs} Constanten sind.

Es sei $u_1, u_2, \cdots u_m$ ein anderes Fundamentalsystem, welches mit dem Fundamentalsystem $y_1, y_2, \cdots y_m$ durch folgende Gleichungen zusammenhängt:

$$\begin{aligned} u_1 &= c_{11} y_1 + c_{12} y_2 + \cdots + c_{1m} y_m \\ u_2 &= c_{21} y_1 + c_{22} y_2 + \cdots + c_{2m} y_m \\ &\vdots \\ u_m &= c_{m1} y_1 + c_{m2} y_2 + \cdots + c_{mm} y_m, \end{aligned} \tag{3}$$

so müssen die Constanten c_{rs} so beschaffen sein, dass die Determinante Δ der Substitution

$$(S) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{pmatrix}$$

nicht verschwindet, da auch die Funktionen $y_1, y_2, \cdots y_m$ lineare homogene Funktionen der Grössen $u_1, u_2, \cdots u_m$ mit constanten Coefficienten sind.

Durch einen Umlauf um den singulären Punkt a_1 mögen die Funktionen $u_1, u_2, \cdots u_m$

resp. übergehen in u_1', u_2', $\cdots u_m'$, so müssen die letzteren Grössen nach der vorigen Nummer lineare homogene Funktionen mit constanten Coefficienten von den ersteren sein. Man findet diese Coefficienten, wenn man die Substitution (S) mit der Substitution

$$(\mathrm{A}) = \left\{ \begin{array}{cccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{array} \right\}$$

und die resultirende Substitution mit der Substitution $(S)^{-1}$, worunter wir die inverse Substitution von (S) verstehen, zusammensetzt. Es werde die nunmehr resultirende Substitution folgendermassen bezeichnet:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \cdots & A_{1m} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2m} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \cdots & A_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \cdots & A_{mm} \end{array} \right\},$$

so wollen wir beweisen, dass man den Gleichungen

$$(4) \qquad A_{12} = 0, A_{13} = 0, \cdots A_{1m} = 0$$

durch solche Werthe der Grössen c_{rs} genügen kann, für welche die Determinante Δ und die Grösse A_{11} von Null verschieden sind.

Es sei die aus der Substitution (S) und der Substitution (A) zusammengesetzte Substitution:

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} B_{11} & B_{12} & B_{13} & \cdots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & \cdots & B_{2m} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & \cdots & B_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & B_{m3} & \cdots & B_{mm} \end{array} \right\},$$

wo

$$B_{rs} = c_{r1}\,\alpha_{1s} + c_{r2}\,\alpha_{2s} + \cdots + c_{rm}\,\alpha_{ms}.$$

Ferner ist

$$(S)^{-1} = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial c_{11}}, & \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial c_{21}}, & \cdots & \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial c_{m1}} \\ \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial c_{12}}, & \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial c_{22}}, & & \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial c_{m2}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial c_{1m}}, & \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial c_{2m}}, & \cdots & \frac{1}{\Delta}\frac{\partial \Delta}{\partial c_{mm}} \end{array} \right\},$$

Hieraus ergiebt sich

$$A_{12} = \frac{1}{\Delta}\left\{B_{11}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{21}} + B_{12}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{22}} + \cdots + B_{1m}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{2m}}\right\}$$

$$A_{13} = \frac{1}{\Delta}\left\{B_{11}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{31}} + B_{12}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{32}} + \cdots + B_{1m}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{3m}}\right\}$$

$$\vdots$$

$$A_{1m} = \frac{1}{\Delta}\left\{B_{11}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{m1}} + B_{12}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{m2}} + \cdots + B_{1m}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{mm}}\right\}$$

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta}\left\{B_{11}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{11}} + B_{12}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{12}} + \cdots + B_{1m}\frac{\partial\Delta}{\partial c_{1m}}\right\},$$

oder auch

$$A_{12} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ c_{31} & c_{32} & \cdots & c_{3m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ c_{41} & c_{42} & \cdots & c_{4m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}$$

etc.

$$A_{1m} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m-1\,1} & c_{m-1\,2} & \cdots & c_{m-1\,m} \\ B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \end{vmatrix}$$

$$A_{11} = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mm} \end{vmatrix}.$$

Die Determinante δ der Substitution (A) ist von Null verschieden, da nach der vorigen Nummer die Grössen $y_1', y_2', \cdots y_m'$ ebenfalls ein Fundamentalsystem bilden. — Man setze nun

$$\begin{aligned} B_{11} &= c_{11}\alpha_{11} + c_{12}\alpha_{21} + \cdots + c_{1m}\alpha_{m1} = w\,.\,c_{11} \\ B_{12} &= c_{11}\alpha_{12} + c_{12}\alpha_{22} + \cdots + c_{1m}\alpha_{m2} = w\,.\,c_{12} \\ B_{13} &= c_{11}\alpha_{13} + c_{12}\alpha_{23} + \cdots + c_{1m}\alpha_{m3} = w\,.\,c_{13} \\ &\vdots \\ B_{1m} &= c_{11}\alpha_{1m} + c_{12}\alpha_{2m} + \cdots + c_{1m}\alpha_{mm} = w\,.\,c_{1m}, \end{aligned} \tag{5}$$

wo w durch die folgende Gleichung bestimmt ist:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - w & \alpha_{21} & \cdots & \alpha_{m1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - w & \cdots & \alpha_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{1m} & \alpha_{2m} & \cdots & \alpha_{mm} - w \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Die Gleichung (6) liefert immer einen endlichen von Null verschiedenen Werth für w, weil der Coefficient der höchsten Potenz w^m die Einheit ist, und weil das von w unabhängige Glied gleich δ ist.

Ist w gemäss der Gleichung (6) bestimmt, so kann man bekanntlich den Gleichungen (5) durch Werthe von $c_{11}, c_{12}, \cdots c_{1m}$ genügen, die nicht alle verschwinden. Durch solche Werthe dieser Grössen verschwinden aber die Determinanten $A_{12}, A_{13} \cdots A_{1m}$ identisch, weil in ihnen zwei Reihen sich nur durch einen constanten Factor unterscheiden, während die Determinante A_{11} dadurch in w übergeht. Da aber die Grössen $c_{11}, c_{12} \cdots c_{1m}$ nicht alle Null sind, und da bei deren Bestimmung die Grössen c_{rs}, in denen $r > 1$ ist, willkürlich geblieben sind, so folgt, dass man über die letzteren so verfügen kann, dass Δ nicht verschwindet. Weil ferner w von Null verschieden ist, hat A_{11} einen bestimmten, von Null verschiedenen Werth.

Setzt man

$$A_{11} = e^{2k\pi\sqrt{-1}}$$

so hat k einen endlichen bestimmten Werth, und von dem Fundamentalsystem $u_1, u_2, \cdots u_m$ hat das erste Element die Eigenschaft, mit $(x-a_1)^{-k}$ multiplicirt nach einem Umlaufe um den Punkt a_1 den ursprünglichen Werth wieder anzunehmen.

4.

Wir nehmen jetzt an, dass in der Differenzialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y$$

die Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_m$ in der ganzen unendlichen Ebene eindeutige Funktionen von x seien, die nur für eine endliche Anzahl von Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\rho$ unstetig werden. Ausserdem muss jetzt im Allgemeinen der Punkt ∞ als singulärer Punkt aufgefasst werden.

Die Querschnitte, wodurch die Fläche T' in eine einfach zusammenhängende T'' zerlegt wird, sind jetzt Linien, welche von den um die Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\rho$ beschriebenen beliebig kleinen aber endlichen Kreisen ausgehend, sich selbst und die übrigen niemals schneidend ins Unendliche verlaufen.

Nach dem in der vorigen Nummer gegebenen Satze lässt sich in Bezug auf jeden singulären Punkt a_i ein Fundamentalsystem bilden, wovon **ein** Element mit einer Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig wird. Im Allgemeinen haben dann die übrigen Elemente des Fundamentalsystems diese Eigenschaft nicht. Wir stellen uns daher die Aufgabe, die Bedingungen dafür aufzusuchen, dass die sämmtlichen Elemente eines Fundamentalsystems in Bezug auf jeden singulären Punkt diese Eigenschaft haben (den Punkt ∞ mit eingerechnet). Wir fügen aber ausserdem noch die Bedingung hinzu, dass diese Elemente in jedem singulären Punkte nur von einer endlichen Ordnung unendlich werden.

Ein Fundamentalsystem, welches in Bezug auf den singulären Punkt a_i diese Eigenschaft hat, nennen wir das zu **diesem Punkte gehörige** Fundamentalsystem.

Wir stellen uns also folgende Aufgabe:

Man soll die Beschaffenheit der Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_m$ **der Differenzialgleichung (1) ermitteln, in dem Falle, dass zu jedem singulären Punkte** a_i

ein Fundamentalsystem gehört, dessen sämmtliche Elemente jedes mit einer bestimmten Potenz von $x - a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig und endlich werden, dass ausserdem zum Punkte ∞ ein Fundamentalsystem gehört, dessen sämmtliche Elemente jedes mit einer Potenz von x multiplicirt in der Umgebung des Unendlichkeitspunktes, d. h. ausserhalb einer die singulären Punkte $a_1, a_2 \cdots a_\rho$ umschliessenden Curve eindeutig und endlich werden.

I. Wir setzen für ∞ das Zeichen $a_{\rho+1}$, und bezeichnen ein Fundamentalsystem, welches zum singulären Punkte a_i gehört, mit $y^{(i)}_1, y^{(i)}_2 \cdots y^{(i)}_m$. Da die Grössen $y^{(i)}_1, y^{(i)}_2 \cdots y^{(i)}_m$, für jeden Werth von i aus der Zahlenreihe $1, 2, \cdots \rho + 1$, ein Fundamentalsystem constituiren, so darf man setzen:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
y_1^{(1)} &= b_{11}^{(i)} y_1^{(i)} + b_{12}^{(i)} y_2^{(i)} + \cdots + b_{1m}^{(i)} y_m^{(i)} \\
y_2^{(1)} &= b_{21}^{(i)} y_1^{(i)} + b_{22}^{(i)} y_2^{(i)} + \cdots + b_{2m}^{(i)} y_m^{(i)} \\
&\;\;\vdots \\
y_m^{(1)} &= b_{m1}^{(i)} y_1^{(i)} + b_{m2}^{(i)} y_2^{(i)} + \cdots + b_{mm}^{(i)} y_m^{(i)},
\end{aligned}
$$

wo die Grössen b Constanten bedeuten.

Wir wollen die Substitution

$$
\begin{Bmatrix}
b_{11}^{(i)} & b_{12}^{(i)} & \cdots & b_{1m}^{(i)} \\
b_{21}^{(i)} & b_{22}^{(i)} & \cdots & b_{2m}^{(i)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
b_{m1}^{(i)} & b_{m2}^{(i)} & \cdots & b_{mm}^{(i)}
\end{Bmatrix}
$$

mit $(B)_i$ bezeichnen, und für $i = 1, 2, \cdots \rho$

$$y_\alpha^{(i)} = (x - a_i)^{r_{i\alpha}} \cdot \varphi_\alpha^{(i)},$$

für $i = \rho + 1$ aber

$$y_\alpha^{(\rho+1)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{r_{\rho+1,\alpha}} \cdot \varphi_\alpha^{(\rho+1)}$$

setzen, wo $\varphi_\alpha^{(i)}$ in der Umgebung von a_i eindeutig, endlich und continuirlich ist.

Nach einem Umlaufe um den Punkt a_1 gehen daher die Funktionen $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \cdots y_m^{(1)}$ resp. über in $e^{2r_{11}\pi\sqrt{-1}} \cdot y_1^{(1)}, e^{2r_{12}\pi\sqrt{-1}} \cdot y_2^{(1)}, \cdots\cdots e^{2r_{1m}\pi\sqrt{-1}} \cdot y_m^{(1)}$. — Um zu finden, worin jene Funktionen übergehen, wenn man einen Umlauf um den Punkt a_i macht, wo i von 1 verschieden ist, muss man auf dieselben zuerst die Substitution $(B)_i$ anwenden, alsdann die Substitution

$$
(R)_i = \begin{Bmatrix}
e^{2r_{i1}\pi\sqrt{-1}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & e^{2r_{i2}\pi\sqrt{-1}} & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & e^{2r_{i3}\pi\sqrt{-1}} & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & e^{2r_{im}\pi\sqrt{-1}}
\end{Bmatrix}
$$

und endlich die inverse Substitution von $(B)_i$, die wir wieder auf die übliche Weise mit $\overset{-1}{(B)_i}$ bezeichnen wollen.

Durchläuft x in directer Richtung die Begrenzung einer Fläche, welche die sämmtlichen singulären Punkte enthält, darauf dieselbe Curve in entgegengesetzter Richtung, so erhält die Funktion offenbar ihren ursprünglichen Werth wieder. Der letztere Weg ist aber einem Umlaufe um den Punkt ∞ gleich zu achten, während der erstere durch die successiven Umläufe um die einzelnen singulären Punkte ersetzt werden kann. Man kann sich demnach, wenn man den Punkt ∞ mit zu den singulären Punkten rechnet, auch so ausdrücken: die Funktion nimmt zuletzt ihren früheren Werth an, wenn man successive alle singulären Punkte umkreist.

Bezeichnen wir eine Substitution (S), die durch Zusammensetzung mehrerer anderer (k), (l), $\cdots$ entstanden ist, symbolisch mit

$$(S) = (k)\,(l)\,\cdots,$$

so werden die Werthe, welche die Funktionen $y_1^{(1)}, y_2^{(1)} \cdots y_m^{(1)}$ nach successiver Umkreisung sämmtlicher singulärer Punkte erhalten, gefunden, wenn man auf dieselben die Substitution

$$(R)_1\,(B)_2\,(R)_2\,\overset{-1}{(B)_2}\,(B)_3\,(R)_3\,\overset{-1}{(B)_3}\cdots(B)_{\rho+1}\,(R)_{\rho+1}\,\overset{-1}{(B)_{\rho+1}}$$

anwendet. — Weil nun durch diese Substitution die Funktionen $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \cdots y_m^{(1)}$ jede in sich selbst verwandelt werden, so muss sie mit der folgenden übereinstimmen:

$$\left\{\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right\}.$$

Da aber die Determinante aus den Elementen einer Substitution (S), die aus den Substitutionen (k), (l) $\cdots$ zusammengesetzt ist, gleich ist dem Produkte der Determinanten aus den Elementen von (k), von (l) etc., so muss

$$\text{Det.}\,(R)_1\ \text{Det.}\,(B)_2\ \text{Det.}\,(R)_2\ \text{Det.}\,\overset{-1}{(B)_2}\ .\ \text{Det.}\,(B)_3\ \text{Det.}\,(R)_3\ \text{Det.}\,\overset{-1}{(B)_3}\ \cdots\cdots\cdots\ \times$$
$$\text{Det.}\,(B)_{\rho+1}\ \text{Det.}\,(R)_{\rho+1}\ \text{Det.}\,\overset{-1}{(B)_{\rho+1}} = 1$$

sein.

Nun ist

$$\text{Det.}\,(B)_i\ .\ \text{Det.}\,\overset{-1}{(B)_i} = 1$$

und

$$\text{Det.}\,(R)_i = e^{2\pi\sqrt{-1}\sum_1^m{}_\alpha r_{i\alpha}},$$

folglich ist

$$(3) \qquad \sum_1^{\rho+1}{}_i\ \sum_1^m{}_\alpha\ r_{i\alpha} = \text{einer ganzen Zahl.}$$

Diese ganze Zahl wollen wir mit k bezeichnen.

Nennt man $r_{i\alpha}$ den Exponenten, zu dem $y_\alpha^{(i)}$ gehört, so kann man dieses Resultat so aussprechen:

Die Summe der Exponenten, zu welchen die Elemente der sämmtlichen $\rho+1$ Fundamentalsysteme gehören, ist eine ganze Zahl.

II. Wir stellen uns jetzt vor, was den gemachten Voraussetzungen gemäss erlaubt ist, dass die Exponenten, zu denen die einzelnen Elemente irgend eines Fundamentalsystems gehören, so angenommen sind, dass die Grössen $\varphi_{\alpha}^{(i)}$ im Punkte a_i auch nicht mehr Null werden. Alsdann kann man annehmen, dass die zu ein und demselben Fundamentalsysteme gehörigen Exponenten alle von einander verschieden sind.

Vertheilt man nämlich die Elemente eines zum Punkte a_i $(i = 1, 2, \cdots \rho)$ gehörigen Fundamentalsystems $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots y_m^{(i)}$, welchen resp. die Exponenten $r_{i1}, r_{i2}, \cdots r_{im}$ zuertheilt sind, in Gruppen, derart, dass in jeder Gruppe solche Elemente enthalten sind, deren Exponenten sich nur um ganze Zahlen von einander unterscheiden oder gleich sind, die Exponenten der Elemente der verschiedenen Gruppen aber weder gleich noch um ganze Zahlen von einander verchieden sind. — Es mögen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots y_n^{(i)}$ eine solche Gruppe von n Elementen bilden. Der in algebraischem Sinne kleinste Exponent in dieser Gruppe (wenn sie complex sind, derjenige, dessen reeller Theil in algebraischem Sinne der kleinste ist), sei r_{i1}, und man setze in der Differenzialgleichung (1) $y = (x-a_i)^{r_{i1}} \cdot u$, so muss die Differenzialgleichung in u ein Integral der Form

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n$$

haben, worin $c_1, c_2, \cdots c_n$ Constanten und $f_1, f_2, \cdots f_n$ in der Umgebung von a_i eindeutige, continuirliche und endliche Funktionen sind, derart dass

$$f_1 = (x-a_i)^{k_1}\,\psi_1,\; f_2 = (x-a_i)^{k_2}\,\psi_2,\; \cdots\; f_n = (x-a_i)^{k_n}\,\psi_n,$$

wo $k_1, k_2, \cdots k_n$ von einander verschiedene positive ganze Zahlen sind, und $\psi_1, \psi_2, \cdots \psi_n$ für $x = a_i$ nicht mehr verschwinden. Dieses ergiebt sich daraus, dass die Coefficienten $\mathfrak{b}_\alpha$ einer Reihenentwickelung $\sum_0^\infty{}_\alpha (x-a_i)^\alpha \cdot \mathfrak{b}_\alpha$, welche einer linearen Differenzialgleichung genügen soll, sich linear durch eine gewisse Anzahl von ihnen ausdrücken lassen. Die Constanten $c_1, c_2, \cdots c_n$ müssen bei der Bestimmung der Coefficienten der Reihenentwickelung willkürlich geblieben sein, damit man durch Particularisiren derselben die n Funktionen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots y_n^{(i)}$ bestimmen könne, zwischen denen keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten besteht. Denn gesetzt, die Anzahl der unabhängigen Constanten c, folglich auch der Funktionen f reducirte sich auf eine Anzahl l, die kleiner ist als n, und man hätte durch Particularisiren der Constanten

$$\begin{aligned}
(x-a_i)^{-r_{i1}}\, y_1^{(i)} &= c_{11} f_1 + c_{12} f_2 + \cdots + c_{1l} f_l \\
(x-a_i)^{-r_{i1}}\, y_2^{(i)} &= c_{21} f_1 + c_{22} f_2 + \cdots + c_{2l} f_l \\
&\vdots \\
(x-a_i)^{-r_{i1}}\, y_n^{(i)} &= c_{n1} f_1 + c_{n2} f_2 + \cdots + c_{nl} f_l,
\end{aligned}$$

so führte die Elimination der l Grössen $f_1, f_2, \cdots f_l$ aus diesen n Gleichungen auf eine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten zwischen den Grössen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)} \cdots y_n^{(i)}$.

Es sei daher

$$\begin{aligned}
(x-a_i)^{-r_{i1}}\, y_1^{(i)} &= c_{11} f_1 + c_{12} f_2 + \cdots + c_{1n} f_n \\
(x-a_i)^{-r_{i1}}\, y_2^{(i)} &= c_{21} f_1 + c_{22} f_2 + \cdots + c_{2n} f_n \\
&\vdots \\
(x-a_i)^{-r_{i1}}\, y_n^{(i)} &= c_{n1} f_1 + c_{n2} f_2 + \cdots + c_{nn} f_n,
\end{aligned}$$

so darf die Determinante der Grössen c in diesen Gleichungen nicht verschwinden, weil daraus eine lineare homogene Relation zwischen den Grössen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots y_n^{(i)}$, mit constanten Coefficienten folgen würde.

Es ist daher

$$(x-a_i)^{r_{i1}} \cdot f_1, (x-a_i)^{r_{i1}} \cdot f_2, \cdots (x-a_i)^{r_{i1}} \cdot f_n, y_{n+1}^{(i)} \cdots y_m^{(i)}$$

ein Fundamentalsystem, da eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten zwischen diesen letzteren Grössen eine ähnliche Relation zwischen $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots y_m^{(i)}$ herbeiführen würde. Hierdurch sind die Glieder der Gruppe $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots y_n^{(i)}$ durch solche ersetzt, deren Exponenten $r_{i1}+k_1, r_{i1}+k_2, \cdots r_{i1}+k_n$ von einander verschieden sind. Da dieselbe Umwandlung für jede Gruppe vorgenommen werden kann, so folgt, dass es für jeden singulären Punkt ein Fundamentalsystem giebt, dessen Elemente zu verschiedenen Exponenten gehören.

Um die Richtigkeit unserer Behauptung auch für den Punkt ∞ einzusehen, denke man sich in der Differenzialgleichung (1) die Substitution $x = \frac{1}{z}$ gemacht, worauf der Beweis für den Nullpunkt als singulären Punkt auf dieselbe Art zu führen ist, wie es eben für die singulären Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\varrho$ geschehen ist.

III. Es ist

$$(4)\qquad \begin{aligned} \frac{d^m y_1^{(i)}}{dx^m} &= p_1 \frac{d^{m-1} y_1^{(i)}}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_1^{(i)}}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_1^{(i)} \\ \frac{d^m y_2^{(i)}}{dx^m} &= p_1 \frac{d^{m-1} y_2^{(i)}}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_2^{(i)}}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_2^{(i)} \\ &\vdots \\ \frac{d^m y_m^{(i)}}{dx^m} &= p_1 \frac{d^{m-1} y_m^{(i)}}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y_m^{(i)}}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y_m^{(i)}. \end{aligned}$$

Setzt man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{d^{m-1} y_1^{(i)}}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_1^{(i)}}{dx^{m-2}} & \cdots & y_1^{(i)} \\ \frac{d^{m-1} y_2^{(i)}}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_2^{(i)}}{dx^{m-2}} & \cdots & y_2^{(i)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{d^{m-1} y_m^{(i)}}{dx^{m-1}} & \frac{d^{m-2} y_m^{(i)}}{dx^{m-2}} & \cdots & y_m^{(i)} \end{vmatrix} = \Delta_0^{(i)},$$

und bezeichnet mit $\Delta_\alpha^{(i)}$ diejenige Determinante, welche man aus $\Delta_0^{(i)}$ erhält, wenn man die i^{te} Verticalreihe der letzteren durch $\frac{d^m y_1^{(i)}}{dx^m}, \frac{d^m y_2^{(i)}}{dx^m}, \ldots \frac{d^m y_m^{(i)}}{dx^m}$ ersetzt, so ergiebt sich

$$(5)\qquad \Delta_0^{(i)} p_\alpha = \Delta_\alpha^{(i)}.$$

Aus den Gleichungen (2) folgt die Relation

$$(6) \qquad \Delta_\alpha^{(1)} = \text{Det.}\,(B)_i\,\Delta_\alpha^{(i)}$$

für $\alpha = 0, 1, 2 \cdots m$. — Da sowohl $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \cdots y_m^{(1)}$ als auch $y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots y_m^{(i)}$ ein Fundamentalsystem constituiren, darf Det. $(B)_i$ nicht verschwinden. Daher sind $\Delta_\alpha^{(1)}$ und $\Delta_\alpha^{(i)}$ zu gleicher Zeit eindeutig oder mehrdeutig, endlich oder unendlich, Null oder von Null verschieden. — Da ferner $y_\alpha^{(i)}(x-a_i)^{-r_{i\alpha}}$, für $i = 1, 2 \cdots \rho$ in der Umgebung von a_i eindeutig, continuirlich und endlich sein soll, so hat $\frac{d^s y_\alpha^{(i)}}{dx^s}\cdot(x-a_i)^{-r_{i\alpha}+s}$ dieselbe Eigenschaft. Mithin ist $\Delta_0^{(1)}(x-a_1)^{-\Sigma_\alpha r_{1\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$ in der Umgebung von a_1 und $\Delta_0^{(i)}(x-a_i)^{-\Sigma_\alpha r_{i\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$ in der Umgebung von a_i eindeutig, endlich und continuirlich. Nach Gleichung (6) hat daher auch $\Delta_0^{(1)}(x-a_i)^{-\Sigma_\alpha r_{i\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$ in der Umgebung von a_i dieselbe Eigenschaft. Hieraus ergiebt sich, dass der Ausdruck:

$$K_0 = \Delta_0^{(1)}(x-a_1)^{-\Sigma_\alpha r_{1\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}(x-a_2)^{-\Sigma_\alpha r_{2\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}\cdots(x-a_\rho)^{-\Sigma_\alpha r_{\rho\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$$

für alle endlichen Werthe von x eindeutig, endlich und continuirlich ist.

Weil ferner $y_\alpha^{(\rho+1)}x^{r_{\rho+1,\alpha}}$ in der Umgebung von ∞ eindeutig, continuirlich und endlich ist, so hat $\frac{d^s y_\alpha^{(\rho+1)}}{dx^s}\cdot x^{r_{\rho+1,\alpha}+s}$ dieselbe Eigenschaft, daher auch $\Delta_0^{(\rho+1)}x^{\Sigma_\alpha r_{\rho+1,\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$, und schliesslich auch $\Delta_0^{(1)}x^{\Sigma_\alpha r_{\rho+1,\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$.

Daraus folgt, dass K_0 für $x = \infty$, unendlich ist höchstens von der Ordnung

$$-\sum_1^m{}_\alpha\sum_1^{\rho+1}{}_i\, r_{i\alpha} + (\rho-1)\frac{m(m-1)}{2} = -k + (\rho-1)\frac{m(m-1)}{2}.$$

Es ist aber $\Delta_0^{(i)}(x-a_i)^{-\Sigma_\alpha r_{i\alpha}+\frac{m(m-1)}{2}}$, $(i = 1, 2, \cdots \rho)$ für $x = a_i$ gleich dem Producte $\varphi_1^{(i)}(a_i)\;\varphi_2^{(i)}(a_i)\cdots\varphi_m^{(i)}(a_i)$ mal der Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{i1}(r_{i1}-1)\cdots(r_{i1}-m+2), & r_{i1}(r_{i1}-1)\cdots(r_{i1}-m+3), & \cdots\cdots & r_{i1}, & 1 \\ r_{i2}(r_{i2}-1)\cdots(r_{i2}-m+2), & r_{i2}(r_{i2}-1)\cdots(r_{i2}-m+3), & \cdots\cdots & r_{i2}, & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ r_{im}(r_{im}-1)\cdots(r_{im}-m+2), & r_{im}(r_{im}-1)\cdots(r_{im}-m+3), & \cdots\cdots & r_{im}, & 1 \end{vmatrix}$$

Ferner sind die Grössen φ für $x = a_i$ von Null verschieden, und die letztere Determinante ist gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{i1}^{m-1}, & r_{i1}^{m-2}, & \cdots & r_{i1}, & 1 \\ r_{i2}^{m-1}, & r_{i2}^{m-2}, & \cdots & r_{i2}, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ r_{im}^{m-1}, & r_{im}^{m-2}, & \cdots & r_{im}, & 1 \end{vmatrix},$$

welche bekanntlich von Null verschieden ist, da nicht zwei der Grössen $r_{i1}, r_{i2}, \cdots r_{im}$ einander gleich sind.

Folglich ist auch $\Delta_0^{(i)} (x-a_i)^{-\Sigma_a r_{ia} + \frac{m(m-1)}{2}}$ und daher auch $\Delta_0^{(1)} (x-a_i)^{-\Sigma_a r_{ia} + \frac{m(m-1)}{2}}$ für $x = a_i$ von Null verschieden.

Ebenso ist $\Delta_0^{(\rho+1)} x^{\Sigma_a r_{\rho+1,a} + \frac{m(m-1)}{2}}$ für $x = \infty$ gleich dem Producte $\pm\ \varphi_1^{(\rho+1)}(\infty)\ \varphi_2^{(\rho+1)}(\infty)\ \cdots\ \varphi_m^{(\rho+1)}(\infty)$ mal der Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{\rho+1,1}(r_{\rho+1,1}+1)\cdots(r_{\rho+1,1}+m-2), & r_{\rho+1,1}(r_{\rho+1,1}+1)\cdots(r_{\rho+1,1}+m-3), & \cdots & r_{\rho+1,1}, & 1 \\ r_{\rho+1,2}(r_{\rho+1,2}+1)\cdots(r_{\rho+1,2}+m-2), & r_{\rho+1,2}(r_{\rho+1,2}+1)\cdots(r_{\rho+1,2}+m-3), & \cdots & r_{\rho+1,2}, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{\rho+1,m}(r_{\rho+1,m}+1)\cdots(r_{\rho+1,m}+m-2), & r_{\rho+1,m}(r_{\rho+1,m}+1)\cdots(r_{\rho+1,m}+m-3), & \cdots & r_{\rho+1,m}, & 1 \end{vmatrix}$$

Es sind wieder die Grössen φ für $x = \infty$ von Null verschieden, und die letztere Determinante gleich der Determinante

$$\begin{vmatrix} r_{\rho+1,1}^{m-1}, & r_{\rho+1,1}^{m-2} & \cdots & r_{\rho+1,1}, & 1 \\ r_{\rho+1,2}^{m-1}, & r_{\rho+1,2}^{m-2} & \cdots & r_{\rho+1,2}, & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ r_{\rho+1,m}^{m-1}, & r_{\rho+1,m}^{m-2} & \cdots & r_{\rho+1,m}, & 1 \end{vmatrix},$$

welche von Null verschieden ist, da nicht zwei der Grössen $r_{\rho+1,1}, r_{\rho+1,2}, \cdots r_{\rho+1,m}$ einander gleich sind.

Folglich ist $\Delta_0^{(\rho+1)} x^{\Sigma_a r_{\rho+1,a} + \frac{m(m-1)}{2}}$, und daher auch $\Delta_0^{(1)} x^{\Sigma_a r_{\rho+1,a} + \frac{m(m-1)}{2}}$ für $x = \infty$ von Null verschieden.

Aus der Gleichung (5) ergiebt sich (vergl. No. 2)

$$\Delta_0^{(i)} = C e^{\int p_1 dx},$$

wo C eine nicht verschwindende Constante ist. Damit $e^{\int p_1 dx} \cdot (x-a_i)^{-\Sigma_a r_{ia} + \frac{m(m-1)}{2}}$ in der Umgebung von a_i endlich, eindeutig, continuirlich und von Null verschieden sei, muss

$$\lim\ (x-a_i) \cdot p_1 \text{ für } x = a_i$$

einen endlichen Werth haben, und es muss das Residuum

$$\mathcal{E} \frac{(x-a_i)p_1}{((x-a_i))} = \Sigma_a r_{ia} - \frac{m(m-1)}{2}$$

sein. — Damit ferner $e^{\int p_1 dx} \cdot x^{\Sigma_\mathfrak{a} r_{\rho+1,\mathfrak{a}} + \frac{m(m-1)}{2}}$ in der Umgebung von ∞ eindeutig, endlich, continuirlich und von Null verschieden sei, darf

$$\lim (x \cdot p_1) \text{ für } x = \infty$$

nicht unendlich sein. Bezeichnet man diesen Grenzwerth mit $\mathfrak{F}$, so hat man

$$\mathfrak{F} = -\Sigma_\mathfrak{a} r_{\rho+1,\mathfrak{a}} - \frac{m(m-1)}{2},$$

so dass

$$(7) \qquad \mathcal{E}((p_1)) - \mathfrak{F} = k - (\rho-1) \frac{m(m-1)}{2},$$

wenn man mit $\mathcal{E}((p_1))$ den Integralrest von p_1 bezeichnet.

Da aber p_1 der Voraussetzung gemäss in der ganzen Ebene eindeutig und nur in einer endlichen Anzahl von Punkten unendlich ist, da wir ferner jetzt gefunden haben, dass es in diesen Punkten von einer endlichen Ordnung unendlich und für $x = \infty$ nicht unendlich ist, so ist p_1 bekanntlich eine rationale Funktion von x.

Die Bedingung, dass $\lim (x p_1)$ für $x = \infty$ nicht unendlich sei, erfordert, dass der Grad des Nenners von p_1 mindestens um eine Einheit höher ist als der des Zählers; in Folge dessen ist aber bekanntlich

$$\mathcal{E}((p_1)) - \mathfrak{F} = 0,$$

so dass sich aus der Gleichung (7) ergiebt

$$(8) \qquad k = (\rho-1) \frac{m(m-1)}{2}.$$

Daher ist K_0 eine Constante, und zwar ist diese Constante von Null verschieden, weil $\Delta_0^{(1)}$ nicht verschwinden darf, wenn $y_1^{(i)}, y_2^{(i)} \dots y_m^{(i)}$ ein Fundamentalsystem constituiren sollen.

IV. Auf ähnliche Weise findet man, dass der Ausdruck

$$K_\mathfrak{b} = \Delta_\mathfrak{b}^{(1)} (x-a_1)^{-\Sigma_\mathfrak{a} r_{1\mathfrak{a}} + \frac{m(m-1)}{2} + \mathfrak{b}} (x-a_2)^{-\Sigma_\mathfrak{a} r_{2\mathfrak{a}} + \frac{m(m-1)}{2} + \mathfrak{b}} \dots (x-a_\rho)^{-\Sigma_\mathfrak{a} r_{m\mathfrak{a}} + \frac{m(m-1)}{2} + \mathfrak{b}},$$

wo $\mathfrak{b}$ jede der Zahlen $1, 2, \cdots m$ bedeutet, für jedes endliche x eindeutig, continuirlich und endlich ist. — Da ferner $\Delta_\mathfrak{b}^{(1)} \cdot x^{\Sigma_\mathfrak{a} r_{\rho+1,\mathfrak{a}} + \frac{m(m-1)}{2} + \mathfrak{b}}$ in der Umgebung von ∞ eindeutig, endlich und continuirlich ist, so folgt, dass der Ausdruck $K_\mathfrak{b}$ eine ganze Funktion höchstens vom Grade $-k + (\rho-1)\frac{m(m-1)}{2} + (\rho-1)\mathfrak{b} = (\rho-1)\mathfrak{b}$ ist.

Bezeichnet man daher mit $F_s(x)$ eine ganze Funktion von x höchstens vom Grade s, so folgt mit Hülfe der Gleichung (5):

$$(9) \qquad p_\mathfrak{b} = \frac{F_{(\rho-1)\mathfrak{b}}(x)}{(x-a_1)^\mathfrak{b} (x-a_2)^\mathfrak{b} \cdots (x-a_\rho)^\mathfrak{b}}$$

für $\mathfrak{b} = 1, 2, \cdots m$.

Die Differenzialgleichung (1) muss daher, um den in der Aufgabe gestellten Forderungen zu genügen, die folgende Form haben:

$$(10)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{F_{\rho-1}(x)}{\psi}\,\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{F_{2(\rho-1)}(x)}{\psi^2}\,\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{F_{(m-1)(\rho-1)}(x)}{\psi^{m-1}}\,\frac{dy}{dx} + \frac{F_{m(\rho-1)}(x)}{\psi^m}\,y,$$

wo

$$\psi = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_\rho)$$

gesetzt ist.

V. Setzen wir

$$\frac{F_{\mathfrak{a}(\rho-1)}(x)\cdot(x-a_i)^{\mathfrak{a}}}{\psi^{\mathfrak{a}}} = P_{i\mathfrak{a}}(x)$$

für $\mathfrak{a} = 1, 2, \cdots m$, so lässt sich die Differenzialgleichung (10) folgendermassen schreiben:

$$(11)\qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{P_{i1}(x)}{(x-a_i)}\,\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{P_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\,\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \cdots + \frac{P_{im}(x)}{(x-a_i)^m}\,y.$$

Es sei

$$y = (x-a_i)^r u,$$

so verwandelt sich diese Differenzialgleichung in die folgende:

$$(12)\qquad \frac{d^m u}{dx^m} = \frac{P'_{i1}(x)}{(x-a_i)}\,\frac{d^{m-1}u}{dx^{m-1}} + \frac{P'_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\,\frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{P'_{im}(x)}{(x-a_i)^m}\,u,$$

wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\begin{aligned} P'_{i\mathfrak{a}}(x) = \\ & \frac{-m(m-1)\cdots(m-\mathfrak{a}+1)}{1\cdot 2\cdots \mathfrak{a}}\, r(r-1)\cdots(r-\mathfrak{a}+1) + \\ & \frac{(m-1)(m-2)\cdots(m-\mathfrak{a}+1)}{1\cdot 2\cdots(\mathfrak{a}-1)}\, r(r-1)\cdots(r-\mathfrak{a}+2)\, P_{i1}(x) + \\ & \frac{(m-2)(m-3)\cdots(m-\mathfrak{a}+1)}{1\cdot 2\cdots(\mathfrak{a}-2)}\, r(r-1)\cdots(r-\mathfrak{a}+3)\, P_{i2}(x) + \\ & \frac{(m-3)(m-4)\cdots(m-\mathfrak{a}+1)}{1\cdot 2\cdots(\mathfrak{a}-3)}\, r(r-1)\cdots(r-\mathfrak{a}+4)\, P_{i3}(x) \\ & + \cdots + P_{i\mathfrak{a}}(x) \end{aligned}$$

für $\mathfrak{a} = 1, 2, \cdots m$.

Bedeutet r eine der Zahlen r_{i1}, r_{i2}, $\cdots$ r_{im}, so soll der Annahme nach der Differenzialgleichung (12) durch eine in der Umgebung von a_i convergente Reihe

$$u = \sum_0^\infty{}_{\mathfrak{a}}\, c_{\mathfrak{a}}\,(x-a_i)^{\mathfrak{a}}$$

genügt werden, wo c_0 von Null verschieden ist. Setzt man diese Reihe für u in die Differenzialgleichung ein, so ergiebt der Coefficient von $(x-a_i)^{-m}$ die Gleichung:

$$P'_{im}(a_i)\,.\,c_0 = 0.$$

Da aber c_0 von Null verschieden ist, so muss $P'_{im}(a_i) = 0$ sein. Hieraus ergiebt sich, dass die Zahlen r_{i1}, r_{i2}, $\cdots$ r_{im} die Wurzeln der Gleichung $P'_{im}(a_i) = 0$, oder

$$(13)\quad \begin{aligned} &r(r-1)\cdots(r-m+1)-r(r-1)\cdots(r-m+2)\,P_{i1}(a_i)-\\ &r(r-1)\cdots(r-m+3)\,P_{i2}(a_i)-\cdots-r\,P_{i\,m-1}(a_i)-P_{im}(a_i)=0 \end{aligned}$$

sind. Hieraus ergiebt sich, dass nicht zwei Wurzeln dieser Gleichung einander gleich sein dürfen.

Setzt man $t=\frac{1}{x}$, so findet man ohne Mühe, dass die Differenzialgleichung (10) in

$$(14)\quad \frac{d^m y}{d t^m}=\frac{\Phi_1(t)}{t}\frac{d^{m-1} y}{d t^{m-1}}+\frac{\Phi_2(t)}{t^2}\frac{d^{m-2} y}{d t^{m-2}}+\cdots+\frac{\Phi_m(t)}{t^m}\,y$$

übergeht, wo die Grössen $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$, $\cdots\ \Phi_m(t)$ rationale Funktionen von t sind, die für $t=0$ endlich bleiben. Es ergiebt sich alsdann, dass die Zahlen $r_{\rho+1,1}$, $r_{\rho+1,2}$, $\cdots\ r_{\rho+1,m}$ die Wurzeln der Gleichung

$$(15)\quad \begin{aligned} &r(r-1)\cdots(r-m+1)-r(r-1)\cdots(r-m+2)\,\Phi_1(0)-\\ &r(r-1)\cdots(r-m+3)\,\Phi_2(0)-\cdots-r\,\Phi_{m-1}(0)-\Phi_m(0)=0 \end{aligned}$$

sind, und dass daher nicht zwei Wurzeln dieser Gleichung einander gleich sein dürfen.

Fasst man alles Vorhergehende zusammen, so ergiebt sich das Resultat:

Soll eine lineare Differenzialgleichung den am Anfange dieser Nummer gestellten Anforderungen genügen, so muss sie die Form der Differenzialgleichung (10) annehmen, und die aus derselben abgeleiteten Gleichungen (13) und (15) dürfen nicht zwei gleiche Wurzeln haben.

Es ist jetzt unsere Aufgabe, umgekehrt nachzuweisen, dass der Differenzialgleichung (10), unter der Bedingung, dass die Gleichungen (13) und (15) nur ungleiche Wurzeln haben, für jeden singulären Punkt a_i ein Fundamentalsystem zukommt, dessen sämmtliche Elemente, jedes mit einer Potenz von $x-a_i$ multiplicirt, in der Umgebung dieses Punktes endlich, eindeutig und continuirlich werden, und dass für den Punkt ∞ ein Fundamentalsystem existirt, dessen sämmtliche Elemente, jedes mit einer Potenz von x multiplicirt, in der Umgebung von ∞ dieselbe Eigenschaft haben. Dieses soll in der folgenden Nummer geschehen.

5.

Wir gehen von der Differenzialgleichung:

$$(1)\quad \frac{d^m y}{d x^m}=\frac{P_{i1}(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-1} y}{d x^{m-1}}+\frac{P_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-2} y}{d x^{m-2}}+\cdots+\frac{P_{im}(x)}{(x-a_i)^m}\,y$$

aus, wo i eine der Zahlen $1, 2, \cdots \rho$ bedeutet. Die Wurzeln der Gleichung

$$(2)\quad \begin{aligned} &r(r-1)\cdots(r-m+1)-r(r-1)\cdots(r-m+2)\,P_{i1}(a_i)-\\ &r(r-1)\cdots(r-m+3)\,P_{i2}(a_i)-\cdots-r\,P_{i\,m-1}(a_i)-P_{im}(a_i)=0 \end{aligned}$$

denken wir uns so geordnet, dass der reelle Theil jeder folgenden in algebraischem Sinne nicht grösser sei als der irgend einer vorhergehenden, und sie seien in dieser Reihenfolge $r_{i1}, r_{i2}, \cdots r_{im}$.

Setzt man nun

$$y=(x-a_i)^{r_{i1}}\,u,$$

so geht die Differenzialgleichung (1) über in

$$(3) \qquad \frac{d^m u}{dx^m} = \frac{Q_{i1}(x)}{x-a_i}\,\frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \frac{Q_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\,\frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{Q_{im}(x)}{(x-a_i)^{m-1}}\, u,$$

wo die Grössen $Q_{i\alpha}(x)$ aus den Grössen $P'_{i\alpha}(x)$ der Differenzialgleichung (12) der vorigen Nummer erhalten werden, wenn man in den Ausdrücken der letzteren r_{i1} statt r setzt, wodurch der constante Theil von $P'_{im}(x)$ verschwindet.

Wir formen nunmehr die Differenzialgleichung (2) um in:

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & (x-a_i)^{m-1}\,\frac{d^m u}{dx^m} - Q_{i1}(a_i)\,(x-a_i)^{m-2}\,\frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} - \\ & Q_{i2}(a_i)\,(x-a_i)^{m-3}\,\frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} - \cdots - Q_{i\,m-1}(a_i)\,\frac{du}{dx} = \\ & Q'_{i1}(x).\,(x-a_i)^{m-1}\,\frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + Q'_{i2}(x)\,.\,(x-a_i)^{m-2}\,\frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} \\ & + \cdots + Q'_{i\,m-1}(x)\,(x-a_i)\,\frac{du}{dx} + Q_{im}(x)\,u, \end{aligned} \right.$$

wo zur Abkürzung

$$\frac{Q_{i1}(x) - Q_{i1}(a_i)}{x-a_i} = Q'_{i1}(x), \quad \frac{Q_{i2}(x) - Q_{i2}(a_i)}{x-a_i} = Q'_{i2}(x),$$

$$\ldots\ldots\ldots \quad \frac{Q_{i\,m-1}(x) - Q_{i\,m-1}(a_i)}{x-a_i} = Q'_{i\,m-1}(x)$$

gesetzt ist.

Versucht man dieser Differenzialgleichung durch eine Reihe

$$u = \sum_0^\infty{}_\alpha\, c_\alpha\,(x-a_i)^\alpha$$

zu genügen, so findet man für jeden positiven ganzzahligen Werth von k:

$$(5) \quad \begin{aligned} & [(k+1)\,k\,(k-1)\cdots(k-m+2) - Q_{i1}(a_i)\cdot(k+1)\,k\,(k-1)\cdots(k-m+3) \\ & \quad - Q_{i2}(a_i)\,(k+1)\,k\,(k-1)\cdots(k-m+4) - \cdots - Q_{i\,m-1}(a_i)\,(k+1)]\; c_{k+1} \\ & \quad = A_{k0}\,c_k + A_{k1}\,c_{k-1} + A_{k2}\,c_{k-2} + \cdots + A_{kk}\,c_0, \end{aligned}$$

worin die Grössen A sich aus den Coefficienten der Reihenentwickelungen der Funktionen $Q_{i1}'(x)$, $Q_{i2}'(x)$, ... $Q_{im}(x)$ nach Potenzen von $x - a_i$ und aus numerischen Grössen durch die blossen Operationen der Addition und Multiplication zusammensetzen.

Die Gleichung

$$(6) \quad \begin{aligned} & w\,(w-1)\cdots(w-m+2) - Q_{i1}(a_i)\,w\,(w-1)\cdots(w-m+3) \\ & - Q_{i2}(a_i)\;w\,(w-1)\;\cdots\;(w-m+4) - \cdots - Q_{i\,m-1}(a_i) = 0 \end{aligned}$$

hat, wie ohne Mühe gefunden wird, die Wurzeln

$$(7) \quad r_{i2} - r_{i1} - 1,\; r_{i3} - r_{i1} - 1,\; r_{i4} - r_{i1} - 1,\; \cdots\; r_{im} - r_{i1} - 1.$$

Keine dieser Grössen kann wegen der über die Reihenfolge der Wurzeln $r_{i1}, r_{i2}, \cdots r_{im}$ gemachten Voraussetzung einer positiven ganzen Zahl oder der Null gleich sein. Demnach bleibt für jeden positiven ganzzahligen Werth von k und für $k=0$ der Coefficient von c_{k+1} der Gleichung (5) von Null verschieden. Daher lassen sich mit Hülfe dieser Gleichung sämmtliche Coefficienten c unter der Form darstellen:

$$(8) \qquad c_\alpha = \mathfrak{A}_\alpha \, c_0$$

für alle positiven ganzzahligen Werthe von α.

Es seien die Maxima der Moduln der Funktionen

$$Q'_{i1}(x),\ Q'_{i2}(x),\ \cdots\ Q'_{i\,m-1}(x),\ Q_{i\,m}(x)$$

in der Umgebung von a_i resp. $M_1, M_2, \cdots M_{m-1}, M_m$, so ist bekanntlich für jeden ganzzahligen positiven Werth von α:

$$(9) \quad \begin{cases} \text{mod.} \left(\dfrac{d^\alpha Q'_{i1}(x)}{d\,x^\alpha}\right)_{a_i} < 1\,.\,2\,.\,3 \cdots \alpha \ \dfrac{M_1}{r^\alpha} \\ \text{mod.} \left(\dfrac{d^\alpha Q'_{i2}(x)}{d\,x^\alpha}\right)_{a_i} < 1\,.\,2\,.\,3 \cdots \alpha \ \dfrac{M_2}{r^\alpha} \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \text{mod.} \left(\dfrac{d^\alpha Q_{im}(x)}{d\,x^\alpha}\right)_{a_i} < 1\,.\,2\,.\,3 \cdots \alpha \ \dfrac{M_m}{r^\alpha}, \end{cases}$$

wo r die Entfernung des Punktes a_i vom nächsten singulären Punkte und $(f(x))_{a_i}$ den Werth von $f(x)$ für $x = a_i$ bezeichnet.

Man bilde nunmehr die Differenzialgleichung:

$$(10) \quad \begin{cases} \gamma_1 (x-a_i)^{m-2} \dfrac{d^{m-1} v}{d\,x^{m-1}} + \gamma_2 (x-a_i)^{m-3} \dfrac{d^{m-2} v}{d\,x^{m-2}} + \cdots + \gamma_{m-1} \dfrac{dv}{dx} = \\ \dfrac{M_1}{1-\dfrac{x-a_i}{r}} \cdot (x-a_i)^{m-1} \dfrac{d^{m-1} v}{d\,x^{m-1}} + \dfrac{M_2}{1-\dfrac{x-a_i}{r}} \cdot (x-a_i)^{m-2} \dfrac{d^{m-2} v}{d\,x^{m-2}} \\ \qquad + \cdots + \dfrac{M_{m-1}}{1-\dfrac{x-a_i}{r}} \cdot (x-a_i) \dfrac{dv}{dx} + \dfrac{M_m}{1-\dfrac{x-a_i}{r}}\, v, \end{cases}$$

wo $\gamma_1, \gamma_2, \cdots \gamma_{m-1}$ beliebige positive Grössen sind, jedoch der Beschränkung unterworfen, dass die Gleichung

$$(11) \quad \gamma_1 w (w-1) \cdots (w-m+3) + \gamma_2 w (w-1) \cdots (w-m+4) + \cdots + \gamma_{m-1} = 0$$

weder eine ganze positive Zahl noch die Null zur Wurzel habe. — Versucht man auch der Differenzialgleichung (10) durch eine Reihe

$$v = \sum_{0}^{\infty}{}_\alpha \, d_\alpha \cdot (x-a_i)^\alpha$$

zu genügen, so ergiebt sich für jedes ganzzahlige k die Relation

$$(12) \quad \begin{aligned} &[\gamma_1 (k+1)\, k \cdots (k-m+3) + \gamma_2 (k+1)\, k \cdots (k-m+4) + \cdots + \gamma_{m-1} (k+1)]\, d_{k+1} \\ &\qquad = B_{k0}\, d_k + B_{k1}\, d_{k-1} + B_{k2}\, d_{k-2} + \cdots + B_{kk}\, d_0, \end{aligned}$$

wo die Grössen B sich ebenso aus den Coefficienten der Reihenentwickelungen der Funktionen $\dfrac{M_1}{1-\dfrac{x-a_i}{r}}$, $\dfrac{M_2}{1-\dfrac{x-a_i}{r}}$, $\cdots$ $\dfrac{M_m}{1-\dfrac{x-a_i}{r}}$ nach Potenzen von $x-a_i$ und aus numerischen Grössen zusammensetzen, wie sich die Grössen A der Gleichung (5) aus den entsprechenden Coefficienten der Reihenentwickelungen von $Q_{i1}'(x)$, $Q_{i2}'(x)$, $\cdots$ $Q_{im}(x)$ und aus denselben numerischen Grössen zusammensetzen. Da die Grössen B sämmtlich positiv sind, so folgt aus den Ungleichheiten (9), dass

$$(13) \qquad B_{k\alpha} > \text{mod. } A_{k\alpha}$$

für $\alpha = 0,\ 1,\ \cdots\ k$.

Es giebt stets eine endliche Grenze für k, $k=t$, derart, dass für $k \geqq t$

$$(14) \quad \begin{gathered} \text{mod } [k(k-1)\cdot\cdot(k-m+2)-\underset{i1}{Q}(a_i)\,k(k-1)\cdot\cdot(k-m+3)-\underset{i2}{Q}(a_i)\,k(k-1)\cdot\cdot(k-m+4)-\cdot\cdot-\underset{i\,m-1}{Q}(a_i)] \\ > \gamma_1\,k\,(k-1)\cdots(k-m+3)+\gamma_2\,k\,(k-1)\cdots(k-m+4)+\cdots+\gamma_{m-1}. \end{gathered}$$

Da nun nach Gleichung (12) sich jedes d unter der Form

$$(15) \qquad d_\alpha = \mathfrak{B}_\alpha\, d_0$$

darstellen lässt, wo $\mathfrak{B}_\alpha$ eine positive Zahl ist, so sind alle Grössen d positiv, wenn man d_0 positiv annimmt. — Aus den Ungleichheiten (13) u. (14) in Verbindung mit den Gleichungen (5) u. (12) würde für **jeden** ganzzahligen Werth von k folgen

$$(16) \qquad d_k > \text{mod. } c_k,$$

wenn dieses für $k \leqq t$ stattfände.

Nun sei unter den Moduln der Grössen

$$1,\ \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2,\ \cdots\ \mathfrak{A}_t$$

A der grösste, und unter den Grössen

$$1,\ \mathfrak{B}_1,\ \mathfrak{B}_2,\ \cdots\ \mathfrak{B}_t$$

B die kleinste, und c_0 so gewählt, dass

$$(17) \qquad \text{A mod. } c_0 < \text{B } d_0.$$

Da die Grössen d_0, B und A von Null verschieden sind, so ist diese Ungleichheit immer erfüllbar und liefert für c_0 von Null verschiedene Werthe. Alsdann ist für $k \leqq t$, folglich für jedes k

$$d_k > \text{mod } c_k.$$

Wenn daher die Reihe

$$v = \sum_0^\infty{}_\alpha\; d_\alpha\,(x-a_i)^\alpha$$

convergirt, so convergirt um so mehr die Reihe

$$u = \sum_0^\infty{}_\alpha\; c_\alpha\,(x-a_i)^\alpha,$$

wenn man über c_0 gemäss der Ungleichheit (17) disponirt.

Multiplicirt man die Gleichung (10) mit $1 - \frac{x-a_i}{r}$ und substituirt alsdann die Reihe für v, so ergiebt sich für jeden ganzzahligen Werth von k

$$
\begin{aligned}
&[(k+1)\,k\,(k-1)\ \cdots\ (k-m+3)\ \gamma_1 + (k+1)\,k\,(k-1)\ \cdots\ (k-m+4)\ \gamma_2 \\
&\qquad + \cdots + (k+1)\,\gamma_{m-1}]\ d_{k+1} = \\
(18)\qquad &[k\,(k-1)\cdots(k-m+2)\left(\frac{\gamma_1}{r} + M_1\right) + k\,(k-1)\cdots(k-m+3)\left(\frac{\gamma_2}{r} + M_2\right) \\
&\qquad + \cdots + k\left(\frac{\gamma_{m-1}}{r} + M_{m-1}\right) + M_m]\ d_k.
\end{aligned}
$$

Daher ist

$$\lim \frac{d_{k+1}}{d_k}\ (\text{für } k = \infty) = \frac{\gamma_1 + r\,M_1}{r\,\gamma_1}$$

und

$$\lim \frac{d_{k+1}\,(x-a_i)^{k+1}}{d_k\,(x-a_i)^k} = \frac{\gamma_1 + r\,M_1}{r\,\gamma_1}\cdot(x-a_i).$$

Die Reihe für v ist daher convergent für alle Werthe von x, für welche

$$\text{mod.}\ (x-a_i) < \frac{r\,\gamma_1}{\gamma_1 + r\,M_1}.$$

Da γ_1 und r von Null verschiedene positive Grössen sind, so findet die Convergenz innerhalb eines endlichen, um den Punkt a_i beschriebenen Kreises statt.

Daraus folgt, dass die Reihe

$$u = \sum_0^\infty{}_\alpha\ c_\alpha\,(x-a_i)^\alpha$$

innerhalb desselben Kreises convergirt. Es giebt daher eine innerhalb dieses Kreises und folglich nach No. 1 in der ganzen Umgebung von a_i eindeutige, endliche und continuirliche und in a_i von Null verschiedene Funktion u, welche der Differenzialgleichung (3) genügt.

Hiernach giebt es also ein particuläres Integral der Differenzialgleichung (1), y_{i1}, welches mit $(x-a_i)^{-r_{i1}}$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig, endlich und continuirlich und in a_i von Null verschieden ist.

Setzt man jetzt

$$(19)\qquad y = y_{i1}\int z\,dx,$$

so erhält man für z eine lineare Differenzialgleichung $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung der Form:

$$(1^a)\qquad \frac{d^{m-1} z}{d x^{m-1}} = \frac{G_{i1}(x)}{x-a_i}\cdot\frac{d^{m-2} z}{d x^{m-2}} + \frac{G_{i2}(x)}{(x-a_i)^2}\,\frac{d^{m-3} z}{d x^{m-3}} + \cdots + \frac{G_{i\,m-1}(x)}{(x-a_i)^{m-1}}\ z,$$

worin die Coefficienten $G_{i1}(x),\ G_{i2}(x)\ \cdots\ G_{i\,m-1}(x)$ Funktionen sind, welche innerhalb eines endlichen den Punkt a_i umgebenden Kreises S eindeutig, endlich und continuirlich sind.

Die Wurzeln der Gleichung:

$$(2^a) \quad \begin{aligned} & r'(r'-1)\cdots(r'-m+2) - r'(r'-1)\cdots(r'-m+3)\,G_{i1}(a_i) - \\ & r'(r'-1)\cdots(r'-m+4)\,G_{i2}(a_i) - \cdots - r'\,\underset{i\,m-2}{G}(a_i) - \underset{i\,m-1}{G}(a_i) = 0 \end{aligned}$$

sind, wie leicht zu zeigen,

$$(20) \qquad r_{i2} - r_{i1} - 1,\ r_{i3} - r_{i1} - 1,\ r_{i4} - r_{i1} - 1,\ \cdots\ r_{im} - r_{i1} - 1.$$

Dieselben haben in Folge der am Anfange dieser Nummer über die Reihenfolge von $r_{i1}, r_{i2}, \cdots r_{im}$ gemachten Voraussetzung, in der Reihenfolge (20) die Eigenschaft, dass der reelle Theil jeder folgenden in algebraischem Sinne nicht grösser ist, als der reelle Theil irgend einer vorhergehenden.

Man weist nun auf ähnliche Weise, wie oben die Existenz der Funktion y_{i1}, die zu dem Exponenten r_{i1} gehört, ergründet wurde, die Existenz einer Funktion z_1 nach, welche mit $(x-a_i)^{-(r_{i2}-r_{i1}-1)}$ multiplicirt innerhalb des Kreises S eindeutig, continuirlich und endlich und in a_i von Null verschieden wird. Da $r_{i2}-r_{i1}$ der Voraussetzung nach von Null verschieden ist, so ergiebt die Gleichung (19), wenn man z_1 für z setzt, ein Integral der Differenzialgleichung (1), welches mit $(x-a_i)^{-r_{i2}}$ multiplicirt innerhalb des Kreises S eindeutig, continuirlich und endlich und in a_i von Null verschieden ist. Daraus folgt nach No. 1, dass es ein particuläres Integral y_{i2} giebt, welches mit $(x-a_i)^{-r_{i2}}$ multiplicirt in der ganzen Umgebung von a_i eindeutig, endlich und continuirlich und in a_i von Null verschieden ist.

Man setze nunmehr

$$(21) \qquad z = z_1 \int t\,dx,$$

so erhält man für t eine lineare Differenzialgleichung $m-2^{\text{ter}}$ Ordnung der Form:

$$(1^b) \qquad \frac{d^{m-2}t}{dx^{m-2}} = \frac{G_{i1}'(x)}{x-a_i}\frac{d^{m-3}t}{dx^{m-3}} + \frac{G_{i2}'(x)}{(x-a_i)^2}\frac{d^{m-4}t}{dx^{m-4}} + \cdots + \frac{\underset{i\,m-2}{G'}(x)}{(x-a_i)^{m-2}}\cdot t,$$

worin die Coefficienten $G_{i1}'(x),\ G_{i2}'(x),\ \cdots\ \underset{i\,m-2}{G'}(x)$ Funktionen sind, welche innerhalb eines endlichen den Punkt a_i umgebenden Kreises S' eindeutig, endlich und continnirlich sind.

Die Wurzeln der Gleichung:

$$(2^b) \quad \begin{aligned} & r''(r''-1)\cdots(r''-m+3) - r''(r''-1)\cdots(r''-m+4)\,G_{i1}'(a_i) - \\ & r''(r''-1)\cdots(r''-m+5)\,G_{i2}'(a_i) - \cdots - r''\,\underset{i\,m-3}{G'}(a_i) - \underset{i\,m-2}{G'}(a_i) = 0 \end{aligned}$$

sind, wie leicht zu zeigen,

$$(22) \qquad r_{i3} - r_{i2} - 1,\ r_{i4} - r_{i2} - 1,\ \ldots\ldots\ r_{im} - r_{i2} - 1.$$

Dieselben haben in Folge der am Anfange dieser Nummer über die Reihenfolge von $r_{i1}, r_{i2}, \cdots r_{im}$ gemachten Voraussetzung, in der Reihenfolge (22) die Eigenschaft, dass der reelle Theil jeder folgenden in algebraischem Sinne nicht grösser ist, als der reelle Theil irgend einer vorhergehenden.

Man weist nun auf ähnliche Weise, wie oben die Existenz der Funktionen y_{i1} und z_1 ergründet würde, die Existenz einer Funktion t_1 nach, welche mit $(x-a_i)^{-(r_{i3}-r_{i2}-1)}$ multiplicirt innerhalb des Kreises S' eindeutig, continuirlich und endlich und in a_i von Null verschieden wird. Da $r_{i3} - r_{i2}$ der Voraussetzung nach von Null verschieden ist, so ergiebt die Gleichung (21) ein particuläres Integral der Differenzialgleichung (1^a)

$$z_2 = z_1 \int t_1 \, dx,$$

welches mit $(x - a_i)^{-(r_{i3} - r_{i1} - 1)}$ multiplicirt dieselbe Eigenschaft hat. — Da ferner $r_{i3} - r_{i1}$ von Null verschieden ist, so ergiebt die Gleichung (19), wenn man z_2 für z setzt, ein Integral der Differenzialgleichung (1), welches mit $(x - a_i)^{-r_{i3}}$ multiplicirt dieselbe Eigenschaft hat. Daraus folgt nach No. 1, dass es ein particuläres Integral y_{i3} giebt, welches mit $(x - a_i)^{-r_{i3}}$ multiplicirt in der ganzen Umgebung von a_i eindeutig, continuirlich und endlich, und in a_i von Null verschieden wird.

Fährt man so fort, so findet man, dass es zu jeder Wurzel der Gleichung (2) $r_{i\lambda}$ ein zugehöriges particuläres Integral $y_{i\lambda}$ giebt, welches mit $(x - a_i)^{-r_{i\lambda}}$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig, continuirlich und endlich und in a_i von Null verschieden wird.

Nach dem Satze am Schlusse der No. 2 bilden die Integrale $y_{i1}, y_{i2} \cdots y_{im}$ ein Fundamentalsystem, und es ist hiermit der am Schlusse der vorigen Nummer geforderte Beweis geliefert.

6.

I. Die Differenzialgleichung, welcher die durch die *Gauss*'sche Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ darstellbaren Funktionen genügen, gehört zu der in den beiden vorhergehenden Nummern behandelten Klasse von Differenzialgleichungen. Sie wird nämlich in der allgemeinsten Form aus der Differenzialgleichung (10) in No. 4 erhalten, wenn man $m = 2$ und die Anzahl der singulären Punkte ρ gleich 2 annimmt, so dass sie die Gestalt hat:

$$(1) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{F_1(x)}{(x - a_1)(x - a_2)} \frac{dy}{dx} + \frac{F_2(x)}{(x - a_1)^2 (x - a_2)^2} \cdot y,$$

wo $F_1(x)$ und $F_2(x)$ resp. ganze Funktionen ersten und zweiten Grades von x sind.

Um die specielle Form derselben, wie sie *Riemann* in der obenerwähnten Abhandlung (S. 19) gegeben hat, zu erhalten, sei

$$a_1 = o, \; a_2 = 1.$$

Setzt man

$$F_1(x) = f_0 + f_1 x; \; F_2(x) = g_0 + g_1 x + g_2 x^2,$$

so sind die Gleichungen, wodurch die Exponenten der zu den Punkten $0, 1, \infty$ gehörigen Fundamentalsysteme bestimmt werden, resp.

$$\begin{aligned} &(a) \quad r(r-1) + f_0 r - g_0 = 0 \\ &(b) \quad r(r-1) - (f_0 + f_1) r - (g_0 + g_1 + g_2) = 0 \\ &(c) \quad r(r-1) + (2 + f_1) r - g_2 = 0. \end{aligned}$$

Bestimmt man die Constanten f_0, f_1, g_0, g_1, g_2 dadurch, dass man die Wurzeln der Gleichung (a) gleich α und α', der Gleichung (b) gleich 0 und γ', der Gleichung (c) gleich β und β' annimmt, wo

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma' = 1,$$

so geht die Differenzialgleichung (1) über in:

$$(2) \qquad (1-x)\frac{d^2 y}{d\log x^2} - [\alpha + \alpha' + (\beta + \beta')\,x]\,\frac{d\,y}{d\log x} + (\alpha\alpha' - \beta\beta' x)\,y = 0,$$

welches die *Riemann*'sche Form ist.

II. Die Differenzialgleichung (10) in No. 4 enthält ausser den die Lage der singulären Punkte bestimmenden Constanten $a_1, a_2, \cdots a_\rho$ im Allgemeinen noch $\frac{m(m+1)\rho}{2} - \frac{m(m-1)}{2}$ Constanten, nämlich die Coefficienten der ganzen Funktionen $\underset{\rho-1}{F}(x)$, $\underset{2(\rho-1)}{F}(x)$, $\cdots$ $\underset{m(\rho-1)}{F}(x)$. Zu jedem singulären Punkte gehören m Exponenten (die den Elementen des bezüglichen Fundamentalsystems zuertheilt sind), also zu allen singulären Punkten (den Punkt ∞ mitgerechnet) $m(\rho+1)$ Exponenten. Von den letzteren sind nur $m(\rho+1)-1$ willkürlich, da die Summe aller (nach No. 4) einer bestimmten ganzen Zahl gleich ist. — Die Anzahl der willkürlichen Exponenten ist der Anzahl der Constanten der Differenzialgleichung gleich, wenn

$$\frac{m(m+1)\rho}{2} - \frac{m(m-1)}{2} = m(\rho+1) - 1,$$

oder

$$(3) \qquad \rho = 1 + \frac{2}{m},$$

so dass entweder

$$m = 1 \text{ und } \rho = 3,$$

oder

$$m = 2 \text{ und } \rho = 2.$$

Hieraus folgt:

Erstens. Sind die Exponenten der Elemente der zu den einzelnen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme gegeben, so sind die Constanten der Differenzialgleichung, welcher die durch die *Gauss*'sche Reihe darstellbaren Funktionen genügen, folglich auch abgesehen von constanten Factoren die Elemente der Fundamentalsysteme selbst, vollständig bestimmt.

Dieser Satz stimmt im Wesentlichen mit dem von *Riemann* in der angeführten Abhandlung No. IV Seite 11 sqq. gegebenen überein, welcher dort auf andere Weise hergeleitet ist.

Es folgt aus der Gleichung (3)

Zweitens. Den Fall einer linearen Differenzialgleichung erster Ordnung mit 3 singulären Punkten abgerechnet, ist die Differenzialgleichung (1), welcher die durch die *Gauss*'sche Reihe darstellbaren Funktionen genügen, die einzige aus der Klasse der durch die Gleichung (10) in No. 4 repräsentirten Differenzialgleichungen, welcher diese Eigenschaft zukommt.

III. Nimmt man in der Differenzialgleichung (10) in No. 4 $\rho = 1$ an, so reduciren sich sämmtliche Funktionen $\underset{\rho-1}{F}(x)$, $\underset{2(\rho-1)}{F}(x)$, $\cdots$ $\underset{m(\rho-1)}{F}(x)$ auf Constanten, und man erhält eine Differenzialgleichung der Gestalt

$$(4) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = \frac{f_1}{x-a_1}\cdot\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \frac{f_2}{(x-a_1)^2}\frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + \frac{f_m}{(x-a_1)^m}\,y,$$

wo $f_1, f_2, \cdots f_m$ Constanten sind. — Die Exponenten der Elemente des zu dem Punkte a_1 gehörigen Fundamentalsystems $r_1, r_2, \cdots r_m$ sind die m Wurzeln der Gleichung

$$(5) \qquad \begin{aligned} & r(r-1)\cdots(r-m+1) - f_1\, r\,(r-1)\cdots(r-m+2) \\ & - f_2\, r\,(r-1)\cdots(r-m+3) - \cdots - f_m = 0. \end{aligned}$$

Setzt man $y = (x-a_1)^{r_a} \cdot u$, so erhält man eine Differenzialgleichung für u, in welcher der Coefficient von u verschwindet, welcher also durch $u =$ Const. genügt wird; daraus folgt, dass die Funktionen

$$(x-a_1)^{r_1},\ (x-a_1)^{r_2},\ \cdots (x-a_1)^{r_m}$$

selbst das Fundamentalsystem constituiren, so dass das allgemeine Integral der Differenzialgleichung (4), wie bekannt,

$$y = \sum_1^m{}_a c_a\ (x-a_1)^{r_a}$$

wird, wo $c_1, c_2, \cdots c_m$ Constanten sind. (Vergl. *Cauchy*, Exercices vol. I pag. 262).

7.

Die linearen Differenzialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, denen algebraische Integrale genügen, sind entweder der Art, dass ihnen auch nicht algebraische Integrale genügen, oder derart dass sie nur algebraische Integrale zulassen. Der zweite Fall tritt ein, wenn es ein Fundamentalsystem giebt, dessen Elemente algebraische Funktionen sind.

Es ist von Interesse, dass die letztere Art zu der Klasse von Differenzialgleichungen gehört, welche durch die Gleichung (10) in No. 4 characterisirt sind.

Es sei η Wurzel einer Gleichung

$$(1) \qquad \eta^n + \alpha_1\,\eta^{n-1} + \alpha_2\,\eta^{n-2} + \cdots + \alpha_n = 0,$$

wo $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n$ rationale Funktionen von x sind, welche der Differenzialgleichung

$$(2) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} - p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} - p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} - \cdots - p_m y = 0$$

genügt, deren Coefficienten $p_1, p_2, \cdots p_m$ ebenfalls rationale Funktionen von x sind; so gehören diejenigen Punkte, für welche eine Verzweigung oder ein Unendlichwerden von η stattfindet, offenbar zu den singulären Punkten $a_1, a_2, \cdots a_\rho$ der Differenzialgleichung (2).

In der Umgebung von a_i ist daher bekanntlich

$$(3) \qquad \eta = \sum_0^\infty{}_a c_a\,(x-a_i)^{-\nu+\frac{a}{\mu}},$$

wenn μ die Anzahl der Elemente desjenigen Cyclus der Wurzeln der Gleichung (1) bedeutet, zu dem η gehört, und ν eine positive ganze Zahl oder Null ist, je nachdem η im Punkte a_i unendlich oder endlich ist. (Vergl. *Puiseux* in Liouville's Journal de mathématique T. XV und XVI).

Dieser Gleichung geben wir die Form:

$$4) \qquad \eta = (x-a_i)^{-\nu} \cdot \varphi_0 + (x-a_i)^{-\nu+\frac{1}{\mu}} \cdot \varphi_1 + (x-a_i)^{-\nu+\frac{2}{\mu}} \cdot \varphi_2 + \cdots + (x-a_i)^{-\nu+\frac{\mu-1}{\mu}} \cdot \varphi_{\mu-1},$$

wo $\varphi_0, \varphi_1, \cdots \varphi_{\mu-1}$ in der Umgebuug von a_i eindeutige, endliche und continuirliche Funktionen sind. Ich behaupte nun,

dass jedes Glied $(x-a_i)^{-\nu+\frac{\mathfrak{a}}{\mu}} \cdot \varphi_{\mathfrak{a}}$ für sich ein Integral der Differenzialgleichung (2) ist.

Das Resultat der Substitution von $(x-a_i)^{-\nu+\frac{\mathfrak{a}}{\mu}} \cdot \varphi_{\mathfrak{a}}$ an die Stelle vou y in die linke Seite der Differenzialgleichung (2) hat die Gestalt $(x-a_i)^{\frac{\mathfrak{a}}{\mu}} \psi_{\mathfrak{a}}$, wo $\psi_{\mathfrak{a}}$ eine in der Umgebung von a_i eindeutige Funktion von x bedeutet. Man hat daher

$$(5) \qquad (x-a_i)^0 \cdot \psi_0 + (x-a_i)^{\frac{1}{\mu}} \cdot \psi_1 + (x-a_i)^{\frac{2}{\mu}} \cdot \psi_2 + \cdots + (x-a_i)^{\frac{\mu-1}{\mu}} \cdot \psi_{\mu-1} = 0.$$

Da diese Gleichung für jeden Werth von x identisch erfüllt sein muss, so leitet man daraus durch $\mu-1$ malige Umkreisung des Punktes a_i folgendes System von μ Gleichungen ab:

$$(6) \quad \begin{cases} (x-a_i)^0\, \psi_0 + (x-a_i)^{\frac{1}{\mu}} \cdot \psi_1 + (x-a_i)^{\frac{2}{\mu}} \cdot \psi_2 + \cdots + (x-a)^{\frac{\mu-1}{\mu}} \cdot \psi_{\mu-1} = 0 \\ (x-a_i)^0\, \psi_0 + \alpha\, (x-a_i)^{\frac{1}{\mu}} \cdot \psi_1 + \alpha^2 (x-a_i)^{\frac{2}{\mu}} \cdot \psi_2 + \cdots + \alpha^{\mu-1} (x-a_i)^{\frac{\mu-1}{\mu}} \cdot \psi_{\mu-1} = 0 \\ (x-a_i)^0\, \psi_0 + \alpha^2 (x-a_i)^{\frac{1}{\mu}} \cdot \psi_1 + \alpha^4 (x-a_i)^{\frac{2}{\mu}} \cdot \psi_2 + \cdots + \alpha^{2(\mu-1)} (x-a_i)^{\frac{\mu-1}{\mu}} \cdot \psi_{\mu-1} = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ (x-a_i)^0\, \psi_0 + \alpha^{\mu-1} (x-a_i)^{\frac{1}{\mu}} \cdot \psi_1 + \alpha^{2(\mu-1)} (x-a_i)^{\frac{2}{\mu}} \cdot \psi_2 + \cdots + \alpha^{(\mu-1)(\mu-1)} (x-a_i)^{\frac{\mu-1}{\mu}} \cdot \psi_{\mu-1} = 0, \end{cases}$$

wenn man mit α eine primitive Wurzel der Gleichung $x^\mu = 1$ bezeichnet.

Da die Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{\mu-1} \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \cdots & \alpha^{2(\mu-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha^{\mu-1} & \alpha^{2(\mu-1)} & \cdots & \alpha^{(\mu-1)^2} \end{vmatrix}$$

bekanntlich nicht verschwindet, so muss

$$(7) \qquad (x-a_i)^{\frac{\mathfrak{a}}{\mu}} \cdot \psi_{\mathfrak{a}} = 0$$

sein, für $\mathfrak{a} = 0, 1, 2, \cdots \mu-1$, d. h. es muss $(x-a_i)^{-\nu+\frac{\mathfrak{a}}{\mu}} \cdot \varphi_{\mathfrak{a}}$ für $\mathfrak{a} = 0, 1, 2, \cdots \mu-1$ ein Integral der Differenzialgleichung (2) sein.

Es werde nunmehr vorausgesetzt, dass die Differenzialgleichung (2) nur algebraische Integrale zulasse. Ist alsdann $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m$ irgend ein Fundamentalsystem, so hat man in der Umgebung von a_i

$$(8) \qquad \eta_{\mathfrak{b}} = \sum_{0}^{\mu_{\mathfrak{b}}-1}{}_{\mathfrak{a}}\; u_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$$

für $\mathfrak{b} = 1, 2, \cdots m$, wenn man

$$(x-a_i)^{-\nu_\mathfrak{b}+\frac{\mathfrak{a}}{\mu_\mathfrak{b}}}\varphi_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}} = u_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$$

setzt, wo $\mu_\mathfrak{b}$ und $\nu_\mathfrak{b}$ positive ganze Zahlen sind, wovon jedoch die letztere auch Null sein kann, und $\varphi_{\mathfrak{b},\mathfrak{a}}$ eine in der Umgebung von a_i eindeutige, continuirliche und endliche Funktion bedeutet (s. Gleichung (4)).

Die Anzahl der verschiedenen Grössen u, durch welche die Grössen η ausgedrückt werden, darf nicht kleiner als m sein. Denn sonst würde die Elimination derselben aus den m Gleichungen:

$$\eta_1 = \sum_0^{\mu_1-1}{}_{\mathfrak{a}}\, u_{1,\mathfrak{a}}$$

$$\eta_2 = \sum_0^{\mu_2-1}{}_{\mathfrak{a}}\, u_{2,\mathfrak{a}}$$

$$\vdots$$

$$\eta_m = \sum_0^{\mu_m-1}{}_{\mathfrak{a}}\, u_{m,\mathfrak{a}},$$

die sich aus der Gleichung (8) ergeben, eine lineare homogene Gleichung mit constanten Coefficienten zwischen $\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_m$ ergeben; dieses widerspräche aber dem Character des letzteren Systems von Funktionen als eines Fundamentalsystems. — Da aber die Grössen u, nach dem Obigen, Integrale der Differenzialgleichung (2) sind, und sich daher als homogene lineare Funktionen der Grössen η mit constanten Coefficienten darstellen lassen, so drücken sich alle Grössen u als lineare homogene Funktionen mit constanten Coefficienten von m unter ihnen aus. Die letzteren m Grössen u müssen so ausgewählt werden können, dass zwischen denselben keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten stattfindet. Denn sonst würde die Anzahl der verschiedenen u, wodurch sich die Grössen η ausdrücken lassen, unter m herabsinken, was schon als unmöglich erkannt worden.

Hiermit ist bewiesen, dass m der Grössen u ein Fundamentalsystem constituiren; die Elemente desselben werden mit Potenzen von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig, continuirlich und endlich.

Da dieses für alle Punkte $a_1, a_2, \cdots a_\rho$ gilt, und dasselbe für den Punkt ∞ stattfindet, wie sich ergiebt, wenn man $\frac{1}{z}$ statt x in die Differenzialgleichung (2) setzt, so erhält man den Satz:

Die linearen Differenzialgleichungen mit algebraischen Coefficienten, welchen nur durch algebraische Integrale genügt werden kann, gehören zu der Klasse der durch die Gleichung (10) in No. 4. repräsentirten Differenzialgleichungen.

Da eine algebraische Funktion die Eigenschaft hat, nach einer endlichen Anzahl von Umläufen um einen singulären Punkt den ursprünglichen Werth wieder anzunehmen, so folgt:

In diesem Falle sind auch alle Wurzeln der Gleichungen (13) und (15) in No. 4, oder die Exponenten, zu denen die einzelnen Elemente der auf alle singulären Punkte und den Punkt ∞ bezüglichen Fundamentalsysteme gehören, rationale Zahlen.

Daraus folgt aber noch nicht umgekehrt, dass eine Differenzialgleichung der Form (10) in No. 4, unter der Voraussetzung, dass die Gleichungen (13) und (15) derselben Nummer rationale Zahlen sind, auch immer nur algebraische Integrale hat. — Denn wenn auch in jedem Verzweigungspunkte eines Integrals nur eine endliche Anzahl von Zweigen zusammenhangen, so können dennoch durch die unendliche Anzahl von Combinationen der Umläufe um die singulären Punkte unzählig viele Zweige hervorgebracht werden. — Es bleibt vielmehr noch die Untersuchung übrig, unter welchen Bedingungen die Anzahl dieser Zweige für jedes Integral endlich ist, wodurch erst dem wesentlichen Erforderniss einer algebraischen Funktion, in jedem Punkte nur eine endliche Anzahl von Werthen zu haben, genügt würde.

Sind aber für jeden singulären Punkt die Wurzeln der Gleichung (13) reale ganze Zahlen, so sind die Elemente aller Fundamentalsysteme und folglich jedes Integral in der ganzen Ebene eindeutig, nur in einer endlichen Anzahl von Punkten, in jedem von endlicher Ordnung unendlich, daher sind alle Integrale rationale Funktionen von x. — Dieser besondere Fall ergiebt daher den folgenden Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass eine lineare Differenzialgleichung nur rationale Integrale habe, bestehen darin, dass sie die Form der Differenzialgleichung (10) in No. 4 habe, und dass für jeden singulären Punkt die Wurzeln der Gleichung (13) derselben Nummer reale ganze Zahlen sind.

Da die Voraussetzung, dass die ρ Gleichungen, welche sich aus der Gleichung (13) in No. 4 für $i = 1, 2, \cdots \rho$ ergeben, reale gannzahlige Wurzeln haben, schon den Umstand zur Folge hat, dass die Integrale der Differenzialgleichung (2) in der ganzen Ebene eindeutig sind, so ergiebt sich, dass in diesem Falle auch die Gleichung (15) derselben Nummer reale, ganzzahlige Wurzeln hat, wodurch ein interessanter Zusammenhang zwischen diesen algebraischen Gleichungen festgestellt wird.

8.

Es sei mir erlaubt, diese Arbeit mit einer Bemerkung über die Form der Integrale einer beliebigen linearen Differenzialgleichung m^{ter} Ordnung, deren Coefficienten den in No. 1 angegebenen Bedingungen genügen, zu beschliessen.

Das Verhalten der Integrale einer linearen Differenzialgleichung ist durch das Verhalten der Fundamentalsysteme bedingt. In Bezug auf diese lässt sich nun aus dem in No. 3 gegebenen Satze folgender Satz ableiten:

Es sei a_i irgend ein singulärer Punkt, so lässt sich ein Fundamentalsystem $y_{i1}, y_{i2}, \cdots y_{im}$ bestimmen, welches folgende Form hat:

$$\begin{aligned}
y_{i1} &= \varphi_{11} \\
y_{i2} &= \varphi_{21} + \varphi_{22} \log(x-a_i) \\
y_{i3} &= \varphi_{31} + \varphi_{32} \log(x-a_i) + \varphi_{33} (\log(x-a_i))^2 \\
&\;\vdots \\
y_{im} &= \varphi_{m1} + \varphi_{m2} \log(x-a_i) + \varphi_{m3} (\log(x-a_i))^2 + \cdots + \varphi_{mm} (\log(x-a_i))^{m-1},
\end{aligned}$$

wo die Grössen φ Funktionen von x von der Beschaffenheit sind, dass diejenigen, welche denselben ersten Index haben, mit derselben Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig werden.

Wir wollen von einem solchen Systeme sagen, dass es zum singulären Punkte a_i gehört.

In No. 3 haben wir gezeigt, dass es ein Fundamentalsystem der Differenzialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^m y}{dx^m} = p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + p_2 \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \cdots + p_m y$$

giebt, wovon ein Element mit einer Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig wird; dadurch ist die Form von y_{i1} gerechtfertigt. — Setzt man in die Differenzialgleichung (1)

$$(2) \qquad y = y_{i1} \int u \, dx,$$

so erhält man für u eine lineare Differenzialgleichung $m-1^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(3) \qquad \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} = q_1 \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \cdots + q_{m-1} u,$$

deren Coefficienten ganze Funktionen der Grössen p und der Grössen $\frac{1}{y_{i1}} \frac{dy_{i1}}{dx}, \frac{1}{y_{i1}} \frac{d^2 y_{i1}}{dx^2}, \ldots$ sind. Diese Differenzialgleichung hat daher in der Umgebung von a_i ausser diesem letzteren Punkte noch diejenigen, in denen y_{i1} verschwindet, als singuläre Punkte. Derselben genügen aber die $m-1$ Integrale $u_1 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{i2}}{y_{i1}}\right)$, $u_2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{i3}}{y_{i1}}\right)$, $\ldots\, u_{m-1} = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_{im}}{y_{i1}}\right)$, wenn $y_{i2}, y_{i3} \cdots y_{im}$ Integrale der Differenzialgleichung (1) sind, die mit y_{i1} zusammen ein Fundamentalsystem constituiren. Zwischen den Grössen $u_1, u_2, \cdots u_{m-1}$ findet keine lineare homogene Relation mit constanten Coefficienten statt. Denn aus dieser Relation würde durch Integration eine ähnliche für $y_{i1}, y_{i2}, \cdots y_{im}$ folgen. Daher constituiren die Grössen u_1, $u_2, \cdots u_{m-1}$ ein Fundamentalsystem der Differenzialgleichung (3); und es ist unter den in der Umgebung von a_i liegenden singulären Punkten der Differenzialgleichung (3) a_i der einzige, für den eine Verzweigung der Integrale derselben stattfinden kann. Umschliesst man den Punkt a_i mit einer beliebig kleinen, aber endlichen Curve, so ist in dem übrigen Theile F der Umgebung von a_i die Anzahl der Punkte, für welche y_{i1} verschwindet, endlich. Denn es sei r_{i1} der Exponent, für den $(x-a_i)^{-r_{i1}} \cdot y_{i1} = y_{i1}'$ in der Umgebung von a_i eindeutig wird, so ist y_{i1}' innerhalb F endlich, eindeutig und continuirlich. Ist diese Funktion auf der Begrenzung von F nirgends Null, so ist $\frac{1}{2\pi i} \int d \log y_{i1}'$, auf diese Begrenzung erstreckt, endlich. Ist aber in einzelnen Punkten dieser Begrenzung y_{i1}' Null, so kann dieses, da y_{i1}' nicht identisch verschwindet, nur in einer endlichen Anzahl von Punkten geschehen. Alsdann kann man aber durch eine beliebig kleine Verschiebung dieser Begrenzung eine Fläche F' herstellen, auf deren Begrenzung y_{i1}' nicht verschwindet, und innerhalb welcher die Anzahl der Punkte, für die y_{i1}' verschwindet, von der Anzahl derer in F nur um eine endliche Zahl verschieden ist. Es ist nunmehr $\frac{1}{2\pi i} \int d \log y_{i1}'$, auf die Begrenzung von F' bezogen, endlich. Da aber $\frac{1}{2\pi i} \int d \log y_{i1}'$ auf die

Begrenzung von F oder F' bezogen resp. die Anzahl der Punkte innerhalb F oder F' angiebt, für die y'_{i1} verschwindet (weil die Funktion innerhalb dieser Flächen endlich ist), so folgt, das y'_{i1} innerhalb F nur in einer endlichen Anzahl von Punkten verschwindet. — Es lässt sich daher innerhalb F ein den Punkt a_i umgebender Ring S von endlicher Breite bestimmen, innerhalb desseu y_{i1} nicht verschwindet und daher die Coefficienten der Differenzialgleichung (3) eindeutig, continuirlich und endlich sind. Mit Hülfe derselben Principien, durch welche der Satz in No. 3 bewiesen wurde, wird jetzt gezeigt, dass aus dem Fundamentalsysteme $u_1, u_2, \cdots u_{m-1}$, wovon kein Element innerhalb S unendlich wird, ein anderes abgeleitet werden kann, wovon ein Element u_1' mit einer Potenz von $x - a_i$ multiplicirt innerhalb S eindeutig, continuirlich und endlich wird. Bekanntlich gilt alsdann für u_1' innerhalb S eine Entwickelung der Form:

$$u_1' = (x-a_i)^\rho \sum_0^\infty{}_\alpha c_\alpha (x-a_i)^\alpha + (x-a_i)^\rho \sum_0^\infty{}_\alpha c_{-\alpha} (x-a_i)^{-\alpha}.$$

Enthält dieser Ausdruck nicht die Potenz $\overset{-1}{(x-a_i)}$, so folgt nach den Principien der No. 1 aus der Gleichung (2) ein Integral y_{i2} der Differenzialgleichung (1) der Form

$$y_{i2} = \varphi_{21},$$

wo φ_{21} mit einer Potenz von $x - a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig wird.

Enthält aber der Ausdruck für u_1' die Potenz $\overset{-1}{(x-a_i)}$, so erhält man aus der Gleichung (2)

$$y_{i2} = \varphi_{21} + \varphi_{22} \log (x - a_i),$$

wo φ_{21} und φ_{22} mit derselben Potenz von $x - a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig werden.

Hierdurch ist die in dem obigen Satze aufgestellte Form von y_{i2} begründet.

Setzt man

$$(4) \qquad u = u_1' \int v \, dx,$$

so erhält man für v eine lineare Differenzialgleichung $m - 2^{\text{ter}}$ Ordnung

$$(5) \qquad \frac{d^{m-2} v}{d x^{m-2}} = r_1 \frac{d^{m-3} v}{d x^{m-3}} + \cdots + r_{m-2} \, v,$$

deren Coefficienten ganze Funktionen der Grössen q und der Grössen $\frac{1}{u_1'} \frac{d u_1'}{d x}, \frac{1}{u_1'} \frac{d^2 u_1'}{d x^2}, \ldots$ sind. Diese Differenzialgleichung hat daher in der Umgebung von a_i ausser diesem letzteren Punkte noch diejenigen Punkte, in denen y_{i1} oder u_1' verschwindet, zu singulären Punkten. Es ist wieder leicht zu zeigen, dass von denselben a_i der einzige ist, in dem eine Verzweigung stattfinden kann, und dass die Anzahl derjenigen von ihnen, die sich innerhalb F befinden, endlich ist. Daraus ergiebt sich alsdann, dass man ein Fundamentalsystem der Differenzialgleichung (5) finden kann, wovon ein Element v_1 mit einer Potenz von $x - a_i$ multiplicirt innerhalb eines den Punkt a_i umgebenden, ganz in den Ring S hineinfallenden endlichen Ringes S' eindeutig, endlich und continuirlich wird. Es ist alsdann innerhalb S'

$$v_1 = (x-a_i)^\sigma \sum_0^\infty{}_\alpha d_\alpha (x-a_i)^\alpha + (x-a_i)^\sigma \sum_0^\infty{}_\alpha d_{-\alpha} (x-a_i)^{-\alpha}.$$

Enthält dieser Ausdruck nicht die Potenz $(x-a_i)^{-1}$, so erhält man aus der Gleichung (4) ein Integral der Differenzialgleichung (3) der Form

$$u_2' = \psi,$$

wo ψ die Eigenschaft hat, mit einer Potenz von $x-a_i$ multiplicirt innerhalb S' eindeutig, continuirlich und endlich zu werden. Es lässt sich daher ψ innerhalb S' unter der Form

$$\psi = (x-a_i)^{\tau} \sum_0^{\infty}{}_{\alpha}\, e_{\alpha}\, (x-a_i)^{\alpha} + (x-a_i)^{\tau} \sum_0^{\infty}{}_{\alpha}\, e_{-\alpha}\, (x-a_i)^{-\alpha}$$

darstellen. Enthält auch diese Reihe nicht die Potenz $(x-a_i)^{-1}$, so ergiebt die Gleichung (2) ein Integral y_{i3} der Differenzialgleichung (1) der Form

$$\text{(a)} \qquad y_{i3} = \varphi_{31},$$

wo φ_{31} mit einer Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig wird.

Enthält aber die Reihe für ψ die Potenz $(x-a_i)^{-1}$, so ergiebt die Gleichung (2) ein Integral der Form

$$\text{(b)} \qquad y_{i3} = \varphi_{31} + \varphi_{32} \log (x-a_i).$$

wo φ_{31} und φ_{32} mit derselben Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig werden.

Enthält die Reihe für v_1 die Potenz $(x-a_i)^{-1}$, so liefert die Gleichung (4) ein Integral der Differenzialgleichung (3) der Form

$$u_2' = \psi + \psi_1 \log (x-a_i),$$

wo ψ und ψ_1 mit derselben Potenz von $x-a_i$ multiplicirt innerhalb S' eindeutig, continuirlich und endlich werden. Diese Grössen lassen sich daher innerhalb S' unter der Form

$$(x-a_i)^{\tau'} \sum_0^{\infty}{}_{\alpha}\, e'_{\alpha}\, (x-a_i)^{\alpha} + (x-a_i)^{\tau'} \sum_0^{\infty}{}_{\alpha}\, e'_{-\alpha}\, (x-a_i)^{-\alpha}$$

darstellen. Enthält die Reihe für ψ_1 nicht die Potenz $(x-a_i)^{-1}$, so gelangt man wieder durch die Gleichung (2) zu einem Integrale der Form (b). Enthält aber jene Reihe die Potenz $(x-a_i)^{-1}$, so erhält man

$$\text{(c)} \qquad y_{i3} = \varphi_{31} + \varphi_{32} \log (x-a_i) + \varphi_{33} (\log (x-a_i))^2,$$

wo φ_{31}, φ_{32}, φ_{33} alle mit derselben Potenz von $x-a_i$ multiplicirt in der Umgebung von a_i eindeutig werden.

Hierdurch ist die Form von y_{i3}, so wie sie im obigen Satze gegeben worden, begründet. Fährt man so fort, so wird überhaupt gezeigt, dass man ein System von Integralen $y_{i1}, y_{i2}, \cdots y_{im}$ ermitteln kann, welche die im obigen Satze aufgestellte Form haben. — Dass man aber auf diesem Wege ein Fundamentalsystem erhält, ergiebt sich aus dem Satze am Schlusse der No. 2. — Für den Punkt ∞ ergiebt sich ein Fundamentalsystem von ähnlicher Gestalt, wenn man in die Differenzialgleichung (1) $\frac{1}{z}$ statt x setzt.

Um den Verlauf der Integrale einer gegebenen linearen Differenzialgleichung in der ganzen Ebene bestimmen zu können, sind mithin zweierlei Untersuchungen nöthig:

1) Für jeden singulären Punkt müssen die Grössen φ bestimmt werden, wodurch das Verhalten des zugehörigen Fundamentalsystems, folglich aller Integrale in der Umgebung dieses Punktes gegeben ist.

2) Es müssen die Coefficienten der linearen Substitutionen ermittelt werden, wodurch sich die zu den verschiedenen singulären Punkten gehörigen Fundamentalsysteme durch einander ausdrücken.

Die Grössen φ lassen sich in der Umgebung von a_i durch Reihen der Form

$$\sum_0^\infty{}_\alpha\, c_\alpha\,(x-a_i)^{r+\alpha} + \sum_0^\infty{}_\alpha\, c_{-\alpha}\,(x-a_i)^{r-\alpha}$$

darstellen, wo r für alle φ mit demselben ersten Index denselben Werth hat. Man muss die Ausdrücke für die Integrale $y_{i\alpha}$ in die Differenzialgleichung substituiren, um die Grössen r und die Coefficienten c zu bestimmen.

Mit Hülfe des in dieser Nummer enthaltenen Satzes kann man den Inhalt der vorigen Nummer auf eine einfachere Weise ableiten. Ich habe es jedoch der Deutlichkeit wegen vorgezogen, mich bei jener Untersuchung auf die dasselbe gültigen speciellen Voraussetzungen zu stützen.

Berlin, im Januar 1865.

L. Fuchs.