Ueber

das Potential und die Anziehung eines homogenen Cylinders.

Nachdem ich den grössten Theil der folgenden Resultate gefunden hatte, erhielt ich Kenntniss von einer Arbeit (Grube, de cylindri et coni attractione Diss. inaug. Göttingae 1859), welche den interessantesten Satz über die Anziehung eines homogenen Cylinders schon enthielt, nämlich *die Zurückführung der Attractionscomponenten auf elliptische Integrale.* Bis dahin war meines Wissens nach nichts über dieses Problem veröffentlicht worden, und ich will daher zunächst die Methode der citirten Arbeit kurz darstellen, um eine Vergleichung ihrer Resultate mit den folgenden möglich zu machen.

Der zu betrachtende Cylinder sei ein gerader mit einer Ellipse als Grundfläche. Nun führt Herr Grube in die allgemeinen Ausdrücke der Attractionscomponenten Polarcoordinaten ein, und reducirt nach einigen auf die Grenzen der Integrale bezüglichen Betrachtungen und durch zweckmässige Ausführung zweier Integrationen die Componenten auf *elliptische Integrale* für den Fall, dass der angezogene Punkt ein *innerer* ist. Er hat ferner vorher schon den Fall der Anziehung eines *äusseren* Punktes mit Hülfe der von Ivory bei der Anziehung eines Ellipsoides angewandten Methode auf den der Anziehung eines *inneren* Punktes zurückgeführt, jedoch gelingt diese Zurückführung nur für die den Axen der Ellipse parallelen Componenten, und auch nur dann, wenn der angezogene Punkt ausserhalb des Cylinders zwischen den verlängerten Grundflächen liegt. Herr Grube giebt aber später ein sehr einfaches Mittel an, die den Axen der Ellipse parallelen Componenten mit Hülfe der bisher erhaltenen Resultate über dieselben allgemein zu finden, so dass bis auf die der Axe des Cylinders parallele Componente die Zurückführung auf elliptische Integrale im allgemeinen Falle geleistet werden kann. Um nun auch die dritte Componente allgemein zur erhalten, wird sie mit Hülfe der berühmten Dirichletschen Methode des Discontinuitätsfactors behandelt, und man erhält dadurch eine für alle Lagen des angezogenen Punktes gültige Darstellung desselben durch elliptische Integrale. Das Potential selbst behandelt Herr Grube nicht.

Die folgende Methode ist von der so eben auseinandergesetzten vollständig verschieden. Ich betrachte zunächst das Potential, und führe es durch directe Integration auf Quadraturen für *alle Lagen des angezogenen Punktes.* Ob diese Quadratur auf elliptische Integrale gebracht werden kann oder nicht, habe ich bis jetzt noch nicht entscheiden können. Durch Differentiation ergeben sich dann hieraus die Componenten der Anziehung nach den drei Coordinatenaxen, und eine einfache theilweise Integration führt sie ohne Weiteres auf *elliptische Integrale für alle Lagen des angezogenen Punktes.* In Bezug auf einige andere Sätze über das Potential und die Componenten der Anziehung muss ich auf das Folgende verweisen.

---

§ 1.

Reduction des Potentials auf Quadraturen.

Der Anfangspunkt der Coordinaten liege im Mittelpunkte des Cylinders; die Ellipse, welche die Grundfläche desselben bildet, habe die Axen a und b, und demnach die Gleichung

$$(1.)\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Die Axe der z liege in der Axe des Cylinders, dessen Höhe $2c$ sei. Der Cylinder ist ein gerader, das Coordinatensystem also rechtwinklig. Nennt man noch die Coordinaten des angezogenen Punktes ξ, η, ζ, entsprechend den x, y, z des Cylinders, und setzt die constante Dichtigkeit der Masse gleich der Einheit, so hat nach allen diesen Festsetzungen das Potential die Form:

$$(2.)\quad \int\limits_{-a}^{+a} dx \int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int\limits_{-c}^{+c} \frac{dz}{r}$$

wo

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$$

gesetzt ist, oder auch die folgende, welche mit der vorhergehenden offenbar identisch ist:

$$(2^a.)\quad \int\limits_{-b}^{+b} dy \int\limits_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{+a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dx \int\limits_{-c}^{+c} \frac{dz}{r},$$

und beide Formen, sowie ihre Ableitungen nach ξ, η, ζ stellen bekanntlich das Potential und die Componenten der Anziehung für alle Lagen des angezogenen Punktes dar.

In der Form (2.) ist die Integration nach y unabhängig von der nach z, ebenso ist in (2^a.) die Integration nach x unabhängig von der nach z. Die Ausführung beider von einander unabhängigen Integrationen in (2.) und (2^a.) hängt aber ab von der Ermittelung des Werthes des folgengenden doppelten Integrales:

$$(3.)\quad \int\limits_{-\mu}^{+\mu}\int\limits_{-\nu}^{+\nu} \frac{dy\,dz}{r},$$

wo jetzt

$$r^2=\lambda^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2$$

gesetzt ist. Kennt man nämlich den Werth von (3.), so hat man, um die Integrationen nach y und z in (2.) auszuführen, in diesem Werthe nur $x-\xi$ für λ, $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ für μ und c für ν zu schreiben. Was ferner die Ausführung der Integrationen nach x und z in (2^a.) betrifft, so hat man, wenn (3.) bekannt ist, in seinem Werthe zunächst ξ für η zu schreiben, und dann $y-\eta$ für λ, $a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$ für μ und c für ν.

Nun hat zunächst (3.) eine ganz bestimmte mechanische Bedeutung, denn, wie aus seiner Form sofort erhellt, ist es *das Potential eines Rechtecks* mit den Seiten 2μ, 2ν in Beziehung auf einen Punkt (λ, η, ζ), wenn man den Anfangspunkt der Coordinaten in den Mittelpunkt des Rechtecks legt, wenn ferner die Axe der λ senkrecht ist, zu der Fläche des Rechtecks, und die Axen der y und z oder η und ζ parallel respective zu den Seiten 2μ und 2ν sind. Aber auch der Werth dieses doppelten Integrales ist bekannt, denn er ist als specielles Resultat in meiner Arbeit über das Potential eines rechtwinkligen homogenen Parallelepipedums enthalten (Borchardt, Journal für Mathematik Band 58 Pag. 249).

Nach diesem Aufsatze ist nämlich das Potential eines rechtwinkligen homogenen Parallelepipedums mit den Seiten $2a$, $2b$, $2c$ in Beziehung auf einen Punkt (ξ, η, ζ), (wenn der Anfangspunkt der Coordinaten im Mittelpunkte des Parallelepipedums liegt, und die Axen selbst den Seiten des Parallelepipedums parallel sind) d. h. wenn man

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

setzt, das dreifache Integral:

$$(4.)\quad \int_{-a}^{+a}\int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c} \frac{dx\,dy\,dz}{r} = \tfrac{1}{2}\sum \Phi\,(a+\varepsilon\xi\,,\, b+\varepsilon'\eta\,,\, c+\varepsilon''\zeta).$$

Hierin ist, wenn

$$a+\varepsilon\xi = \alpha \quad , \quad b+\varepsilon'\eta = \beta \quad , \quad c+\varepsilon''\zeta = \gamma,$$

$$\begin{aligned}\Phi\,(\alpha\,,\beta\,,\gamma) = \beta\gamma \log \frac{\rho+\alpha}{\rho-\alpha} - \alpha^2 \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\\ + \gamma\alpha \log \frac{\rho+\beta}{\rho-\beta} - \beta^2 \operatorname{arctg} \frac{\gamma\alpha}{\beta\rho}\\ + \alpha\beta \log \frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma} - \gamma^2 \operatorname{arctg} \frac{\alpha\beta}{\gamma\rho}\end{aligned}$$

$$\rho^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2;$$

den Grössen ε, ε', ε'' in (4.) sind die Werthe $+1$ und -1 beizulegen, und die Summe bezieht sich auf die Addition der so enthaltenen acht Φ. Endlich ist noch zu bemerken, dass die arctg immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen sind.

Der Ausdruck Φ hat unter anderen die Eigenschaften, dass:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = X(\alpha\,,\beta\,,\gamma) \quad , \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\beta} = X(\beta\,,\alpha\,,\gamma),$$

wo

$$(5.)\quad X(\alpha\,,\beta\,,\gamma) = \beta \log \frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma} + \gamma \log \frac{\rho+\beta}{\rho-\beta} - 2\alpha \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}.$$

Der Beweis aller dieser Behauptungen ist a. a. O. gegeben, übrigens kann man auch (4.) durch Differentiation nach a, b, c verificiren.

Zur Auffindung des Werthes von (3.) differentiire man nun (4.) nach a, und setze dann a gleich Null, so erhält man:

$$(6.)\quad \int_{-b}^{+b}\int_{-c}^{+c} \frac{dy\,dz}{r} = \tfrac{1}{4}\sum X\,(\varepsilon\xi\,,\, b+\varepsilon'\eta\,,\, c+\varepsilon''\zeta),$$

wo jetzt:

$$r^2 = \xi^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2$$

gesetzt ist.

Man sieht aus (5.) dass X ungeändert bleibt, wenn $-\alpha$ für α geschrieben wird. Desshalb lässt sich die Summation nach ε ausführen, und man erhält als Werth des Integrals in (6.) den folgenden Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2}\sum X(\xi\,,\,b+\varepsilon'\eta\,,\,c+\varepsilon\zeta),$$

in welchem ε für ε'' geschrieben ist, und die Summe sich nur noch auf die Zeichen ε' und ε bezieht. Das Integral (6.) ist aber dasselbe wie Integral (3.), wenn nur in (6.) λ für ξ, μ für b, ν für c geschrieben wird. Es hat daher (3.) den Werth

$$\tfrac{1}{2}\sum X(\lambda\,,\,\mu+\varepsilon'\eta\,,\,\nu+\varepsilon\zeta),$$

und zugleich ist dies der Ausdruck für das Potential eines Rechtecks.

Es werden später verschiedene Eigenschaften des Ausdrucks $X(\alpha,\beta,\gamma)$, der durch (5.) gegeben ist, angewendet werden. Ich will dieselben hier gleich kurz aufführen. Zunächst wechselt X mit β und γ sein Zeichen. Dann ist:

$$\frac{\partial X}{\partial \alpha} = -2 \operatorname{arctg} \frac{\beta\gamma}{\alpha\rho}\,, \qquad \frac{\partial X}{\partial \beta} = \log \frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}\,, \qquad \frac{\partial X}{\partial \gamma} = \log \frac{\rho+\beta}{\rho-\beta}\,.$$

Alle diese Eigenschaften folgen aus (5.), sind aber a. a. O. noch genauer entwickelt, und man kann mit Hülfe derselben beweisen, dass der oben gegebene Werth des Potentials eines Rechtecks sämmtliche von G a u s s in den allgemeinen Lehrsätzen in Beziehung auf etc. bewiesene Eigenschaften der Flächenpotentiale besitzt.

Es lässt sich nun das Potential des Cylinders sehr einfach auf Quadraturen bringen. Denn bezeichnen wir zunächst der Kürze wegen dieses Potential fortan mit P, und führen dann, um die Integrationen nach y und z in (2.) auszuführen, in den gefundenen Werth von (3.) die oben angegebenen Werthe für λ, μ, ν ein, so erhält man für das Potential des Cylinders den folgenden Ausdruck:

$$(7.) \qquad 2P = \sum \int_{-a}^{+a} X\left(x-\xi\,,\,b\sqrt{1-\tfrac{x^2}{a^2}}+\varepsilon'\eta\,,\,c+\varepsilon\zeta\right)dx,$$

und auf dieselbe Weise erhält man aus (2^a.)

$$(7^a.) \qquad 2P = \sum \int_{-b}^{+b} X\left(y-\eta,\,a\sqrt{1-\tfrac{y^2}{b^2}}+\varepsilon'\xi\,,\,c+\varepsilon\zeta\right)dy.$$

Die Summen in diesen Gleichungen haben dieselbe Bedeutung wie oben, d. h. man soll den Grössen ε und ε' die Werthe $+1$ und -1 beilegen, und die so erhaltenen vier Integrale addiren.

Der Herleitung der Gleichungen (7.) und (7^a.) kann man noch eine ziemlich einfache geometrische Bedeutung beilegen. Denn denkt man sich den Cylinder parallel der yz-Ebene durch Ebenen geschnitten, deren Abstand von einander dx betragen möge, so wird der Cylinder in prismatische Elemente zerlegt, von denen eines, in der Entfernung x vom Mittelpunkte, die Seiten y, $2c$ und dx hat. Das Potential dieses Elementes in Beziehung auf den Punkt (ξ,η,ζ) ist das Potential des Rechtecks mit den Seiten $2c$ und y in Beziehung auf den Punkt $(x-\xi,\eta,\zeta)$ multiplicirt mit dx, also nach dem oben für (3.) entwickelten Werthe eines solchen Potentials dargestellt durch den Ausdruck:

$$\tfrac{1}{2}\sum X(x-\xi\,,\,y+\varepsilon'\eta\,,\,c+\varepsilon\zeta)\,dx.$$

Integrirt man nun dies nach x von $-a$ bis $+a$, so hat man über sämmtliche Elemente des Cylinders summirt, und erhält so die Gleichung (7.), nachdem noch für y sein Werth $b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ gesetzt ist. Zerlegt man dagegen den Cylinder parallel der xz-Ebene, so erhält man auf dieselbe Weise die Gleichung (7ª.).

§ 2.

Transformation durch trigonometrische Substitutionen.

Wir setzen nun in (7.):

$$x = a\cos\varphi$$

und in (7ª.):

$$y = b\sin\varphi.$$

Hierdurch geht (7.) über in:

$$(8.)\qquad 2P = a\sum\int_0^\pi \sin\varphi\, X(a\cos\varphi-\xi,\, b\sin\varphi+\varepsilon'\eta,\, c+\varepsilon\zeta)\, d\varphi,$$

und (7ª.) in:

$$(8^a.)\qquad 2P = b\sum\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi\, X(b\sin\varphi-\eta\,.\, a\cos\varphi+\varepsilon'\xi,\, c+\varepsilon\zeta)\, d\varphi.$$

Um auf den rechten Seiten dieser Gleichungen die Summen nach ε' auszuführen, bezeichne ich zunächst der Kürze wegen die X nur mit Hinzusetzung desjenigen Argumentes, welches ε' enthält, also das X in (8.) mit $X(b\sin\varphi+\varepsilon'\eta)$ und das in (8ª.) mit $X(a\cos\varphi+\varepsilon'\xi)$. Es ist dann klar, dass für die rechte Seite von (8.) geschrieben werden darf

$$a\sum\int_0^\pi \sin\varphi\, X(b\sin\varphi+\eta)\, d\varphi + a\sum\int_0^\pi \sin\varphi\, X(b\sin\varphi-\eta)\, d\varphi,$$

worin sich aber die Summen nur noch auf ε beziehen. Setzt man jetzt in dem ersten dieser beiden Theile $2\pi-\varphi$ für φ, so geht, da $\cos\varphi$ ungeändert bleibt, $\sin\varphi$ in $-\sin\varphi$ übergeht, und X mit dem zweiten Argumente sein Zeichen ändert, dieser erste Theil über in:

$$a\sum\int_\pi^{2\pi} \sin\varphi\, X(b\sin\varphi-\eta)\, d\varphi,$$

und giebt, zu dem zweiten addirt, den folgenden Ausdruck für $2P$:

$$(9.)\qquad 2P = a\sum\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, X(a\cos\varphi-\xi,\, b\sin\varphi-\eta,\, c+\varepsilon\zeta)\, d\varphi.$$

Ebenso darf nach den obigen Festsetzungen für die rechte Seite von (8ª.) geschrieben werden

$$b\sum\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi\, X(a\cos\varphi+\xi)\, d\varphi + b\sum\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{+\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi\, X(a\cos\varphi-\xi)\, d\varphi,$$

und setzt man hier in dem ersten Theile $\pi-\varphi$ für φ, so geht derselbe über in

$$b\sum\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\cos\varphi\; X(a\cos\varphi-\xi)\,d\varphi$$

und giebt, zu dem zweiten addirt den folgenden Werth:

$$b\sum\int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{2}\pi}\cos\varphi\; X(a\cos\varphi-\xi)\,d\varphi.$$

Natürlich bezieht sich auch hierin die Summe nur noch auf ε. Zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ bis $\frac{3}{2}\pi$ durchlaufen aber $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ dieselben Werthe, wie zwischen 0 und 2π, und man darf daher für die Grenzen des obigen Integrals die Grenzen 0 und 2π setzen. Es folgt daher für $2P$ auch der nachstehende Werth:

$$(9^a.)\qquad 2P=b\sum\int_0^{2\pi}\cos\varphi\; X(b\sin\varphi-\eta\,,\,a\cos\varphi-\xi\,,\,c+\varepsilon\zeta)\,d\varphi.$$

Die Summen nach ε sind hierdurch ausgeführt, und die in (9.) und (9^a.) noch bleibenden Summen bedeuten, dass man der Grösse ε die Werthe $+1$ und -1 beilegen, und die so erhaltenen beiden Integrale addiren soll.

Die durch die Gleichungen (9.) und (9^a.) gegebenen Formen für das Potential eines Cylinders werden im Folgenden zu Grunde gelegt werden.

Zunächst lässt sich nun die Identität der beiden auf den rechten Seiten von (9.) und (9^a.) befindlichen Ausdrücke für das Potential eines Cylinders leicht direct nachweisen. Setzt man nämlich in dem oben gegebenen Ausdrucke für $\Phi(\alpha,\beta,\gamma)$ $a\cos\varphi-\xi$ für α, $b\sin\varphi-\eta$ für β, $c+\varepsilon\zeta$ für γ, so dass $\Phi(\alpha,\beta,\gamma)$ in $\Phi(a\cos\varphi-\xi\,,\,b\sin\varphi-\eta\,,\,c+\varepsilon\zeta)$ übergeht, welches jetzt kurz mit Φ bezeichnet werden möge, so ist nach den oben gegebenen Eigenschaften von $\Phi(\alpha,\beta,\gamma)$:

$$\frac{d\Phi}{d\varphi}=-a\sin\varphi\, X(a\cos\varphi-\xi\,,\,b\sin\varphi-\eta, c+\varepsilon\zeta)+b\cos\varphi\, X(b\sin\varphi-\eta\,,\,a\cos\varphi-\xi\,,\,c+\varepsilon\zeta).$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $d\varphi$ und integrirt nach φ von 0 bis 2π, so verschwindet offenbar die linke Seite, auf welcher sich die Integration sofort ausführen lässt. Die rechte Seite geht über in die Differenz der beiden auf den rechten Seiten von (9.) und (9^a.) stehenden Ausdrücke, wenn man die dort stehenden Summenzeichen weglässt. Die Identität dieser Ausdrücke ist damit bewiesen. Daher sind auch die Summen nach ε identisch, und also auch die beiden für das Potential eines Cylinders gegebenen Ausdrücke.

Der Werth des Potentials muss offenbar unabhängig sein von der willkürlich gewählten Richtung der positiven Coordinaten, d. h. er muss ungeändert bleiben, wenn man ξ mit $-\xi$, oder η mit $-\eta$, oder ζ mit $-\zeta$ vertauscht; mit anderen Worten das Potential muss den Charakter einer Function besitzen, die nur von ξ^2, η^2, ζ^2 abhängt. Dass das Potential in Bezug auf ζ dieser Anforderung genügt, zeigen die Gleichungen (9.) und (9^a.) sofort, da durch eine Vertauschung von ζ mit $-\zeta$ die Bedeutung von $\varepsilon\zeta$ nicht geändert wird. Auch in Bezug auf die Vertauschung von ξ mit $-\xi$ oder η mit $-\eta$ ist dasselbe erfüllt, jedoch lässt sich dies an den Gleichungen (9.) und (9^a.) nur mit Hülfe einer der beiden Substitutionen $2\pi-\varphi$ für φ, oder $\pi-\varphi$ für φ nachweisen.

Aber man kann aus den Gleichungen (7.) und (7ᵃ.) Formen des Potentials herleiten, aus denen die in Rede stehende Eigenschaft in Bezug auf ξ und η ebenso unmittelbar einleuchtet, wie dies in Bezug auf ζ in (9.) und (9ᵃ.) geschieht. Zu diesem Zwecke zerlege man das Integral in (7.) in zwei, deren eines die Grenzen $-a$ bis 0, deren zweites die Grenzen 0 bis a hat. Setzt man nun in dem ersten dieser Theilintegrale $-x$ für x, so erhält dasselbe, da X mit dem ersten Argumente sein Zeichen nicht ändert, ganz dieselbe Form wie das zweite, nur dass im ersten Integrale $+\xi$ an der Stelle des $-\xi$ im zweiten Integrale steht. Hieraus erhellt, dass man schreiben darf:

$$2P = \sum \int_0^a X\left(x+\varepsilon''\xi,\, b\sqrt{1-\tfrac{x^2}{a^2}}+\varepsilon'\eta,\, c+\varepsilon\zeta\right) dx,$$

wo man der Grösse ε'' wieder die Werthe $+1$ und -1 beilegen soll, und die Summe sich auf die drei Grössen ε, ε', ε'' bezieht. Setzt man hierin wieder

$$x = a\cos\varphi,$$

so erhält man:

$$2P = a\sum \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin\varphi\, X(a\cos\varphi+\varepsilon''\xi,\, b\sin\varphi+\varepsilon'\eta,\, c+\varepsilon\zeta)\, d\varphi,$$

und diese Form zeigt auf dieselbe Weise wie (9.) und (9ᵃ.) in Bezug auf die Vertauschung von $-\zeta$ mit ζ, dass der Werth des Potentials durch irgend eine der Vertauschungen $-\xi$ mit ξ, $-\eta$ mit η, $-\zeta$ mit ζ nicht geändert wird.

In ähnlicher Weise erhält man aus (7ᵃ.) die folgende Form des Potentials:

$$2P = b\sum \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos\varphi\, X(b\sin\varphi+\varepsilon''\eta,\, a\cos\varphi+\varepsilon'\xi,\, c+\varepsilon\zeta)\, d\varphi,$$

die dasselbe leistet.

§ 3.

Die Componenten der Anziehung.

Vermittelst der oben gegebenen Ableitungen des Ausdrucks X nach den drei Argumenten desselben erhält man nun für die Componenten der Anziehung nach den drei Coordinatenaxen die folgenden Darstellungen:

Zunächst aus der Form (9.):

$$(10.)\quad 2\frac{\partial P}{\partial \xi} = 2a\sum \int_0^{2\pi} \sin\varphi\,.\,\operatorname{arctg}\frac{(b\sin\varphi-\eta)\,(c+\varepsilon\zeta)}{(a\cos\varphi-\xi)\quad\rho}\, d\varphi,$$

$$(11.)\quad 2\frac{\partial P}{\partial \eta} = -a\sum \int_0^{2\pi} \sin\varphi\,.\,\log\frac{\rho+(c+\varepsilon\zeta)}{\rho-(c+\varepsilon\zeta)}\, d\varphi,$$

$$(12.)\quad 2\frac{\partial P}{\partial \zeta} = a\sum \varepsilon \int_0^{2\pi} \sin\varphi\,.\,\log\frac{\rho+(b\sin\varphi-\eta)}{\rho-(b\sin\varphi-\eta)}\, d\varphi,$$

und aus der Form (9ª.)

$$(10^a.)\quad 2\,\frac{\partial P}{\partial \xi} = -\,b\sum\int_0^{2\pi} \cos\varphi\,.\,\log\frac{\rho+(c+\varepsilon\zeta)}{\rho-(c+\varepsilon\zeta)}\,d\varphi,$$

$$(11^a.)\quad 2\,\frac{\partial P}{\partial \eta} = \;2b\sum\int_0^{2\pi} \cos\varphi\,.\,\mathrm{arctg}\,\frac{(a\cos\varphi-\xi)\,(c+\varepsilon\zeta)}{(b\sin\varphi-\eta)\quad\rho}\,d\varphi,$$

$$(12^a.)\quad 2\,\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \;\;b\sum\varepsilon\int_0^{2\pi} \cos\varphi\,.\,\log\frac{\rho+(a\cos\varphi-\xi)}{\rho-(a\cos\varphi-\xi)}\,d\varphi.$$

In allen diesen Formeln ist jetzt:

$$\rho^2 = (a\cos\varphi-\xi)^2 + (b\sin\varphi-\eta)^2 + (c+\varepsilon\zeta)^2,$$

und $\frac{\partial P}{\partial \xi}$ bedeutet die Componente nach der x-Axe, $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ die nach der y-Axe, $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ die nach der z-Axe.

Die Identität der beiden für jede der Attractionscomponenten gegebenen Formen lässt sich in ähnlicher Weise zeigen, wie dies oben für die beiden Formen des Potentials selbst geschehen ist. Um die Identität von (10.) und (10ª.) zu zeigen, gehe man aus von $X(a\cos\varphi-\xi, b\sin\varphi-\eta, c+\varepsilon\zeta)$, ebenso gehe man von $X(b\sin\varphi-\eta, a\cos\varphi-\xi, c+\varepsilon\zeta)$ aus, um die Identität von (11.) und (11ª.) zu beweisen, und verfahre im Uebrigen wie vorher. Die Identität von (12.) und (12ª.) muss in anderer Weise bewiesen werden. Es bleibt nämlich die Componente nach der z-Axe offenbar ungeändert, wenn a mit b und ξ mit η vertauscht werden. Thut man dies in (12.) und setzt dann noch $\frac{1}{2}\pi-\varphi$ für φ, so geht (12.) in (12ª.) über, da ρ ungeändert bleibt, und für die Integration von $-\frac{3}{2}\pi$ bis $\frac{1}{2}\pi$ die von 0 bis 2π gesetzt werden darf.

Will man ohne Rücksicht auf das Potential nur die Componenten der Anziehung entwickeln, so kann man die oben gegebenen Ausdrücke für dieselben mit Ausnahme der Gleichungen (10.) und (11ª.) in sehr einfacher Weise erhalten.

Wir gehen zu diesem Zwecke zu den ursprünglichen Formen des Potentials (2.) und (2ª.) zurück, und führen in denselben die Integrationen nach z aus. Man erhält so in bekannter Weise die folgenden beiden Ausdrücke für das Potential:

$$(13.)\qquad 2P = \sum\int_{-a}^{+a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \log\frac{r+(c+\varepsilon\zeta)}{r-(c+\varepsilon\zeta)}\,dy.$$

aus (2.) und

$$(13^a.)\qquad 2P = \sum\int_{-b}^{+b} dy \int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{+a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \log\frac{r+(c+\varepsilon\zeta)}{r-(c+\varepsilon\zeta)}\,dx.$$

aus (2ª.). In diesen Formen ist

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (c+\varepsilon\zeta)^2$$

gesetzt worden, und die Summe bezieht sich hier wie oben auf das Zeichen ε.

Um nun $\frac{\partial P}{\partial \xi}$ oder $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ zu erhalten, muss man den Logarithmus unter dem Integralzeichen nach ξ oder η ableiten. Diese Ableitungen sind aber identisch mit den negativen Ableitungen nach x oder y, da ξ und η nur in der Verbindung $x-\xi$ und $y-\eta$ vorkommen, man darf daher vermittelst (13^a.) schreiben:

$$2\frac{\partial P}{\partial \xi} = -\Sigma \int_{-b}^{+b} dy \int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{+a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \frac{\partial}{\partial x}\left(\log \frac{r+(c+\varepsilon\zeta)}{r-(c+\varepsilon\zeta)}\right) dx,$$

und nach (13.)

$$2\frac{\partial P}{\partial \eta} = -\Sigma \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{\partial}{\partial y}\left(\log \frac{r+(c+\varepsilon\zeta)}{r-(c+\varepsilon\zeta)}\right) dy,$$

und in diesen Formeln kann je eine Integration nach x oder y sofort ausgeführt werden. Thut man dies, so folgt:

$$2\frac{\partial P}{\partial \xi} = \Sigma \varepsilon' \int_{-b}^{+b} \log \frac{r+(c+\varepsilon\zeta)}{r-(c+\varepsilon\zeta)}\, dy,$$

wo jetzt:

$$r^2 = \left(a\sqrt{1-\tfrac{y^2}{b^2}} + \varepsilon'\xi\right)^2 + (y-\eta)^2 + (c+\varepsilon\zeta)^2$$

gesetzt ist. Und ferner folgt:

$$2\frac{\partial P}{\partial \eta} = \Sigma \varepsilon' \int_{-a}^{+a} \log \frac{r+(c+\varepsilon\zeta)}{r-(c+\varepsilon\zeta)}\, dx,$$

wo

$$r^2 = (x-\xi)^2 + \left(b\sqrt{1-\tfrac{x^2}{a^2}} + \varepsilon'\eta\right)^2 + (c+\varepsilon\zeta)^2.$$

Die Summen in diesen beiden Gleichungen für $\frac{\partial P}{\partial \xi}$ und $\frac{\partial P}{\partial \eta}$ beziehen sich jetzt auf die Zeichen ε' und ε. Setzt man nun in der ersten dieser Gleichungen $b\sin\varphi$ für y, und in der zweiten $a\cos\varphi$ für x, und führt dann die Summationen nach ε' auf dieselbe Weise aus, wie dies oben geschehen, so erhält man die Gleichungen (10^a.) und (11.).

Ebenso kann man auch die Componente nach der z-Axe, und zwar diese auch auf doppelte Weise, wie die Gleichungen (12.) und (12^a.) zeigen, herleiten. Man gehe zu diesem Zwecke wieder zu den ursprünglichen Formen des Potentials (2.) und (2^a.) zurück.

Um $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ zu bilden, hat man in diesen Formen $\frac{1}{r}$ nach ζ abzuleiten. Da aber diese Grösse wieder nur in der Verbindung $z-\zeta$ vorkommt, so ist die Ableitung nach ζ identisch mit dem negativen Werthe der Ableitung nach z, und man darf daher schreiben:

nach (2.)

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = -\int_{-a}^{+a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} dy \int_{-c}^{+c} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dz \cdot$$

nach (2^a.)

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = -\int_{-b}^{+b} dy \int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{+a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} dx \int_{-c}^{+c} \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right) dz,$$

und das r in diesen Formeln hat die Bedeutung:

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2.$$

Die Integration nach z lässt sich sofort ausführen, und man erhält dadurch:

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \sum \varepsilon \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{+b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \frac{dy}{r},$$

und

$$\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \sum \varepsilon \int_{-b}^{+b} dy \int_{-a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}}^{+a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}} \frac{dx}{r},$$

wo jetzt

$$r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (c+\varepsilon\zeta)^2.$$

In diesen beiden Gleichungen führe man nun wieder je eine Integration nach y oder x aus, und dadurch folgt denn:

$$2\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \sum \varepsilon \int_{-a}^{+a} \log \frac{r + \left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \varepsilon'\eta\right)}{r - \left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \varepsilon'\eta\right)} dx,$$

wo

$$r^2 = (x-\xi)^2 + \left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + \varepsilon'\eta\right)^2 + (c+\varepsilon\zeta)^2$$

gesetzt ist, und:

$$2\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \sum \varepsilon \int_{-b}^{+b} \log \frac{r + \left(a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} + \varepsilon'\xi\right)}{r - \left(a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} + \varepsilon'\xi\right)} dy,$$

wo

$$r^2 = \left(a\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}} + \varepsilon'\xi\right)^2 + (y-\eta)^2 + (c-\varepsilon\zeta)^2.$$

Die Summen in diesen beiden letzten Ausdrücken für $\frac{\partial P}{\partial \zeta}$ beziehen sich wie immer auf die Zeichen ε' und ε. Durch die bekannten trigonometrischen Substitutionen kann man nun wieder die Summationen nach ε' ausführen, und so die Gleichungen (12.) und (12ª.) erhalten.

Die soeben auseinandergesetzte Behandlung der Attractionscomponenten nach der x und y-Axe ist jedoch unstatthaft, wenn innerhalb der Grenzen der Integration $x=\xi$ und $y=\eta$ werden kann. Dies findet nicht nur statt, wenn (ξ, η, ζ) ein innerer Punkt ist, sondern auch dann, wenn er ausserhalb des Cylinders, in dem Raume liegt, welcher von dem verlängerten Mantel eingeschlossen wird. In diesem Falle wird nämlich der Logarithmus in (13.) und (13ª.) für $x=\xi$ und $y=\eta$ unendlich, und es ist daher sowohl die Vertauschung der Differentiation nach ξ mit der nach x, als auch die Differentiation nach ξ überhaupt, nicht ohne Weiteres erlaubt. Aehnliches gilt, aber nur wenn (ξ, η, ζ) ein innerer Punkt ist, auch für die Herleitung der Componente nach der z-Axe.

Trotzdem gelten die Gleichungen (10.) bis (12ª.) *für alle Lagen des angezogenen Punktes.* Denn aus den für alle Lagen des Punktes (ξ, η, ζ) gültigen Formen (2.) und (2ª.) sind durch immer statthafte Operationen die Formen (9.) und (9ª.) hergeleitet, und folglich gelten auch diese *für alle Lagen des Punktes* (ξ, η, ζ). Nun ist der Ausdruck X eine *stetige* Function seiner Argumente, welche für *alle* Werthe desselben *endlich* bleibt. Man erkennt diese Eigenschaften des X aus der Gleichung (5.). Zunächst zeigt dieselbe, dass X eine stetige Function seiner Argumente ist. Nur an der Stelle $\alpha=0$ könnte nämlich diese Stetigkeit unterbrochen werden, weil der arctg, der seiner Definition nach immer zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ zu nehmen ist, beim Durchgange des α durch 0, von $-\frac{1}{2}\pi$ zu $+\frac{1}{2}\pi$ springt. Aber diese Unstetigkeit wird aufgehoben wegen des an eben dieser Stelle verschwindenden Factors α vor dem arctg. Ferner ist X auch überall endlich. Für $\alpha=0$ ist dies aus dem Vorhergehenden klar, und für $\beta=0$ und $\gamma=0$ verschwindet X. Die Entscheidung darüber, ob X endlich bleibt, wenn α, β, γ unendlich werden, ist für die vorliegenden Zwecke überflüssig.

Ist nun (ξ, η, ζ) ein innerer Punkt, oder liegt er in dem Raume, welcher von dem verlängerten Mantel des Cylinders eingeschlossen wird, so verschwinden zwar in den Gleichungen (9.) und (9ª.) innerhalb der Grenzen der Integration die Ausdrücke $a\cos\varphi-\xi$ und $b\sin\varphi-\eta$, aber es ist auch aus den vorhergehenden Betrachtungen klar, dass dennoch weder die Stetigkeit des Ausdrucks X unterbrochen wird, noch der Ausdruck selbst einen unendlichen Werth erhält; woraus denn folgt, dass die Differentiation nach ξ, η, ζ in den Gleichungen (9.) und (9ª.) immer erlaubt ist, also die Gleichungen (10.) bis (12ª.) die Componenten der Anziehung für alle Lagen von (ξ, η, ζ) wirklich ausdrücken.

§ 4.

Sätze über das Potential eines Cylinders.

Vermittelst der Gleichungen (9.) und (9ª.) ist das Potential eines Cylinders dargestellt durch eine Summe zweier Glieder, die in jeder der beiden Gleichungen dieselbe Form haben, und setzt man

$$(14.)\qquad \Psi = a\int_0^{2\pi} \sin\varphi\, X(a\cos\varphi-\xi,\, b\sin\varphi-\eta,\, \gamma)\, d\varphi,$$

so ist dies die allgemeine Form der Glieder in (9.), und setzt man

$$(14^a.) \qquad \Psi = b\int_0^{2\pi} \cos\varphi\, X(b\sin\varphi - \eta, a\cos\varphi - \xi, \gamma)\, d\varphi,$$

so ist dies die allgemeine Form der Glieder in (9ª.). Die beiden Ψ sind zunächst identisch, wie man aus dem Beweise für die Identität der beiden Formen des Potentials (9.) und (9ª.) ohne Weiteres einsieht. Ferner erhält man nach (9.) und (9ª.) aus Ψ den Werth des Potentials eines Cylinders, indem man zunächst in Ψ $c+\zeta$ für γ schreibt, dann $c-\zeta$ für γ, und die so erhaltenen beiden Ψ addirt. Es kommt daher nur noch darauf an, die Function Ψ weiter zu untersuchen.

Zunächst hat Ψ eine bestimmte mechanische Bedeutung. Denkt man sich nämlich γ positiv, und setzt nun in (9.) und (9ª.) $\zeta = 0$ und $c = \gamma$, so werden die beiden Glieder auf den rechten Seiten von (9.) und (9ª.) identisch. Die Division mit 2 in (9.) und (9ª.) lässt sich daher ausführen, und es gehen die rechten Seiten von (9.) und (9ª.) bezüglich über in die rechten Seiten von (14.) und (14ª.). Daher sind auch ihre linken Seiten identisch, und es folgt, dass, wenn γ positiv gedacht wird, *die Function Ψ das Potential eines Cylinders* von der Grundfläche (1.) und der Höhe 2γ bedeutet, in Beziehung auf einen Punkt (ξ, η), welcher in einer *durch den Mittelpunkt des Cylinders parallel mit den Grundflächen gehenden Ebene liegt.* Ist dagegen γ negativ, so wechselt bekanntlich X mit dem dritten Argumente sein Zeichen, also auch Ψ, und daraus folgt, dass in diesem Falle Ψ gleich *dem negativen Werthe eines solchen Potentials* ist.

Hiernach zeigen die Gleichungen (9.) und (9ª.), dass, *jenachdem die Bedingung $\zeta < c$ erfüllt ist, oder nicht,* jenachdem also der angezogene Punkt innerhalb des von den erweiterten Grundflächen des Cylinders begränzten unendlichen Raumes liegt oder ausserhalb desselben, das Potential des Cylinders *aus einer Summe oder Differenz* zweier solcher Potentiale Ψ besteht.

Bedeutet ferner $f(\varphi)$ eine Function von φ, die für alle zwischen 0 und 2π befindlichen Werthe des φ in Reihen entwickelt werden kann, welche nach den sin. oder cos. der Vielfachen von φ fortschreiten, d. h. bestehen für alle Werthe von φ zwischen 0 und 2π die Gleichungen:

$$f(\varphi) = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty} A_\varkappa \sin\varkappa\varphi \quad , \quad f(\varphi) = \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=\infty} B_\varkappa \cos\varkappa\varphi,$$

so ist bekanntlich:

$$A_\varkappa = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\sin\varkappa\varphi\, d\varphi \quad , \quad B_\varkappa = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\cos\varkappa\varphi\, d\varphi,$$

und B_0 die Hälfte des aus der Gleichung für $B_\varkappa$ für $\varkappa = 0$ folgenden Werthes.

Schreibt man nun in dem Ausdrucke für $A_\varkappa$ $aX(a\cos\varphi - \xi, b\sin\varphi - \eta, \gamma)$ für $f(\varphi)$, und in dem Ausdrucke für $B_\varkappa$ $bX(b\sin\varphi - \eta, a\cos\varphi - \xi, \gamma)$ für $f(\varphi)$, setzt dann in beiden Ausdrücken $\varkappa = 1$, und vergleicht die so entstehenden Gleichungen mit den Gleichungen (14.) und (14ª.), so gelangt man sofort zu folgendem Satze:

Denkt man sich die Functionen $aX(a\cos\varphi - \xi, b\sin\varphi - \eta, \gamma)$ und $bX(b\sin\varphi - \eta, a\cos\varphi - \xi, \gamma)$ in Reihen entwickelt, welche bezüglich nach den sin. oder cos. der Vielfachen von φ fortschreiten, *so giebt der Coefficient von $\sin\varphi$ in der Entwicklung von $aX(a\cos\varphi - \xi, b\sin\varphi - \eta, \gamma)$ nach den sin. der Vielfachen von φ, und der Coefficient von $\cos\varphi$ in der Entwicklung von $bX(b\sin\varphi - \eta, a\cos\varphi - \xi, \gamma)$ nach den cos. des Vielfachen von φ jeder den Werth $\pi.\Psi$.*

Die Function Ψ ist demnach als Coefficient gewisser trigonometrischen Reihen dargestellt, und daher das Potential eines Cylinders durch eine Summe oder Differenz zweier solchen Coefficienten.

Derselbe Satz, welcher soeben für Ψ entwickelt wurde, gilt auch für die Ableitungen von Ψ nach ξ, η und γ. Nur ist in diesen Fällen die zu entwickelnde Function einfacher, nämlich anstatt des X ist hier ein *log.* oder ein *arctg.* nach den Vielfachen von $\sin\varphi$ oder $\cos\varphi$ zu entwickeln. Die Attractionscomponenten eines Cylinders werden daher ebenfalls durch eine Summe oder Differenz zweier solchen Coefficienten dargestellt.

Die Gleichungen (14.) und (14[a].) zeigen ferner noch, dass Ψ *eine homogene Function zweiten Grades* von a, b, γ, ξ, η ist. Denn X ist, wie aus (5.) erhellt, homogen ersten Grades, und folglich Ψ, wegen der in (14.) und (14[a].) vor den Integralzeichen stehenden Factoren a oder b homogen zweiten Grades. Es ist daher auch *das Potential eines Cylinders eine homogene Function zweiten Grades der sechs Grössen $a, b, c, \xi, \eta, \zeta$, während die Attractionscomponenten in Bezug auf dieselben Grössen homogen ersten Grades sind.* Dies letztere erhellt aus den Gleichungen (10.) bis (12[a].), wobei man noch bemerken möge, dass die Integrale in diesen Gleichungen immer homogen 0[ten] Grades sind.

Wegen dieser Eigenschaft genügt nun Ψ der partiellen Differentialgleichung:

$$2\Psi = a\frac{\partial\Psi}{\partial a} + b\frac{\partial\Psi}{\partial b} + \gamma\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma} + \xi\frac{\partial\Psi}{\partial\xi} + \eta\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}.$$

Während sich nun, wie in dem folgenden Paragraphen gezeigt werden wird, die Grössen $\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}$ mit Leichtigkeit auf elliptische Integrale bringen lassen, ist dies von den Grössen $\frac{\partial\Psi}{\partial a}$ und $\frac{\partial\Psi}{\partial b}$, oder von der Grösse $a\frac{\partial\Psi}{\partial a} + b\frac{\partial\Psi}{\partial b}$, die hier allein in Betracht kommt, nicht zu sagen.

Der Ausdruck $a\frac{\partial\Psi}{\partial a} + b\frac{\partial\Psi}{\partial b}$ wird bedeutend einfacher, wenn man zur Entwicklung desselben nicht eine der Gleichungen (14.) allein, sondern beide zugleich anwendet, wie dies im Folgenden geschehen soll.

Es folgt nämlich aus den bekannten Eigenschaften der Grösse X, wenn noch

$$\rho^2 = (a\cos\varphi - \xi)^2 + (b\sin\varphi - \eta)^2 + \gamma^2$$

gesetzt wird, aus (14[a].)

$$\frac{\partial\Psi}{\partial a} = b\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}\,d\varphi,$$

und aus (14.)

$$\frac{\partial\Psi}{\partial b} = a\int_0^{2\pi} \sin^2\varphi \log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}\,d\varphi.$$

Multiplicirt man die obere dieser Gleichungen mit a, die untere mit b und addirt, so erhält man:

$$(15.)\qquad a\frac{\partial\Psi}{\partial a} + b\frac{\partial\Psi}{\partial b} = ab\int_0^{2\pi} \log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}\,d\varphi.$$

Das Integral in dieser Gleichung lässt sich nun zwar, wie ich gleich zeigen werde, auf Integrale von elliptischen Integralen bringen, ob diese aber wieder auf einfache elliptische Integrale gebracht werden können oder nicht, habe ich bisher noch nicht entscheiden können.

Es ist nämlich bekanntlich

$$\log \frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma} = \int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{dz}{\rho},$$

wo jetzt unter dem Integralzeichen:

$$\rho^2 = (a\cos\varphi - \xi)^2 + (b\sin\varphi - \eta)^2 + z^2$$

gesetzt ist. Führt man dies in das Integral in (15.) ein, so geht dasselbe über in:

$$\int_0^{2\pi}\int_{-\gamma}^{+\gamma} \frac{d\varphi\, dz}{\rho},$$

und denkt man sich hier die Integration nach φ ausgeführt, so liefert dieselbe elliptische Integrale, die noch zwischen den Grenzen $-\gamma$ und $+\gamma$ integrirt werden sollen. Hiermit ist die obige Behauptung gerechtfertigt.

§ 5.

Zurückführung der Attractionscomponenten auf elliptische Integrale.

Bei der Zurückführung der Attractionscomponenten nach der x oder y-Axe auf elliptische Integrale werde ich nur die Formen (11.) und (10^a.) derselben betrachten. Obgleich nämlich die anderen Formen (10.) und (11^a.) ebenfalls durch eine theilweise Integration die Form elliptischer Integrale erhalten, so sind doch die so erhaltenen Integrale bedeutend complicirter, und erfordern wegen der arctg. Untersuchungen, die mich hier zu weit führen würden.

Ferner werde ich auch der Einfachheit wegen nur die Ableitungen von Ψ nach ξ, η und γ behandeln, weil man aus diesen die entsprechenden Attractionscomponenten dadurch erhält, dass man zuerst $c+\zeta$ für γ schreibt, dann $c-\zeta$ für γ, und die so erhaltenen beiden Ausdrücke addirt. Denn um dies noch deutlicher zu machen, so ist offenbar aus (9.) und (9^a.) ersichtlich, wenn man noch die Ψ mit verschiedenen Argumenten nur mit Hinzusetzung derjenigen Argumente bezeichnet, in denen sie sich wirklich unterscheiden, dass:

$$2P = \sum \Psi\,(c+\varepsilon\zeta),$$

und daraus folgt sofort:

$$2\,\frac{\partial P}{\partial \xi} = \sum \frac{\partial \Psi\,(c+\varepsilon\zeta)}{\partial \xi}\ ,\ 2\,\frac{\partial P}{\partial \eta} = \sum \frac{\partial \Psi\,(c+\varepsilon\zeta)}{\partial \eta}\ ,\ 2\,\frac{\partial P}{\partial \zeta} = \sum \frac{\partial \Psi\,(c+\varepsilon\zeta)}{\partial \zeta}.$$

Man erhält nun aus (14^a.)

$$(16.)\qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = -b\int_0^{2\pi} \cos\varphi \log \frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}\, d\varphi,$$

und aus (14.)

$$(17.)\qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = -a\int_0^{2\pi} \sin\varphi \log \frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}\, d\varphi,$$

ferner aus beiden Gleichungen die doppelte Darstellung für $\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}$:

$$(18.)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}=a\int_0^{2\pi}\sin\varphi\log\frac{\rho+(b\sin\varphi-\eta)}{\rho-(b\sin\varphi-\eta)}\,d\varphi,$$

$$(18^a.)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}=b\int_0^{2\pi}\cos\varphi\log\frac{\rho+(a\cos\varphi-\xi)}{\rho-(a\cos\varphi-\xi)}\,d\varphi.$$

In diesen vier Gleichungen ist wieder

$$\rho^2=(a\cos\varphi-\xi)^2+(b\sin\varphi-\eta)^2+\gamma^2$$

gesetzt worden.

Eine einfache theilweise Integration führt nun die durch diese Gleichungen gegebenen Grössen sofort auf *elliptische Integrale*.

Es folgt nämlich aus (16.) durch theilweise Integration:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}=b\int_0^{2\pi}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}\right)d\varphi,$$

auf dieselbe Weise aus (17.)

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}=-a\int_0^{2\pi}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}\right)d\varphi$$

und endlich aus (18.) und (18^a.):

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}=a\int_0^{2\pi}\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\frac{\rho+(b\sin\varphi-\eta)}{\rho-(b\sin\varphi-\eta)}\right)d\varphi,$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\gamma}=-b\int_0^{2\pi}\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\frac{\rho+(a\cos\varphi-\xi)}{\rho-(a\cos\varphi-\xi)}\right)d\varphi.$$

Es ist aber

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\frac{\rho+\gamma}{\rho-\gamma}\right)=-\frac{2\gamma}{\rho^2-\gamma^2}\cdot\frac{d\rho}{d\varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\frac{\rho+(b\sin\varphi-\eta)}{\rho-(b\sin\varphi-\eta)}\right)=\frac{2b\,\rho\cos\varphi}{\rho^2-(b\sin\varphi-\eta)^2}-\frac{2(b\sin\varphi-\eta)}{\rho^2-(b\sin\varphi-\eta)^2}\,\frac{d\rho}{d\varphi},$$

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\frac{\rho+(a\cos\varphi-\xi)}{\rho-(a\cos\varphi-\xi)}\right)=-\frac{2a\,\rho\sin\varphi}{\rho^2-(a\cos\varphi-\xi)^2}-\frac{2(a\cos\varphi-\xi)}{\rho^2-(a\cos\varphi-\xi)^2}\cdot\frac{d\rho}{d\varphi},$$

und da ferner:

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\frac{-(a\cos\varphi-\xi)\;a\sin\varphi+(b\sin\varphi-\eta)\;b\cos\varphi}{\rho},$$

so folgt nach Einführung aller dieser Werthe in die vorstehenden Gleichungen und unter Berücksichtigung des Werthes von ρ:

$$(19.)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial\xi}=2b\gamma\int_0^{2\pi}\frac{(a\cos\varphi-\xi)\;a\sin^2\varphi-(b\sin\varphi-\eta)\;b\sin\varphi\cos\varphi}{(a\cos\varphi-\xi)^2+(b\sin\varphi-\eta)^2}\cdot\frac{d\varphi}{\rho}$$

$$(20.)\quad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = 2a\gamma \int_0^{2\pi} \frac{(b\sin\varphi - \eta)\; b\cos^2\varphi - (a\cos\varphi - \xi)\; a\sin\varphi\,\cos\varphi}{(a\cos\varphi - \xi)^2 + (b\sin\varphi - \eta)^2} \cdot \frac{d\varphi}{\rho}$$

$$(21.)\quad \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} = 2ab \int_0^{2\pi} \frac{\rho\cos^2\varphi\, d\varphi}{(a\cos\varphi - \xi)^2 + \gamma^2} + 2a \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos\varphi - \xi)\;(b\sin\varphi - \eta)\; a\sin\varphi\,\cos\varphi - (b\sin\varphi - \eta)^2\; b\cos^2\varphi}{(a\cos\varphi - \xi)^2 + \gamma^2} \cdot \frac{d\varphi}{\rho}$$

$$(21^a.)\quad \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} = 2ab \int_0^{2\pi} \frac{\rho\sin^2\varphi\, d\varphi}{(b\sin\varphi - \eta)^2 + \gamma^2} + 2b \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos\varphi - \xi)\;(b\sin\varphi - \eta)\; b\sin\varphi\,\cos\varphi - (a\cos\varphi - \xi)^2\; a\sin^2\varphi}{(b\sin\varphi - \eta)^2 + \gamma^2} \cdot \frac{d\varphi}{\rho}.$$

Den beiden letzten Gleichungen kann man noch eine etwas einfachere Gestalt geben. Die zweiten Integrale auf den rechten Seiten bestehen nämlich aus zwei Theilen, und zieht man nun diese zweiten Theile der zweiten Integrale mit den ersten Integralen zusammen, nachdem diese letzteren unter dem Integralzeichen oben und unten mit ρ multiplicirt worden, so hebt sich der Nenner, und man erhält:

$$(22.)\quad \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} = 2ab \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\rho} + 2a^2 \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos\varphi - \xi)\,(b\sin\varphi - \eta)\,\sin\varphi\,\cos\varphi}{(a\cos\varphi - \xi)^2 + \gamma^2} \cdot \frac{d\varphi}{\rho}$$

$$(22^a.)\quad \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} = 2ab \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\rho} + 2b^2 \int_0^{2\pi} \frac{(a\cos\varphi - \xi)\,(b\sin\varphi - \eta)\,\sin\varphi\,\cos\varphi}{(b\sin\varphi - \eta)^2 + \gamma^2} \cdot \frac{d\varphi}{\rho}.$$

Erinnert man sich ferner, dass

$$\rho^2 = (a\cos\varphi - \xi)^2 + (b\sin\varphi - \eta)^2 + \gamma^2$$

gesetzt worden, so erhellt, dass die rechten Seiten der Gleichungen (19.) bis (22^a.) die Form elliptischer Integrale haben, und damit ist die Zurückführung der Attractionscomponenten auf elliptische Integrale geleistet.

§ 6.

Attractionscomponenten eines kreisförmigen Cylinders.

Durch die vorhergehenden Gleichungen sind die Attractionscomponenten eines elliptischen Cylinders allerdings durch elliptische Integrale ausgedrückt, aber diese treten nicht in der canonischen Form auf. Die Zurückführung auf die canonische Form würde jedoch viel zu weitläufige Rechnungen erfordern, als dass ich sie hier versuchen könnte. Ist dagegen der Cylinder ein kreisförmiger, so gelingt es sehr leicht, wenigstens die Grösse unter dem Wurzelzeichen auf die canonische Form zu bringen, und dies sei der Gegenstand der folgenden Untersuchungen.

Setzt man $b = a$, so wird der Cylinder ein kreisförmiger, und a ist der Radius des Grundkreises. Denkt man sich nun die Axe der x durch den Fusspunkt des Lothes ζ gehend, so sind die Coordinaten des angezogenen Punktes $\xi, 0, \zeta$, und da hierdurch nichts Wesentliches geändert wird, so sieht man, dass im Falle eines kreisförmigen Cylinders in allen vorangehenden Formeln $\eta = 0$ gesetzt werden darf.

Ohne mich mit dem Potential zu beschäftigen, das ich auch in diesem Falle nicht weiter habe reduciren können, gehe ich gleich zu den Componenten der Anziehung über, und nenne die Componente nach der x-Axe X, die nach der y-Axe Y, die nach der z-Axe Z. Dann geben die Gleichungen (10ᵃ.), (11.), (12.) und (12ᵃ.) die folgenden Darstellungen der Attractionscomponenten eines kreisförmigen Cylinders:

$$(23.)\qquad 2X = -a\sum\int_0^{2\pi} \cos\varphi \log\frac{\rho+(c+\varepsilon\zeta)}{\rho-(c+\varepsilon\zeta)}\,d\varphi,$$

$$(24.)\qquad 2Y = -a\sum\int_0^{2\pi} \sin\varphi \log\frac{\rho+(c+\varepsilon\zeta)}{\rho-(c+\varepsilon\zeta)}\,d\varphi,$$

$$(25.)\qquad 2Z = a\sum\varepsilon\int_0^{2\pi} \sin\varphi \log\frac{\rho+a\sin\varphi}{\rho-a\sin\varphi}\,d\varphi,$$

$$(25^{a}.)\qquad 2Z = a\sum\varepsilon\int_0^{2\pi} \cos\varphi \log\frac{\rho+(a\cos\varphi-\xi)}{\rho-(a\cos\varphi-\xi)}\,d\varphi.$$

Die Grösse ρ, welche für die Formeln (10.) bis (12ᵃ.) gegeben ist durch die Gleichung:

$$\rho^2 = (a\cos\varphi-\xi)^2 + (b\sin\varphi-\eta)^2 + (c+\varepsilon\zeta)^2,$$

geht für den Fall eines kreisförmigen Cylinders über in:

$$\rho^2 = a^2 + \xi^2 + (c+\varepsilon\zeta)^2 - 2a\xi\cos\varphi,$$

vereinfacht sich also in sehr bedeutender Weise. Natürlich ist die Componente der Anziehung nach der y-Axe, welche durch (24.) gegeben wird, identisch gleich Null. Dies folgt schon a priori, aber man schliesst es auch aus (24.). Denn zerlegt man das Integral in (24.) in zwei, deren eines von 0 bis π, deren zweites von π bis 2π geht, und setzt dann in dem zweiten $2\pi-\varphi$ für φ, so vernichten sich die beiden Integrale.

Behandelt man auf dieselbe Weise die Integrale in (23.), (25.) und (25ᵃ.), so gehen sie über in die doppelten Werthe derselben Integrale zwischen den Grenzen 0 und π genommen, und man erhält daher nach Ausführung der Division mit 2:

$$(26.)\qquad X = -a\sum\int_0^{\pi} \cos\varphi \log\frac{\rho+(c+\varepsilon\zeta)}{\rho-(c+\varepsilon\zeta)}\,d\varphi,$$

$$(27.)\qquad Z = a\sum\varepsilon\int_0^{\pi} \sin\varphi \log\frac{\rho+a\sin\varphi}{\rho-a\sin\varphi}\,d\varphi,$$

$$(27^{a}.)\qquad Z = a\sum\varepsilon\int_0^{\pi} \cos\varphi \log\frac{\rho+(a\cos\varphi-\xi)}{\rho+(a\cos\varphi-\xi)}\,d\varphi.$$

Man setze nun die Integration nach φ in eine nach ρ um.

Zunächst folgt aus (26.) durch theilweise Integration

$$X = a\sum\int_0^{\pi} \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\log\frac{\rho+(c+\varepsilon\zeta)}{\rho-(c+\varepsilon\zeta)}\right) d\varphi.$$

Nun war:

$$\rho^2 = a^2 + \xi^2 + (c+\varepsilon\zeta)^2 - 2a\xi\cos\varphi.$$

Betrachtet man also ρ als diejenige Variable, nach der die Integration auszuführen ist, so ist nach ρ von β bis α zu integriren, wenn:

$$\beta^2 = (c+\varepsilon\zeta)^2 + (a-\xi)^2 \quad , \quad \alpha^2 = (c+\varepsilon\zeta)^2 + (a+\xi)^2$$

gesetzt worden ist. Man bemerke, dass *immer* $\alpha > \beta$.

Ferner folgt:

$$2a\xi\sin\varphi = \sqrt{(\alpha^2-\rho^2)(\rho^2-\beta^2)},$$

und führt man nun diese Grössen in die vorstehende Gleichung für X ein, so erhält man:

$$(28.) \qquad X = -\frac{1}{\xi}\sum (c+\varepsilon\zeta)\int_\beta^\alpha \frac{\sqrt{(\alpha^2-\rho^2)(\rho^2-\beta^2)}}{\rho^2-(c+\varepsilon\zeta)^2}\, d\rho.$$

Auf dieselbe Weise folgt nach einigen einfachen Rechnungen aus der Form (27.), welche zur Reduction geeigneter ist, als (27^a.):

$$(29.) \quad Z = -\sum\varepsilon\int_\beta^\alpha \frac{(\alpha^2+\beta^2-2\rho^2)(\rho^2-\alpha\beta)(\rho^2+\alpha\beta)}{4\xi^2\rho^2-(\alpha^2-\rho^2)(\rho^2-\beta^2)} \frac{d\rho}{\sqrt{(\alpha^2-\rho^2)(\rho^2-\beta^2)}}.$$

Zur weiteren Reduction dieser Gleichungen setze man endlich:

$$\rho^2 = \alpha^2\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi,$$

eine Substitution, die gleichbedeutend ist mit den beiden anderen:

$$\rho^2 = \alpha^2 - (\alpha^2-\beta^2)\sin^2\varphi \quad , \quad \rho^2 = \beta^2 + (\alpha^2-\beta^2)\cos^2\varphi.$$

Hierdurch geht (28.) über in:

$$(30.) \qquad X = -\frac{16a^2\xi}{(a+\xi)^2}\sum\frac{c+\varepsilon\zeta}{\alpha}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi\cos^2\varphi\, d\varphi}{\left[1-\frac{4a\xi}{(a+\xi)^2}\sin^2\varphi\right]\sqrt{1-\frac{4a\xi}{\alpha^2}\sin^2\varphi}},$$

(29.) in:

$$(31.) \quad Z = -4a^2\sum\frac{\varepsilon}{\alpha}\cdot\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\sin^2\varphi-\cos^2\varphi)\left(\alpha-(\alpha+\beta)\sin^2\varphi\right)\left(\beta+(\alpha-\beta)\cos^2\varphi\right)}{\alpha^2\cos^2\varphi+\beta^2\sin^2\varphi-4a^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\frac{4a\xi}{\alpha^2}\sin^2\varphi}},$$

und es ist daher die Wurzelgrösse unter den Integralzeichen auf die canonische Form gebracht.

Zugleich zeigen die Gleichungen (30.) und (31.), dass die Attractionscomponenten eines kreisförmigen Cylinders durch die Summe zweier Ausdrücke gegeben sind, welche auf dieselbe Weise aus vollständigen elliptischen Integralen zusammengesetzt werden. Diese Ausdrücke unterscheiden sich für die Componente nach der x-Axe nur darin, dass der Modul der elliptischen Integrale des einen Ausdrucks

$$\frac{4a\xi}{(c+\zeta)^2+(a+\xi)^2},$$

während der Modul der elliptischen Integrale des anderen Ausdrucks

$$\frac{4a\xi}{(c-\zeta)^2+(a+\xi)^2}$$

ist. Für die Componente nach der z-Axe findet dagegen ausser diesem Unterschiede noch ein ähnlicher für die Parameter der elliptischen Integrale dritter Gattung statt.

Der Modul ist auf diese Weise durch eine einfache rationale Function des Radius des Cylinders und der Coordinaten des angezogenen Punktes bestimmt, während Herr Grube für denselben einen ziemlich complicirten algebraischen Ausdruck gefunden hat.

Endlich ist es mir noch gelungen, die durch die Gleichungen (9.) und (9^a.) gegebenen Formen des Potentials eines Cylinders nach der von Dirichlet im 32. Bande des Crelleschen Journals gegebenen Methode vollständig zu verificiren. Diese Verification konnte jedoch hier nicht mehr hinzugefügt werden. Ferner habe ich erfahren, dass das Potential eines Parallelepipedums schon von Bessel im 27. Bande von Zachs monatlicher Correspondenz pag. 82 ohne Beweis mitgetheilt worden ist.

Oscar Röthig.