Untersuchung des Potentials eines homogenen rechtwinkligen Cylinders nach der Dirichletschen Methode.

§ 1.

Versteht man unter P einen von den drei Veränderlichen ξ, η, ζ abhängigen Ausdruck, und bedeuten ξ, η, ζ die Coordinaten eines Punktes im Raume, denkt man sich ferner gegeben eine nach allen Seiten hin begrenzte Masse, welche ein zusammenhängendes Ganze bildet, oder aus mehreren getrennten Theilen besteht, aber in allen ihren Punkten eine *endliche* Dichtigkeit besitzt, so hat Dirichlet im 32. Bande des Crelleschen Journals gezeigt, dass P das Potential dieser Masse in Beziehung auf den Punkt (ξ, η, ζ) bedeutet, wenn den folgenden drei Bedingungen genügt wird:

1. wenn P und seine ersten Ableitungen nach ξ, η, ζ *endliche* und *stetige* Functionen innerhalb des *ganzen* Raumes sind;
2. wenn die Producte $\xi P, \eta P, \zeta P$; $\xi^2 \frac{\partial P}{\partial \xi}, \eta^2 \frac{\partial P}{\partial \eta}, \zeta^2 \frac{\partial P}{\partial \zeta}$ in *keinem* Punkte des Raumes *endliche* Grenzwerthe überschreiten;
3. wenn die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2}, \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2}$ in *allen* Punkten des Raumes *endliche* Werthe haben, die mit Ausnahme der Punkte, in welchen die Dichtigkeit sich *unstetig* ändert, auch *eindeutig* sind, und der Gleichung

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} = -4\pi\varkappa \tag{1.}$$

genügen, wo $\varkappa$ die Dichtigkeit der Masse im Punkte (ξ, η, ζ) bedeutet, und $\varkappa = 0$ gesetzt werden muss, wenn (ξ, η, ζ) ein ausserhalb der Masse liegender Punkt ist.

Nach dieser Methode ist nun zuerst von Dirichlet a. a. O. das Potential eines dreiaxigen Ellipsoides untersucht worden, und ferner habe ich im 58. Bande des Journals für Mathematik dasselbe mit dem Potential eines Parallelepipedums gethan. Sonstige Anwendungen dieser Methode sind mir nicht bekannt geworden, so dass es von einigem Interesse zu sein scheint, das von mir im Programme der Gewerbeschule vom Jahre 1861 und im 61. Bande des Journals für Mathematik entwickelte Potential eines homogenen rechtwinkligen elliptischen Cylinders ebenfalls nach dieser Methode zu behandeln, was im Folgenden geschehen soll.

Es giebt aber noch einen Grund, welcher diese Untersuchung nach der Dirichletschen Methode fast nothwendig macht. Bei dem Potentiale des Cylinders nämlich tritt, wie bei dem des Parallelepipedums, der Umstand ein, dass *ein und dieselbe* Form für *alle* Lagen von (ξ, η, ζ)

gültig ist, während doch nach der obigen Bedingung 3., wenn (ξ, η, ζ) ein *äusserer* Punkt ist, also in (1.) $\varkappa = 0$ gesetzt werden muss, das Potential nach (1.) der Bedingung:

$$(1^a.) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} = 0$$

genügen soll; dagegen, wenn (ξ, η, ζ) ein *innerer* Punkt ist, wo dann $\varkappa$ in (1.) einen von Null verschiedenen Werth hat, der für den Fall eines homogenen Körpers gleich der Einheit gesetzt werden darf, das Potential der Bedingung:

$$(1^b.) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} = -4\pi$$

genügen muss. Mit anderen Worten, die eine für das Potential des Cylinders entwickelte Form muss, je nach der Lage von (ξ, η, ζ), den Gleichungen $(1^a.)$ oder $(1^b.)$ genügen, und so lange dies nicht gezeigt worden, wird man mit Recht daran zweifeln dürfen, ob die *eine* Form des Potentials wirklich für *alle* Lagen von (ξ, η, ζ) gültig bleibt. Im Folgenden wird dieser Umstand seine Erledigung finden müssen.

§ 2.

Das nach der Dirichletschen Methode zu untersuchende Resultat besteht in Folgendem. Ein rechtwinkliger Cylinder von der Höhe $2c$, begrenzt von elliptischen Grundflächen mit den Axen a und b, sei erfüllt von einer homogenen Masse, deren Dichtigkeit gleich der Einheit gesetzt ist. Durch den Mittelpunkt dieses Cylinders lege man ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen x oder ξ Axe parallel sei der Axe a der elliptischen Grundflächen, dessen y oder η Axe parallel sei der Axe b derselben Flächen, während die Axe der z oder ζ mit der Höhe $2c$ des Cylinders zusammenfällt. Ferner bezeichne man die Coordinaten eines beliebigen Punktes im Raume mit ξ, η, ζ. Die die Grundflächen des Cylinders begrenzenden Ellipsen haben hiernach die Gleichung:

$$(1.) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

und liegen in den Höhen $z = c$ oder $z = -c$, parallel der xy oder $\xi\eta$ Ebene.

Die Grössen a, b, c sind ihrer Bedeutung nach *positive* Grössen, und ξ, η, ζ werden als *positive* Grössen angesehen, weil dies die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, sondern nur die bisher willkürlichen Richtungen der positiven Coordinatenaxen durch die Lage des Punktes (ξ, η, ζ) bestimmt.

Setzt man ferner der Kürze wegen:

$$(2.) \qquad a\cos\varphi - \xi = \alpha, \quad b\sin\varphi - \eta = \beta, \quad c + \varepsilon\zeta = \gamma,$$

wird ferner

$$(3.) \qquad 2P = a\sum \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, X(\alpha, \beta, \gamma)\, d\varphi$$

gesetzt, wo $X(\alpha, \beta, \gamma)$ eine Function der in (2.) definirten drei Grössen α, β, γ bedeutet, die durch die folgende Gleichung gegeben ist:

$$(4.) \qquad X(\alpha, \beta, \gamma) = \beta \log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma} + \gamma \log\frac{\rho+\beta}{\rho-\beta} - 2\alpha \operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho},$$

in welcher:

$$(4^a.)\qquad \rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

wo ferner ρ *positiv* und der arctang immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu nehmen ist, so dass also immer die Bedingung erfüllt werden muss:

$$(4^b.)\qquad -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho} < +\frac{\pi}{2};$$

werden endlich noch der Grösse ε, die in γ vorkommt, die Werthe $+1$ und -1 gegeben, und bedeutet das Summenzeichen in (3.), dass die beiden für die verschiedenen Werthe von ε erhaltenen Integrale addirt werden sollen, so habe ich an den in § 1. citirten Orten bewiesen, dass die durch (3.) definirte Function P der Grössen ξ, η, ζ das Potential des Cylinders in Beziehung auf den Punkt (ξ, η, ζ) ist.

Was die zweite Form von P betrifft, welche an den oben genannten Orten noch angegeben wurde, so ist sie, wie dort gezeigt worden, mit der Form (3.) identisch, so dass eine weitere Untersuchung derselben unnöthig erscheint.

Man bemerke noch die nachstehenden Gleichungen, welche im Folgenden häufig gebraucht werden.

Es ist mit Anwendung von (4^a.):

$$(5.)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma} = \frac{-2\gamma\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma} = \frac{-2\gamma\beta}{(\alpha^2+\beta^2)\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial\gamma}\log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma} = \frac{2}{\rho}$$

$$(5^a.)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{\rho+\beta}{\rho-\beta} = \frac{-2\beta\alpha}{(\alpha^2+\gamma^2)\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{\rho+\beta}{\rho-\beta} = \frac{2}{\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial\gamma}\log\frac{\rho+\beta}{\rho-\beta} = \frac{-2\gamma\beta}{(\alpha^2+\gamma^2)\rho}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho} = -\frac{\beta\gamma(\alpha^2+\rho^2)}{(\alpha^2\rho^2+\beta^2\gamma^2)\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial\beta}\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho} = \frac{\gamma\alpha(\alpha^2+\gamma^2)}{(\alpha^2\rho^2+\beta^2\gamma^2)\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial\gamma}\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho} = \frac{\beta\alpha(\alpha^2+\beta^2)}{(\alpha^2\rho^2+\beta^2\gamma^2)\rho}$$

oder da nach (4^a.)

$$\alpha^2+\rho^2 = (\alpha^2+\beta^2)+(\alpha^2+\gamma^2), \quad \alpha^2\rho^2+\beta^2\gamma^2 = \alpha^4+\alpha^2\beta^2+\alpha^2\gamma^2+\beta^2\gamma^2 = (\alpha^2+\gamma^2)(\alpha^2+\beta^2),$$

so wird, indem man dies in die letzte Reihe von Gleichungen einführt:

$$(5^b.)\qquad \frac{\partial}{\partial\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho} = -\frac{\beta\gamma}{(\alpha^2+\beta^2)\rho}-\frac{\beta\gamma}{(\alpha^2+\gamma^2)\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial\beta}\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho} = \frac{\gamma\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)\rho}, \quad \frac{\partial}{\partial\gamma}\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho} = \frac{\beta\alpha}{(\alpha^2+\gamma^2)\rho}.$$

Ferner ist nach (4.)

$$\frac{\partial X}{\partial\alpha} = -2\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}+\beta\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}+\gamma\frac{\partial}{\partial\alpha}\log\frac{\rho+\beta}{\rho-\beta}-2\alpha\frac{\partial}{\partial\alpha}\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}$$

$$\frac{\partial X}{\partial\beta} = \log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}+\beta\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}+\gamma\frac{\partial}{\partial\beta}\log\frac{\rho+\beta}{\rho-\beta}-2\alpha\frac{\partial}{\partial\beta}\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}$$

$$\frac{\partial X}{\partial\gamma} = \log\frac{\rho+\beta}{\rho-\beta}+\beta\frac{\partial}{\partial\gamma}\log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}+\gamma\frac{\partial}{\partial\gamma}\log\frac{\rho+\beta}{\rho-\beta}-2\alpha\frac{\partial}{\partial\gamma}\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}$$

oder da, wie die vorstehenden Gleichungen (5.) (5^a.) und (5^b.) zeigen, die Summen der drei letzten Glieder der vorstehenden Gleichungen identisch verschwinden, erhält man:

$$(6.)\qquad \frac{\partial X}{\partial\alpha} = -2\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}, \quad \frac{\partial X}{\partial\beta} = \log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}, \quad \frac{\partial X}{\partial\gamma} = \log\frac{\rho+\beta}{\rho-\beta}.$$

Setzt man ferner in X den Werth $-\alpha$ für α, so geht arctg $\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}$ über in $-$ arctg $\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}$, weil in Folge der Bedingung (4^b.) zu einem arctang mit negativem Argumente der negative Werth des arctang mit entsprechendem positiven Argumente gehört. Es bleibt also durch die Vertauschung von $-\alpha$ mit α das Glied in X, welches den arctang enthält, ungeändert, und da ρ nach (4.) auch ungeändert bleibt, so ist:

$$(6^a.) \qquad X(-\alpha, \beta, \gamma) = X(\alpha, \beta, \gamma);$$

auf dieselbe Weise zeigt man noch, dass auch:

$$(6^b.) \qquad X(\alpha, -\beta, \gamma) = -X(\alpha, \beta, \gamma), \quad X(\alpha, \beta, -\gamma) = -X(\alpha, \beta, \gamma).$$

Es wechselt also X mit den beiden letzten Argumenten sein Zeichen, während es durch den Zeichenwechsel des ersten Argumentes ungeändert bleibt.

Man bemerke endlich noch, dass in Folge von (1.):

$$(6^c.) \qquad \frac{\partial\alpha}{\partial\xi} = -1, \quad \frac{\partial\beta}{\partial\eta} = -1, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial\zeta} = \varepsilon.$$

§ 3.

Für die beabsichtigte Untersuchung ist nun zunächst die Function X in (4.) § 2. noch näher zu betrachten. Dieselbe ist auf rationale Weise aus Logarithmen und Arctang zusammengesetzt. Da nun ρ nach (4^a.) § 2. immer grösser ist wie β und wie γ, und höchstens gleich diesen Werthen werden kann, wenn sie positiv sind, so sind die Argumente der Logarithmen in X immer positiv, also die Logarithmen selbst immer *eindeutige* und *stetige* Functionen ihrer Argumente. Aber die Logarithmen in X können unendlich werden, und zwar der erste, log $\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}$, wenn ρ gleich dem absoluten Werthe von γ wird, d. h. nach (4^a.) § 2. wenn zu gleicher Zeit:

$$(1.) \qquad \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \beta = 0.$$

In diesem Falle verschwindet entweder $\rho + \gamma$, also der Logarithmus wird $-\infty$, wenn γ *negativ* ist, oder es verschwindet $\rho - \gamma$, also der Logarithmus wird $+\infty$, wenn γ *positiv* ist.

Der zweite Logarithmus in X, log $\frac{\rho+\beta}{\rho-\beta}$, kann ebenfalls unendlich werden, wenn ρ gleich dem absoluten Werthe von β wird, d. h. wenn zu gleicher Zeit:

$$(2.) \qquad \alpha = 0 \quad \text{und} \quad \gamma = 0;$$

und zwar verschwindet in diesem Falle wieder entweder $\rho + \beta$, wenn β *negativ* ist, oder es verschwindet $\rho - \beta$, wenn β *positiv* ist, und immer wird der Logarithmus unendlich, entweder $-\infty$ oder $+\infty$. Betrachtet man nun X, wie es in Folge der Gleichungen (2.) § 2. für die Untersuchung des Potentials geschehen muss, als Function von ξ, η, ζ, so tritt also der Fall (1.) ein, wenn ξ, η solche Werthe haben, dass zu gleicher Zeit

$$(1^a.) \qquad a \cos\varphi - \xi = 0, \quad b \sin\varphi - \eta = 0$$

oder, wie hieraus folgt, wenn

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

während ζ beliebig bleibt. Daraus erhellt nach (1.) § 2., dass der Fall (1.) immer eintritt, und nur dann, wenn (ξ, η, ζ) auf *dem Mantel des Cylinders oder dessen Verlängerung* liegt.

Der Fall (2.) tritt nach (2.) § 2. ein, wenn zu gleicher Zeit:

$$(2^a.) \qquad a \cos \varphi - \xi = 0, \quad c + \varepsilon \zeta = 0,$$

also, da $\varepsilon = \pm 1$ ist und ζ positiv gesetzt wurde (§ 2.), wenn:

$$\xi < a, \quad \zeta = c,$$

während η beliebig bleibt, und dieser Umstand wird demnach immer und nur dann eintreten, wenn (ξ, η, ζ) in den *Grundflächen des Cylinders* liegt, oder in denjenigen Verlängerungen derselben, welche durch zwei in den Endpunkten der Ellipsenaxe $2a$ parallel der Axe der η errichtete Lothe begrenzt werden.

Wenn aber auch in den beiden Fällen (1.) und (2.) die Logarithmen in X unendlich werden, so behält X selber doch *endliche* Werthe.

Denn das Glied in X (4.) § 2., welches den Logarithmus enthält, der im Falle (1.) unendlich wird, hat die Form:

$$(3.) \qquad \beta \log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma}$$

und erhält also, da $\beta = 0$ im Falle (1.), den unbestimmten Werth $0 \, . \, \infty$.

Nach $(1^a.)$ ist ferner im Falle (1.):

$$\xi = a \cos \varphi, \quad \eta = b \sin \varphi.$$

Um also den wahren Werth von (3.) für diese Werthe von ξ und η zu finden, setze man in (3.):

$$\xi = a \cos \varphi_1, \quad \eta = b \sin \varphi_1,$$

betrachte (3.) als Function von φ_1 und untersuche den Werth, welchen (3.) für $\varphi_1 = \varphi$ erhält. Da nun hiernach und nach (2.) § 2.:

$$(1^b.) \qquad \alpha = a \cos \varphi - a \cos \varphi_1, \quad \beta = b \sin \varphi - b \sin \varphi_1$$

zu setzen ist, und:

$$\beta \log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} = \frac{\log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma}}{\frac{1}{\beta}},$$

also (3.) jetzt für $\varphi_1 = \varphi$ in der Form $\frac{\infty}{\infty}$ auftritt, so ist sein wahrer Werth unter Anwendung von (5.) § 2.:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma}}{\frac{\partial}{\partial \varphi_1} \frac{1}{\beta}} = - \frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} \log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \varphi_1} + \frac{\partial}{\partial \beta} \log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_1}}{\frac{1}{\beta^2} \cdot \frac{\partial \beta}{\partial \varphi_1}} = \frac{\frac{-2\gamma\alpha}{(\alpha^2 + \beta^2)\rho} \cdot a \sin \varphi_1 - \frac{-2\gamma\beta}{(\alpha^2 + \beta^2)\rho} \, b \cos \varphi_1}{\frac{1}{\beta^2} \cdot b \cos \varphi_1},$$

oder nach einfachen Umformungen:

$$(3^a.) \qquad - \frac{2\gamma}{\rho} \left(\frac{\alpha \, a \sin \varphi_1}{b \cos \varphi_1} - \beta \right) \frac{\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}, \text{ für } \varphi = \varphi_1.$$

Da nun nach $(1^b.)$ auch:

$$(1^c.) \qquad \alpha = -2a \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi + \varphi_1}{2}, \quad \beta = 2b \sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi + \varphi_1}{2},$$

so geht mit Anwendung dieser Gleichungen $(3^a.)$ über in:

$$\sin \frac{\varphi - \varphi_1}{2} \cdot \frac{4\gamma}{\rho} \left(\frac{a^2 \sin \frac{\varphi + \varphi_1}{2} \cdot \sin \varphi_1}{b \cos \varphi_1} + b \cos \frac{\varphi + \varphi_1}{2} \right) \cdot \frac{b^2 \cos^2 \frac{\varphi + \varphi_1}{2}}{a^2 \sin^2 \frac{\varphi + \varphi_1}{2} + b^2 \cos^2 \frac{\varphi + \varphi_1}{2}},$$

und giebt für $\varphi = \varphi_1$ den wahren Werth von (3.). Unter dieser Annahme verschwindet aber der Factor $\sin\frac{\varphi - \varphi_1}{2}$, und da das Product der anderen Factoren, weil ρ im Falle (1.) gleich dem absoluten Werthe von γ wird, in $\pm 4\,b\cos\varphi$ übergeht, je nachdem γ positiv oder negativ ist, ein Ausdruck der für keinen Werth von φ unendlich werden kann, so ist der wahre Werth von (3.) im Falle (1.) gleich Null.

Das Glied von X, welches den Logarithmus enthält, der im Falle (2.) unendlich wird, hat nach (4.) § 2. die Form:

$$(4.)\qquad \gamma \log\frac{\rho+\beta}{\rho-\beta}.$$

Dieses Glied erhält aber, da $\gamma = 0$ im Falle (2.), ebenfalls den unbestimmten Werth $0 \,.\, \infty$. Nach (2.) ist zu setzen:

$$\alpha = 0, \quad \gamma = 0,$$

welche Bedingungen sich für ξ und ζ nach (2ª.) in der Form aussprechen:

$$\xi = a\cos\varphi, \quad \zeta = c.$$

Da hiernach ξ und ζ ganz unabhängig von einander diejenigen Werthe erhalten, welche α und γ verschwinden lassen, was bei der Untersuchung von (3.) nicht der Fall war, da dort sowohl ξ als η von φ abhingen nach (1ª.), so kann man für die Untersuchung des wahren Werthes von (4.) erst $\alpha = 0$ setzen, wodurch (4.) in

$$(4^a.)\qquad \gamma\log\frac{\rho+\beta}{\rho-\beta} = \frac{\log\frac{\rho+\beta}{\rho-\beta}}{\frac{1}{\gamma}}, \quad \rho^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

übergeht, und den Werth dieses Ausdruckes für $\gamma = 0$ untersuchen. Nach (4ª.) erscheint aber das zu untersuchende Glied in der Form $\frac{\infty}{\infty}$ für $\gamma = 0$, und sein wahrer Werth ist daher mit Anwendung von (5ª.) § 2. der Werth des folgenden Ausdruckes:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial\gamma}\log\frac{\rho+\beta}{\rho-\beta}}{\frac{\partial}{\partial\gamma}\,\frac{1}{\gamma}} = \frac{2\gamma\beta}{\sqrt{\beta^2+\gamma^2}}, \text{ für } \gamma = 0,$$

der für $\gamma = 0$ immer verschwindet, was auch β bedeuten möge. Demnach ist also auch der wahre Werth von (4.) im Falle (2.) gleich Null.

Es ist endlich noch der arctang in X (4.) § 2. zu untersuchen. Derselbe ist nach der Bedingung (4ᵇ.) § 2. immer endlich, und eindeutig, weil zwischen den Grenzen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu jedem bestimmten Werthe des Argumentes nur ein einziger Werth eines arctang gehört. Aber das Argument dieses arctang hat die Form $\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}$, und dasselbe wird unendlich, wenn:

(5.) $\qquad \alpha = 0$, während β, γ, ρ von Null verschieden sind,

es erhält also der arctang dann den Werth $\frac{\pi}{2}$. Denkt man sich nun, dass $\frac{\beta\gamma}{\rho}$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth hat, der der Bequemlichkeit wegen positiv sein mag, (was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, da ja nach (4ᵇ.) § 2. und der Bemerkung am Ende von § 2. das Zeichen von $\frac{\beta\gamma}{\rho}$ immer vor den arctang gesetzt werden kann), und stellt man sich ferner vor, dass α von einem endlichen Werthe her sich stetig dem Werthe Null nähert und ihn erreicht, so wird, je nachdem diese Annäherung von einem *positiven* Werthe an abnehmend oder von einem *negativen* Werthe an wachsend geschehen ist, der arctang für $\alpha = 0$, den Werth $+\frac{\pi}{2}$

oder $-\frac{\pi}{2}$ erhalten. Oder mit anderen Worten, wenn unter den obigen Annahmen über β, γ, ρ die Grösse α von positiven oder negativen Werthen durch Null zu negativen oder positiven übergeht, so wird der arctang an der Stelle $\alpha = 0$ von $\pm\frac{\pi}{2}$ nach $\mp\frac{\pi}{2}$ springen, d. h. immer und nur wenn:

$$\alpha = 0 \text{ oder } \xi = a \cos\varphi \text{ nach (2.) § 2.} \tag{5^a.}$$

wird der arctang *aufhören* eine stetige Function seines Argumentes zu sein.

Auf X selbst hat aber dieses Verhalten des arctang keinen Einfluss. Denn das Glied, welches in (4.) § 2. den arctang enthält, hat die Form:

$$-2\alpha \operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho},$$

und wird also, wegen des im Falle (5.) verschwindenden Factors $\alpha = 0$, selbst den Werth Null erhalten, gleichgültig, ob der arctang $+\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$ ist; dies Glied ist also immer eine eindeutige und stetige Function seiner Argumente.

Nun wurde oben gezeigt, dass die Logarithmen, welche X enthält, eindeutig und stetig sind, da ferner das Glied, welches von dem arctang abhängt, ebenfalls eindeutig und stetig ist, obgleich der arctang selbst diese Eigenschaft nicht besitzt, so erhellt, dass X als Function von α, β, γ oder ξ, η, ζ betrachtet, eine *eindeutige* und *stetige* Function seiner Argumente ist, welche auch, wie die vorstehenden Untersuchungen lehren, für *endliche* Werthe derselben *niemals unendlich* wird.

Es folgt noch, dass X als Function von α, β, γ betrachtet, immer verschwindet, wenn zwei seiner Argumente den Werth Null haben. Für die Fälle $\alpha = 0$ und $\beta = 0$, $\alpha = 0$ und $\gamma = 0$ ist diese Eigenschaft oben bewiesen, für den Fall $\beta = 0$ und $\gamma = 0$ erhellt sie sofort aus einer blossen Ansicht der Gleichung (4.) § 2.

Endlich ist noch zu bemerken, dass der Fall

$$\rho = 0,$$

welcher nach (4^a.) § 2.

$$\alpha = 0, \ \beta = 0, \ \gamma = 0 \tag{6.}$$

zur Folge hat, bei den vorhergehenden Betrachtungen übergangen ist. Da aber in diesem Falle sowohl die Argumente der Logarithmen in (4.) § 2., als auch das des arctang unbestimmte Werthe erhalten, so ist zu zeigen, dass auch in diesem Falle die oben über X gemachte Behauptung erfüllt ist.

Unter den Annahmen (6.) finden nun die Fälle (1.) und (2.) zu gleicher Zeit statt, und es ist nach (1^a.) und (2^a.)

$$\xi = a\cos\varphi, \ \eta = b \sin\varphi, \ \zeta = c$$

zu setzen, oder es ist

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1, \ \zeta = c,$$

d. h. der Fall (6.), $\rho = 0$, findet immer und nur dann statt, wenn der Punkt (ξ, η, ζ) auf *einer der die Grundflächen begrenzenden Ellipsen* liegt.

Da γ unabhängig von α und β verschwindet, so kann der wahre Werth von X so untersucht werden, dass man zunächst $\gamma = 0$ setzt, und dann α und β gleichzeitig verschwinden lässt, oder dass man zuerst α und β zugleich verschwinden lässt und dann $\gamma = 0$ setzt.

Das erste Glied in X (4.) § 2. verschwindet, wenn man $\gamma = 0$ setzt, weil das Argument des Logarithmus den Werth 1, er selbst also den Werth Null erhält, und der Factor β im vorliegenden Falle selbst Null ist. Im zweiten Gliede von X lasse man zuerst α und β gleichzeitig verschwinden. Dadurch wird ρ gleich dem absoluten Werthe von γ, das Argument des Logarithmus also 1, er selbst gleich Null. Es verschwindet daher auch dieses Glied, da auch noch der Factor γ den Werth Null hat. Endlich verschwindet sofort das dritte Glied in X, welches den arctang enthält. Denn was auch immer der wahre Werth des Argumentes des arctang sein mag, der arctang selbst ist nach der Bedingung (4^b.) § 2. immer endlich, also das Glied gleich Null, wegen des Factors $\alpha = 0$.

Hiernach verschwindet also X, als Function von α, β, γ betrachtet, auch dann, wenn alle seine Argumente zu gleicher Zeit den Werth Null erhalten, oder die oben über X ausgesprochene Behauptung ist auch in diesem letzten Falle als richtig erwiesen.

Untersuchen wir endlich noch das Verhalten von X, wenn der Punkt (ξ, η, ζ) ins Unendliche rückt. Hierzu setze man:

$$(7.) \qquad \xi = p\lambda, \quad \eta = q\lambda, \quad \zeta = r\lambda,$$

wo λ eine von der Veränderlichkeit der Grössen ξ, η, ζ unabhängige Grösse bedeutet, p, q, r mit ξ, η, ζ variabele Grössen sind, von denen noch vorausgesetzt werde, dass sie niemals unendliche Werthe erhalten.

Führt man nun für ξ, η, ζ die durch (7.) gegebenen Formen in die Gleichungen (2.) § 2. ein, so folgt:

$$\alpha = a \cos\varphi - p\lambda, \quad \beta = b \sin\varphi - q\lambda, \quad \gamma = c + \varepsilon r\lambda,$$

oder, wenn:

$$(8.) \qquad \alpha_1 = \frac{a\cos\varphi}{\lambda} - p, \quad \beta_1 = \frac{b\sin\varphi}{\lambda} - q, \quad \gamma_1 = \frac{c}{\lambda} + \varepsilon r$$

gesetzt wird, erhält man:

$$(9.) \qquad \alpha = \lambda\alpha_1, \quad \beta = \lambda\beta_1, \quad \gamma = \lambda\gamma_1.$$

Hierdurch geht ρ (4^a.) § 2. über in:

$$(9^a.) \qquad \rho = \lambda\rho_1,$$

wenn:

$$(9^b.) \qquad \rho_1^2 = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2$$

gesetzt wird, und indem man für $\alpha, \beta, \gamma, \rho$ ihre durch (9.) und (9^a.) gegebenen Werthe in den Ausdruck von X (4.) § 2. einführt, sieht man, dass in den Argumenten der Logarithmen und des arctang die Grösse λ sich hebt, und nur noch in den Werthen von $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ (8.) vorkommt, und dass sie zugleich, wegen (9.), Factor der rechten Seite wird, während der andere Factor die Form von $X(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ erhält. Man findet also:

$$(10.) \qquad X(\alpha, \beta, \gamma) = \lambda \,.\, X(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1).$$

Der Punkt (ξ, η, ζ) wird nun nach (7.) auf die allgemeinste Weise ins Unendliche rücken, wenn man die Grösse λ über alle Grenzen wachsen lässt, während p, q, r endliche Werthe behalten. Von den letzteren werden sogar zwei proportional $\frac{1}{\lambda}$ verschwinden können, so dass zwei der Grössen ξ, η, ζ endliche Werthe behalten, wenn nur die dritte einen unendlichen Werth hat.

Aus (8.) folgt dann als Grenzwerth der Grössen $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ für $\lambda = \infty$:

$$(8^a.) \qquad \alpha_1 = -p, \quad \beta_1 = -q, \quad \gamma_1 = \varepsilon r,$$

und dies in (10.) eingeführt, liefert:

$$(10^a.) \qquad X(\alpha, \beta, \gamma) = \lambda X(-p, -q, \varepsilon r).$$

Da nun p, q, r endliche Grössen sind und also $X(-p, -q, \varepsilon r)$ nach den obigen Untersuchungen ebenfalls immer einen endlichen Werth hat, so wird nach (10ª.) die Function X wegen des Factors λ auf der rechten Seite im Allgemeinen *unendlich*, wenn (ξ, η, ζ) im Unendlichen liegt, und zwar proportional einer der unendlichen Grössen ξ, η, ζ.

§ 4.

Wegen der in § 3. bewiesenen Eigenschaft des X, wonach X stetig ist und für endliche Werthe von ξ, η, ζ niemals unendlich wird, kann nun das Integral in der Gleichung (3.) § 2. nach ξ, η, ζ unter dem Integralzeichen differentiirt werden, und man erhält so aus (3.) § 2. mit Hülfe von (6.) und (6ᶜ.) § 2. die zunächst nur für alle *endlichen* Werthe von ξ, η, ζ gültigen Formen der *ersten* Ableitungen von P:

$$(1.)\quad \begin{cases} 2\,\dfrac{\partial P}{\partial \xi} = 2\,a \sum \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\varphi \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\, d\varphi, \\[2ex] 2\,\dfrac{\partial P}{\partial \eta} = -a \sum \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\varphi \log \frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}\, d\varphi, \\[2ex] 2\,\dfrac{\partial P}{\partial \zeta} = a \sum \varepsilon \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\varphi \log \frac{\rho+\beta}{\rho-\beta}\, d\varphi, \end{cases}$$

wo α, β, γ, ρ die in (2.) und (4ª.) § 2. definirten Grössen bedeuten.

Durch die Untersuchungen des § 3. ist nicht bewiesen, dass diese Formen (1.) auch gelten, wenn ξ, η, ζ im Unendlichen liegt. Denn in § 3. (10ª.) ist gezeigt worden, dass X im Allgemeinen unendlich wird, wenn (ξ, η, ζ) ins Unendliche rückt, und wenn dadurch der Sinn des Integrals in der Gleichung (3.) § 2. überhaupt fraglich wird, weil alle Elemente desselben scheinbar unendlich werden, so wird es gewiss die Differentiation nach den Grössen ξ, η, ζ unter dem Integralzeichen. Dennoch gelten die Formeln (1.) auch für diesen Fall, wie jetzt bewiesen werden soll.

Führt man nämlich den Ausdruck (10.) § 3. für $X(\alpha, \beta, \gamma)$ in den allgemeinen Ausdruck für das Potential (3.) § 2. ein, so erhält man:

$$(2.)\qquad 2\,P = a\lambda \sum \int_0^{2\pi} \sin\varphi\; X(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)\, d\varphi.$$

In dieser Form sind die Grössen α_1, β_1, γ_1 nach (8.) § 3. immer endlich, auch dann, wenn ξ, η, ζ ins Unendliche rückt, d. h. wenn $\lambda = \infty$ wird. Denn α_1, β_1, γ_1 gehen in diesem Falle nach (8ª.) bezüglich in $-p$, $-q$, εr über, und es wurde von den Grössen p, q, r in § 3. angenommen, dass sie immer endlich sein sollen. Die Function X in (2.) bleibt daher auch in dem vorliegenden Falle nach den Resultaten des § 3. immer *endlich* und stetig, d. h. (2.) darf mit Einschluss des Falles, wo (ξ, η, ζ) im Unendlichen liegt, nach p, q, r unter dem Integralzeichen differentiirt werden.

Durch Ausführung dieser Differentiation erhält man aus (2.) mit Hülfe von (6.) § 2. und (8.) § 3.:

$$(3.)\quad \begin{cases} 2\,\dfrac{\partial P}{\partial p} = \;\;2a\lambda \sum \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\varphi \operatorname{arctg} \dfrac{\beta_1\gamma_1}{\alpha_1\rho_1}\,d\varphi, \\[2ex] 2\,\dfrac{\partial P}{\partial q} = -a\lambda \sum \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\varphi \log \dfrac{\rho_1+\gamma_1}{\rho_1-\gamma_1}\,d\varphi, \\[2ex] 2\,\dfrac{\partial P}{\partial r} = \;\;\;a\lambda \sum \varepsilon \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\varphi \log \dfrac{\rho_1+\beta_1}{\rho_1-\beta_1}\,d\varphi, \end{cases}$$

wo ρ_1 die in (9^b.) § 3. definirte Grösse bedeutet. Bemerkt man aber, dass nach (7.) § 3.:

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{\partial q}{\partial \eta} = \frac{\partial r}{\partial \zeta} = \frac{1}{\lambda},$$

so folgt mit Hülfe dieser Ausdrücke aus den Gleichungen (3.), indem man sie mit λ dividirt:

$$(3^a.)\quad \begin{cases} 2\,\dfrac{\partial P}{\partial p}\cdot\dfrac{\partial p}{\partial \xi} = 2\,\dfrac{\partial P}{\partial \xi} = \;\;2a \sum \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\varphi \operatorname{arctg} \dfrac{\beta_1\gamma_1}{\alpha_1\rho_1}\,d\varphi, \\[2ex] 2\,\dfrac{\partial P}{\partial q}\cdot\dfrac{\partial q}{\partial \eta} = 2\,\dfrac{\partial P}{\partial \eta} = -a \sum \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\varphi \log \dfrac{\rho_1+\gamma_1}{\rho_1-\gamma_1}\,d\varphi, \\[2ex] 2\,\dfrac{\partial P}{\partial r}\cdot\dfrac{\partial r}{\partial \zeta} = 2\,\dfrac{\partial P}{\partial \zeta} = \;\;\;a \sum \varepsilon \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin\varphi \log \dfrac{\rho_1+\beta_1}{\rho_1-\beta_1}\,d\varphi. \end{cases}$$

Indem man nun das Argument des arctang der ersten Gleichung mit λ^2, die Argumente der Logarithmen der beiden anderen Gleichungen mit λ erweitert, und dann die Gleichungen (9.) und (9^a.) § 3. anwendet, erhält man:

$$2\,\frac{\partial P}{\partial \xi} = \;\;2a \sum \int_0^{2\pi} \sin\varphi \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\,d\varphi,$$

$$2\,\frac{\partial P}{\partial \eta} = -a \sum \int_0^{2\pi} \sin\varphi \log \frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}\,d\varphi,$$

$$2\,\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \;\;\;a \sum \varepsilon \int_0^{2\pi} \sin\varphi \log \frac{\rho+\beta}{\rho-\beta}\,d\varphi,$$

und diese Ausdrücke der ersten Ableitungen des Potentials gelten also jetzt ihrer Herleitung nach mit *Einschluss* des Falles, wo (ξ, η, ζ) auf irgend eine Weise ins Unendliche rückt. Vergleicht man sie aber mit den Ausdrücken (1.), so findet man, dass sie mit diesen identisch sind, die Gleichungen (1.) gelten jetzt also auch in dem Falle, wo (ξ, η, ζ) im Unendlichen liegt.

§ 5.

Gehen wir nun dazu über, die Formen der *zweiten* Ableitungen von P durch nochmalige Differentiation der Gleichungen (1.) § 4. bezüglich nach ξ, η, ζ herzuleiten, und betrachten zunächst $\frac{\partial P}{\partial \xi}$ in (1.) § 4.

Der arctang unter dem Integralzeichen in dem Ausdrucke für $\frac{\partial P}{\partial \xi}$ ist zwar immer endlich, auch wenn (ξ, η, ζ) im Unendlichen liegt, aber, da er seiner Definition nach immer zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $+\frac{\pi}{2}$ zu nehmen ist ((4^b.) § 2.), so ist er unstetig, wenn innerhalb der Grenzen der Integration $\alpha = a \cos \varphi - \xi$ ((2.) § 2.) verschwinden kann. Näheres darüber ist oben in § 3. (5.) angeführt worden. Dieser Fall tritt immer und nur dann ein, wenn $\xi < a$, wo dann:

$$(1.) \qquad \xi = a \cos \mu$$

gesetzt werden kann (5^a.) § 3. In diesem Falle darf $\frac{\partial P}{\partial \xi}$ nicht ohne Weiteres nach ξ differentiirt werden, es ist vielmehr zunächst zu betrachten, wie sich das Integral an den Stellen $\varphi = \mu$ und $\varphi = 2\pi - \mu$ verhält, wo $\alpha = a \cos \varphi - \xi = a (\cos \varphi - \cos \mu)$, nach (1.), verschwindet, also die Unstetigkeit eintritt.

Hierzu zerlege man das Integral in dem Ausdrucke für $\frac{\partial P}{\partial \xi}$ in die Summe der beiden folgenden:

$$(2.) \qquad \int_0^{\pi} \sin \varphi \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\, d\varphi + \int_{\pi}^{2\pi} \sin \varphi \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\, d\varphi.$$

Betrachten wir zunächst das erste Integral, welches mit (I) bezeichnet werden möge, und zerlegen es in folgender Weise:

$$(2^a.) \qquad (I) = \int_0^{\mu - e} \sin \varphi \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\, d\varphi + \int_{\mu + e}^{\pi} \sin \varphi \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\, d\varphi,$$

wo e eine positive Grösse bedeutet. (I) ist dann gleich dem Grenzwerthe, welchen die Summe der Integrale in (2^a.) für $e = 0$ erhält. Da jetzt aus den Integralen in (2^a.) die Unstetigkeitsstelle ausgeschieden ist, so dürfen dieselben nach ξ differentiirt werden, und man erhält daher, da μ nach (1.) von ξ abhängig ist:

$$(3.) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial (I)}{\partial \xi} = \displaystyle\int_0^{\mu - e} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right) d\varphi + \sin(\mu - e) \left[\operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right]_{\varphi = \mu - e} \dfrac{\partial \mu}{\partial \xi} \\ \qquad + \displaystyle\int_{\mu + e}^{\pi} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right) d\varphi - \sin(\mu + e) \left[\operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right]_{\varphi = \mu + e} \dfrac{\partial \mu}{\partial \xi}, \end{cases}$$

$$\text{für } e = 0.$$

Setzen wir zunächst fest, dass $\beta = b \sin \varphi - \eta$ (2.) § 2. an der Stelle $\varphi = \mu$ *nicht* verschwinde. Sei ferner $\lambda = \pm 1$ das Vorzeichen von β an der Stelle $\varphi = \mu$, und $\lambda' = \pm 1$ das Vorzeichen von γ. Es darf dann im Grenzfalle $e = 0$ für die ausserhalb der Integrationszeichen in (3.) stehenden arctang nach den über dieselben in § 2. vor (6^a.) und § 3. nach (5.) gemachten Bemerkungen, sowie zufolge ihrer Definition (4^b.) § 2., $\lambda\lambda' \operatorname{arctang} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}$ geschrieben werden, und β und γ bezeichnen nun in diesen arctang *absolute* Werthe. Das Zeichen der arctang hängt dann nur noch von α ab, da ρ als positiv angenommen ist (§ 2.).

Nun ist für $\varphi = \mu - e$, $\alpha = a \cos(\mu - e) - a \cos \mu$, und da ξ, η, ζ immer als positive Grössen angesehen werden sollen (§ 2.), und also μ zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt nach (1.), so ist auch α *positiv*, und wenn man nun e sich der Null nähern lässt, so nähert sich demnach α von der *positiven* Seite her für $e=0$ dem Werthe Null. Hieraus folgt, dass der Grenzwerth des oberen Gliedes ausserhalb der Integrationszeichen in (3.), abgesehen von dem Factor $\frac{\partial\mu}{\partial\xi}$,

$$(3^a.)\qquad \lambda\lambda'\sin(\mu-e)\left[\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right]_{\varphi=\mu-e},\ \text{für } e=0,\ =\lambda\lambda'\sin\mu\cdot\frac{\pi}{2}$$

wird, denn das Argument des arctang in (3^a.) wird nach den obigen Bemerkungen $+\infty$, er selbst also $+\frac{\pi}{2}$.

Für $\varphi=\mu+e$ ist $\alpha=a\cos(\mu+e)-a\cos\mu$, also nach den obigen Festsetzungen *negativ*. Daher nähert sich bei abnehmendem e in diesem Falle α von der *negativen* Seite her dem Werthe Null, und es wird also der Grenzwerth des unteren Gliedes ausserhalb der Integrationszeichen in (3.), abgesehen von dem Factor $\frac{\partial\mu}{\partial\xi}$,

$$(3^b.)\qquad -\lambda\lambda'\sin(\mu+e)\left[\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right]_{\varphi=\mu+e},\ \text{für } e=0,\ =\lambda\lambda'\sin\mu\cdot\frac{\pi}{2},$$

denn das Argument des arctang in (3^b.) wird $-\infty$, er selbst also $-\frac{\pi}{2}$.

Nun ist nach (1.):

$$(1^a.)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial\xi}=-\frac{1}{a\sin\mu},$$

multiplicirt man also (3^a.) und (3^b.) mit dem vorstehenden Werthe von $\frac{\partial\mu}{\partial\xi}$, so erhält jedes der Glieder ausserhalb der Integrationszeichen in (3.) den Grenzwerth $-\frac{\lambda\lambda'\pi}{2a}$, ihre Summe also den Werth $-\frac{\lambda\lambda'\pi}{a}$.

Geht man jetzt auch in (3.) zu dem Grenzwerth $e=0$ über, so folgt aus den vorstehenden Betrachtungen:

$$(4.)\qquad \frac{\partial(I)}{\partial\xi}=-\frac{\lambda\lambda'\pi}{a}+\int_0^\pi\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right)d\varphi,$$

indem die beiden Integrale in (3.) für $e=0$ in das eine der vorstehenden Gleichung zusammengehen.

Im zweiten Integrale in (2.), welches mit (II) bezeichnet werden möge, tritt die Unstetigkeit des arctang an der Stelle $\varphi=2\pi-\mu$ ein. Wir zerlegen es daher in:

$$(II)=\int_\pi^{2\pi-\mu-e}\sin\varphi\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\,d\varphi+\int_{2\pi-\mu+e}^{2\pi}\sin\varphi\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\,d\varphi,$$

und es ist wieder (II) gleich der Grenze dieser Summe für $e=0$. Nun ist die Unstetigkeitsstelle ausgeschieden, man darf daher nach ξ unter den Integralzeichen differentiiren, und erhält so:

$$(5.)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial(II)}{\partial\xi}=&\int_\pi^{2\pi-\mu-e}\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right)d\varphi+\sin(\mu+e)\left[\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right]_{\varphi=2\pi-\mu-e}\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\\&+\int_{2\pi-\mu+e}^{2\pi}\sin\varphi\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right)d\varphi-\sin(\mu-e)\left[\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right]_{\varphi=2\pi-\mu+e}\frac{\partial\mu}{\partial\xi}\end{aligned}\right.$$

$\beta = b \sin\varphi - \eta$ kann an der Stelle $\varphi = 2\pi - \mu$, wo es in $-b \sin\mu - \eta$ übergeht, *nie* verschwinden, da η positiv sein soll, und $0 < \mu < \frac{\pi}{2}$, also auch $\sin\mu$ positiv ist. Das Zeichen von β an dieser Stelle ist also immer ein *negatives*. Im Uebrigen behandle man (5.) ebenso, wie oben die Gleichung (3.).

Es wird dann für $\varphi = 2\pi - \mu - e$, $\alpha = a\cos(\mu + e) - a\cos\mu$, d. h. α nähert sich bei abnehmendem e von der *negativen* Seite her dem Werthe Null, und indem man dann wieder das negative Zeichen von β und das Zeichen λ' von γ als Factoren vor die ausserhalb der Integrationszeichen stehenden arctang in (5.) setzt, erhält man durch dieselben Betrachtungen wie vorher:

$$\sin(\mu + e)\left[\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right]_{\varphi = 2\pi - \mu - e}, \text{ für } e = 0, = \lambda' \sin\mu \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Ebenso wird für $\bar{\varphi} = 2\pi - \mu + e$, $\alpha = a\cos(\mu - e) - a\cos\mu$, d. h. α nähert sich mit abnehmendem e von der *positiven* Seite her dem Werthe Null, so dass:

$$-\sin(\mu - e)\left[\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right]_{\varphi = 2\pi - \mu + e}, \text{ für } e = 0, = \lambda' \sin\mu \cdot \frac{\pi}{2}$$

wird. Also folgt aus (5.), indem man zur Grenze $e = 0$ übergeht, mit Hülfe von (1^a.) und sonst ebenso wie (4.) aus (3.) erhalten wurde:

$$(6.) \qquad \frac{\partial(II)}{\partial\xi} = -\frac{\lambda'\pi}{a} + \int_{\pi}^{2\pi} \sin\varphi \, \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right) d\varphi.$$

Nun wurde oben in (2.) das Integral in dem Ausdruck für $\frac{\partial P}{\partial\xi}$ in $(I) + (II)$ zerlegt. Ferner sind in (4.) und (6.) die Ableitungen von (I) und (II) nach ξ gefunden. Lässt man also in der ersten Gleichung (1.) § 4. zunächst den Factor 2 weg und differentiirt dann nach ξ, so folgt:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2} = a \sum\left(\frac{\partial(I)}{\partial\xi} + \frac{\partial(II)}{\partial\xi}\right),$$

oder mit Anwendung von (4.) und (6.):

$$(7.) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial\xi^2} = \sum\left\{-\lambda'(\lambda + 1)\pi + a\int_0^{2\pi} \sin\varphi \, \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\operatorname{arctg}\frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\right) d\varphi\right\},$$

wo noch die beiden Integrale in (4.) und (6.) in das eine der vorstehenden Gleichung zusammengezogen sind.

Zunächst ist jetzt das Zeichen λ eingehender zu untersuchen. An der Stelle $\varphi = \mu$ ist nach (2.) § 2.:

$$(8.) \qquad \beta = b\sin\mu - \eta.$$

Ist nun:

$$(9.) \qquad \eta < b\sin\mu$$

also, da nach (1.) $\quad \xi = a\cos\mu \quad$ ist,

$$(10.) \qquad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} < 1,$$

so ist nach (8.) und (9.) das Zeichen von β für $\varphi = \mu$ *positiv*, also $\lambda = +1$. Aus (7.) folgt dann, dass wenn (1.) und (9.) oder die *eine Bedingung* (10.) erfüllt ist:

$$(7^a.) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = \sum \left\{ -2\lambda'\pi + a \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho} \right) d\varphi \right\}$$

wird. Ist dagegen:

$$(9^a.) \qquad \eta > b \sin\mu$$

also da:

$$\xi = a \cos\mu \qquad \text{ist,}$$

$$(10^a.) \qquad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} > 1,$$

so ist nach (8.) und (9^a.) $\lambda = -1$, und es folgt dann aus (7.), dass unter den Bedingungen (1.) und (9^a.) oder *der einen* (10^a.):

$$(11.) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = a \sum \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho} \right) d\varphi.$$

Dieselbe Gleichung stellt $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$ natürlich auch dann dar, wenn (1.) *nicht* erfüllt ist, sondern wenn $\xi > a$. Dann findet erstens (10^a.) gewiss statt, und (11.) ist deswegen richtig, weil, wenn $\xi > a$, $\alpha = a\cos\varphi - \xi$ immer *negativ* ist und *nie* verschwindet, der arctang in der ersten Gleichung (1.) § 4. also nie unstetig wird, und das Integral auf der rechten Seite der Gleichung (1.) § 4. daher ohne Einschränkung unter dem Integrationszeichen nach ξ differentiirt werden darf. Dies liefert aber gerade die Gleichung (11.) nach Weglassung des Factors 2 auf beiden Seiten. Es gilt daher die Gleichung (11.) *allgemein*, wenn (10^a.) erfüllt ist, d. h. ihr Bestehen ist *unabhängig* von der Gleichung (1.).

In (7^a.) ist ferner das Zeichen λ', welches das Vorzeichen von γ war, näher zu untersuchen.

Nun bezieht sich nach § 2. das Summenzeichen in (7^a.) darauf, dass in den unter demselben stehenden Ausdrücken der Grösse ε die Werthe $+1$ und -1 beigelegt, und die so erhaltenen Ausdrücke addirt werden sollen. Da ferner nach (2.) § 2. $c + \varepsilon\zeta = \gamma$, so hängt λ' von ε ab, und es darf daher für (7^a.) geschrieben werden:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = \sum -2\lambda'\pi + a \sum \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho} \right) d\varphi.$$

Ist nun:

$$(12.) \qquad \zeta < c,$$

so ist sowohl $c + \zeta$ als auch $c - \zeta$ *positiv*, d. h. beide Werthe von γ haben das *positive* Vorzeichen. Für beide Ausdrücke in $\sum - 2\lambda'\pi$ ist also $\lambda' = +1$, im Falle (12.), oder es wird $\sum - 2\lambda'\pi = -4\pi$.

Daher erhält man im Falle (12.) aus (7^a.):

$$(13.) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = -4\pi + a \sum \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho} \right) d\varphi.$$

Ist dagegen:

$$(12^a.) \qquad \zeta > c,$$

so ist $c + \zeta$ *positiv*, $c - \zeta$ aber *negativ*. Für $c + \zeta$ also ist $\lambda' = +1$, für $c - \zeta$ aber $\lambda' = -1$. Es vernichten sich daher in diesem Falle die beiden Ausdrücke in $\sum - 2\lambda'\pi$, wegen der Gleichheit ihrer absoluten Werthe bei entgegengesetztem Vorzeichen, und man erhält also im Falle (12^a.) aus (7^a.):

$$(7^b.) \qquad \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = a \sum \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho} \right) d\varphi.$$

Im Falle der Formel (13.) gilt also erstens die Bedingung (12.). Es gilt ferner (10.), da (13.) aus (7^a.) hergeleitet wurde. $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$ *ist demnach durch* (13.) *dargestellt, wenn:*

$$(10.) \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} < 1, \qquad (12.) \quad \zeta < c,$$

d. h. wenn der Punkt (ξ, η, ζ) *innerhalb* des von dem Mantel des Cylinders umschlossenen Raumes liegt (nach 10.) und *innerhalb* des von den Grundflächen begrenzten Raumes (nach 12.), also wenn (ξ, η, ζ) ein *innerer* Punkt ist.

In allen anderen Fällen gilt (11.), wie die Gleichungen (7^b.) und (11.) zeigen, welche identisch sind. Für (7^b.) gilt die Bedingung (12^a.), und da (7^b.) aus (7^a.) hergeleitet wurde, so gilt auch die Bedingung (10.), d. h. es ist:

$$(10.) \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} < 1, \qquad (12^a.) \quad \zeta > c.$$

In diesem Falle liegt also (ξ, η, ζ) zwar *innerhalb* des von dem Mantel umschlossenen Raumes nach (10.), aber nach (12^a.) doch *ausserhalb* des von den Grundflächen begrenzten Raumes, d. h. (ξ, η, ζ) ist ein *äusserer* Punkt. Dasselbe findet statt im Falle der Formel (11.), wo die Bedingung:

$$(10^a.) \qquad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} > 1$$

erfüllt ist, wo also (ξ, η, ζ) *ausserhalb* des von dem Mantel umschlossenen Raumes liegt, also ebenfalls ein *äusserer* Punkt ist.

Indem man nun die Formeln (11.) und (13.) mit der ersten Formel unter (1.) § 4. vergleicht, gelangt man zu dem nachstehenden Resultate:

Der Werth von $\frac{\partial P}{\partial \xi}$ (1.) § 4. darf in allen Fällen unter dem Integralzeichen differentiirt werden. Nur wenn der Punkt (ξ, η, ζ) ein *innerer* ist, muss dem so erhaltenen Ausdrucke für $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$ noch der Werth -4π hinzugefügt werden.

Bei den obigen Betrachtungen ist der Fall ausgeschlossen worden, dass α und β an der Stelle $\varphi = \mu$ zugleich verschwinden. Derselbe ist daher noch zu untersuchen.

Erhalten $\alpha = a \cos\varphi - \xi$ und $\beta = b \sin\varphi - \eta$ für $\varphi = \mu$ zugleich den Werth Null, so ist also $\xi = a \cos\mu$, $\eta = b \sin\mu$ und daher:

$$(14.) \qquad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} = 1,$$

d. h. der Punkt (ξ, η, ζ) liegt dann auf dem *Mantel* des Cylinders oder der *Verlängerung* desselben, je nachdem $\zeta < c$ oder $\zeta > c$ ist.

Man denke sich nun einen anderen Punkt (ξ_1, η_1, ζ_1) *innerhalb* des von dem Mantel des Cylinders oder dessen Verlängerungen begrenzten Raumes, für welchen also die Bedingung (10.):

$$\frac{\xi_1^2}{a^2} + \frac{\eta_1^2}{b^2} < 1$$

erfüllt ist, während ζ_1 beliebig bleibt, auf einer beliebigen durch (ξ, η, ζ) gehenden, aber überall innerhalb des Mantels oder der Verlängerungen desselben bleibenden, Raumcurve in Bewegung gesetzt, und dem Punkte (ξ, η, ζ) genähert, bis er mit ihm zusammenfällt. Dann ist für alle Lagen von (ξ_1, η_1, ζ_1) (10.) erfüllt, und es gilt daher während der ganzen Bewegung für $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi_1^2}$ die Gleichung (7ᵃ.), also gilt diese Gleichung auch für $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$ selbst, wenn (ξ, η, ζ) als Grenzlage des beweglichen Punktes (ξ_1, η_1, ζ_1) aufgefasst wird.

Denkt man sich ferner einen zweiten beweglichen Punkt (ξ_2, η_2, ζ_2) *ausserhalb* des von dem Mantel oder dessen Verlängerungen begrenzten Raumes, für welchen also die Bedingung (10ᵃ):

$$\frac{\xi_2^2}{a^2} + \frac{\eta_2^2}{b^2} > 1$$

erfüllt ist, während ζ_2 beliebig bleibt, auf einer beliebigen durch (ξ, η, ζ) gehenden, und stets *ausserhalb* des von dem Mantel oder dessen Verlängerungen begrenzten Raumes bleibenden, Raumcurve dem Punkte (ξ, η, ζ) genähert, bis er mit ihm zusammenfällt. Dann ist für alle Lagen von (ξ_2, η_2, ζ_2) (10ᵃ.) erfüllt, und es gilt daher während der ganzen Bewegung für $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi_2^2}$ die Gleichung (11.), also gilt diese Gleichung auch für $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$ selbst, wenn (ξ, η, ζ) als Grenzlage dieser neuen Bewegung aufgefasst wird.

Ist nun $\zeta > c$, also (12ᵃ.) erfüllt, d. h. (ξ, η, ζ) ein *äusserer*, wegen der Gleichung (14.) in den Verlängerungen des Mantels liegender, Punkt, so fallen beide Gleichungen (7ᵃ.) und (11.), wie oben bei (7ᵇ.) zu ersehen ist, in die *eine* (11.) zusammen. Wie man also auch auf einer beliebigen, von einem Punkte des von den Verlängerungen des Mantels umschlossenen inneren Raumes nach aussen, oder umgekehrt, durch (ξ, η, ζ) gehenden Raumcurve einen Punkt (ξ_3, η_3, ζ_3) dem Punkte (ξ, η, ζ) nähern mag, immer erhält man als Grenzwerth von $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi_3^2}$, also für $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$ selbst, *denselben* durch (11.) gegebenen Werth, welcher auch durch Differentiation unter dem Integralzeichen der ersten Formel in (1.) § 4. erhalten wird. Das oben ausgesprochene Resultat ist also auch für diese besondere Lage eines äusseren Punktes richtig.

Ist aber $c < \zeta$, also (12.) erfüllt, und liegt also nach (14.) der Punkt (ξ, η, ζ) auf dem *Mantel* des Cylinders, so erhält man, wenn man sich den Punkt (ξ, η, ζ) durch die erste Bewegung in seine Lage gekommen denkt, für $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$ den Grenzwerth (13.), da (7ᵃ.), wie oben gezeigt worden, bei der Bedingung (12.) in (13.) übergeht. Denkt man sich aber (ξ, η, ζ) durch die zweite Bewegung in seine Lage gekommen, so erhält man für $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$ den Grenzwerth (11.), nach der vorstehenden Betrachtung. Beide Werthe (11.) und (13.) unterscheiden sich aber um das Glied -4π, d. h. $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$ ist für die Punkte auf dem Mantel des Cylinders *zweideutig*, und wird erst dadurch eindeutig, dass man den Weg angiebt, auf welchem der Punkt (ξ, η, ζ) in diese Lage gekommen sein soll. Da nun aber gerade in den Punkten der Oberfläche des Cylinders die Dichtigkeit sich unstetig ändert, nämlich von dem Werthe 1 zu dem Werthe 0 springt, so ist diese Zweideutigkeit von $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$ in den Punkten des Mantels im Einklange mit der in § 1. ausgesprochenen Bedingung 3.

Somit ist für alle Lagen von (ξ, η, ζ) die Form von $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$ bestimmt.

§ 6.

Betrachten wir jetzt $\frac{\partial P}{\partial \eta}$, zweite Gleichung (1.) § 4. Der Logarithmus unter dem Integralzeichen ist stetig, die Differentiation nach η unter dem Integralzeichen kann daher nur dann fraglich werden, wenn der Logarithmus für einen innerhalb der Integrationsgrenzen liegenden Werth von φ unendlich werden kann. Dies tritt ein im Falle (1.) § 3., d. h. wenn α und β innerhalb der Integrationsgrenzen zugleich verschwinden können, wo dann:

$$\xi = a \cos \mu, \quad \eta = b \sin \mu$$

sein muss, und (ξ, η, ζ) auf dem Mantel oder dessen Verlängerungen liegt. Genaueres findet man bei (1.) § 3. u. ff.

In diesem Falle wird der Logarithmus in dem Ausdrucke für $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ zwischen den Grenzen 0 und 2π *einmal*, und zwar für $\varphi = \mu$, unendlich.

Wir schreiben daher für das Integral in $\frac{\partial P}{\partial \eta}$

$$(1.) \qquad \int_0^{\mu - e} \sin \varphi \log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma}\, d\varphi + \int_{\mu + e}^{2\pi} \sin \varphi \log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma}\, d\varphi,$$

wo e wieder eine positive Grösse bedeutet. Der wahre Werth des Integrales in $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ ist dann gleich dem Grenzwerthe der vorstehenden Summe für $e = 0$.

In (1.) ist nun die Stelle, an welcher der Logarithmus unendlich wird, ausgeschieden, die Differentiation nach η also erlaubt, und indem man sie ausführt, erhält man für die Ableitung von (1.) nach η:

$$(2.) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int_0^{\mu - e} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} \right) d\varphi + \sin(\mu - e) \left[\log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} \right]_{\varphi = \mu - e} \frac{\partial \mu}{\partial \eta} \\ &+ \int_{\mu + e}^{2\pi} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} \right) d\varphi - \sin(\mu + e) \left[\log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} \right]_{\varphi = \mu + e} \frac{\partial \mu}{\partial \eta}. \end{aligned} \right.$$

Die Ausdrücke ausserhalb der Integrationszeichen in (2.) haben aber, da der Logarithmus eindeutig ist, für $e = 0$, abgesehen von ihren Vorzeichen, *denselben*, wenngleich unendlichen Grenzwerth $\sin \mu \left[\log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} \right]_{\varphi = \mu} \frac{\partial \mu}{\partial \eta}$, *vernichten* sich also gegenseitig, wegen der entgegengesetzten Vorzeichen. Es folgt daher in diesem Falle, indem man in (2.) zur Grenze $e = 0$ übergeht, dass die Ableitung des Integrales in $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ nach η

$$\int_0^{2\pi} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} \right) d\varphi$$

wird, indem wieder die beiden Integrale in (2.) für $e = 0$ in das vorstehende eine zusammengehen. Demnach ist also die Differentiation nach η unter dem Integralzeichen in der zweiten Gleichung (1.) § 4. auch in diesem Falle erlaubt, und man erhält für jede Lage von (ξ, η, ζ):

$$(3.) \qquad 2 \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} = - a \sum \int_0^{2\pi} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} \right) d\varphi.$$

Ebenso darf ohne Einschränkung $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ in (1.) § 4. nach ζ abgeleitet werden. Denn der Logarithmus in $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ wird nur dann unendlich, wenn, wie im Falle (2.) § 3.,

$$\alpha = a \cos \varphi - \xi, \quad \gamma = c + \varepsilon \zeta$$

innerhalb der Grenzen der Integration gleichzeitig verschwinden können, also wenn

$$c = \zeta \quad \text{und} \quad \xi = a \cos \mu$$

ist, wo dann der Punkt (ξ, η, ζ) ((2^a.) § 3.) auf den Grundflächen des Cylinders oder ihren Verlängerungen liegt.

Abgesehen zunächst von diesem Falle folgt also aus (1.) § 4.:

$$(4.) \qquad 2 \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} = a \sum \varepsilon \int_0^{2\pi} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\log \frac{\rho + \beta}{\rho - \beta} \right) d\varphi.$$

Aber auch in dem erwähnten Ausnahmefalle gilt diese Formel. Denn in demselben ist $c = \zeta$. Soll aber der Werth von $\frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2}$ für $c = \zeta$ aus $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ gefunden werden, so kann dies nicht anders geschehen, als dass man sich zunächst ζ von c verschieden und veränderlich denkt, dann nach ζ differentiirt und dann erst $\zeta = c$ werden lässt. Ist aber ζ von c verschieden, so verliert der Logarithmus in $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ die Eigenschaft an den Stellen, wo α verschwindet, unendlich zu werden. Es darf dann also $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ nach ζ unter dem Integralzeichen differentiirt werden, man erhält die Gleichung (4.), und aus dieser den für $\zeta = c$ geltenden Werth, indem man in ihr $\zeta = c$ setzt. (4.) gilt also jetzt ebenfalls allgemein.

§ 7.

Um nun die in den Gleichungen (11.), (13.) § 5. und (3.), (4.) § 6. angedeuteten Differentiationen auszuführen, ist zunächst nach (5^b.) und (6^c.) § 2.:

$$(1.) \qquad \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\operatorname{arctg} \frac{\beta \gamma}{\alpha \rho} \right) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\operatorname{arctg} \frac{\beta \gamma}{\alpha \rho} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial \xi} = \frac{\beta \gamma}{(\alpha^2 + \beta^2) \rho} + \frac{\beta \gamma}{(\alpha^2 + \gamma^2) \rho},$$

nach (5.) und (6^c.) § 2.:

$$(2.) \qquad -\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} \right) = -\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma} \right) \frac{\partial \beta}{\partial \eta} = -\frac{2 \beta \gamma}{(\alpha^2 + \beta^2) \rho},$$

nach (5^a.) und (6^c.) § 2.:

$$(3.) \qquad \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\log \frac{\rho + \beta}{\rho - \beta} \right) = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\log \frac{\rho + \beta}{\rho - \beta} \right) \frac{\partial \gamma}{\partial \zeta} = -\frac{2 \beta \gamma}{(\alpha^2 + \gamma^2) \rho},$$

da $\varepsilon^2 = 1$ ist (§ 2.).

Führt man (1.) ein in (11.) § 5., (2.) in (3.) § 6., (3.) in (4.) § 6., so erhält man, indem man noch den dadurch in den beiden letzten Gleichungen auftretenden Factor 2 auf beiden Seiten weglässt:

$$(4.)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} = a \sum \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\beta\gamma \sin\varphi\, d\varphi}{(\alpha^2+\beta^2)\rho} + a \sum \int_0^{2\pi} \frac{\beta\gamma \sin\varphi\, d\varphi}{(\alpha^2+\gamma^2)\rho}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} = -a \sum \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\beta\gamma \sin\varphi\, d\varphi}{(\alpha^2+\beta^2)\rho}, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} = -a \sum \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\beta\gamma \sin\varphi\, d\varphi}{(\alpha^2+\gamma^2)\rho}, \end{cases}$$

als Formen der zweiten Ableitungen für einen *äusseren* Punkt (ξ, η, ζ). Ist derselbe aber ein *innerer* Punkt, so muss nach dem Resultate des § 5. zu dem obigen Werthe von $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$ noch der Werth -4π hinzugefügt werden.

Liegt ferner (ξ, η, ζ) auf der Oberfläche des Cylinders, so gelten die Formeln (4.) ebenfalls. Jedoch muss, falls der Punkt auf dem Mantel liegt, gegeben sein, auf welchem Wege er dahin gelangt sein soll (§ 5.), um zu entscheiden, ob der aus (4.) folgende Werth von $\frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2}$ um -4π vermehrt werden muss oder nicht.

Befindet sich (ξ, η, ζ) endlich im Unendlichen, so geben die Gleichungen (4.) *ebenfalls* die richtigen Formen der zweiten Ableitungen. Denn die Formeln (1.) § 4. dürfen auch in diesem Falle ohne Einschränkung nach (ξ, η, ζ) differentiirt werden, da die Argumente der Logarithmen und Arctang in (1.) § 4. in diesem Falle, wie die Gleichungen (3^a.) § 4. zeigen, nicht mehr *unendlich*, sondern im Allgemeinen *endlich* werden, also die Elemente der Integrale selbst endlich und eindeutig sind.

Addirt man nun die drei Gleichungen (4.), so *verschwindet* die Summe der Ausdrücke auf den rechten Seiten *identisch*.

Es ist daher, wenn (ξ, η, ζ) ein *äusserer* Punkt:

$$(5.)\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} = 0.$$

Ist aber (ξ, η, ζ) ein *innerer* Punkt, so dass zu dem Ausdrucke auf der rechten Seite der ersten Gleichung (4.) noch -4π hinzuzufügen ist, so giebt die Summe der Gleichungen (4.) in diesem Falle eine Gleichung, auf deren rechter Seite sich das Glied -4π befindet, während sich die übrigen Glieder wie vorher vernichten. Man erhält also:

$$(5^a.)\qquad \frac{\partial^2 P}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial \zeta^2} = -4\pi,$$

wenn (ξ, η, ζ) einen inneren Punkt bedeutet.

Sonach genügt also das Potential des Cylinders in der verlangten Weise der in der Bedingung 3. § 1. aufgestellten partiellen Differentialgleichung, denn für äussere Punkte ist (1^a.) § 1. nach (5.) erfüllt, und für innere Punkte (1^b.) § 1. nach (5^a.).

§ 8.

Damit der Bedingung 3. § 1. vollständig genügt sei, ist ferner zu zeigen, dass die zweiten Ableitungen des Potentials für *alle* Lagen des Punktes (ξ, η, ζ) *endliche* Werthe haben, die, abgesehen von den Fällen, in welchen (ξ, η, ζ) sich *auf der Oberfläche* befindet, auch *eindeutig* sind, Nun zeigt aber eine Ansicht der Formeln (4.) § 7., dass die zweiten Ableitungen auf rationale Weise aus den beiden folgenden Integralen zusammengesetzt werden:

$$(1.)\quad \int_0^{2\pi} \frac{\beta\gamma \sin\varphi\, d\varphi}{(\alpha^2+\beta^2)\rho}; \qquad (2.)\quad \int_0^{2\pi} \frac{\beta\gamma \sin\varphi\, d\varphi}{(\alpha^2+\gamma^2)\rho}.$$

In diesen wird zwischen *endlichen* Grenzen integrirt, und die Functionen unter den Integralzeichen sind *eindeutig*, da ρ immer positiv genommen wird (§ 1.). So lange also die zu integrirenden Functionen zwischen den Grenzen der Integration *endlich* bleiben, müssen auch die Integrale (1.) und (2.) *endliche* und *eindeutige* Werthe erhalten.

Aber die Elemente der Integrale (1.) und (2.) können in gewissen Fällen innerhalb der Grenzen der Integration *unendlich* werden, und für diese Fälle muss also *besonders bewiesen* werden, dass (1.) und (2.) endlich und eindeutig bleiben.

Für (1.) tritt dieser besondere Fall ein, im Falle (1.) § 3., also wenn innerhalb der Grenzen der Integration $\alpha = a\cos\varphi - \xi$ und $\beta = b\sin\varphi - \eta$ für einen Werth von φ *zugleich* verschwinden können. Dazu muss sein:

$$(3.)\qquad \xi = a\cos\mu, \quad \eta = b\sin\mu, \quad 0 < \mu < \frac{\pi}{2},$$

und es wird dann an der Stelle $\varphi = \mu$, $\alpha^2+\beta^2 = 0$, also das Element des Integrales (1.) an dieser Stelle *unendlich*.

Nach (3.) ist nun:

$$(3^a.)\quad \begin{cases} \alpha = a\cos\varphi - \xi = a\cos\varphi - a\cos\mu = -2a\sin\frac{\varphi-\mu}{2}\sin\frac{\varphi+\mu}{2}, \\ \beta = b\sin\varphi - \eta = b\sin\varphi - b\sin\mu = 2b\sin\frac{\varphi-\mu}{2}\cos\frac{\varphi+\mu}{2}; \end{cases}$$

führt man dies in (1.) ein, so geht dasselbe über in:

$$(1^a.)\qquad \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma b\cos\frac{\varphi+\mu}{2}\sin\varphi}{\left[a^2\sin^2\frac{\varphi+\mu}{2} + b^2\cos^2\frac{\varphi+\mu}{2}\right]\rho} \cdot \frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi-\mu}{2}},$$

da $\sin\frac{\varphi-\mu}{2}$ sich einmal weghebt.

(1^a.) enthält nun unter dem Integralzeichen den an der Stelle $\varphi = \mu$ unendlich werdenden Factor $\frac{1}{\sin\frac{\varphi-\mu}{2}}$, während der andere Factor, wenn γ *von Null verschieden ist*, so dass ρ (4^a.) § 2. für $\varphi = \mu$ nicht auch verschwinden kann, immer *endliche* Werthe hat. Diesen letzteren Factor nenne man nun der Kürze wegen $A(\varphi)$, so dass also:

$$(4.)\qquad A(\varphi) = \frac{1}{2}\,\frac{\gamma b\cos\frac{\varphi+\mu}{2}\sin\varphi}{\left[a^2\sin^2\frac{\varphi+\mu}{2} + b^2\cos^2\frac{\varphi+\mu}{2}\right]\rho},$$

wo ρ nach (4^a.) § 2. und unter Anwendung von (3^a.) durch:

$$(4^a.)\quad \rho^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \gamma^2 + 4a^2\sin^2\frac{\varphi-\mu}{2}\sin^2\frac{\varphi+\mu}{2} + 4b^2\sin^2\frac{\varphi-\mu}{2}\cos^2\frac{\varphi+\mu}{2}$$

gegeben ist.

Demnach schreibe man also für (1^a.):

$$(1^b.)\qquad \int_0^{2\pi} A(\varphi)\,\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi-\mu}{2}}.$$

Hierin setze man $\varphi+\mu$ für φ. Dann gehen die Grenzen über in die von $-\mu$ bis $2\pi-\mu$, $A(\varphi)$ in $A(\mu+\varphi)$, und $\sin\frac{\varphi-\mu}{2}$ wird $\sin\frac{\varphi}{2}$. Das so erhaltene Integral zerlege man in die beiden folgenden:

$$(1^c.)\qquad \int_{-\mu}^{0} A(\mu+\varphi)\,\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}} + \int_0^{2\pi-\mu} A(\mu+\varphi)\,\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

und setze im ersten $2\pi+\varphi=\varphi_1$. Dasselbe geht dann über in:

$$(1^d.)\qquad -\int_{2\pi-\mu}^{2\pi} A(-2\pi+\mu+\varphi)\,\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

wo nun wieder φ für φ_1 geschrieben ist. Nun folgt aber aus der Form von $A(\varphi)$ ((4.) mit (4^a.)), dass:

$$(4^b.)\qquad A(\pm 2\pi+\varphi) = -A(\varphi),$$

also ist auch $A(-2\pi+\mu+\varphi) = -A(\mu+\varphi)$. Es wird daher (1^d.), welches Integral das erste in (1^c.) darstellt,

$$\int_{2\pi-\mu}^{2\pi} A(\mu+\varphi)\,\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

und giebt zu dem zweiten in (1^c.) addirt,

$$(1^e.)\qquad \int_0^{2\pi} A(\mu+\varphi)\,\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

welches Integral also gleich (1^a.) ist, und jetzt statt desselben weiter behandelt werden soll. In (1^e.) ist das Unendlichwerden des Factors $\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ auf die beiden äussersten Werthe der Grenzen verlegt, denn für jede der Grenzen verschwindet $\sin\frac{\varphi}{2}$.

Man zerlege nun (1^e.) in zwei, von denen das erste von 0 bis π, das zweite von π bis 2π genommen wird, und setze im letzteren $2\pi-\varphi$ für φ; dasselbe transformirt sich dadurch, wie man leicht sieht in

$$\int_0^{\pi} A(2\pi+\mu-\varphi)\,\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

oder, da nach (4^b.) $A(2\pi+\mu-\varphi) = -A(\mu-\varphi)$ ist, in:

$$-\int_0^{\pi} A(\mu-\varphi)\,\frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Addirt man dies zu dem ersten Theile von (1^e.), so erhält man also für (1^e.) das folgende Integral:

$$(1^f.) \qquad \int_0^\pi \left[A(\mu + \varphi) - A(\mu - \varphi)\right] \frac{d\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

welches gleich (1^e.) und demnach auch gleich (1^a.) ist. In demselben wird nun zwar $\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}$ an der Stelle $\varphi = 0$ noch unendlich, aber es *verschwindet* auch an eben dieser Stelle der Factor $A(\mu + \varphi) - A(\mu - \varphi)$, d. h. das Element von (1^f.) an der Stelle $\varphi = 0$ wird nicht mehr unendlich, sondern *unbestimmt*. Der wahre Werth des Elementes ist daher:

$$\frac{A'(\mu + \varphi) + A'(\mu - \varphi)}{\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}, \text{ für } \varphi = 0,$$

also der Werth:

$$4\,A'(\mu).$$

Um die Form dieses Ausdrucks einigermassen übersehen zu können, sei der Kürze wegen:

$$A(\varphi) = \frac{\gamma Z}{N\rho},$$

Z und N sind aus (4.) leicht ersichtliche Functionen von φ. Es wird daher, indem man die vorstehende Gleichung nach φ ableitet, die Differentiation danach aber der Kürze wegen nur mit d bezeichnet,

$$A'(\varphi) = \frac{\gamma N\rho\, dZ - \gamma Z\rho\, dN - \gamma ZN d\rho}{N^2\rho^2},$$

oder indem man mit ρ erweitert:

$$(5.) \qquad A'(\varphi) = \frac{\gamma N\rho^2 dZ - \gamma Z\rho^2 dN - \gamma ZN\rho\, d\rho}{N^2\rho^3}.$$

Ferner ist nach (4^a.) unter Berücksichtigung der Form von N aus (4.):

$$(5^a.) \qquad \rho^2 = \gamma^2 + 4\sin^2\frac{\varphi - \mu}{2} \cdot N$$

und daher

$$(5^b.) \qquad \rho\, d\rho = 2\sin^2\frac{\varphi - \mu}{2}\, dN + 2N\sin\frac{\varphi - \mu}{2}\cos\frac{\varphi - \mu}{2}.$$

Setzt man nun $\varphi = \mu$, so ist aus (5^a.) und (5^b.) ersichtlich, dass $\rho^2 = \gamma^2$, und $\rho\, d\rho = 0$ wird. Daher folgt aus (5.) mit diesen Werthen:

$$(6.) \qquad A'(\mu) = \left[\frac{NdZ - ZdN}{N^2}\right]_{\varphi = \mu},$$

indem $\rho^3 = \gamma^3$ sich aus Zähler und Nenner heraus hebt, und es ist für den vorliegenden Zweck nicht nöthig, die rechte Seite von (6.) weiter auszurechnen. Denn die Form von $A'(\mu)$ in (6.) zeigt, dass der Zähler eine ganze rationale Function von cos und sin wird, und in Folge dessen nie *unendlich* werden kann; dass der Nenner das Quadrat von N ist, und also wieder nach der besonderen Form von N in (4.) nie *verschwinden* kann. $A'(\mu)$ ist daher immer *endlich*.

(1^f.) ist also ein Integral, genommen zwischen endlichen Grenzen, in welchem die zu integrirende Function zwischen den Integrationsgrenzen immer eindeutig und *endlich* ist. Es muss daher auch selbst immer eindeutig und endlich sein, also auch das ihm gleiche (1^a.), von dem die Eigenschaft zu beweisen war.

Allerdings gilt dieser Beweis zunächst nur unter der oben nach (1^a.) gemachten Voraussetzung, dass γ von Null verschieden sei. Nachträglich ist leicht zu zeigen, dass diese Einschränkung unnöthig ist. Denn ist $\gamma = 0$, und verschwinden ausserdem α und β für $\varphi = \mu$, so dass also nicht nur $\alpha^2 + \beta^2$ sondern *auch* ρ *für* $\varphi = \mu$ *verschwindet*, so gilt doch immer die ganze Transformation von (1^a.) in (1^f.), weil diese von der Bedingung γ von Null verschieden, unabhängig ist. In (1^f.) verschwinden aber, wenn $\gamma = 0$, sämmtliche Elemente wegen des Factors γ in $A(\varphi)$ (4.), und nur das eine für $\varphi = 0$ bleibt bestehen, weil, wie oben gezeigt worden, dasselbe den Werth $A'(\mu)$ (6.) hat. Aber $A'(\mu)$ ist von γ und ρ völlig *unabhängig* wie (6.) zeigt, bleibt also auch in diesem Falle *endlich*, so dass auch dieses eine Element wegen des Factors $d\varphi$ zu dem Werthe des Integrals (1^f.) nichts beitragen kann. Viel mehr *verschwindet* (1^f.) nach diesen Auseinandersetzungen, wenn $\gamma = 0$, demnach also auch das ihm gleiche (1^a.).

Der zweite und letzte Fall, in welchem für das Integral (1^a.) oder (1.) die Endlichkeit und Eindeutigkeit noch fraglich werden konnte, der Fall $\rho = 0$ für $\varphi = \mu$, ist damit auch erledigt, und somit gezeigt, dass (1.) in der That für alle Lagen von (ξ, η, ζ) nur *endliche* und *eindeutige* Werthe erhalten kann.

§ 9.

Dasselbe ist nun von dem Integrale (2.) § 8. zu zeigen, welches in dem besonderen Falle (2.) § 3., wo also $\gamma = 0$, und $\alpha = a \cos\varphi - \xi$ innerhalb der Integrationsgrenzen verschwinden kann, *unendlich* werdende Elemente erhält. Hierzu muss also dann sein $\xi = a\cos\mu$, und das Verschwinden des Faktors $\alpha^2 + \gamma^2$ im Nenner von (2.) § 8. tritt dann, bei $\gamma = 0$, an zwei Stellen $\varphi = \mu$ und $\varphi = 2\pi - \mu$ ein, für welche $\alpha = a\cos\varphi - a\cos\mu$ den Werth Null erhält.

Man zerlege nun das Integral in (2.) § 8. in zwei, deren eines von 0 bis π, deren zweites von π bis 2π genommen ist, und setze im zweiten $2\pi - \varphi$ für φ. Dann bleibt $\cos\varphi$ also auch α ungeändert; $\sin\varphi$ geht über in $-\sin\varphi$, also $\beta = b\sin\varphi - \eta$ in $\beta = -(b\sin\varphi + \eta)$, so dass (2.) § 8. die Summe der folgenden beiden Integrale wird:

$$(1.)\qquad \gamma\int_0^\pi \frac{\beta}{\rho}\,\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\alpha^2+\gamma^2} + \gamma\int_0^\pi \frac{\beta_1}{\rho_1}\,\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\alpha^2+\gamma^2},$$

wo $\beta_1 = b\sin\varphi + \eta$, $\rho_1 = \alpha^2 + \beta_1^2 + \gamma^2$ gesetzt ist. Da ρ immer mit positiven Vorzeichen zu nehmen ist, so hängen die Vorzeichen von $\frac{\beta}{\rho}$ und $\frac{\beta_1}{\rho_1}$ nur von den Grössen β und β_1 ab. $\beta_1 = b\sin\varphi + \eta$ ist nun immer *positiv* zwischen den Grenzen 0 und π; $\beta = b\sin\varphi - \eta$ immer *negativ* zwischen denselben Grenzen, wenn $\eta > b$, ist aber $\eta < b$, also

$$(2.)\qquad \eta = b\sin\nu,$$

wo ν irgend einen Werth zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ bedeutet, so ist, da dann $\beta = b\sin\varphi - b\sin\nu$,

β *negativ* für das Intervall $0 < \varphi < \nu$
β *positiv* „ „ „ „ $\nu < \varphi < \pi - \nu$
β *negativ* „ „ „ „ $\pi - \nu < \varphi < \pi$.

Desswegen schreibe man für die Summe in (1.) die folgende:

$$(1^a.)\qquad \gamma\int_0^\nu \frac{\beta}{\rho}\,\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\alpha^2+\gamma^2} + \gamma\int_\nu^{\pi-\nu} \frac{\beta}{\rho}\,\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\alpha^2+\gamma^2} + \gamma\int_{\pi-\nu}^{\pi} \frac{\beta}{\rho}\,\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\alpha^2+\gamma^2} + \gamma\int_0^\pi \frac{\beta_1}{\rho_1}\,\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\alpha^2+\gamma^2},$$

und in den einzelnen der vorstehenden Integrale haben jetzt die Grössen $\frac{\beta}{\rho}$ und $\frac{\beta_1}{\rho_1}$ innerhalb der Integrationsgrenzen *dieselben* Vorzeichen. Folglich liegen die Werthe der einzelnen Integrale der vorstehenden Summe immer zwischen den innerhalb der Integrationsgrenzen stattfindenden Maximis und Minimis der Ausdrücke $\frac{\beta}{\rho}$, resp. $\frac{\beta_1}{\rho_1}$, multiplicirt mit dem Werthe des Integrales:

$$(3.)\qquad \gamma\int\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\alpha^2+\gamma^2},$$

genommen für die entsprechenden Grenzen. Aber:

$$(4.)\qquad \frac{\beta}{\rho}=\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}},\quad \frac{\beta_1}{\rho_1}=\frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta_1^2+\gamma^2}}$$

sind dem absoluten Werthe nach für jeden Werth von φ kleiner als 1, und erreichen denselben nur in dem der Betrachtung vorliegenden Falle. Die Maxima und Minima der Ausdrücke (4.) liegen daher ebenfalls ihrem absoluten Werthe nach zwischen 0 und 1, und sind daher immer endliche Grössen. Hat also das Integral (3.), genommen zwischen *beliebigen* Grenzen, einen *endlichen* Werth, so liegen die einzelnen Glieder der Summe (1^a.) zwischen endlichen Grenzen, sind also selber endlich, folglich auch ihre Summe.

Es ist daher alles darauf zurückgeführt, zu zeigen, dass (3.), genommen zwischen beliebigen Grenzen, einen endlichen Werth behält. Hierzu ist offenbar, da, wegen $\xi=a\cos\mu$ in dem der Betrachtung vorliegenden Falle, $\alpha=a(\cos\varphi-\cos\mu)$ gesetzt werden kann:

$$(3^a.)\qquad \left\{\begin{aligned}\gamma\int\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\gamma^2+\alpha^2}&=\gamma\int\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\gamma^2+a^2(\cos\varphi-\cos\mu)^2}=-\frac{1}{a}\int\frac{d\,\frac{a(\cos\varphi-\cos\mu)}{\gamma}}{1+\frac{a^2(\cos\varphi-\cos\mu)^2}{\gamma^2}}\\&=-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{a(\cos\varphi-\cos\mu)}{\gamma}.\end{aligned}\right.$$

In dem vorliegenden Falle ist $\gamma=0$ zu setzen. Dadurch wird das Argument des arctang im Allgemeinen unendlich, der arctang selbst also $+\frac{\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2}$, je nach dem Zeichen des Argumentes für die Grenzen des Integrales und der Art, wie γ verschwindet. Ist ferner zufällig eine der Grenzen des Integrales μ, so wird das Argument des arctang nicht unendlich, sondern unbestimmt, aber der arctang selbst behält einen *endlichen* Werth. Ohne auf die leicht genauer zu bestimmende Mehrdeutigkeit des Integrales (3^a.) weiter einzugehen, erhellt doch aus den vorstehenden Betrachtungen, dass (3^a.) und also auch (3.) einen *endlichen* Werth hat, was auch immer die Grenzen von (3.) sein mögen, und somit hat auch nach den obigen Bemerkungen die Summe (1^a.), also (1.) oder das Integral (2.) § 8. in dem betrachteten Ausnahmefalle *immer* einen *endlichen* Werth.

Der Beweis ist wesentlich unter der Voraussetzung (2.) geführt, dass $\eta<b$. Für $\eta>b$ gilt er jedoch auf dieselbe Weise, er wird nur dadurch einfacher, dass man nicht nöthig hat, das erste Integral in (1.) in drei Theile zu theilen, weil, wie schon oben bemerkt, $\frac{\beta}{\rho}$ zwischen 0 und π *dasselbe* Zeichen bewahrt, wenn $\eta>b$.

Endlich gilt der Beweis, dass (2.) § 8. einen endlichen Werth hat, noch ebenso, wenn ausser dass $\gamma=0$, und α an der Stelle $\varphi=\mu$ verschwindet, an eben derselben Stelle auch $\beta=b\sin\varphi-\eta$ verschwindet, wo dann also $\gamma=0$, $\xi=a\cos\mu$, $\eta=b\sin\mu$, d. h. der Fall (6.) § 3. stattfindet. Es verschwindet dann ausser $\alpha^2+\gamma^2$ in (2.) § 8. auch noch ρ für $\varphi=\mu$, und der vorstehende Beweis wird nur dann auch für diesen Fall gelten, wenn gezeigt worden, dass $\frac{\beta}{\rho}$

in (4.) für $\varphi = \mu$ auch jetzt einen *endlichen* Werth erhält. Dies zeigt man aber, indem man in (4.) zuerst $\gamma = 0$ setzt, wodurch:

$$(4^a.)\qquad \frac{\beta}{\rho} = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$$

wird, und dann:

$$\alpha = a\,(\cos\varphi - \cos\mu) = -2\,a\,\sin\frac{\varphi-\mu}{2}\,\sin\frac{\varphi+\mu}{2}$$

$$\beta = b\,(\sin\varphi - \sin\mu) = \quad 2\,b\,\sin\frac{\varphi-\mu}{2}\,\cos\frac{\varphi+\mu}{2}$$

einführt, wodurch sich $2\sin\frac{\varphi-\mu}{2}$ hebt, und

$$\frac{\beta}{\rho} = \frac{b\cos\frac{\varphi+\mu}{2}}{\sqrt{a^2\sin^2\frac{\varphi+\mu}{2} + b^2\cos^2\frac{\varphi+\mu}{2}}}$$

wird, ein Ausdruck, der für $\varphi = \mu$ in:

$$\frac{\beta}{\rho} = \frac{b\cos\mu}{\sqrt{a^2\sin^2\mu + b^2\cos^2\mu}}$$

übergeht, und seiner Form nach für keinen Werth von μ unendlich werden kann, also wie behauptet wurde, immer endlich bleibt.

Der vorstehende Beweis lässt sich nun wörtlich wiederholen, und es ist somit auch für den letzten noch denkbaren Fall, in welchem ein Element in (2.) § 8. unendlich wird, für den Fall $\rho = 0$, gezeigt, dass das Integral einen *endlichen* Werth hat.

Aber wenn auch durch die vorstehenden Betrachtungen gezeigt worden, dass (2.) § 8. immer einen endlichen Werth behält, so ist doch nicht ausgeschlossen, dass derselbe mehrdeutig ist. Denn die obige Beweisführung schliesst den Werth des Integrales nur zwischen endliche Grenzen ein, die, wie (3^a.) zeigt, selber schon unbestimmt oder zweideutig sind.

In dem der Betrachtung allein vorliegenden Falle, $\gamma = 0$ und $\xi = a\cos\mu$, liegt (ξ, η, ζ) auf den Grundflächen des Cylinders selbst, oder den Verlängerungen desselben (2^a.) § 3. Ist nun $\eta < b\sin\mu$, so liegt (ξ, η, ζ) offenbar *auf den Grundflächen* des Cylinders *selbst*, ist aber $\eta > b\sin\mu$, so liegt der Punkt *ausserhalb* auf ihren Verlängerungen. Im ersten Falle $\eta < b\sin\mu$ ist also (ξ, η, ζ) ein Punkt der Oberfläche, in welcher sich die Dichtigkeit unstetig ändert; die zweiten Ableitungen, und folglich (2.) § 8., von dem dieselben abhängen, dürfen daher in diesem Falle nach 3. § 1. *mehrdeutig* sein. Ist aber $\eta > b\sin\mu$, also (ξ, η, ζ) ein *äusserer* Punkt, so darf dies *nicht* stattfinden, sondern (2.) § 8. muss einen *eindeutigen* Werth haben.

Ist also $\gamma = 0$ und $\xi = a\cos\mu$, η aber *grösser* als $b\sin\mu$, d. h.

entweder $\qquad \eta = b\sin\nu,\quad \nu > \mu,$

oder *überhaupt* $\quad \eta > b,$

so muss jetzt gezeigt werden, dass (2.) § 8. wenigstens in diesen Fällen eindeutig ist.

Zu diesem Zwecke lasse man in (2.) § 8. zunächst den Factor γ unberücksichtigt, und setze dann in dem noch bleibenden Integrale sogleich $\gamma = 0$. Das zu untersuchende Integral (2.) § 8. erhält dann, wegen $\alpha = a\cos\varphi - a\cos\mu$ die Form:

$$(5.)\qquad \frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\,\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi - \cos\mu)^2}.$$

Das vorstehende Integral hat zwei unendlich werdende Elemente. Es verschwindet nämlich $\cos\varphi - \cos\mu$ für $\varphi = \mu$, und $\varphi = 2\pi - \mu$. Zerlegen wir desshalb das Integral in zwei, deren erstes von 0 bis π, deren zweites von π bis 2π geht, setzen im zweiten $2\pi - \varphi$ für φ, so dass die Summe beider Integrale, abgesehen von dem Factor $\frac{1}{a^2}$, übergeht in:

$$(5^a.)\qquad \int_0^{\pi} B(\varphi)\,\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi - \cos\mu)^2} + \int_0^{\pi} B_1(\varphi)\,\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi - \cos\mu)^2},$$

wo

$$B(\varphi) = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\qquad B_1(\varphi) = \frac{\beta_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta_1^2}},$$

und wieder wie oben $\beta_1 = b\sin\varphi + \eta$ gesetzt ist.

Beide Integrale enthalten jetzt ein an der Stelle $\varphi = \mu$ unendlich werdendes Element, und nach dem Obigen ist die Summe derselben zu betrachten für die beiden oben genauer angegebenen Fälle für η. Von diese gelte zunächst der erste:

$$(6.)\qquad \eta = b\sin\nu,\ \nu > \mu.$$

Man zerlege nun jedes der beiden Integrale (5ª.) in zwei, deren eines von 0 bis ν genommen ist, also die Stelle $\varphi = \mu$ *umfasst*, deren anderes von ν bis π geht, also kein unendliches Element mehr enthält. Die beiden letzten Theile haben also sicher *endliche* und *eindeutige* Werthe nach der Bemerkung in § 8., und sind daher nicht weiter zu untersuchen. Die beiden anderen Theile haben dagegen, indem für η sein Werth (6.) eingeführt wird, die Form:

$$(5^b.)\qquad -\int_0^{\nu} C(\varphi)\,\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi - \cos\mu)^2} + \int_0^{\nu} C_1(\varphi)\,\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi - \cos\mu)^2}$$

wo:

$$C(\varphi) = \frac{b(\sin\nu - \sin\varphi)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad C_1(\varphi) = \frac{b(\sin\nu + \sin\varphi)}{\sqrt{\alpha^2+\beta_1^2}}$$

gesetzt ist, und $\beta = b(\sin\varphi - \sin\nu)$, $\beta_1 = b(\sin\varphi + \sin\nu)$ bedeutet.

$C(\varphi)$ und $C_1(\varphi)$ sind innerhalb der Grenzen der Integration zwei immer *positive* Grössen. Denn die Wurzel wird immer als positiv angesehen § 2., und die Zähler sind ebenfalls zwischen 0 bis ν *positiv*, da η positiv § 2., also $0 < \nu < \pi$ ist. Beide Integrale (5ᵇ.) zusammen, geben also:

$$(5^c.)\qquad \int_0^{\nu}\Big[C_1(\varphi) - C(\varphi)\Big]\,\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{(\cos\varphi - \cos\mu)^2}.$$

In diesem Integrale wird nun zwar an der Stelle $\varphi = \mu$, $\cos\varphi - \cos\mu$ immer noch Null, aber es *verschwindet auch* $C_1(\varphi) - C(\varphi)$ für $\varphi = \mu$. Denn da die Wurzeln in $C(\varphi)$ und $C_1(\varphi)$ mit dem positiven Zeichen genommen werden, so wird die Wurzel in $C(\varphi)$ an der Stelle $\varphi = \mu$ gleich dem absoluten Werthe von β, d. h. gleich $b(\sin\nu - \sin\mu)$, weil $\nu > \mu$. Daher erhält $C(\varphi)$ für $\varphi = \mu$ den Werth $+1$. Denselben Werth erhält aber auch $C_1(\varphi)$ für $\varphi = \mu$, also wird $C_1(\varphi) - C(\varphi) = 0$ für $\varphi = \mu$.

Der Werth des Elementes in (5ᶜ.) für $\varphi = \mu$ wird daher nur noch unbestimmt, und sein wahrer Werth ausgedrückt durch

$$(7.)\qquad \frac{C_1'(\varphi) - C'(\varphi)}{-2(\cos\varphi - \cos\mu)\sin\varphi},\ \text{für } \varphi = \mu.$$

Es ist aber, wenn man für einen Augenblick für den Zähler von $C(\varphi)$ wieder $-\beta$, für den von $C_1(\varphi)$ wieder β_1 schreibt,

$$C_1'(\varphi) = \frac{\alpha\,(\alpha d\beta_1 - \beta_1 d\alpha)}{(\sqrt{\alpha^2+\beta_1^2})^3},$$

$$C'(\varphi) = \frac{-\alpha\,(\alpha d\beta - \beta d\alpha)}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^3},$$

wo die d wieder Differentialquotienten nach φ bezeichnen. Führt man diese Ausdrücke in (7.) ein, und bedenkt, dass $\alpha = a\,(\cos\varphi - \cos\mu)$, so sieht man, dass der Factor $\cos\varphi - \cos\mu$ sich aus (7.) *weghebt*, und es bleibt daher als Werth von (7.):

$$(7^a.)\qquad -\frac{a}{2\sin\varphi}\left[\frac{\alpha d\beta_1 - \beta_1 d\alpha}{(\sqrt{\alpha^2+\beta_1^2})^3} + \frac{\alpha d\beta - \beta d\alpha}{(\sqrt{\alpha^2+\beta^2})^3}\right],\ \text{für } \varphi = \mu.$$

Da für $\varphi = \mu$, $\alpha = 0$ und $d\alpha = -a\sin\mu$, so wird also der wahre Werth des Elementes von (5^c.) an der Stelle $\varphi = \mu$, wie man aus (7^a.) leicht ersieht, gleich Null. Es hat daher das Integral (5^c.) kein Element mehr, welches unendlich wird, und da es zwischen endlichen Grenzen genommen ist, so ist es endlich und eindeutig. Demnach hat auch (5.) diese Eigenschaft, und folglich (2.) § 8. den Werth *Null*, weil um (2.) § 8. aus (5.) zu erhalten noch der verschwindende Factor γ zu (5.) hinzuzufügen ist, welcher oben ausdrücklich weggelassen wurde.

(2.) § 8. hat daher in diesem Falle den *eindeutigen* Werth *Null*.

Der Beweis gilt zunächst nur unter der Bedingung $\eta = b\sin\nu$, $\nu > \mu$. Ist aber $\eta > b$, so wird die vorstehende Beweisführung nur dadurch einfacher, dass man statt der Integrale zwischen den Grenzen 0 bis ν (5^b.) die beiden Integrale (5^a.) selbst nehmen muss, weil in diesen dann $B(\varphi)$ selbst immer *negativ* ist, während $B_1(\varphi)$ positiv bleibt. Alles andere bleibt ungeändert.

Man hat also über das Integral (2.) § 8. das Resultat, dass es immer den endlichen und eindeutigen Werth *Null* hat, so lange (ξ, η, ζ) unter der Voraussetzung $\xi = a\cos\mu$ und $\gamma = 0$ ein *äusserer* Punkt ist. Ist dagegen (ξ, η, ζ) unter derselben Voraussetzung ein Punkt der Oberfläche, so ist (2.) § 8. sicher *endlich*, kann aber von Null verschieden ja mehrdeutig sein im Einklange mit 3. § 1.

Die Behandlung des Integrales (2.) § 8. wurde dadurch etwas verwickelt, dass man genöthigt war, die Eigenschaften der Endlichkeit und der Eindeutigkeit in den Fällen, wo dieselbe nothwendig ist, besonders und getrennt von einander zu beweisen. Es scheint, dass man dies nicht umgehen kann, denn die erste Betrachtung, welche die Endlichkeit kennen lehrte, lehrt eben nichts über die Eindeutigkeit, und die zweite auf die Eindeutigkeit bezügliche Betrachtung, welche allerdings für die Fälle, auf die sie angewendet wurde, auch zugleich die Endlichkeit kennen lehrt, lässt sich nicht auf die Fälle anwenden, wo $\eta < b\sin\mu$, weil, wie man leicht sieht, in diesem Falle, der Factor unter dem Integralzeichen von (5^c.) (die Grenzen von 0 bis π genommen) für $\varphi = \mu$ nicht verschwindet, sondern den Werth $+2$ erhält, und doch beruhte wesentlich auf dem Verschwinden dieses Factors der Erfolg der Methode.

Die §§ 8. und 9. haben also gelehrt, dass die Integrale (1.) und (2.) § 8. immer endliche Werthe haben, die auch, mit Ausnahme der Fälle, wo (ξ, η, ζ) auf den Grundflächen liegt, eindeutig sind. Für die ausgenommenen Fälle ist zwar auch (1.) § 8. eindeutig, aber von (2.) ist es nicht bewiesen worden.

Es könnte schliesslich noch fraglich werden, ob das so eben ausgesprochene Resultat erfüllt ist, wenn (ξ, η, ζ) im Unendlichen liegt. Dass dies wirklich sei, lehrt aber eine blosse Ansicht der Form der Integrale (1.) und (2.) § 8. Denn die Elemente derselben sind im Zähler zweiter, im Nenner aber dritter Ordnung in Bezug auf die Grössen ξ, η, ζ, so dass, wenn (ξ, η, ζ) auf irgend eine Weise ins Unendliche rückt, diese Elemente im Allgemeinen sämmtlich *verschwinden*, und dem gemäss auch die Integrale (1.) und (2.) § 8. den Werth Null erhalten. Nur in dem besonderen Falle, wo ξ und η endlich bleiben, während ζ allein unendlich wird, erhält zwar (2.) § 8. immer noch den Werth Null, aber $\frac{\gamma}{\rho}$ hat zum Grenzwerth 1, und also geht (1.) § 8. über in:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\beta \sin\varphi \, d\varphi}{\alpha^2 + \beta^2},$$

welches Integral, so lange α und β innerhalb der Grenzen der Integration nicht zugleich verschwinden können, einen endlichen und eindeutigen Werth hat. Geschieht dies aber, so kann dies Integral auf die Form (1^a.) oder (1^b.) § 8. gebracht, und dann wie dort gezeigt werden, dass es endlich und eindeutig ist. Ueberdies lässt es sich unbestimmt integriren, und dadurch kann man die Behauptung ebenfalls beweisen. Endlich noch in dem besonderen Falle, wo ξ und ζ endlich bleiben, und η allein unendlich wird, erhält zwar (1.) § 8. wieder den Werth Null, aber $\frac{\beta}{\rho}$ hat zum Grenzwerth 1 und es geht daher (2.) § 8. über in:

$$\gamma \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{\alpha^2 + \gamma^2},$$

welches Integral mit Anwendung von (3^a.) § 9. sofort den endlichen und eindeutigen Werth Null erhält.

Somit gilt das oben über die Integrale (1.) und (2.) § 8. ausgesprochene Resultat, auch wenn (ξ, η, ζ) auf irgend eine Weise ins Unendliche rückt, und es ist daher durch die §§ 5.—9. die Untersuchung der zweiten Ableitungen vollendet. Sie genügen der partiellen Differentialgleichung in der richtigen Weise (§ 7.), sind im ganzen Raume endlich (§ 8. und § 9.), und mit Ausnahme der Fälle, in welchen (ξ, η, ζ) auf der Oberfläche liegt (§ 9.), auch sicher eindeutig. *Die Bedingung 3. § 1. ist daher erfüllt.*

§ 10.

Die ersten Ableitungen des Potentials sind nach diesen Resultaten nun immer *stetige* Functionen von ξ, η, ζ innerhalb des *ganzen* Raumes, weil ihre Ableitungen, d. h. die zweiten Ableitungen des Potentials im ganzen Raume *endlich* sind.

Aber die ersten Ableitungen sind auch immer *endlich*. Die Gleichungen (1.) § 4. zeigen dies zunächst ohne Ausnahme für $\frac{\partial P}{\partial \xi}$. Denn die Elemente des Integrales in dem Ausdruck für $\frac{\partial P}{\partial \xi}$ bleiben nach der Bedeutung des arctang immer endlich, also auch das Integral selbst, da zwischen endlichen Grenzen integrirt wird.

Dasselbe gilt im Allgemeinen von $\frac{\partial P}{\partial \eta}$. Da aber der Logarithmus unter dem Integralzeichen unendlich wird, wenn α und β zu gleicher Zeit verschwinden können, also wenn $\xi = a \cos\mu$, $\eta = b \sin\mu$, so ist die Endlichkeit des Werthes von $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ in diesem Falle noch besonders nachzuweisen.

Endlich gilt dasselbe auch im Allgemeinen für $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$. Jedoch wird auch hier der Logarithmus unendlich, wenn $\gamma = 0$ und α innerhalb der Grenzen der Integration verschwinden kann, d. h. wenn $\gamma = 0$ und $\xi = a \cos \mu$ ist. Es ist also auch die Endlichkeit von $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ für diesen Fall besonders nachzuweisen.

Um nun zunächst zu zeigen, dass $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ für $\xi = a \cos \mu$ und $\eta = b \sin \mu$ *endlich* bleibt, mache man in dem Integrale, welches in $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ (1.) § 4. auftritt, also in

$$(1.) \qquad \int_0^{2\pi} \sin \varphi \log \frac{\rho + \gamma}{\rho - \gamma}\, d\varphi,$$

indem man γ *als positiv voraussetzt*, den Nenner des Argumentes des Logarithmus rational, und schreibe also für (1.):

$$(2.) \qquad \int_0^{2\pi} \sin \varphi \log (\rho + \gamma)^2\, d\varphi - \int_0^{2\pi} \sin \varphi \log (\alpha^2 + \beta^2)\, d\varphi.$$

Das erste der vorstehenden Integrale würde nun für $\varphi = \mu$ ein unendlich werdendes Element enthalten, wenn ausser $\xi = a \cos \mu$, $\eta = b \sin \mu$ noch zugleich $\gamma = 0$ wäre. Dann hat aber, wie man sofort sieht, (1.) den Werth Null, weil für $\gamma = 0$ das Argument des Logarithmus in $\frac{\rho}{\rho} = 1$ übergeht. Ist also auch $\gamma = 0$, so ist (1.) sicher endlich. Ist aber γ nicht gleich Null, so ist der erste Theil in (2.) immer endlich, denn an der Stelle $\varphi = \mu$ wird $\rho + \gamma = 2\gamma$, wegen der Voraussetzung, dass γ positiv sein soll, und an allen anderen Stellen ist $\rho + \gamma > 2\gamma$, so dass der erste Theil von (2.) nur endliche Elemente enthält, also selber endlich ist. Es bleibt daher nur der zweite Theil in (2.) weiter zu untersuchen.

Man setze nun wieder, wegen $\xi = a \cos \mu$, $\eta = b \sin \mu$:

$$\alpha = a(\cos \varphi - \cos \mu) = -2a \sin \frac{\varphi - \mu}{2} \sin \frac{\varphi + \mu}{2}$$

$$\beta = b(\sin \varphi - \sin \mu) = 2b \sin \frac{\varphi - \mu}{2} \cos \frac{\varphi + \mu}{2},$$

wodurch der zweite Theil von (2.) in:

$$(3.) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sin \varphi \log \left[\sin^2 \frac{\varphi - \mu}{2} \left(4a^2 \sin^2 \frac{\varphi + \mu}{2} + 4b^2 \cos^2 \frac{\varphi + \mu}{2} \right) \right] d\varphi = \\ & \int_0^{2\pi} \sin \varphi \log \left[4a^2 \sin^2 \frac{\varphi + \mu}{2} + 4b^2 \cos^2 \frac{\varphi + \mu}{2} \right] d\varphi + \int_0^{2\pi} \sin \varphi \log \sin^2 \frac{\varphi - \mu}{2}\, d\varphi \end{aligned} \right.$$

übergeht. Das Argument des Logarithmus unter dem Integralzeichen des ersten Theiles auf der rechten Seite von (3.) kann zwischen den Integrationsgrenzen weder 0 noch ∞ werden, dieser Theil hat daher *kein* unendliches Element mehr, und es bleibt nur noch das zweite Integral auf der rechten Seite von (3.) zu betrachten, welches für $\varphi = \mu$ *ein* unendlich werdendes Element enthält.

Man behandle nun diesen zweiten Theil:

$$(3^a.) \qquad \int_0^{2\pi} \sin \varphi \log \sin^2 \frac{\varphi - \mu}{2}\, d\varphi$$

ebenso, wie (1^a.) § 8. Man setze also zunächst $\varphi+\mu$ für φ, so dass (3^a.) sich in:

$$(3^b.)\qquad \int_{-\mu}^{2\pi-\mu} \sin(\varphi+\mu)\log\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

verwandelt. Zerlegt man dies wieder in zwei, von denen das eine von $-\mu$ bis 0, das andere von 0 bis $2\pi-\mu$ geht, und setzt dann im ersten Theile $2\pi+\varphi=\varphi_1$, so dass seine Grenzen $2\pi-\mu$ bis 2π werden, während der Ausdruck unter dem Integralzeichen, wegen

$$\sin(\varphi-2\pi+\mu)=\sin(\varphi+\mu)\quad\text{und}\quad \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}-\pi\right)=\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

wie leicht zu ersehen, *dieselbe* Form behält, so geht nach allen diesen Transformationen (3^b.) über in:

$$(3^c.)\qquad \int_0^{2\pi} \sin(\varphi+\mu)\log\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi.$$

Zerlegt man dies in zwei Theile, deren erster von 0 bis π, deren zweiter von π bis 2π genommen ist, setzt ferner im zweiten $2\pi-\varphi$ für φ, so folgt für (3^c.):

$$\int_0^{\pi} \sin(\varphi+\mu)\log\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi-\int_0^{\pi}\sin(\varphi-\mu)\log\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi,$$

oder, wegen $\sin(\varphi+\mu)-\sin(\varphi-\mu)=2\cos\varphi\sin\mu$,

$$(3^d.)\qquad 2\sin\mu\int_0^{\pi}\cos\varphi\log\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$

als Werth von (3^a.). Führt man jetzt $\sin\frac{\varphi}{2}=x$ ein, also $\sin\varphi=2x\sqrt{1-x^2}$, so gehen die Grenzen über in die von 0 bis 1 und es folgt:

$$\int_0^{\pi}\cos\varphi\log\sin^2\frac{\varphi}{2}\,d\varphi=\int_0^{\pi}\log\sin^2\frac{\varphi}{2}\;d\sin\varphi=4\int_0^1\log x\,d\left(x\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$=4\left[x\log x\cdot\sqrt{1-x^2}\right]_0^1-4\int_0^1\sqrt{1-x^2}\,dx$$

durch theilweise Integration. Der Ausdruck ausserhalb des Integrationszeichens verschwindet für $x=1$, ebenfalls für $x=0$, da $x\log x$ als Grenzwerth für $x=0$ den Werth *Null* hat. Das Integral, welches sich noch auf der rechten Seite befindet, hat mit seinem Zeichen den Werth $-\frac{\pi}{4}$, wie bekannt, so dass unter Anwendung dieser Resultate (3^d.) oder also (3^a.) den *endlichen* Werth $-2\pi\sin\mu$ erhält. Demnach hat (1.) auch in diesem Ausnahmefalle einen *endlichen* Werth.

Allerdings wurde bei diesem Beweise γ positiv angenommen. Ist nun γ *negativ*, so mache man in (1.) nicht den Nenner, sondern den Zähler des Argumentes des Logarithmus rational, dann wird wie vorher:

$$\int_0^{2\pi}\sin\varphi\log(\alpha^2+\beta^2)\,d\varphi-\int_0^{2\pi}\sin\varphi\log(\rho-\gamma)^2\,d\varphi$$

gleich dem Werthe von (1.). Hierin hat jetzt das zweite Integral kein unendliches Element mehr, weil $\rho-\gamma$, wenn γ negativ, nie verschwinden kann, denn ρ ist positiv § 2.; und von dem ersten Integrale ist so eben bewiesen, dass es einen endlichen Werth hat.

§ 11.

Um die Endlichkeit von $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ auch in dem in § 10. angegebenen Falle zu beweisen, setze man zunächst in dem Integrale in $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ (1.) § 4. $\gamma = 0$, dasselbe erhält dann die Form:

$$(1.) \qquad \int_0^{2\pi} \sin\varphi \log \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\beta}\, d\varphi.$$

Es ist nun zu zeigen, dass dies Integral unter der Annahme $\xi = a\cos\mu$ einen *endlichen* Werth hat.

Man zerlege hierzu (1.) in zwei Integrale, deren eines von 0 bis π, deren zweites von π bis 2π genommen ist, setze im zweiten $2\pi - \varphi$ für φ, so dass (1.) übergeht in:

$$(1^a.) \quad \int_0^{\pi} \sin\varphi \log \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}-\beta}\, d\varphi + \int_0^{\pi} \sin\varphi \log \frac{\sqrt{\alpha^2+\beta_1^2}+\beta_1}{\sqrt{\alpha^2+\beta_1^2}-\beta_1}\, d\varphi,$$

wo wieder $\beta_1 = b\sin\varphi + \eta$ gesetzt worden ist.

Jedes der vorstehenden Integrale enthält nun *ein* an der Stelle $\varphi = \mu$ unendlich werdendes Element, wegen

$$(2.) \quad \alpha = a\cos\varphi - \xi = a\cos\varphi - a\cos\mu = -2a\sin\frac{\varphi-\mu}{2}\sin\frac{\varphi+\mu}{2}.$$

Beweisen wir zunächst, dass das erste Integral in (1^a.) einen endlichen Werth hat.

Es kann nun zunächst auch $\beta = b\sin\varphi - \eta$ für $\varphi = \mu$ verschwinden, und dies tritt ein wenn auch $\eta = b\sin\mu$, also

$$(2^a.) \quad \beta = b\sin\varphi - \eta = b\sin\varphi - b\sin\mu = 2b\sin\frac{\varphi-\mu}{2}\cos\frac{\varphi+\mu}{2}$$

ist. Dann darf aber nach den Gleichungen (2.) und (2^a.) für das Argument des Logarithmus in dem ersten Integrale (1^a.) geschrieben werden:

$$\frac{\sqrt{a^2\sin^2\frac{\varphi+\mu}{2}+b^2\cos^2\frac{\varphi+\mu}{2}}+b\cos\frac{\varphi+\mu}{2}}{\sqrt{a^2\sin^2\frac{\varphi+\mu}{2}+b^2\cos^2\frac{\varphi+\mu}{2}}-b\cos\frac{\varphi+\mu}{2}}$$

indem der Factor $2\sin\frac{\varphi-\mu}{2}$, welcher Zähler und Nenner für $\varphi = \mu$ verschwinden lässt, sich heraushebt. Diese Form des Elementes zeigt aber dass es zwischen den Grenzen 0 und π *nicht mehr* unendlich werden kann (weil $0 < \mu < \frac{\pi}{2}$), also hat dann das erste Integral in (1^a.) sicher einen endlichen Werth.

Ist aber $\beta = b\sin\varphi - \eta$ an der Stelle $\varphi = \mu$ von Null verschieden, *und ist es positiv* an dieser Stelle, so mache man den Nenner des Argumentes des Logarithmus in dem ersten Integrale (1^a.) rational und schreibe also für das Integral:

$$(1^b.) \qquad \int_0^{\pi} \sin\varphi \log\left(\sqrt{\alpha^2+\beta^2}+\beta\right)^2 d\varphi - \int_0^{\pi} \sin\varphi \log \alpha^2\, d\varphi.$$

Das erste Integral in (1^b.) ist, wie das entsprechende Integral in (2.) § 10. immer endlich, weil keins seiner Elemente mehr unendlich wird. Das zweite Integral, mit seinem Zeichen genommen, geht über in:

$$\int_0^\pi \log \alpha^2 \, d \cos \varphi = \frac{1}{a} \int_0^\pi \log \alpha^2 \, d\alpha, \text{ da } \alpha = a \cos \varphi - a \cos \mu,$$

und enthält *ein* für $\varphi = \mu$ unendlich werdendes Element. Es ist aber

$$(3.) \qquad \int_0^\pi \log \alpha^2 \, d\alpha = \int_0^{\mu - e} \log \alpha^2 \, d\alpha + \int_{\mu + e}^\pi \log \alpha^2 \, d\alpha,$$

vorausgesetzt, dass man unter dem Ausdruck auf der rechten Seite den Grenzwerth der Summe für $e = 0$ versteht, und die Integration nach wie vor auf φ bezieht. Da nun:

$$\int \log \alpha^2 \, d\alpha = \alpha \log \alpha^2 - 2\alpha,$$

so wird:

$$\int_0^{\mu - e} \log \alpha^2 \, d\alpha = \Big[\alpha \log \alpha^2 - 2\alpha\Big]_0^{\mu - e}$$

$$\int_{\mu + e}^\pi \log \alpha^2 \, d\alpha = \Big[\alpha \log \alpha^2 - 2\alpha\Big]_{\mu + e}^\pi.$$

Der Ausdruck in den vorstehenden eckigen Klammern, wenn man zur Grenze $e = 0$ übergeht, *verschwindet*, weil α für $\varphi = \mu$ verschwindet, und $\alpha \log \alpha^2$ für $\alpha = 0$ den Grenzwerth Null hat; man erhält so aus (3.) mit Anwendung der Werthe der vorstehenden Integrale:

$$\int_0^\pi \log \alpha^2 \, d\alpha = \Big[\alpha \log \alpha^2 - 2\alpha\Big]_0^\pi = -2a(1 + \cos \mu) \log a (1 + \cos \mu) + 2a(1 + \cos \mu)$$
$$-2a(1 - \cos \mu) \log a (1 - \cos \mu) + 2a(1 - \cos \mu)$$

und zugleich ist dies der Werth des mit seinem Zeichen genommenen zweiten Integrals in (1^b.). Dieser Ausdruck hat aber für jeden beliebigen Werth von μ einen *endlichen* Werth, und damit auch das erste Integral in (1^a.) einen solchen.

Zunächst gilt der Beweis nur, wenn $\beta = b \sin \varphi - \eta$ an der Stelle $\varphi = \mu$ positiv ist. Ist es negativ, so mache man nicht den Nenner des Argumentes des Logarithmus in dem ersten Integrale (1^a.) rational, sondern den Zähler. Dies Integral geht dann über in:

$$\int_0^\pi \sin \varphi \log \alpha^2 \, d\varphi - \int_0^\pi \sin \varphi \log \left(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} - \beta\right)^2 d\varphi.$$

Von dem ersten ist oben bewiesen, dass es einen endlichen Werth hat, und das zweite hat einen solchen, weil es kein unendliches Element mehr enthält.

Zugleich ist hiermit auch die Endlichkeit des zweiten Integrales in (1^a.) bewiesen. Denn dasselbe unterscheidet sich von dem ersten nur durch die andere Form von β_1, und da diese bei dem vorstehenden Beweise gar nicht zur Sprache kommt, so gilt derselbe wörtlich auch für dieses zweite Integral. Natürlich hat man für dasselbe den Fall, wo α und β_1 zugleich für $\varphi = \mu$ verschwinden, gar nicht zu betrachten, da $\beta_1 = b \sin \varphi + \eta$, weil η positiv, zwischen den Grenzen 0 und π nie verschwinden kann.

Somit ist also gezeigt, dass auch $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ überall endlich bleibt.

Es könnte nun noch gefragt werden, ob die ersten Ableitungen auch dann endlich bleiben, wenn (ξ, η, ζ) im Unendlichen liegt. Dies folgt nun zwar mit Leichtigkeit aus den Gleichungen (3^a.) § 4., jedoch will ich deswegen jetzt nicht genauer darauf eingehen, weil diese Frage bei der auf die Bedingung 2. § 1. bezüglichen Untersuchung von selbst erledigt wird.

Mit Ausnahme des so eben angegebenen Falles ist also jetzt bewiesen, dass die ersten Ableitungen durch den *ganzen* Raum stetige und endliche Functionen von ξ, η, ζ sind (§§ 10. 11.).

Das Potential selbst ist daher ebenfalls immer *stetig*, denn seine Ableitungen sind überall *endlich*. Es ist auch immer *endlich*, denn die in § 3. geführte Untersuchung der Function X zeigt, dass das Integral, durch welches das Potential dargestellt ist, *kein* an irgend einer Stelle zwischen den Integrationsgrenzen *unendlich* werdendes Element hat, so lange (ξ, η, ζ) im Endlichen liegt.

Hiermit ist also gezeigt, dass Potential und erste Ableitungen durch den ganzen Raum *endliche* und *stetige* Functionen von ξ, η, ζ sind. Es ist also der Bedingung 1. § 1. genügt, mit Ausnahme des Falles, wo (ξ, η, ζ) im Unendlichen liegt, für welchen die folgende Untersuchung das Erfülltsein der Bedingung lehren wird.

§ 12.

Nach 2. § 1. sollen das Potential und seine ersten Ableitungen so beschaffen sein, dass die Ausdrücke $\xi P, \eta P, \zeta P;\ \xi^2 \frac{\partial P}{\partial \xi}, \eta^2 \frac{\partial P}{\partial \eta}, \zeta^2 \frac{\partial P}{\partial \zeta}$ im *ganzen* Raume *endliche* Werthe nicht überschreiten. So lange nun (ξ, η, ζ) im Endlichen liegt, also jede der Grössen ξ, η, ζ einen endlichen Werth hat, ist diese Bedingung durch die vorstehenden Untersuchungen erledigt. Denn nach denselben haben P und seine Ableitungen überall endliche Werthe, also auch die oben aufgestellten Producte. Es ist daher nur noch das Erfülltsein dieser Bedingung zu zeigen, wenn (ξ, η, ζ) im Unendlichen liegt, und damit erledigen sich dann auch die oben offen gebliebenen Fragen.

Nach (3.) § 2. ist:

$$(1.)\qquad 2P = a \sum \int_0^{2\pi} \sin\varphi \, X(\alpha, \beta, \gamma)\, d\varphi,$$

wo α, β, γ die in (2.) § 2. definirten Grössen sind.

Liegt nun (ξ, η, ζ) im Unendlichen, so ist nach den Untersuchungen des § 3. $X(\alpha, \beta, \gamma)$ unendlich (10ᵃ.) § 3.; die Form (1.) wird dadurch für die fernere Betrachtung ungeeignet, und ist deshalb in eine andere zu transformiren, welche diese Schwierigkeit nicht mehr darbietet.

Zu diesem Zwecke zerlege man das Integral in (1.) in zwei, deren eines von 0 bis π, deren zweites von π bis 2π genommen ist. Im zweiten setze man $2\pi - \varphi$ für φ, so bleibt $\cos\varphi$, also α, (2.) § 2. ungeändert, $\sin\varphi$ geht über in $-\sin\varphi$, also $\beta = b\sin\varphi - \eta$ in $-(b\sin\varphi + \eta)$. Man setze der Kürze wegen:

$$(2.)\qquad \beta_1 = b \sin\varphi + \eta.$$

Die Integration in dem so transformirten zweiten Integrale geht von π bis 0; ferner geht $d\varphi$ in $-d\varphi$ über, und da $X(\alpha, \beta, \gamma)$ in $X(\alpha, -\beta_1, \gamma)$ nach den obigen Bezeichnungen übergeht, X aber nach § 2. (6ᵇ.) mit dem zweiten Argumente sein Zeichen ändert, also:

$$X(\alpha, -\beta_1, \gamma) = -X(\alpha, \beta_1, \gamma)$$

wird, so erhält nach allen diesen Thatsachen der zweite Theil des Integrales in (1.) die Form:

$$\int_0^{\pi} \sin\varphi \, X(\alpha, \beta_1, \gamma)\, d\varphi$$

und giebt zu dem ersten addirt:

$$(1^a.)\qquad 2P = a\sum\int_0^\pi \sin\varphi\left[X(\alpha,\beta,\gamma)+X(\alpha,\beta_1,\gamma)\right]d\varphi.$$

Nach (2.) § 2. ist $\qquad \beta = b\sin\varphi-\eta,$

nach (2.) $\qquad \beta_1 = b\sin\varphi+\eta,$

und beide Formen sind enthalten in der einen

$$\beta = b\sin\varphi+\varepsilon'\eta,$$

wenn der Grösse ε' wieder die Werthe $+1$ und -1 beigelegt werden.

Der Ausdruck in der eckigen Klammer in (1^a.), welcher, indem man für die $\alpha,\beta,\beta_1,\gamma$ ihre Werthe schreibt, die Form erhält:

$$X(a\cos\varphi-\xi,\ b\sin\varphi-\eta,\ c+\varepsilon\zeta)+X(a\cos\varphi-\xi,\ b\sin\varphi+\eta,\ c+\varepsilon\zeta),$$

kann daher in der Form geschrieben werden:

$$\sum X(a\cos\varphi-\xi,\ b\sin\varphi+\varepsilon'\eta,\ c+\varepsilon\zeta),$$

wenn man wieder dem Summenzeichen die Bedeutung beilegt, dass in dem unter demselben stehenden Ausdrucke der Grösse ε' die Werthe $+1$ und -1 beigelegt, und die so erhaltenen beiden Ausdrücke addirt werden sollen. Führt man dies für die eckige Klammer in (1^a.) ein, so wird also:

$$(3.)\qquad 2P = a\sum\int_0^\pi \sin\varphi\, X(a\cos\varphi-\xi,\ b\sin\varphi+\varepsilon'\eta,\ c+\varepsilon\zeta)\,d\varphi,$$

wenn hier das Summenzeichen die Bedeutung hat, dass den Grössen ε und ε' die Werthe $+1$ und -1 beigelegt, und die so erhaltenen vier Integrale addirt werden sollen.

Betrachten wir jetzt die Summe nach ε' in (3.), welche sich nur auf das X in (3.) erstreckt, und bezeichnen der Kürze wegen das X nur mit Hinzusetzung des zweiten von ε' abhängigen Argumentes, also mit $X(b\sin\varphi+\varepsilon'\eta)$. Da X mit dem zweiten Argumente sein Zeichen wechselt (§ 2.), und da, wegen $\varepsilon'=\pm1$, $b\sin\varphi+\varepsilon'\eta=\varepsilon'(\eta+\varepsilon' b\sin\varphi)$, so ist

$$X(b\sin\varphi+\varepsilon'\eta)=\varepsilon' X(\eta+\varepsilon' b\sin\varphi)$$

also auch

$$\sum_{\varepsilon'} X(b\sin\varphi+\varepsilon'\eta)=\sum_{\varepsilon'}\varepsilon' X(\eta+\varepsilon' b\sin\varphi).$$

Fügt man jetzt unter dem Summenzeichen des Ausdruckes auf der rechten Seite das Glied $-\varepsilon' X(a\cos\varphi-\xi,\eta,c+\varepsilon\zeta)$ hinzu, das wieder der Kürze wegen nur mit $-\varepsilon' X(\eta)$ bezeichnet werden möge, so hat man wegen der Bedeutung von ε' dem Werthe der Summe Nichts hinzugefügt, oder es ist:

$$(4.)\qquad \sum_{\varepsilon'} X(b\sin\varphi+\varepsilon'\eta)=\sum_{\varepsilon'}\varepsilon'\left[X(\eta+\varepsilon' b\sin\varphi)-X(\eta)\right].$$

Nun gilt aber für jede stetige Function, und X ist nach § 3. eine solche in Bezug auf alle drei Argumente, die Gleichung:

$$(5.)\qquad f(x\pm h)=f(x)\pm h f'(x\pm\vartheta h),$$

wo $\qquad 0<\vartheta<1.$

Deswegen ist also auch:

$$(6.)\qquad X(\eta+\varepsilon' b\sin\varphi)-X(\eta)=\varepsilon' b\sin\varphi\, X'(\eta+\vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi),$$

$$0<\vartheta'<1,$$

und in der vorstehenden Gleichung bedeutet der $'$ an X auf der rechten Seite die Ableitung des X nach dem zweiten Argumente, oder es wird unter Anwendung der zweiten Formel (6.) § 2.:

$$(6^a.)\qquad X'(\eta + \vartheta'\varepsilon' b \sin\varphi) = \log\frac{\rho_1 + (c+\varepsilon\zeta)}{\rho_1 - (c+\varepsilon\zeta)},$$

wo:

$$(6^b.)\qquad \rho_1^2 = (a\cos\varphi - \xi)^2 + (\eta + \vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi)^2 + (c+\varepsilon\zeta)^2.$$

Setzt man (6^a.) in (6.) ein, und dann (6.) in (4.), so folgt, wegen $\varepsilon'^2 = 1$:

$$(4^a.)\qquad \sum_{\varepsilon'} X(b\sin\varphi + \varepsilon'\eta) = \sum_{\varepsilon'} b\sin\varphi \log\frac{\rho_1 + (c+\varepsilon\zeta)}{\rho_1 - (c+\varepsilon\zeta)},$$

wo ρ_1 durch (6^b.) gegeben ist, und indem man dies für die Summe nach ε' in den Ausdruck (3.) des Potentials einführt, folgt:

$$(3^a.)\qquad 2P = ab\sum\int_0^\pi \sin^2\varphi \log\frac{\rho_1 + (c+\varepsilon\zeta)}{\rho_1 - (c+\varepsilon\zeta)}\,d\varphi,$$

und hierin bezieht sich das Summenzeichen wieder auf beide Grössen ε und ε'.

Transformiren wir jetzt auf ähnliche Weise die Summe nach ε in (3^a.), welche sich nur auf den Logarithmus unter dem Integralzeichen erstreckt.

Es ist nach der Bedeutung dieser Summe:

$$(7.)\qquad \sum_\varepsilon \log\frac{\rho_1 + (c+\varepsilon\zeta)}{\rho_1 - (c+\varepsilon\zeta)} = \log\frac{\rho_1' + (c+\zeta)}{\rho_1' - (c+\zeta)} + \log\frac{\rho_1'' + (c-\zeta)}{\rho_1'' - (c-\zeta)},$$

wo ρ_1' und ρ_1'' bezüglich die Werthe von ρ_1 in (6^b.) bedeuten, welche ρ_1 erhält, wenn man darin der Grösse ε die Werthe $+1$ und -1 beilegt.

Für die rechte Seite von (7.) kann aber nach der Eigenschaft der Logarithmen geschrieben werden:

$$\log\frac{\rho_1' + (\zeta + c)}{\rho_1' - (\zeta + c)} - \log\frac{\rho_1'' + (\zeta - c)}{\rho_1'' - (\zeta - c)},$$

oder, was dasselbe ist:

$$\sum_\varepsilon \varepsilon\log\frac{\rho_1 + (\zeta + \varepsilon c)}{\rho_1 - (\zeta + \varepsilon c)},$$

wo ε und die Summe wieder die bekannte Bedeutung haben. Setzt man dies in (7.) für die rechte Seite ein, so erhält man also:

$$(7^a.)\qquad \sum_\varepsilon \log\frac{\rho_1 + (c+\varepsilon\zeta)}{\rho_1 - (c+\varepsilon\zeta)} = \sum\varepsilon\log\frac{\rho_1 + (\zeta + \varepsilon c)}{\rho_1 - (\zeta + \varepsilon c)},$$

wo wir uns jetzt ρ_1 in der Form:

$$(6^c.)\qquad \rho_1^2 = (a\cos\varphi - \xi)^2 + (\eta + \vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi)^2 + (\zeta + \varepsilon c)^2$$

denken wollen, was mit (6^b.) wegen $\varepsilon^2 = +1$ offenbar identisch ist.

Versteht man jetzt unter ρ_1^0 den Ausdruck, in welchen ρ_1 (6^c.) übergeht, wenn man darin $c = 0$ setzt, so ist wieder wie oben:

$$(7^b.)\qquad \sum_\varepsilon \varepsilon\log\frac{\rho_1 + (\zeta+\varepsilon c)}{\rho_1 - (\zeta+\varepsilon c)} = \sum_\varepsilon \varepsilon\left[\log\frac{\rho_1 + (\zeta+\varepsilon c)}{\rho_1 - (\zeta+\varepsilon c)} - \log\frac{\rho_1^0 + \zeta}{\rho_1^0 - \zeta}\right],$$

weil der in der eckigen Klammer hinzugefügte Logarithmus ε nicht mehr enthält, also die beiden zu der Summe selbst dadurch hinzugefügten Glieder sich wegen des Factors ε gegenseitig vernichten. Da ferner der Logarithmus in (7^b.), als Function von $\zeta + \varepsilon c$ betrachtet, eine stetige Function dieses Argumentes ist, so kann wieder (5.) angewendet werden, und man erhält also:

$$(8.)\qquad \log\frac{\rho_1+(\zeta+\varepsilon c)}{\rho_1-(\zeta+\varepsilon c)}-\log\frac{\rho_1^0+\zeta}{\rho_1^0-\zeta}=\varepsilon c\,\log'\frac{\rho_2+(\zeta+\varepsilon\vartheta c)}{\rho_2-(\zeta+\varepsilon\vartheta c)},$$

$$0<\vartheta<1,$$

$$(9.)\qquad \rho_2^2=(a\cos\varphi-\xi)^2+(\eta+\vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi)^2+(\zeta+\varepsilon\vartheta c)^2,$$

und wo wieder der $'$ am log, auf der rechten Seite von (8.), die Ableitung des Logarithmus nach $\zeta+\varepsilon\vartheta c$ bedeutet. Diese Ableitung ist aber gegeben durch die letzte Gleichung (5.) § 2., nach welcher also:

$$\log'\frac{\rho_2+(\zeta+\varepsilon\vartheta c)}{\rho_2-(\zeta+\varepsilon\vartheta c)}=\frac{2}{\rho_2}$$

wird. Setzt man dies in (8.) ein, und dann den so gefundenen Werth des Ausdruckes auf der linken Seite von (8.) für die eckige Klammer in (7^b.), so folgt also aus (7^b.):

$$\sum_\varepsilon \varepsilon\log\frac{\rho_1+(\zeta+\varepsilon c)}{\rho_1-(\zeta+\varepsilon c)}=2c\sum_\varepsilon\frac{1}{\rho_2},$$

wegen $\varepsilon^2=+1$. Und indem man dies wieder für die rechte Seite von (7^a.) setzt, erhält man:

$$(7^c.)\qquad \sum_\varepsilon\log\frac{\rho_1+(c+\varepsilon\zeta)}{\rho_1-(c+\varepsilon\zeta)}=2c\sum_\varepsilon\frac{1}{\rho_2}.$$

Dies führe man nun wieder für die Summe nach ε in den Ausdruck (3^a.) für das Potential ein, und erhält so nach Weglassung des Factors 2 auf beiden Seiten:

$$(10.)\qquad P=abc\sum\int_0^\pi\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{\sqrt{(a\cos\varphi-\xi)^2+(\eta+\vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi)^2+(\zeta+\varepsilon\vartheta c)^2}},$$

indem zugleich für ρ_2 sein aus (9.) folgender Werth gesetzt worden ist. Die Summe bezieht sich wieder auf beide Zeichen ε und ε'.

Die Form (10.) des Potentials ist nun höchst geeignet, zu zeigen, dass die Bedingung 2. § 1., wenigstens so weit sie das Potential selbst angeht, erfüllt ist.

Denn bildet man mit Anwendung von (10.) die Ausdrücke ξP, ηP, ζP, und setzt, wie dies schon in (7.) § 3. geschehen,

$$\xi=p\lambda,\quad \eta=q\lambda,\quad \zeta=r\lambda,$$

so wird:

$$(11.)\qquad \xi P=pL,\quad \eta P=qL,\quad \zeta P=rL,$$

wo:

$$(12.)\qquad L=abc\sum\int_0^\pi\sin^2\varphi\,d\varphi\cdot\frac{\lambda}{\sqrt{(a\cos\varphi-p\lambda)^2+(q\lambda+\vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi)^2+(r\lambda+\vartheta\varepsilon c)^2}}.$$

Dividirt man nun in dem Bruche unter dem Integralzeichen Zähler und Nenner mit λ, so geht er über in:

$$(12^a.)\qquad \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{a\cos\varphi}{\lambda}-p\right)^2+\left(q+\frac{\vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi}{\lambda}\right)^2+\left(r+\frac{\vartheta\varepsilon c}{\lambda}\right)^2}},$$

und indem man jetzt λ über alle Grenzen wachsen lässt, wodurch nach § 3. (ξ, η, ζ) ins Unendliche rückt, *verschwinden* die Ausdrücke $\frac{a\cos\varphi}{\lambda}$, $\frac{\vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi}{\lambda}$, $\frac{\vartheta\varepsilon c}{\lambda}$, da die Grössen ϑ und ϑ'

kleiner sind wie 1, die übrigen Grössen in den Zählern dieser Brüche aber sicher immer endlich sind, und es wird demnach der Grenzwerth des Bruches (12^a.) der von φ *unabhängige* Ausdruck:

$$(12^b.) \qquad \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}} = \frac{1}{l},$$

welcher, da p, q, r nicht zu gleicher Zeit verschwinden können, ohne das (ξ, η, ζ) gegen die Voraussetzung im Endlichen liegt, immer einen *endlichen* Werth hat.

Hiernach wird also, wenn (ξ, η, ζ) im Unendlichen liegt, nach (12.):

$$(12^c.) \qquad L = \frac{4abc}{l} \int_0^\pi \sin^2\varphi \, d\varphi,$$

worin der Factor 4 daher kommt, dass, da die Grössen ε' und ε durch das Unendlichwerden von λ verschwunden sind, die Summe nach ε und ε' in (12.) eine Summe von vier gleichen Summanden wird.

Nun ist aber

$$(12^d.) \qquad \int_0^\pi \sin^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2},$$

also nach (12^c.)

$$L = \frac{2abc\pi}{l}.$$

Dies für L in (11.) eingeführt, giebt, wenn (ξ, η, ζ) im Unendlichen liegt, die gesuchten Grenzwerthe:

$$(13.) \qquad \xi P = \frac{p}{l}\cdot 2abc\pi, \quad \eta P = \frac{q}{l}\cdot 2abc\pi, \quad \zeta P = \frac{r}{l}\cdot 2abc\pi,$$

welche, wie (12^b.) zeigt, immer *endlich* sind.

Liegt nun (ξ, η, ζ) im Endlichen, so sind die Producte $\xi P, \eta P, \zeta P$ nach dem Anfange dieses Paragraphen immer *endlich*. Rückt aber (ξ, η, ζ) ins Unendliche, so lehren die Gleichungen (13.), dass diese Producte die *endlichen* Werthe (13.) *nicht* überschreiten. Demnach ist die Bedingung 2. § 1., so weit sie das Potential selbst betrifft, erfüllt.

§ 13.

Es bleibt noch das Erfülltsein des Theiles der Bedingung 2. § 1. zu beweisen, der sich auf die ersten Ableitungen bezieht.

Die Form (10.) § 12. des Potentials, welche durch unter allen Umständen erlaubte Transformationen aus der ursprünglichen Form des Potentials (1.) § 12. hergeleitet wurde, darf also, ebenso wie diese letztere, ohne Einschränkung nach ξ, η, ζ differentiirt werden. Man erhält so Formen der Ableitungen, welche allgemein gelten, also auch wenn (ξ, η, ζ) im Unendlichen liegt. Alle diese Punkte sind in § 4. genauer erörtert. Differentiirt man also (10.) § 12. nach ξ, so erhält man:

$$(1.) \qquad \frac{\partial P}{\partial \xi} = abc \sum \int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\,(a\cos\varphi - \xi)\, d\varphi}{\left[(a\cos\varphi-\xi)^2 + (\eta + \vartheta'\varepsilon' b \sin\varphi)^2 + (\zeta + \varepsilon\vartheta c)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Diese Form kann im Uebrigen auch aus dem eigentlichen Ausdrucke für $\frac{\partial P}{\partial \xi}$ § 4. (1.) auf dieselbe Weise hergeleitet werden, wie die Form (10.) § 12. des Potentials aus der eigentlichen gefunden wurde. Der grösseren Einfachheit wegen habe ich die vorstehende Herleitung gewählt, und wollte nur darauf aufmerksam machen, dass (1.) in der That mit der ersten Formel in (1.) § 4. identisch ist.

Für die Ableitungen nach η und ζ kann man nicht auf diese einfache Weise Ausdrücke aus (10.) § 12. herleiten. Denn die Grösse ϑ' muss als abhängig von η und ε', und ϑ als abhängig von ζ und ε betrachtet werden. Bei den Ableitungen von (10.) § 12. nach η und ζ würden also die durchaus unbekannten Grössen $\frac{\partial \vartheta'}{\partial \eta}$ und $\frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta}$ auftreten, und demnach aus den so erhaltenen Grössen $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ und $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ keine Schlüsse gezogen werden können. Es bleibt unter solchen Umständen nichts anderes übrig, als zu den ursprünglichen Formen (1.) § 4. zurückzugehen und sie in zweckdienlicher Weise zu transformiren.

Nach der zweiten Formel (1.) § 4. ist:

$$(2.)\qquad 2\,\frac{\partial P}{\partial \eta} = -a\sum\int_0^{2\pi} \sin\varphi \log\frac{\rho+(c+\varepsilon\zeta)}{\rho-(c+\varepsilon\zeta)}\,d\varphi,$$

wo

$$(2^a.)\qquad \rho^2 = (a\cos\varphi-\xi)^2+(b\sin\varphi-\eta)^2+(c+\varepsilon\zeta)^2.$$

Nun ist nach (7^c.) § 12.:

$$(3.)\qquad \sum_\varepsilon \log\frac{\rho+(c+\varepsilon\zeta)}{\rho-(c+\varepsilon\zeta)} = 2c\sum_\varepsilon\frac{1}{\rho_1},$$

wo

$$(3^a.)\qquad \rho_1^2 = (a\cos\varphi-\xi)^2+(b\sin\varphi-\eta)^2+(\zeta+\vartheta\varepsilon c)^2.$$
$$0<\vartheta<1.$$

Denn die Formel (7^c.) § 12. bleibt offenbar noch richtig, was auch die Formen der ersten beiden Glieder in ρ_1 (6^b.) § 12. und ρ_2 (9.) § 12. sein mögen, da diese bei der Herleitung von (7^c.) gar nicht gebraucht werden, so dass man also in (7^c.) § 12. $b\sin\varphi-\eta$ für $\eta+\vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi$ setzen kann, wodurch (3.) entsteht.

In (2.) bezieht sich die Summe bekanntlich auf ε. Führt man nun (3.) in (2.) ein, so entsteht nach Weglassung des Factors 2 auf beiden Seiten:

$$(2^b.)\qquad \frac{\partial P}{\partial \eta} = -ac\sum\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\rho_1}.$$

Zerlegt man nun das Integral in dieser Gleichung in zwei, von denen das erste von 0 bis π, das zweite von π bis 2π genommen ist, und setzt im zweiten $2\pi-\varphi$ für φ, so wird wieder mit Hülfe der dadurch in dem zweiten Integrale entstehenden Veränderungen (§ 12.):

$$(2^c.)\qquad \frac{\partial P}{\partial \eta} = -ac\sum\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\rho_1} - \int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\rho_2}\right],$$

wo

$$\rho_2^2 = (a\cos\varphi-\xi)^2+(\eta+b\sin\varphi)^2+(\zeta+\varepsilon\vartheta c)^2.$$

Setzt man noch für (3^a.):

$$\rho_1^2 = (a\cos\varphi-\xi)^2+(\eta-b\sin\varphi)^2+(\zeta+\varepsilon\vartheta c)^2,$$

so kann also für (2^c.) geschrieben werden:

$$\frac{\partial P}{\partial \eta} = ac\sum\left[\int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\rho_2} - \int_0^{\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\rho_1}\right],$$

oder

$$(2^{d}.) \qquad \frac{\partial P}{\partial \eta} = ac \sum \varepsilon' \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi \, d\varphi}{\rho_3},$$

wo

$$(3^{b}.) \qquad \rho_3^2 = (a\cos\varphi - \xi)^2 + (\eta + \varepsilon' b \sin\varphi)^2 + (\zeta + \varepsilon\vartheta c)^2,$$

und die Summe sich jetzt sowohl auf ε, als auch auf ε' bezieht, und diese letzte Summe wieder die gewöhnliche Bedeutung hat.

Betrachten wir jetzt wieder in (2^d.) die Summe nach ε', d. h.

$$(4.) \qquad \sum_{\varepsilon'} \frac{\varepsilon'}{\rho_3},$$

und bezeichnen deswegen ρ_3 mit Hinzusetzung des Argumentes, welches ε' enthält, also mit $\rho_3(\eta + \varepsilon' b \sin\varphi)$, indem wir ρ_3 als Function desselben betrachten. Dann wird (4.):

$$(4^{a}.) \qquad \sum_{\varepsilon'} \frac{\varepsilon'}{\rho_3} = \sum \varepsilon' \left[\frac{1}{\rho_3(\eta + \varepsilon' b \sin\varphi)} - \frac{1}{\rho_3(\eta)}\right],$$

indem wieder durch die Hinzusetzung des Gliedes unter der eckigen Klammer wegen des Factors ε' zu dem Werthe der Summe Nichts hinzugefügt wird.

$\frac{1}{\rho_3}$ ist aber, wie aus (3^b.) ersichtlich ist, wieder eine stetige Function seines Argumentes, es kann daher wieder (5.) § 12. angewendet werden, und man erhält so:

$$(4^{b}.) \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho_3(\eta + \varepsilon' b \sin\varphi)} - \dfrac{1}{\rho_3(\eta)} = \varepsilon' b \sin\varphi \left(\dfrac{1}{\rho_3(\eta + \vartheta'\varepsilon' b \sin\varphi)}\right)' \\[2ex] \qquad\qquad = - \dfrac{\varepsilon' b \sin\varphi\,(\eta + \vartheta'\varepsilon' b \sin\varphi)}{\left[(a\cos\varphi - \xi)^2 + (\eta + \vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi)^2 + (\zeta + \vartheta\varepsilon c)^2\right]^{\frac{3}{2}}}. \end{cases}$$

Führt man (4^b.) in (4^a.) für die eckige Klammer ein, so folgt endlich wegen $\varepsilon'^2 = +1$:

$$(4^{c}.) \qquad \sum_{\varepsilon'} \frac{\varepsilon'}{\rho_3} = - b \sum \frac{\sin\varphi\,(\eta + \vartheta'\varepsilon' b \sin\varphi)}{\left[(a\cos\varphi - \xi)^2 + (\eta + \vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi)^2 + (\zeta + \vartheta\varepsilon c)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Setzt man dies für die Summe nach ε' in (2^d.), so erhält man den Ausdruck:

$$(5.) \qquad \frac{\partial P}{\partial \eta} = - abc \sum \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\varphi\,(\eta + \vartheta'\varepsilon' b \sin\varphi)\,d\varphi}{\left[(a\cos\varphi - \xi)^2 + (\eta + \vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi)^2 + (\zeta + \varepsilon\vartheta c)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

welchen man auch aus der Form des Potentials (10.) § 12. durch Differentiation nach η erhalten haben würde, wenn es erlaubt wäre, ϑ' als unabhängig von η zu betrachten. Die Summe bezieht sich wieder auf beide Zeichen ε und ε'.

Es ist endlich noch $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ zu transformiren.

Nach der dritten Formel (1.) § 4. ist:

$$(6.) \qquad 2\frac{\partial P}{\partial \zeta} = a \sum \varepsilon \int_0^{2\pi} \sin\varphi \log \frac{\rho + (b\sin\varphi - \eta)}{\rho - (b\sin\varphi - \eta)}\, d\varphi,$$

wo

$$(7.) \qquad \rho^2 = (a\cos\varphi - \xi)^2 + (b\sin\varphi - \eta)^2 + (c + \varepsilon\zeta)^2.$$

Wir theilen das Integral in (6.) wieder in zwei, deren eines von 0 bis π, deren zweites von π bis 2π genommen ist, setzen im zweiten $2\pi - \varphi$ für φ, und erhalten so:

$$2\,\frac{\partial P}{\partial \zeta} = a \sum \varepsilon \left[\int_0^\pi \sin\varphi \log \frac{\rho - (\eta - b\sin\varphi)}{\rho + (\eta - b\sin\varphi)}\, d\varphi - \int_0^\pi \sin\varphi \log \frac{\rho_1 - (\eta + b\sin\varphi)}{\rho_1 + (\eta + b\sin\varphi)}\, d\varphi\right],$$

wo ρ_1 aus ρ (7.) hervorgeht, indem man $+\eta$ für $-\eta$ schreibt. Oder es wird:

$$2\,\frac{\partial P}{\partial \zeta} = a \sum \varepsilon \left[\int_0^\pi \sin\varphi \log \frac{\rho_1 + (\eta + b\sin\varphi)}{\rho_1 - (\eta + b\sin\varphi)}\, d\varphi - \int_0^\pi \sin\varphi \log \frac{\rho + (\eta - b\sin\varphi)}{\rho - (\eta - b\sin\varphi)}\, d\varphi\right],$$

was wieder in der Form geschrieben werden kann:

$$(6^a.)\qquad 2\,\frac{\partial P}{\partial \zeta} = a \sum \varepsilon\varepsilon' \int_0^\pi \sin\varphi \log \frac{\rho_2 + (\eta + \varepsilon' b \sin\varphi)}{\rho_2 - (\eta + \varepsilon' b\sin\varphi)}\, d\varphi,$$

wenn

$$(7^a.)\qquad \rho_2^2 = (a\cos\varphi - \xi)^2 + (\eta + \varepsilon' b \sin\varphi)^2 + (\zeta + \varepsilon c)^2$$

gesetzt wird, und die Summe in (6^a.) sich wieder auf beide Zeichen ε und ε' bezieht.

Nun folgt wieder, auf dieselbe Weise wie (7^c.) § 12. hergeleitet wurde, oder aus der unmittelbar vor (7^c.) § 12. stehenden Gleichung durch blosse Vertauschung, dass:

$$\sum_{\varepsilon'} \varepsilon' \log \frac{\rho_2 + (\eta + \varepsilon' b\sin\varphi)}{\rho_2 - (\eta + \varepsilon' b \sin\varphi)} = 2b\sin\varphi \sum_{\varepsilon'} \frac{1}{\rho_3},$$

wo

$$(7^b.)\qquad \rho_3^2 = (a\cos\varphi - \xi)^2 + (\eta + \vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi)^2 + (\zeta + \varepsilon c)^2$$
$$0 < \vartheta' < 1$$

gesetzt ist, oder, indem man dies in (6^a.) einführt und den Factor 2 auf beiden Seiten weglässt:

$$(6^b.)\qquad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = ab \sum \varepsilon \int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\rho_3},$$

worin sich die Summe wieder auf die beiden Grössen ε und ε' bezieht.

In (6^b.) ist nun noch die Summe nach ε zu transformiren, d. h. der Ausdruck:

$$\sum_\varepsilon \frac{\varepsilon}{\rho_3},$$

worin das durch (7^b.) gegebene ρ_3 nur als Function des von ε abhängigen Gliedes $\zeta + \varepsilon c$ betrachtet wird.

Es folgt aber auf dieselbe Weise, wie (4^c.) aus (4.) hergeleitet wurde, oder auch durch blosse Vertauschung aus (4^c.):

$$\sum_\varepsilon \frac{\varepsilon}{\rho_3} = -c \sum_\varepsilon \frac{\zeta + \vartheta\varepsilon c}{\left[(a\cos\varphi - \xi)^2 + (\eta + \vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi)^2 + (\zeta + \vartheta\varepsilon c)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$
$$0 < \vartheta < 1,$$

und indem man dies in (6^b.) einsetzt, erhält man:

$$(8.)\qquad \frac{\partial P}{\partial \zeta} = -abc \sum \int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\,(\zeta + \vartheta\varepsilon c)\, d\varphi}{\left[(a\cos\varphi - \xi)^2 + (\eta + \vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi)^2 + (\zeta + \vartheta\varepsilon c)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

wo sich die Summe wieder auf die beiden Grössen ε und ε' bezieht. Auch diesen Ausdruck würde man aus (10.) § 12. durch Differentiation nach ζ erhalten haben, wenn es erlaubt wäre, ϑ als unabhängig von ζ zu betrachten.

Die Ausdrücke (1.), (5.) und (8.) zeigen nun leicht, dass die ersten Ableitungen im Unendlichen der Bedingung 2. § 1. entsprechen.

Denn bildet man aus (1.) den Ausdruck $\xi^2 \frac{\partial P}{\partial \xi}$ und setzt dann wieder, um (ξ, η, ζ) auf die allgemeinste Weise ins Unendliche rücken zu lassen:

$$\xi = p\lambda, \quad \eta = q\lambda, \quad \zeta = r\lambda,$$

so wird nach (1.):

$$\xi^2 \frac{\partial P}{\partial \xi} = abcp^2\lambda^2 \Sigma \int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\,(a\cos\varphi - p\lambda)\,d\varphi}{\left[(a\cos\varphi - p\lambda)^2 + (q\lambda + \vartheta'\varepsilon' b \sin\varphi)^2 + (r\lambda + \varepsilon\vartheta c)^2\right]^{\frac{3}{2}}},$$

oder indem man Zähler und Nenner, da sie in Bezug auf λ dritten Grades sind, mit λ^3 dividirt:

$$\xi^2 \frac{\partial P}{\partial \xi} = abcp^2 \Sigma \int_0^\pi \frac{\sin^2\varphi\left(\frac{a\cos\varphi}{\lambda} - p\right)d\varphi}{\left[\left(\frac{a\cos\varphi}{\lambda} - p\right)^2 + \left(q + \frac{\vartheta'\varepsilon' b\sin\varphi}{\lambda}\right)^2 + \left(r + \frac{\varepsilon\vartheta c}{\lambda}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}.$$

Lässt man nun λ unendlich werden, so *verschwinden* alle von φ abhängigen Glieder bis auf den Factor des Zählers $\sin^2\varphi$. Wendet man dann (12^d.) § 12. an, und bedenkt, dass die Summe nach ε und ε' sich in den Factor 4 umsetzt (§ 12.), so erhält man also als Grenzwerth von $\xi^2 \frac{\partial P}{\partial \xi}$, wenn (ξ, η, ζ) ins Unendliche rückt, den Ausdruck:

$$(9.)\qquad \xi^2 \frac{\partial P}{\partial \xi} = -\frac{2abc\pi \cdot p^3}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Da die Ausdrücke (5.) und (10.) derselben Form sind wie (1.), so erhält man also auf dieselbe Weise, wie (9.) aus (1.) folgte, aus diesen Ausdrücken:

Aus (5.) als Grenzwerth von

$$(10.)\qquad \eta^2 \frac{\partial P}{\partial \eta} = -\frac{2abc\pi \cdot q^3}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{3}{2}}},$$

und aus (8.) als Grenzwerth von

$$(11.)\qquad \zeta^2 \frac{\partial P}{\partial \zeta} = -\frac{2abc\pi \cdot r^3}{(p^2+q^2+r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Im Endlichen sind, wie die vorstehenden Untersuchungen lehrten, $\xi^2 \frac{\partial P}{\partial \xi}$, $\eta^2 \frac{\partial P}{\partial \eta}$, $\zeta^2 \frac{\partial P}{\partial \zeta}$ immer endlich; dass sie es auch im Unendlichen sind, zeigen die Gleichungen (9.), (10.) und (11.), da $p^2+q^2+r^2$ *nie* verschwinden kann, ohne dass (ξ, η, ζ) gegen die Voraussetzung im Endlichen liegt.

Der Bedingung 2. § 1. ist also ebenfalls genügt, so weit sie sich auf die ersten Ableitungen bezieht.

Zugleich wird hierdurch klar, dass P und seine ersten Ableitungen im Unendlichen *verschwinden*, und zwar P proportional dem umgekehrten Werthe, die ersten Ableitungen proportional dem Quadrate des umgekehrten Werthes der unendlich werdenden Grössen ξ, η, ζ. P und seine ersten Ableitungen haben also im Unendlichen die endlichen und eindeutigen Werthe Null, und damit erledigen sich die in dem § 11. noch übrig gebliebenen Fragen.

Somit ist gezeigt worden, dass die in (3.) § 2. gegebene Form des Potentials eines homogenen rechtwinkligen elliptischen Cylinders den drei von Dirichlet aufgestellten Bedingungen genügt, und damit ein neuer und vollständiger Beweis für die Richtigkeit dieser Form geliefert.

Oscar Röthig.