Geometrische Untersuchungen über bicentrische Vierecke.

Die Excentricität bicentrischer Vielecke ist mehrfach Gegenstand der mathematischen Untersuchung gewesen. So fand bereits Euler für das Dreieck die Formel

$$d^2 = r^2 - 2r\rho$$

wo r der Radius des Umkreises, ρ der Radius des Inkreises ist. Der Abstand der beiden Mittelpunkte hängt also nur von den Elementen r und ρ ab. Da aber für das Dreieck drei Bestimmungsstücke notwendig sind, so kann bei gegebenem r und ρ noch eine Seite willkürlich gewählt werden, nur muss dieselbe gleichzeitig Sehne des Umkreises und Tangente des Inkreises sein. Zieht man von den Endpunkten der Sehne Tangenten an den Inkreis, so schneiden sich dieselben auf dem Umkreis. Einem Kreise können daher unendlich viele Dreiecke so einbeschrieben werden, dass sie zugleich einem anderen Kreise umbeschrieben sind, wenn nur irgend ein solches Dreieck existirt.

Der russische Staatsrat Nicolaus Fuss veröffentlichte bereits im Jahre 1798 in den Acta Nova Petrop. eine Untersuchung über bicentrische Vierecke und gab dabei die Beziehung an, welche zwischen den Radien beider Kreise und der Entfernung ihrer Mittelpunkte besteht. Für Polygone von 5, 6, 7, 8 Seiten hat Steiner die betreffenden Beziehungen nachgewiesen, bis endlich Jacobi in seiner berühmten Abhandlung im 3. Bande des Crelle'schen Journals die zwischen r, ρ und d bestehende Bedingungsgleichung für das bicentrische n Eck mit der Teilung eines ganzen elliptischen Integrals in n gleiche Teile in Zusammenhang brachte. Uebrigens hatte schon vorher Poncelet in seinem Traité des propriétés projectives des figures den Satz bewiesen, dass, „wenn irgend ein Polygon zugleich einem Kegelschnitt einbeschrieben und einem anderen umbeschrieben ist, es eine unendliche Menge von Polygonen gleicher Seitenzahl giebt, welche diese Eigenschaft in Bezug auf beide Curven haben".

Ueber das bicentrische Viereck ist der Satz bekannt, dass die Mittelpunkte des Umkreises und des Inkreises mit dem Schnittpunkte der Diagonalen in einer Geraden liegen. Die nachfolgende Abhandlung sucht die Eigenschaften dieses Schnittpunktes der Diagonalen aufzuklären und ferner ein Problem über bicentrische Vierecke seiner Lösung entgegenzuführen, welches Herr Geheimrat Schlömilch im Jahre 1878 im Journal für Mathematik und Physik veröffentlicht hat.

I.

§ 1. In dem Kreise (Fig. 1) mit dem Radius ρ sei ein beliebiger Punkt P im Abstande p vom Mittelpunkte O gegeben. Durch P seien zwei zu einander senkrechte Sehnen

$$(1): \quad \begin{matrix} AC = e \\ BD = f \end{matrix} \text{ mit den Centriwinkeln: } \begin{matrix} 2\varepsilon \\ 2\varphi \end{matrix}$$

gezogen. Die Abschnitte dieser Sehnen seien:

$$(2): \quad AP = e_1,\ PC = e_2,\ BP = f_1,\ PD = f_2$$

Fällt man vom Mittelpunkte die Senkrechte OG auf die Sehne AC, so ist

$$\sphericalangle BOG = \sphericalangle OBD = R - \varphi$$
$$\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOG - \sphericalangle BOG = \varepsilon - (R - \varphi)$$

Die Centriwinkel über den vier Bogenstücken AB, BC, CD, DA sind daher:

$$(3): \quad \begin{aligned} \sphericalangle AOB &= \quad (\varphi + \varepsilon) - R \\ \sphericalangle BOC &= -(\varphi - \varepsilon) + R \\ \sphericalangle COD &= -(\varphi + \varepsilon) + 3R \\ \sphericalangle DOA &= \quad (\varphi - \varepsilon) + R \end{aligned}$$

Zieht man nun an den Endpunkten der Sehnen die Tangenten, so entsteht das Viereck LKNJ, wo

$$\begin{aligned} \sphericalangle L &= 2R - \sphericalangle AOB \\ &= 2R - (\varphi + \varepsilon) + R \text{ ist. Oder:} \end{aligned}$$

$$(4): \quad \begin{aligned} \sphericalangle L &= -(\varphi + \varepsilon) + 3R = \sphericalangle DOC \\ \sphericalangle K &= \quad (\varphi - \varepsilon) + R \ = \sphericalangle DOA \\ \sphericalangle N &= \quad (\varphi + \varepsilon) - R \ = \sphericalangle AOB \\ \sphericalangle J &= -(\varphi - \varepsilon) + R \ = \sphericalangle BOC \end{aligned}$$

Man bemerkt, dass $\sphericalangle N + \sphericalangle L = 2R$ ist. Die Tangenten an den Endpunkten zweier zu einander senkrechten Sehnen bilden somit stets ein bicentrisches Viereck.

Da wir durch P unendlich viele normale Sehnenpaare legen können, so gehören zu diesem Punkte unendlich viele bicentrische Vierecke. Das ganze System derselben nennen wir den bicentrischen Viereckscomplex des Punktes P.

§ 2. Bilden wir im Viereck JLKN (Fig. 1) das Produkt der Sinus zweier benachbarten Winkel, etwa

$$(5): \quad \sin L \sin K = \tfrac{1}{2} [\cos (L - K) - \cos (L + K)]$$

und benutzen aus (4) die Werte

$$\begin{aligned} L &= -(\varphi + \varepsilon) + 3R \\ K &= \quad (\varphi - \varepsilon) + R \end{aligned}$$

so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sin L \sin K &= \tfrac{1}{2} [\cos (2R - 2\varphi) - \cos (4R - 2\varepsilon)] \\ &= -\tfrac{1}{2} [\cos 2\varepsilon + \cos 2\varphi] \\ &= 1 - (\cos^2\varepsilon + \cos^2\varphi) \\ &= \frac{\rho^2 - \rho^2 (\cos^2\varepsilon + \cos^2\varphi)}{\rho^2} \end{aligned}$$

Fällt man vom Mittelpunkte O die Senkrechte OH auf BD, so ist:

$$OP^2 = OG^2 + OH^2 \quad \text{oder}$$

(6): $$p^2 = \rho^2 (\cos^2\varepsilon + \cos^2\varphi)$$

Mit Rücksicht auf die Gleichung (6) geht (5) über in:

(7): $$\sin L \sin K = \frac{\rho^2 - p^2}{\rho^2}$$ d. h.:

Im ganzen bicentrischen Viereckscomplex des Punktes P ist das Produkt der Sinus zweier benachbarten Winkel constant.

Aus (7) folgt, wenn wir mit r den Radius des Umkreises bezeichnen:

(8): $$4 r^2 \sin L \sin K = 4 r^2 \cdot \frac{\rho^2 - p^2}{\rho^2}$$

Somit hat im ganzen bicentrischen Viereckscomplex des Punktes P das Produkt der Diagonalen den constanten Wert $4 r^2 \cdot \frac{\rho^2 - p^2}{\rho^2}$

§ 3. Bilden wir aus

$$e = 2 \rho \sin \varepsilon$$
$$f = 2 \rho \sin \varphi$$

die Gleichung:

$$\begin{aligned} e^2 + f^2 &= 4 \rho^2 (\sin^2\varepsilon + \sin^2\varphi) \\ &= 4 \rho^2 (2 - \cos^2\varepsilon - \cos^2\varphi) \\ &= 4 [2 \rho^2 - \rho^2 (\cos^2\varepsilon + \cos^2\varphi)] \end{aligned}$$

so geht dieselbe durch die Beziehung (6) über in:

(9): $$e^2 + f^2 = 4 \; [2 \rho^2 - p^2]$$

Die Summe der Quadrate zweier durch einen Punkt P gehenden, zu einander senkrechten Sehnen hängt also nur vom Radius des Kreises und dem Abstande des Punktes P vom Mittelpunkte ab.

§ 4. Aus den Sätzen über Pol und Polare folgt, dass die Diagonalen des bicentrischen Vierecks durch den Schnittpunkt P der beiden normalen Sehnen gehen müssen. Wegen des Satzes über die Peripheriewinkel bemerkt man dann folgendes System von ähnlichen Dreiecken (Fig. 2):

(10): $$\begin{aligned} APL &\sim CPK \\ LPB &\sim JPD \\ BPK &\sim DPN \\ JPA &\sim NPC \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich die Proportion:

$$AL : CK = AP : CP$$

oder: (11): $$LB : BK = AP : CP = e_1 : e_2$$

Durch die Berührungspunkte werden demnach zwei gegenüberliegende Seiten in gleichem Verhältnis geteilt; und zwar im Verhältnis der Abschnitte der gegenüberliegenden Berührungssehne.

§ 5. Verbinden wir den Mittelpunkt O mit den Ecken des Vierecks und berücksichtigen, dass (Fig. 2)

$$\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = \tfrac{1}{2} \sphericalangle AOD = \frac{K}{2}$$ ist, so erhalten wir

folgendes zweite System:

$$(12): \quad ABP \sim OKC \sim JOD \sim DCP \quad \text{und}$$
$$BPC \sim OCN \sim LAO \sim APD$$

Aus dem zweiten und dritten Dreieck ergiebt sich:

$$(13): \quad JD \,.\, KC = \rho^2$$

Der Radius des Inkreises ist also die mittlere Proportionale zwischen den Tangenten aus den gegenüberliegenden Ecken.

Unsere Absicht ist, die Länge der Seitenabschnitte und die Seiten selbst durch die Abschnitte der Berührungssehnen auszudrücken. Benutzt man etwa das erste, dritte und vierte Dreieck, so erhält man:

$$(14) \qquad \begin{aligned} JD &= \rho \,.\, \frac{e_1}{f_1} = \rho \,.\, \frac{f_2}{e_2} \\ NC &= \rho \,.\, \frac{e_2}{f_1} = \rho \,.\, \frac{f_2}{e_1} \\ KB &= \rho \,.\, \frac{e_2}{f_2} = \rho \,.\, \frac{f_1}{e_1} \\ LA &= \rho \,.\, \frac{e_1}{f_2} = \rho \,.\, \frac{f_1}{e_2} \end{aligned}$$

Setzen wir: $JL = a$, $LK = b$, $KN = c$, $NJ = d$, und addieren die Abschnitte einer Seite, so finden wir:

$$(15): \qquad a = \rho \,.\, \frac{f}{e_2}, \quad b = \rho \,.\, \frac{e}{f_2}$$
$$c = \rho \,.\, \frac{f}{e_1}, \quad d = \rho \,.\, \frac{e}{f_1}$$

Das Produkt einer Seite mit dem nicht anliegenden Abschnitte der zugehörigen Berührungssehne ist gleich dem Produkte der gegenüberliegenden Berührungssehne mit dem Radius des Inkreises.

§ 6. Bilden wir aus (15) die Produkte der gegenüberliegenden Seiten und berücksichtigen, dass:

$$(16): \qquad e_1 e_2 = f_1 f_2 = \rho^2 - p^2$$

so ergiebt sich:

$$(17): \qquad ac = \frac{\rho^2}{\rho^2 - p^2} f^2; \quad bd = \frac{\rho^2}{\rho^2 - p^2} \,.\, e^2$$

und durch Addition:

$$ac + bd = \frac{\rho^2}{\rho^2 - p^2} (e^2 + f^2)$$

Unter Benutzung der Formel (9)

$$e^2 + f^2 = 4 (2 \rho^2 - p^2)$$

geht diese Gleichung über in:

$$(18) \qquad ac + bd = 4 \cdot \frac{\rho^2}{\rho^2 - p^2}(2\rho^2 - p^2)$$

Mit Anwendung des Ptolemäischen Lehrsatzes erhalten wir das Resultat: Im ganzen bicentrischen Viereckscomplex des Punktes P hat das Produkt der Diagonalen den constanten Wert: $4\frac{\rho^2}{\rho^2 - p^2}(2\rho^2 - p^2)$.

Aus (17) folgt durch Division:

$$(19) \qquad \frac{ac}{bd} = \frac{f^2}{e^2}, \quad \text{d. h.:}$$

Die Produkte der gegenüberliegenden Seiten verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate der zugehörigen Berührungssehnen.

§ 7. Für die Summe zweier gegenüberliegenden Seiten ergiebt sich aus (15):

$$a + c = \rho f\left(\frac{1}{e_1} + \frac{1}{e_2}\right)$$

$$= \frac{\rho\, ef}{e_1 e_2} = \frac{\rho\, ef}{\rho^2 - p^2}$$

Der Umfang des bicentrischen Vierecks ist demnach:

$$(20): \qquad U = \frac{2\rho\, ef}{\rho^2 - p^2}$$

und der Inhalt:

$$(21): \qquad J = \frac{\rho^2\, ef}{\rho^2 - p^2}$$

§ 8. Der Abstand AD der benachbarten Berührungspunkte A und D lässt sich leicht angeben, da (Fig. 2)

$$AF = \tfrac{1}{2}AD, \quad \sphericalangle JOA = \frac{K}{2} \text{ ist wegen der Gl. (4).}$$

Man findet:

$$\tfrac{1}{2}AD = \rho \sin\frac{K}{2}$$

Im Dreieck OCE ist:

$$CE = \tfrac{1}{2}BC = \rho\cos\frac{K}{2}$$

Folglich ergiebt sich:

$$(22): \qquad \begin{aligned} AD \cdot BC &= 2\rho^2 \sin K = 2\rho^2 \sin J \\ AB \cdot DC &= 2\rho^2 \sin L = 2\rho^2 \sin N, \end{aligned}$$

zwei Formeln, welche für unsere späteren Untersuchungen von grosser Wichtigkeit sind.

Bildet man aus (22) das Produkt:

$$AD \cdot BC \cdot AB \cdot DC = 4\rho^4 \sin K \cdot \sin L$$

und benützt aus Gleichung (7) den Wert für $\sin K \cdot \sin L$, so erhalten wir:

$$(23): \qquad AD \cdot BC \cdot AB \cdot DC = 4\rho^2\,(\rho^2 - p^2)$$

Das Produkt der Abstände der aufeinanderfolgenden Berührungspunkte ist somit für den ganzen Viereckscomplex des Punktes P constant.

§ 9. Ein ähnliches Resultat erhalten wir, wenn wir die Abstände des Punktes O von den vier Ecken mit einander multiplicieren.

Es ist:

$$LO = \frac{\rho}{\cos\frac{N}{2}} = \frac{\rho}{\sin\frac{L}{2}}; \quad NO = \frac{\rho}{\cos\frac{L}{2}}$$

also: (24): $$LO \,.\, NO = \frac{2\rho^2}{\sin L}; \quad \text{ebenso } JO \,.\, OK = \frac{2\rho^2}{\sin K}$$

$$\text{und} \quad LO \,.\, NO \,.\, JO \,.\, KO = \frac{4\rho^4}{\sin L \sin K}$$

Die Gleichung (7) führt diesen Ausdruck über in:

(25): $$LO \,.\, NO \,.\, JO \,.\, KO = \frac{4\rho^6}{\rho^2 - p^2}$$

Mithin ist auch das Produkt der Abstände des Mittelpunktes des Inkreises von den vier Eckpunkten im ganzen Viereckscomplex des Punktes P constant.

§. 10. Durch Combination der Werte, welche wir für das Produkt der Diagonalen in den Gleichungen (8) und (18) gefunden haben, erhalten wir den Satz:

Zwischen den Grössen r, ρ, p des bicentrischen Vierecks besteht immer die Gleichung:

(26): $$r^2 (\rho^2 - p^2)^2 = \rho^4 (2\rho^2 - p^2)$$

wo p der Abstand des Diagonalschnittpunktes vom Mittelpunkte des Inkreises ist.

II.

§. 11. Halbiert man in dem bicentrischen Viereck (Fig. 3) zwei gegenüberliegende Winkel N und L, so treffen die Halbierungslinien den Umkreis in den Halbierungspunkten U und W der über der Sehne JK stehenden Bogen. Die Verbindungslinie UW ist daher ein Durchmesser des Umkreises und steht senkrecht zur Sehne JK. Der Winkel ULW ist ein rechter. Der Winkel NUL ist gleich dem Winkel J des bicentrischen Vierecks. In dem rechtwinkligen Dreieck ULO ist daher:

(27): $$LO = UO \,.\, \sin J$$

In dem System (12) sahen wir, dass:

$$LAO \sim APD$$

$OCN \sim BPC$ ist, woraus man

$$LO = \rho \,.\, \frac{AD}{DP}$$

$$ON = \rho \,.\, \frac{BC}{BP} \quad \text{und}$$

(28): $$LO \,.\, ON = \rho^2 \,.\, \frac{BC \,.\, AD}{DP \,.\, BP} \quad \text{folgert.}$$

Setzen wir in diese Gleichung aus (27): $LO = UO \cdot \sin J$

aus (22): $BC \cdot AD = 2\rho^2 \sin J$

aus (16): $DP \cdot BP = \rho^2 - p^2$

ein, so folgt: $$UO \cdot NO \cdot \sin J = \rho^2 \cdot \frac{2\rho^2}{\rho^2 - p^2} \sin J$$

oder: (29): $$UO \cdot NO = \frac{2\rho^4}{\rho^2 - p^2}$$

d. h.: Die Potenz des Umkreises im Mittelpunkte des Inkreises hängt nur von ρ und p ab und ist von den Winkeln des bicentrischen Vierecks unabhängig. Sämmtliche Vierecke des Complexes haben die nämliche Potenz des Umkreises im Mittelpunkte des Inkreises.

Bezeichnen wir mit d den Abstand der Mittelpunkte O und M des Inkreises und des Umkreises, so ist: $$UO \cdot NO = r^2 - d^2$$
und daher:

(30): $$\underline{\underline{(r^2 - d^2)(\rho^2 - p^2) = 2\rho^4}}$$

§ 12. Es entsteht nun die Frage, ob die Gleichung (30) die einzige ist, welche zwischen den vier Grössen r, ρ, p, d besteht; oder ob noch eine zweite Gleichung existiert, welche uns in den Stand setzt, entweder p oder d zu eliminieren? Eine solche Gleichung lässt sich in der That herleiten aus einer Eigenschaft der beiden Kreise, welche wir bis jetzt noch nicht benutzt haben. Die beiden Kreise des bicentrischen Vierecks haben nämlich eine gemeinsame Polare in Bezug auf den Punkt P. Wenn auch die Pole aller durch P gehenden Geraden auf dieser gemeinsamen Polare liegen, so fallen jedoch im allgemeinen die Pole einer und der nämlichen Geraden durch P für den Inkreis und Umkreis nicht zusammen. Nur für eine Gerade haben wir einen gemeinsamen Pol sowohl für den Inkreis wie für den Umkreis: nämlich für die durch P gehende Senkrechte zur Centralaxe MO. Diese Senkrechte bezeichnen wir als die Nebenaxe der beiden unipolaren Kreise. Der Pol der Nebenaxe sei Q; er liegt auf der Centralaxe. Letztere möge mit dem Inkreis die Schnittpunkte J_1 und J_2, mit dem Umkreis die Schnittpunkte U_1 und U_2 haben (Fig. 4). Infolge einer bekannten Eigenschaft der harmonischen Punkte ist dann:

(31): $$MU_2^2 = PM \cdot QM$$
$$OJ_2^2 = PO \cdot QO$$

Bezeichnen wir mit x den ausserhalb beider Kreise liegenden Abschnitt der Centralaxe QU_1, so ist:

(32): $$MU_2 = r, \quad PM = d + p, \quad QM = x + r$$
$$OJ_2 = \rho, \quad PO = p, \quad QO = x + r - d$$

Unter Benutzung dieser Werte geht das System (31) über in:

(33): $$r^2 = (d + p)(x + r)$$
$$\rho^2 = p(x + r - d)$$

Eliminieren wir aus beiden Gleichungen $(x + r)$, so erhalten wir:

(34): $$pr^2 = (\rho^2 + pd)(d + p)$$

Dies ist eine neue Beziehung zwischen r, ρ, p, d. Die gewonnenen Resultate fassen wir in folgendem Lehrsatz zusammen:

In jedem bicentrischen Viereck bestehen zwischen dem Radius ρ des Inkreises, r des Umkreises, der Entfernung d der beiden Mittelpunkte und dem Abstande p des Diagonalpunktes vom Mittelpunkte des Inkreises die beiden Gleichungen:

$$(30): \quad \underline{\underline{(r^2 - d^2)\,(\rho^2 - p^2) = 2\,\rho^4}}$$

$$(34): \quad \underline{\underline{p\,r^2 = (\rho^2 + pd)\,(d + p)}}$$

Die Gleichungen (30) und (34) lassen sich leicht so umformen, dass d sowohl wie r durch ρ und p allein ausgedrückt sind. Setzt man den Wert von r^2 aus (30) in (34) ein, so erhält man:

$$p\left(d^2 + \frac{2\,\rho^4}{\rho^2 - p^2}\right) = (\rho^2 + pd)\,(d + p)$$

In dieser Gleichung fallen die quadratischen Glieder von d fort. Löst man nach d auf, so ergiebt sich:

$$(35) \quad \underline{\underline{d = p \, . \, \frac{\rho^2}{\rho^2 - p^2}}}$$

eine Gleichung von bemerkenswerter Einfachheit. Dieser Wert von d führt die Gleichung (30) über in:

$$(36): \quad r^2\,(\rho^2 - p^2)^2 = \rho^4\,(2\,\rho^2 - p^2)$$

Dies ist eine Bestätigung unserer Gleichung (26), welche auf ganz anderem Wege gefunden wurde.

Die Gleichungen (35) und (36) zeigen uns, dass d und r durch ρ und p vollständig bestimmt sind. Erinnern wir uns dabei, dass die Punkte P, O, M stets in gerader Linie liegen, so können wir den Satz aufstellen:

Der ganze bicentrische Viereckscomplex des Punktes P hat einen und denselben Umkreis.

Dieses Resultat hätte auch aus der Gleichung (29) gefolgert werden können.

§ 13. Wenn unsere Gleichungen richtig sind, dann muss sich bei der Elimination von p das Resultat wiederfinden, welches Fuss, Steiner und Jacobi auf verschiedenen Wegen gefunden haben.

Bilden wir aus (35) und (36) den Wert von $r^2 + d^2$:

$$r^2 + d^2 = \frac{\rho^4\,(2\,\rho^2 - p^2)}{(\rho^2 - p^2)^2} + \frac{p^2\,\rho^4}{(\rho^2 - p^2)^2} \quad \text{oder:}$$

$$(37): \quad r^2 + d^2 = \frac{2\,\rho^6}{(\rho^2 - p^2)^2}$$

und aus der Gleichung (30) den Wert:

$$(38): \quad (r^2 - d^2)^2 = \frac{4\,\rho^8}{(\rho^2 - p^2)^2}$$

so ergiebt die Elimination des Nenners $(\rho^2 - p^2)^2$ aus den letzten beiden Gleichungen:

$$(39): \quad (r^2 - d^2)^2 = 2\,\rho^2\,(r^2 + d^2)$$

wo p nicht mehr vorkommt. Die Gleichung (39) ist aber diejenige, welche von den genannten Mathematikern auf verschiedenen Wegen abgeleitet wurde.

§ 14. Unter den vorangegangenen Gleichungen ist (35) besonders wirksam. Aus

$$\frac{d}{p} = \frac{\rho^2}{\rho^2 - p^2}$$

folgt (40):

$$\frac{d + p}{p} = \frac{2\rho^2 - p^2}{\rho^2 - p^2}$$

Unsere Absicht ist, die Potenz des Umkreises im Diagonalpunkte zu ermitteln. Aus (36) und (40) ergiebt sich als Wert dieser Potenz:

$$r^2 - (d + p)^2 = \frac{\rho^4 (2\rho^2 - p^2)}{(\rho^2 - p^2)^2} - p^2 \frac{(2\rho^2 - p^2)^2}{(\rho^2 - p^2)^2}$$

oder (41):

$$\underline{\underline{r^2 - (d + p)^2 = 2\rho^2 - p^2,}} \text{ d. h.:}$$

Die Potenz des Umkreises im Diagonalpunkte P ist $2\rho^2 - p^2$; mithin ist $\sqrt{2\rho^2 - p^2}$ die Hälfte der bis zum Umkreis gerechneten Nebenaxe.

Hierdurch gewinnt die Formel (40) die Bedeutung:

Die Abstände der Mittelpunkte M und O vom Diagonalpunkte P verhalten sich wie die Potenzen des Umkreises und des Inkreises im Diagonalpunkte.

Die Formel (9): $e^2 + f^2 = 4(2\rho^2 - p^2) = (2\sqrt{2\rho^2 - p^2})^2$

erhält den Sinn: Die Summe der Quadrate der Berührungssehnen ist gleich dem Quadrate der bis zum Umkreis gerechneten Nebenaxe.

§ 15. Zu dem bicentrischen P-Complex gehört auch dasjenige Viereck, welches durch die Endpunkte L_1, N_1 der Nebenaxe und K_1, J_1 der Centralaxe gebildet wird (Fig. 5). In demselben ist:

$$L_1 P = \sqrt{2\rho^2 - p^2}$$

Aus den Gleichungen (35) und (36) wissen wir, dass

$$\frac{d}{p} = \frac{\rho^2}{\rho^2 - p^2}, \quad \frac{r}{\sqrt{2\rho^2 - p^2}} = \frac{\rho^2}{\rho^2 - p^2}, \text{ mithin auch}$$

(42):

$$\frac{r}{\sqrt{2\rho^2 - p^2}} = \frac{d}{p}, \text{ oder: } \frac{L_1M}{L_1P} = \frac{MO}{OP}$$

Die Linie L_1O halbiert also den Winkel ML_1P.

Es ist:

$$L_1O^2 = L_1P^2 + PO^2$$
$$= 2\rho^2 - p^2 + p^2$$

(43):

$$L_1O = \rho\sqrt{2}$$

Die Verbindungslinie L_1O des Endpunktes der Nebenaxe mit dem Mittelpunkte des Inkreises hängt von der Wahl des Punktes P nicht ab; sondern nur vom Radius des Inkreises.

Hat man daher aus gegebenem r und ρ die Lage der Mittelpunkte M und O nach der Steiner-Jacobi'schen Gleichung bestimmt, so findet man den Diagonalpunkt P, indem man um O mit $\rho\sqrt{2}$ einen Kreis schlägt und die Punkte verbindet, in welchem letzterer den Umkreis schneidet.

Das ausgezeichnete bicentrische Viereck $J_1L_1K_1N_1$ giebt uns Aufschluss über den Sinn der Steiner-Jacobi'schen Gleichung:

(39):

$$r^2 - d^2 = \rho\sqrt{2}\sqrt{r^2 + d^2}$$

Errichten wir nämlich (Fig. 5) in M auf der Centralaxe die Senkrechte ME bis zum Umkreis, so ist:

$$OE = \sqrt{ME^2 + MO^2} = \sqrt{r^2 + d^2}$$

$$OL_1 = \rho\sqrt{2} \text{ nach Formel (43)}$$

also (44):

$$OE \,.\, OL_1 = \rho\sqrt{2}\,\sqrt{r^2 + d^2}$$

Dies ist aber der Wert der Potenz des Umkreises im Punkte O nach (39).

Errichtet man daher im Mittelpunkte des Umkreises und im Diagonalpunkte Senkrechten zur Centralaxe bis zum Umkreis, so liegen die entgegengesetzten Endpunkte mit dem Mittelpunkte des Inkreises in gerader Linie.

Hierdurch ist aus gegebenem r und d der Radius ρ leicht construierbar. Man bildet das Dreieck OME aus r und d, und verlängert OE bis zum Schnitt L_1 mit dem Umkreis; zieht L_1J_1 etc. Ebenso übersieht man leicht, wie aus r und $MP = d + p$ die Lage des Punktes O und der Radius ρ zu finden ist.

§ 16. Die Abschnitte, unter welchen die Diagonalen sich schneiden, können leicht bestimmt werden. Hierzu benutzen wir den Satz, dass die Berührungssehnen die Winkel der Diagonalen halbieren. Da PC den Winkel NPK halbiert, ist (Fig. 3)

(45):
$$PK = KC \,.\, \frac{PN}{CN}$$

Nach (10) ist:
$$JPA \sim NPC \text{ und}$$

(61):
$$\frac{PN}{CN} = \frac{PJ}{AJ},$$ wodurch (45) übergeht in:

(46):
$$PK = KC \,.\, \frac{PJ}{AJ}$$

Multiplicieren wir beide Seiten mit PK und erweitern rechts mit AJ, so ist:

(47)
$$PK^2 = \frac{KC \,.\, PJ \,.\, PK \,.\, JA}{JA^2}$$

Nun ist aber:
$$PK \,.\, PJ = 2\rho^2 - p^2$$ als Potenz des Umkreises.

$$KC \,.\, JA = \rho^2$$

$$\frac{\rho}{JA} = \operatorname{cotg} JOA = \operatorname{cotg} \frac{K}{2}$$

Diese Werte führen die Gleichung (47) über in:

$$PK^2 = (2\rho^2 - p^2) \operatorname{cotg}^2 \frac{K}{2}$$

Als Abschnitte der Diagonalen ergeben sich daher die Werte:

(48):
$$PK = \sqrt{2\rho^2 - p^2} \,.\, \operatorname{cotg} \frac{K}{2}$$
$$PL = \sqrt{2\rho^2 - p^2} \,.\, \operatorname{cotg} \frac{L}{2}$$
$$PJ = \sqrt{2\rho^2 - p^2} \,.\, \operatorname{cotg} \frac{J}{2}$$
$$PN = \sqrt{2\rho^2 - p^2} \,.\, \operatorname{cotg} \frac{N}{2}$$

Addieren wir die Abschnitte einer Diagonale, etwa

$$PK + PJ = JK$$

und bedenken, dass $\sphericalangle K + \sphericalangle J = 2R$, also

$$\operatorname{cotg}\frac{K}{2} + \operatorname{cotg}\frac{J}{2} = \operatorname{tg}\frac{K}{2} + \operatorname{cotg}\frac{K}{2} = \frac{2}{\sin K}$$

ist, so erhalten die Diagonalen die Form:

$$(49): \quad JK = \frac{2\sqrt{2\rho^2 - p^2}}{\sin K}, \quad LN = \frac{2\sqrt{2\rho^2 - p^2}}{\sin L}$$

Das Produkt der Diagonalen nimmt wegen der Gleichung

$$\sin K \,.\, \sin L = \frac{\rho^2 - p^2}{\rho^2}$$

die schon bekannte Form

(50): $\quad JK \,.\, LN = 4\rho^2 \frac{(2\rho^2 - p^2)}{\rho^2 - p^2}$ an, woraus mit Anwendung der Gleichung (40) folgt:

$$(51): \quad \frac{JK \,.\, LN}{4\rho^2} = \frac{2\rho^2 - p^2}{\rho^2 - p^2} = \frac{d + p}{p}$$

Die Gleichung (36): $\frac{\rho^2}{\rho^2 - p^2} = \frac{r}{\sqrt{2\rho^2 - p^2}}$ führt (50) über in:

$$(52): \quad \underline{\underline{JK \,.\, LN = 2r \,.\, 2\sqrt{2\rho^2 - p^2}}}$$

Das Produkt der Diagonalen jedes Vierecks des bicentrischen P-Complexes ist gleich dem Produkte aus der Centralaxe (2r) und der Nebenaxe ($2\sqrt{2\rho^2 - p^2}$).

Dieses Resultat erscheint selbstverständlich, weil ja das Viereck $J_1K_1L_1N_1$ (Fig. 5) zum Complex gehört.

III.

§ 17. Eine der wichtigsten Eigenschaften der beiden Kreise, welche zu einem bicentrischen Viereck gehören, stellt der folgende Satz dar:

Jede Tangente von einem Punkte der gemeinsamen Polare an den Umkreis ist gleich der Entfernung dieses Punktes von dem Mittelpunkte des Inkreises.

Zum Beweis verlängern wir die Seiten JL und NK des bicentrischen Vierecks (Fig. 6) bis zum Schnittpunkte Q. Q liegt auf der gemeinsamen Polare beider Kreise und ist Pol der Berührungssehne AC. Da OQ senkrecht zu AC ist, so muss:

$$\sphericalangle LQO = R - \varepsilon \text{ sein.}$$

Ferner ist:

$$\sphericalangle LOQ = \sphericalangle JLO - \sphericalangle LQO$$

$$= \sphericalangle \frac{L}{2} - (R - \varepsilon)$$

Da nun: $\sphericalangle L = 3R - \varphi - \varepsilon$ ist, so muss:

$$\sphericalangle LOQ = \frac{R + \varepsilon - \varphi}{2}; \text{ d. h.:}$$

$$(53): \quad \sphericalangle LOQ = \frac{J}{2} \text{ sein.}$$

Somit enthalten die Dreiecke JOQ und LOQ beide die Winkel $\frac{J}{2}$ und $R - \varepsilon$. Aus ihrer Ähnlichkeit ergiebt sich

$$(54): \quad OQ^2 = LQ \, . \, JQ$$

Bezeichnen wir mit t die Tangente von Q an den Umkreis, so ist nach einem bekannten Satze der Kreislehre:

$$(55): \quad t^2 = LQ \, . \, JQ \text{ und mithin:}$$

$$(56): \quad t = OQ$$

Die Tangente, welche man also vom Pole der Berührungssehne AC an den Umkreis ziehen kann, ist gleich der Entfernung dieses Pols vom Mittelpunkte des Inkreises. Weil nun aber jeder Punkt der Polaren einmal Pol einer Berührungssehne des Complexes wird, so gilt unser Satz in der oben ausgesprochenen Allgemeinheit.

In der Ausdrucksweise der neueren Geometrie wird unser Satz lauten: Die Kreise derjenigen Kreisschar, bei welcher die Mittelpunkte auf der gemeinsamen Polare des Inkreises und des Umkreises liegen und bei welcher der Umkreis rechtwinklig geschnitten wird, gehen sämtlich durch den Mittelpunkt des Inkreises.

Dieser Satz erlangt seine vorzüglichste Wirksamkeit für den Pol der Nebenaxe. Letztere hat sowohl für den Inkreis wie für den Umkreis einen und den nämlichen Pol Q_1. Es ist daher (Fig. 7) $Q_1O = Q_1L_1$
wo L_1 ein Endpunkt der Nebenaxe ist.

Soll man daher aus ρ und p die Längen d und r construieren, so construiere man den Pol Q_1 der Nebenaxe; schlage mit Q_1O den Kreis bis zum Schnittpunkte L_1 mit der Nebenaxe; und errichte in L_1 die Senkrechte auf L_1Q_1 bis zum Schnittpunkte M mit der Centralaxe. Dann ist M der Mittelpunkt des Umkreises und ML_1 der Radius.

§ 18. Den Lehrsatz (56) benutzen wir, um eine interessante Beziehung zwischen den drei Diagonalen des bicentrischen Vierecks herzuleiten. Da (Fig. 3)

$$QO = \frac{\rho}{\cos \varepsilon}$$

so ist (57):

$$t_1^2 = \frac{\rho^2}{\cos^2 \varepsilon}$$

wo t_1 die von Q gezogene Tangente an den Umkreis ist. Dieser Wert von t_1^2 ist die Potenz des Umkreises im Punkte Q. Bezeichnen wir mit T (in Fig. 3) den Schnittpunkt der beiden anderen Gegenseiten des bicentrischen Vierecks, so ist in T

$$(58): \quad t_2^2 = \frac{\rho^2}{\cos^2 \varphi}$$

die Potenz. Es existiert aber der Satz, dass in jedem Kreisviereck das Quadrat der äusseren Diagonale gleich der Summe der Potenzen der Endpunkte ist. Daher ist:

(59): $$TQ^2 = \rho^2 \left(\frac{1}{\cos^2\varepsilon} + \frac{1}{\cos^2\varphi}\right) = \rho^2 \frac{(\cos^2\varepsilon + \cos^2\varphi)}{\cos^2\varepsilon \cos^2\varphi}$$

Da aber: $$\rho^2 (\cos^2\varepsilon + \cos^2\varphi) = p^2$$
$$\cos\varepsilon \cos\varphi = \tfrac{1}{2} [\sin K - \sin L]$$

so ist (60): $$TQ = \frac{2\,p}{\sin K - \sin L}$$

In den Formeln (49) hatten sich für die inneren Diagonalen die Werte

$$JK = \frac{2\sqrt{2\rho^2 - p^2}}{\sin K}, \quad LN = \frac{2\sqrt{2\rho^2 - p^2}}{\sin L}$$

ergeben, woraus folgt, dass

(61): $$\sin K - \sin L = 2\sqrt{2\rho^2 - p^2}\left(\frac{1}{JK} - \frac{1}{LN}\right) \text{ ist.}$$

Setzen wir (61) in (60) ein, so erhalten wir den Satz:

Die drei Diagonalen des bicentrischen Vierecks sind durch die Gleichung

(62): $$\underline{\underline{\frac{p}{\sqrt{2\rho^2 - p^2}} \cdot \frac{1}{TQ} = \frac{1}{JK} - \frac{1}{LN}}}$$

mit einander verbunden.

Aus dieser Gleichung erkennt man, dass die äussere Diagonale unendlich wird, wenn die inneren Diagonalen einander gleich sind. Dieser Fall tritt in dem bicentrischen Trapez ein, wo zwei Seiten der Nebenaxe parallel laufen (Fig. 7).

IV.

§ 19. Herr Geheimrat Schlömilch veröffentlicht in der Zeitschrift für Math. und Phys. Band XXIII S. 194 folgendes interessante Problem über bicentrische Vierecke, welches nach einer brieflichen Mitteilung des Herrn Geh. R. bis jetzt nicht behandelt worden ist.

Von einem Kreise kennt man drei Peripheriepunkte A, B, C und sucht einen vierten D derart, dass ABCD ein bicentrisches Viereck ist; wie wird D construiert? Es giebt immer drei Lösungen, je nachdem D auf arc BC, oder CA, oder AB liegen soll, welchen Fällen entsprechend D mit A_1, B_1, C_1 bezeichnet werden mag. Die drei centrischen Vierecke ABA_1C, BCB_1A, CAC_1B haben denselben Umkreis, aber verschiedene Inkreise; wie liegen deren Centra, welche Seiten und Winkel hat dieses Centraldreieck? Welche Relationen bestehen zwischen den Radien der Inkreise? Sind insbesondere diese Radien Wurzeln einer cubischen Gleichung? etc."

Die Gleichungen, welche der Verfasser für die Lösung dieser Aufgabe hergeleitet hat, ergaben, dass die Aufgabe nicht drei, wie oben vermutet wird, sondern sechs Lösungen hat, und zwar aus folgendem Grunde.

Die Elementargeometrie untersucht, wann in ein Viereck ein Kreis beschrieben werden kann, und sie findet, dass die Summen der gegenüberliegenden Seiten gleich sein müssen. Definieren wir aber als Inkreis denjenigen Kreis, welcher die Seiten eines Vierecks berührt, und lassen dabei dahingestellt, ob die Berührung an den Seiten selbst oder deren Verlängerungen stattfinden soll, so existiert noch eine zweite Art von Inkreisen.

Berührt nämlich ein Kreis die Verlängerungen der Seiten eines Vierecks, so giebt es in diesem Viereck zwei anstossende Seiten, deren Summe gleich der Summe der beiden anderen Seiten ist. Sei ABCD (Fig. 8) ein solches Viereck; x, y, z, w seien die Tangenten aus den Ecken A, B, C, D. Dann ist:

$$AB = x - y \qquad CD = x - w$$
$$BC = y - z \qquad DA = w - z$$

Mithin (63)
$$AB + BC = CD + DA$$

Wenn umgekehrt in einem Viereck die Summe von zwei anstossenden Seiten gleich der Summe der beiden anderen ist, so existiert ein Kreis, welcher die vier Seiten an ihren Verlängerungen berührt.

Der Beweis geschieht auf Grund des vorigen Satzes genau wie in der Elementargeometrie.

Ist daher CAC_1B ein bicentrisches Viereck, dessen Inkreis vom Umkreis umschlossen wird, so ist $CAC_1'B$, wo $\begin{matrix} BC_1' = AC_1 \\ AC_1' = BC_1 \end{matrix}$, ein bicentrisches Viereck, dessen Inkreis ausserhalb des Umkreises liegt.

Hieraus wird uns klar, warum die Steiner-Jacobi'sche Gleichung
$$(r^2 - d^2)^2 = 2\,\rho^2\,(r^2 + d^2)$$
nach d^2 zwei Auflösungen hat; nämlich:
$$d^2 = r^2 + \rho^2 \pm \rho\sqrt{\rho^2 + 4\,r^2}$$
wo sich das untere Zeichen auf den umschlossenen, das obere auf den nicht umschlossenen Inkreis bezieht.

§ 20. Zu den drei Peripheriepunkten A, C, B sei auf dem Bogen AB ein Punkt C_1 so bestimmt, dass $ACBC_1$ ein bicentrisches Viereck ist (Fig. 9). Die Diagonalen AB und CC_1 schneiden sich im Punkte P_c, für welchen der Umkreis und der Inkreis eine gemeinsame Polare haben. Auf dieser Polare liegt auch der Pol Q der Diagonale AB. Nach unserem Lehrsatze in § 17 muss jeder Kreis, welcher den Umkreis rechtwinklig schneidet und dessen Mittelpunkt auf der gemeinsamen Polare liegt, durch den Mittelpunkt O_c des Inkreises gehen. Der Mittelpunkt des Inkreises liegt aber auch auf der Halbierungslinie des Winkels ACB.

Daher ergiebt sich folgender Lehrsatz:

Der Mittelpunkt O_c des bicentrischen Vierecks $ACBC_1$ liegt 1) auf dem Kreise, dessen Mittelpunkt der Pol Q von AB und dessen Radius die Tangente QA ist, 2) auf der Halbierungslinie des Winkels ACB.

Der Punkt P_c liegt auf AB in der geradlinigen Verlängerung von MO_c.

Die Gerade CP_c liefert den Eckpunkt C_1 des bicentrischen Vierecks.

Der Mittelpunkt des nicht umschlossenen Inkreises ist derjenige Schnittpunkt der Halbierungslinie mit dem Q-Kreis, welcher ausserhalb des Umkreises liegt.

Man kann unseren obigen Satz auch ohne Benutzung der Polarentheorie einsehen. Es ist:

$$\sphericalangle CAC_1 + \sphericalangle CBC_1 = 2R$$
$$\sphericalangle CAO_c + \sphericalangle CBO_c = R$$

Mithin:

$$\sphericalangle AO_cB = R + \gamma$$

Der Kreisbogen über AB, welcher den Winkel $R + \gamma$ als Peripheriewinkel fasst, hat aber Q zum Mittelpunkt und QA zum Radius.

§ 21. Um die Länge des Radius ρ_c des Inkreises zu berechnen (Fig. 10), fällen wir die Senkrechten O_cD und O_cE auf AC und BC und bezeichnen wir den Winkel DAO_c mit δ. Dann ist $\sphericalangle EBO_c = R - \delta$. Ferner ist:

$$CD = CE = \rho_c \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}$$

$$(64) \quad \left| \begin{array}{l} AD = b - \rho_c \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} \\ BE = a - \rho_c \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} \end{array} \right.$$

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{OD}{AD} = \frac{\rho_c}{b - \rho_c \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}}$$

$$\operatorname{tg} (R - \delta) = \frac{OE}{EB} = \frac{\rho_c}{a - \rho_c \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}}$$

Da aber: $\operatorname{tg} \delta \,.\, \operatorname{tg} (R - \delta) = 1$ ist, so ergiebt sich als Gleichung für ρ_c:

$$(65): \quad \rho_c^2 = \left(a - \rho_c \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}\right) \left(b - \rho_c \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}\right)$$

Unter analogen Bezeichnungen für die bicentrischen Vierecke BA_1CA, CB_1AB ergeben sich als Gleichungen für die Radien der drei Inkreise:

$$\rho_c^2 = \left(a - \rho_c \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}\right) \left(b - \rho_c \operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2}\right)$$
$$\rho_a^2 = \left(b - \rho_a \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}\right) \left(c - \rho_a \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}\right)$$
$$\rho_b^2 = \left(c - \rho_b \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}\right) \left(a - \rho_b \operatorname{cotg} \frac{\beta}{2}\right)$$

Die eine Gruppe von Lösungen dieser quadratischen Gleichungen giebt die Radien für diejenigen Inkreise, welche vom Umkreis umschlossen werden; die andere für diejenigen, welche nicht umschlossen werden.

Der Zusammenhang, welcher zwischen diesen Radien besteht, ist wegen der complicierten Natur ihrer Gleichungen nicht leicht zu überblicken. Wenigstens ist es dem Verfasser nicht gelungen, hinreichend einfache Beziehungen herzustellen.

Dagegen bestehen einfache Beziehungen zwischen den Seiten, welche das Dreieck ABC zum bicentrischen Viereck ergänzen. Setzen wir zur Abkürzung $\operatorname{cotg} \frac{\gamma}{2} = m$ und lassen wir den Index c in der folgenden Rechnung fort, so ist aus Figur (10) ersichtlich, dass

$$AC_1 = b - \rho m + \frac{\rho}{m}$$

$$BC_1 = a - \rho m + \frac{\rho}{m}$$

Das Produkt beider Seiten lautet:

$$AC_1 \,.\, BC_1 = (b - \rho m)(a - \rho m) + \frac{\rho}{m}(a + b - 2\rho m) + \frac{\rho^2}{m^2}$$

Nach Formel (65) ist: $(b - \rho m)(a - \rho m) = \rho^2$

daher (66):

$$\left| \begin{aligned} AC_1 \,.\, BC_1 &= \rho^2 + \frac{\rho}{m}(a + b) - 2\rho^2 + \frac{\rho^2}{m^2} \\ &= \frac{\rho}{m}(a + b) + \rho^2 \left(\frac{1 - m^2}{m^2}\right) \end{aligned} \right.$$

Aus $\rho^2 = (a - \rho m)(b - \rho m)$ folgt aber:

$$\rho^2 (1 - m^2) = ab - m\rho(a + b)$$

oder, wenn wir durch m^2 dividieren:

(67): $$\rho^2 \left(\frac{1 - m^2}{m^2}\right) + \frac{\rho}{m}(a + b) = \frac{ab}{m^2}$$

Dieser Wert führt die Gleichung (66) über in:

(68): $$AC_1 \,.\, BC_1 = ab \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}$$

Bedenken wir, dass $AC_1 - BC_1 = b - a$ ist, so lassen sich die beiden letzten Gleichungen nach AC_1 und BC_1 auflösen. Die Lösungen sind:

(69): $$\begin{aligned} AC_1 &= \frac{b - a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b - a}{2}\right)^2 + ab \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}} \\ BC_1 &= -\frac{b - a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b - a}{2}\right)^2 + ab \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}} \end{aligned}$$

Das eine Lösungspaar gilt für $ACBC_1$ mit dem umschlossenen Inkreis; das andere für $ACBC_1'$ mit dem nicht umschlossenen Inkreis. Man bemerkt, dass

$$AC_1 = -BC_1'$$

$$BC_1 = -AC_1'$$

ist. Das negative Zeichen giebt die veränderte Richtung an, in welcher die Längen $|AC_1|$ und $|BC_1|$ angelegt worden sind.

Aus

$$AC_1 - BC_1 = b - a$$

$$BA_1 - CA_1 = c - b$$

$$CB_1 - AB_1 = a - b$$

folgt (70): $$AC_1 + BA_1 + CB_1 = BC_1 + CA_2 + AB_1$$

Im Sechseck $AC_1BA_1CB_1$ ist die Summe dreier nicht zusammenhängenden Seiten gleich der Summe der drei anderen Seiten.

Mittelst der Gleichungen $AC_1 \,.\, BC_1 = ab\,\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}$

(71): $BA_1 \,.\, CA_1 = bc\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$

$CB_1 \,.\, AB_1 = ca\,\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}$ bilden wir das Produkt der Seiten des Sechsecks:

$$AC_1 \,.\, BC_1 \,.\, BA_1 \,.\, CA_1 \,.\, CB_1 \,.\, AB_1 = a^2 b^2 c^2\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}$$

$$= (4r^2)^3\, 4^3 \sin^4\frac{\alpha}{2}\sin^4\frac{\beta}{2}\sin^4\frac{\gamma}{2}$$

Sei k der Radius des einbeschriebenen Kreises von Dreieck ABC, so ist:

$$\frac{k}{2r} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

Mithin (72): $$AC_1 \,.\, BC_1 \,.\, BA_1 \,.\, CA_1 \,.\, CB_1 \,.\, AB_1 = (2r \,.\, k^2)^2$$

Das Produkt der Seiten des Sechsecks $AC_1BA_1CB_1$ hängt also nur von r und k ab; wo r der Radius des Umkreises, k derjenige des Inkreises vom Dreieck ABC ist.

Da die Winkelhalbierungslinien des Dreiecks ABC durch einen Punkt gehen, so ist $O_aO_bO_c$ collinear zu ABC. (Fig. 11.)

Ebenso ist Dreieck $P_AP_BP_C$ collinear zu $O_aO_bO_c$, weil die Verbindungslinien O_AP_A, O_bP_b, O_cP_c durch den Punkt M gehen. (Fig. 11.)

§ 22. Schlussbemerkungen. Die weiteren Untersuchungen, welche Herr Schlömilch angeregt hat, beziehen sich auf die Diagonalen CC_1, AA_1, BB_1, welche sich in einem Punkte R schneiden. Das bedeutet, dass auch das Dreieck $P_AP_BP_C$ collinear zu ABC ist. Zu dem Sechseck gehört, wenn wir C_1B mit CB_1 etc. zum Schnitt bringen, eine Pascal'sche Gerade, welche R zum Pole hat. Das Sechseck ist also auch ein Brianchon'sches Sechseck; d. h.: es lässt sich in $AC_1BA_1CB_1$ ein Kegelschnitt beschreiben, welcher in seinen Beziehungen zum Grunddreieck ABC zu untersuchen ist.

Der Schnittpunkt R der drei Diagonalen ist demnach ein merkwürdiger Punkt des Dreiecks von der Eigentümlichkeit, dass seine Verbindungslinie mit einem Eckpunkte des Dreiecks den unbeschriebenen Kreis in einem zweiten Punkte schneidet, welcher mit den Eckpunkten ABC ein bicentrisches Viereck bildet. Dem Punkte R entspricht ein Gegenpunkt R', welcher die zweite Gruppe von bicentrischen Vierecken liefert. Aller Wahrscheinlichkeit nach liegen die Punkte R und R' auf der Centrale MO des Dreiecks ABC.

Unsere Untersuchungen über das bicentrische Viereck haben vom Diagonalpunkt P ihren Ausgangspunkt genommen. Wir nahmen stillschweigend an, dass P innerhalb des Inkreises liegt. Aus der Gleichung

$$d = \frac{\rho^2 p}{\rho^2 - p^2}$$

erkennen wir, dass M sich um so weiter von O entfernt, je mehr P sich der Peripherie des Inkreises nähert. Liegt P auf der Peripherie, d. h.: ist $p = \rho$, so ist M ins Unendliche gerückt und der Umkreis in eine gerade Linie ausgeartet. Wird $p > \rho$, so bekommen wir für d einen negativen Wert. Der Punkt M liegt dann mit P auf derselben Seite von O. M kehrt gewissermassen auf der entgegengesetzten Seite der Centralaxe aus dem Unendlichen zurück.

Der Punkt P kann sich jedoch nicht beliebig weit von O entfernen. Denn

$$r = \frac{\rho^2 \sqrt{2\rho^2 - p^2}}{\rho^2 - p^2}$$

ist bei $p > \rho\sqrt{2}$ imaginär.

Auch der Lehrsatz (43)

$$L_1O = \rho\sqrt{2}$$

zwingt den Punkt P innerhalb des Bereiches $\rho\sqrt{2}$ zu bleiben. In der That kann man auch nur innerhalb dieses Bereiches zwei normale Berührungssekanten ziehen, welche jetzt die Stelle der Berührungssehnen des § 1 vertreten. Im Grenzfalle $p = \rho\sqrt{2}$ ist $r = o$. Der Umkreis reduziert sich dann auf einen Punkt.

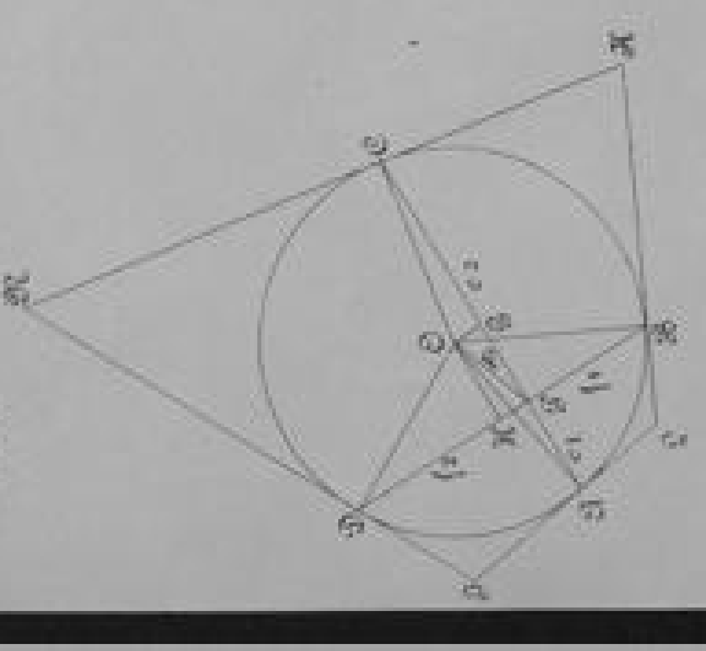

Fig. 1

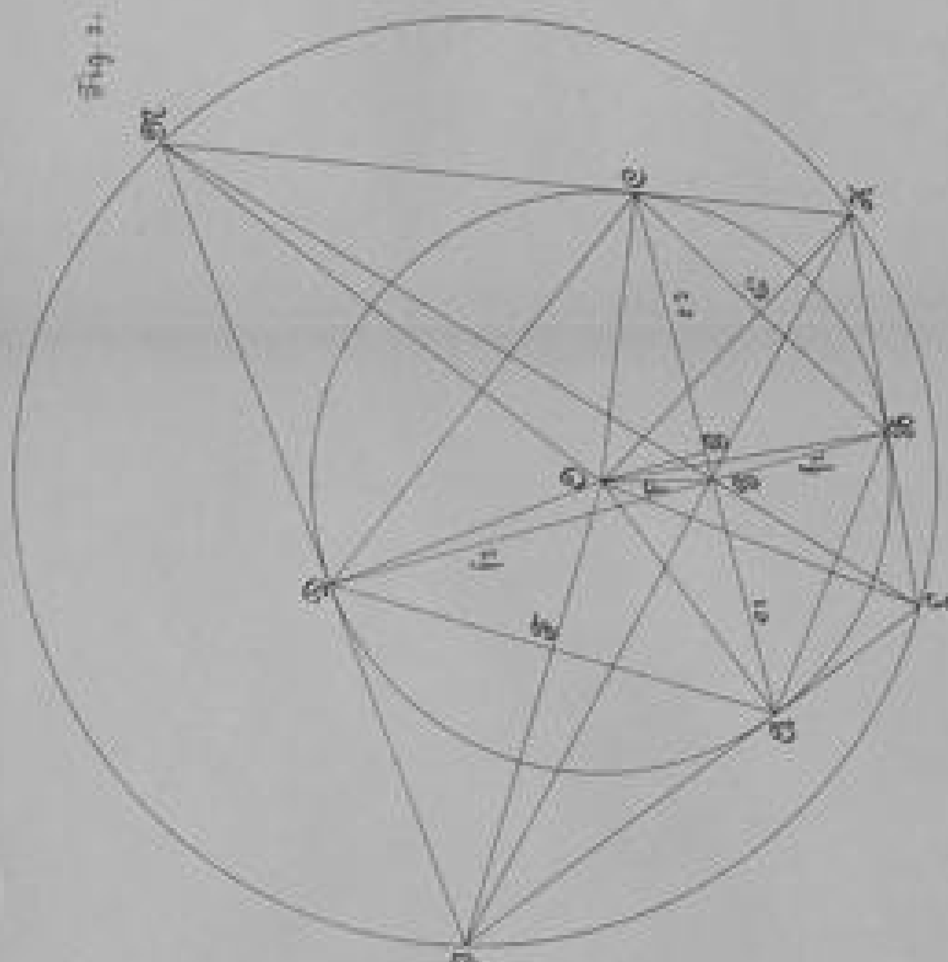

Fig. 2

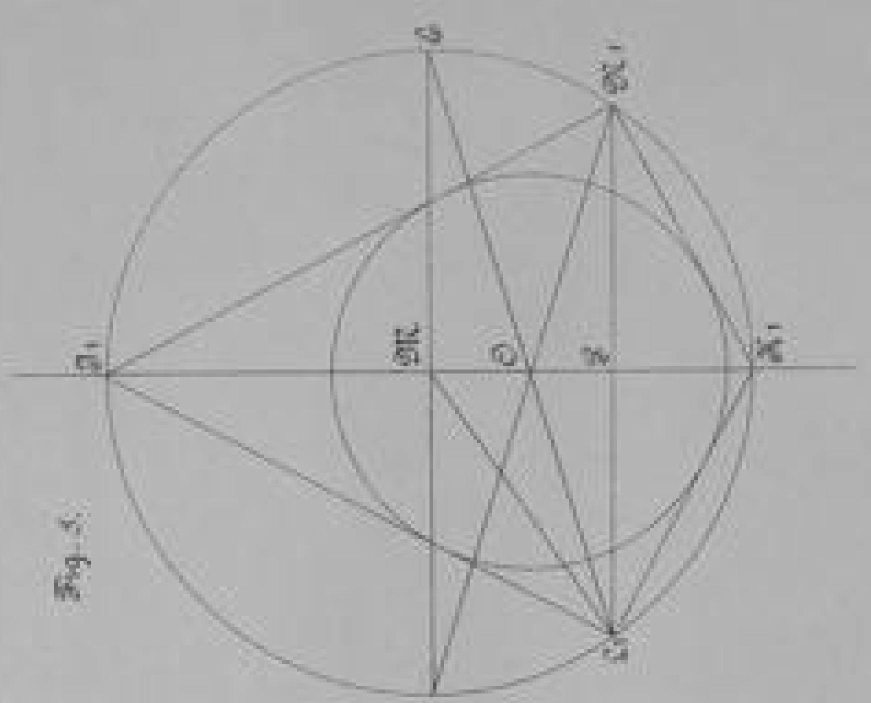

Fig. 3

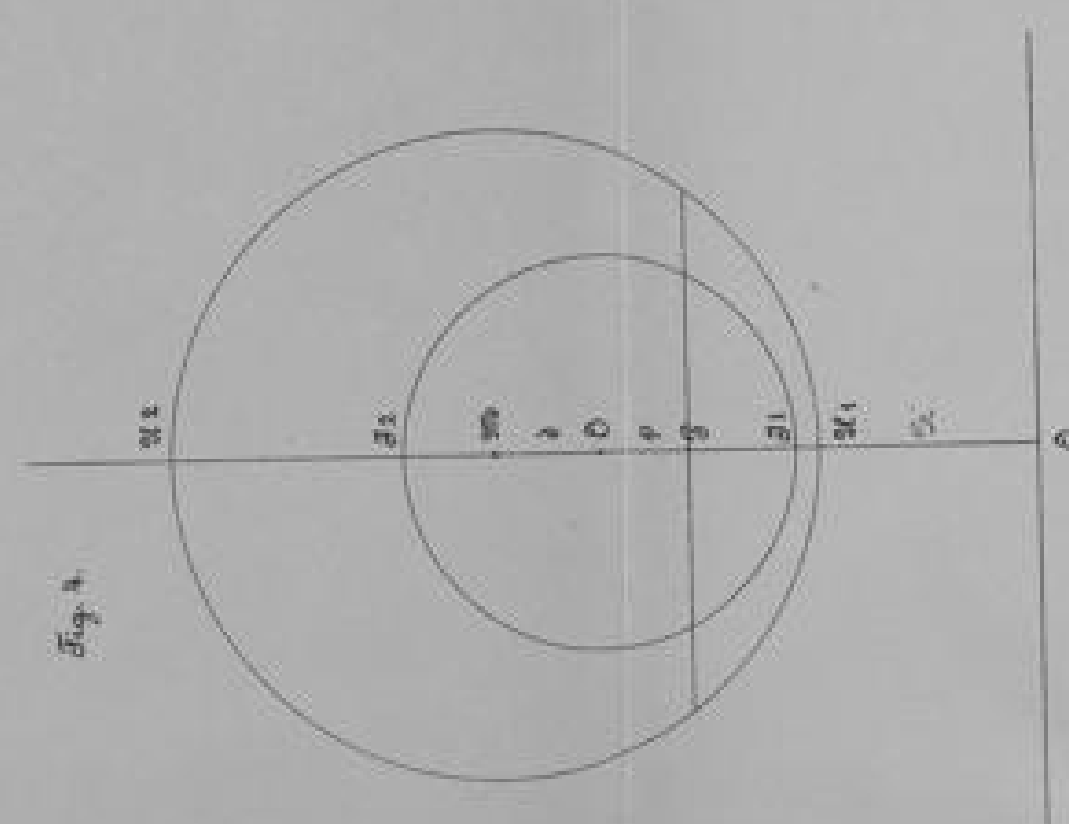

Fig. 4

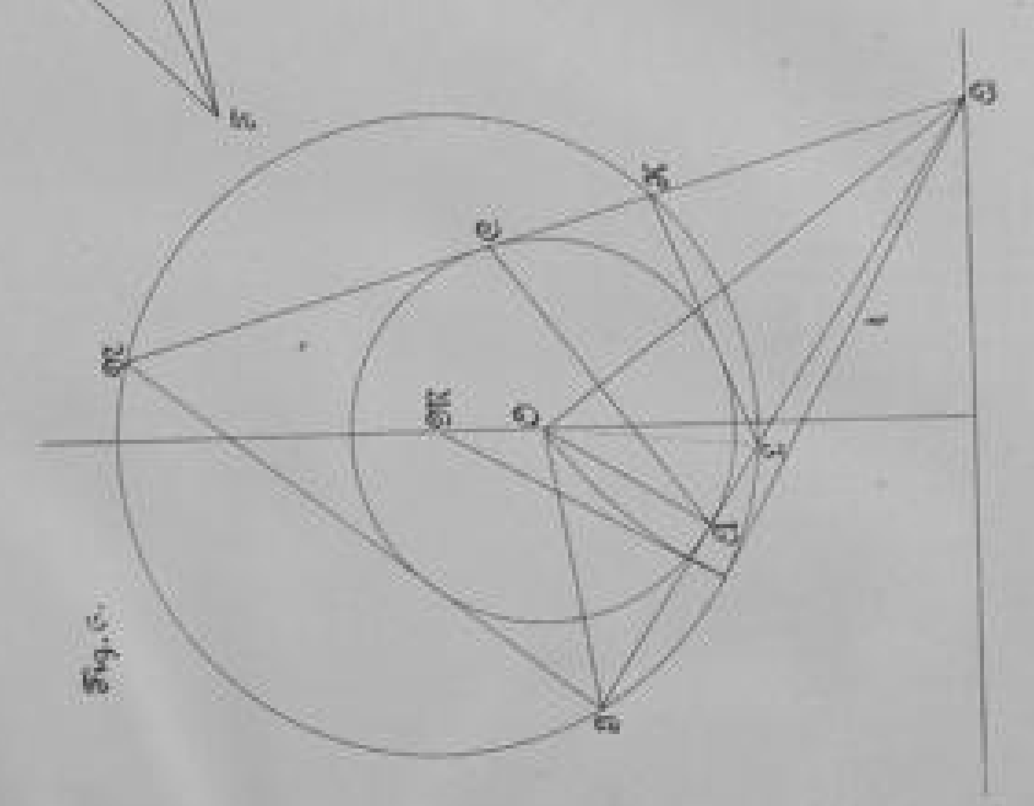

Fig. 5

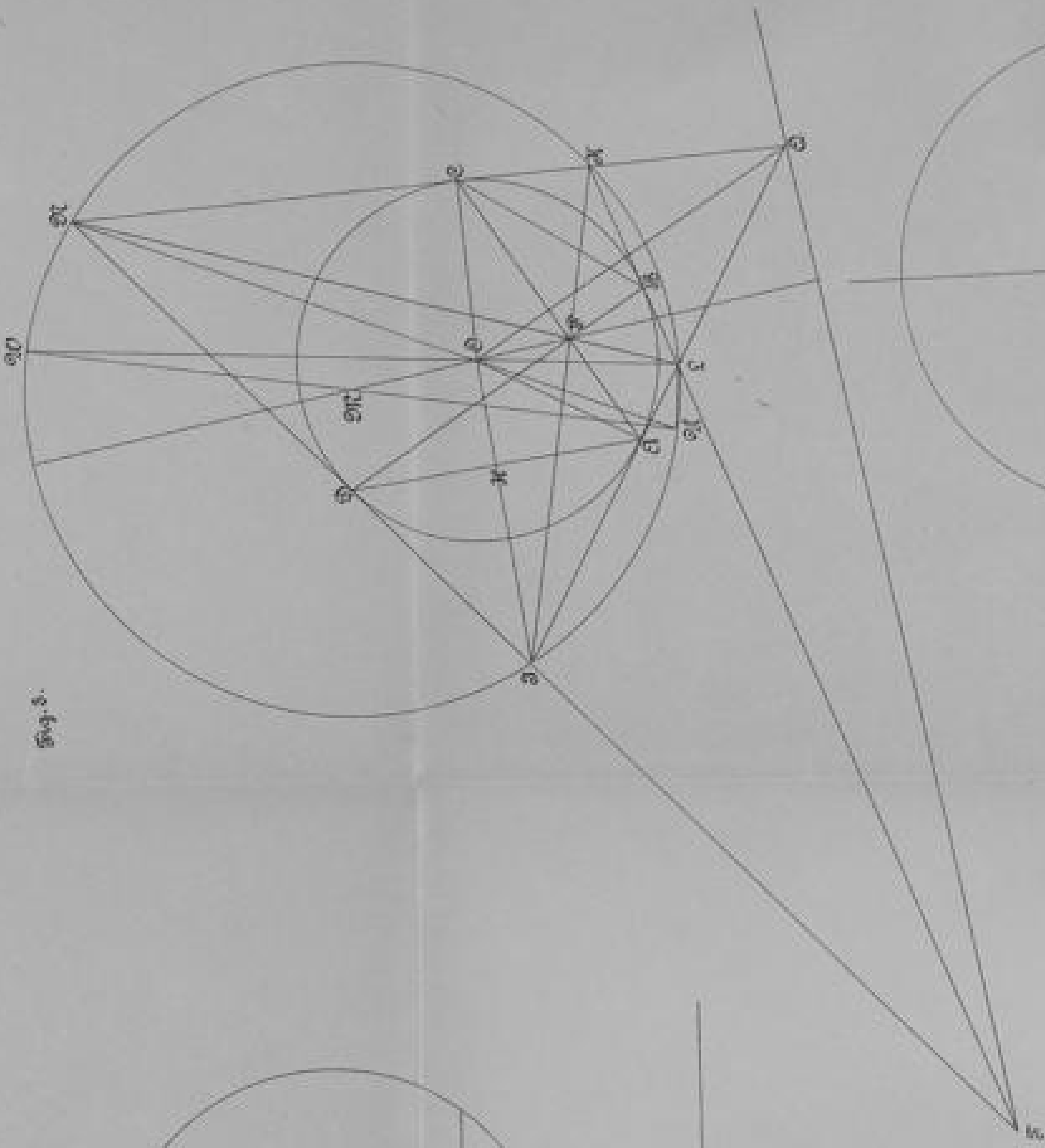

Fig. 6

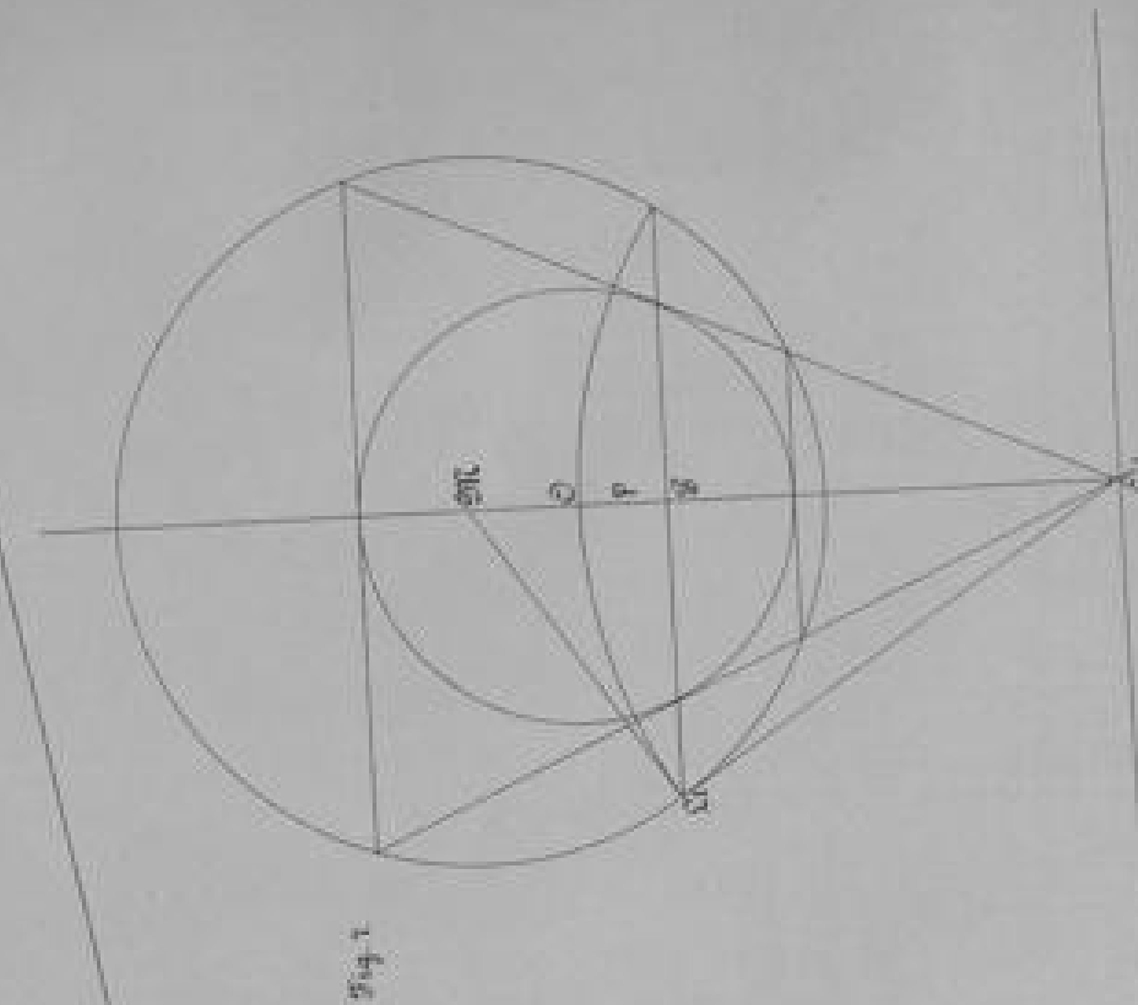

Fig. 7

Fig. 8

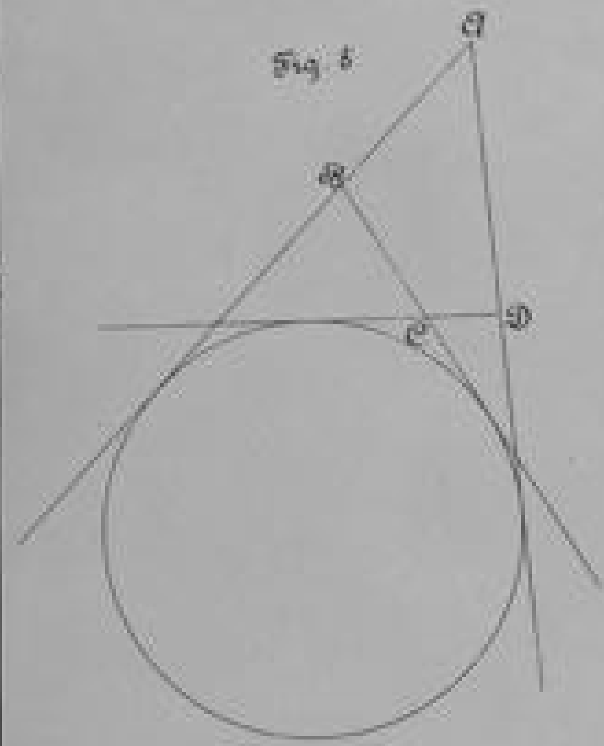

Fig. 9

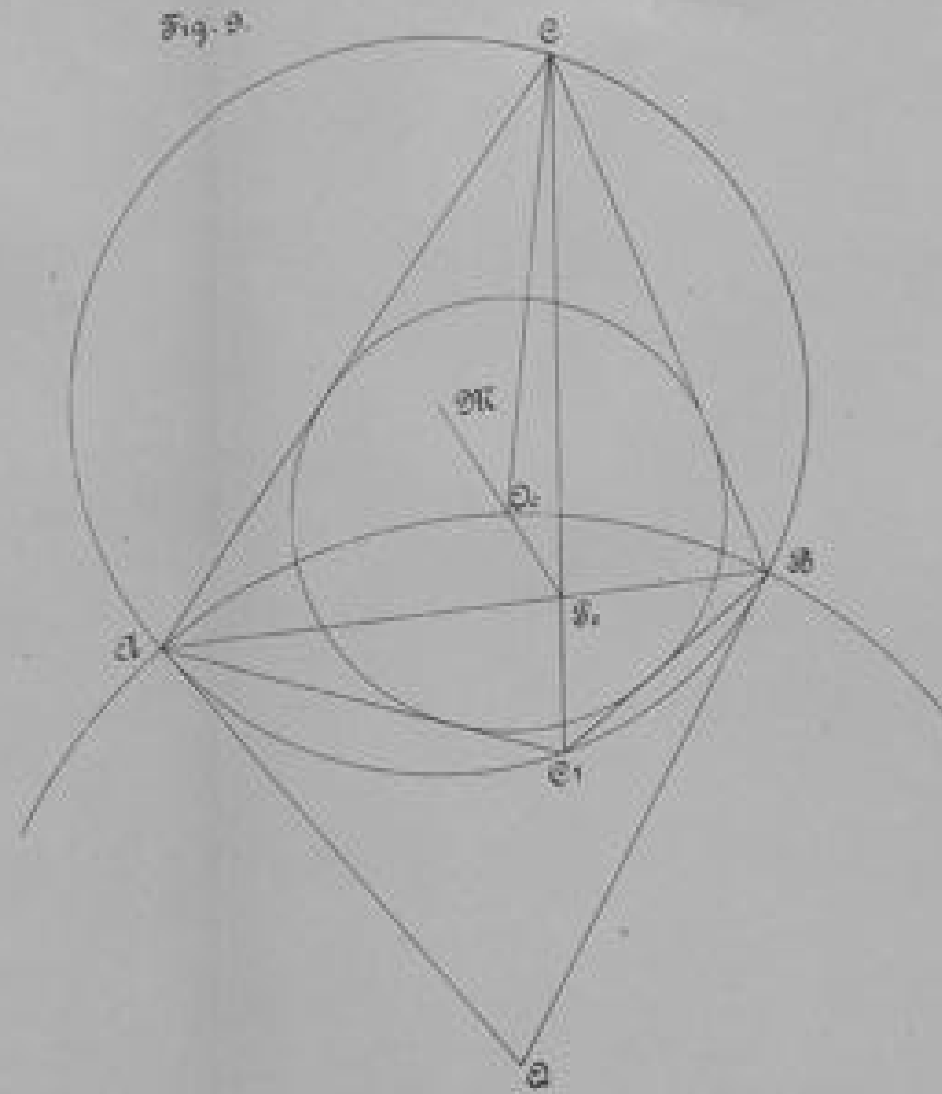

Fig. 10

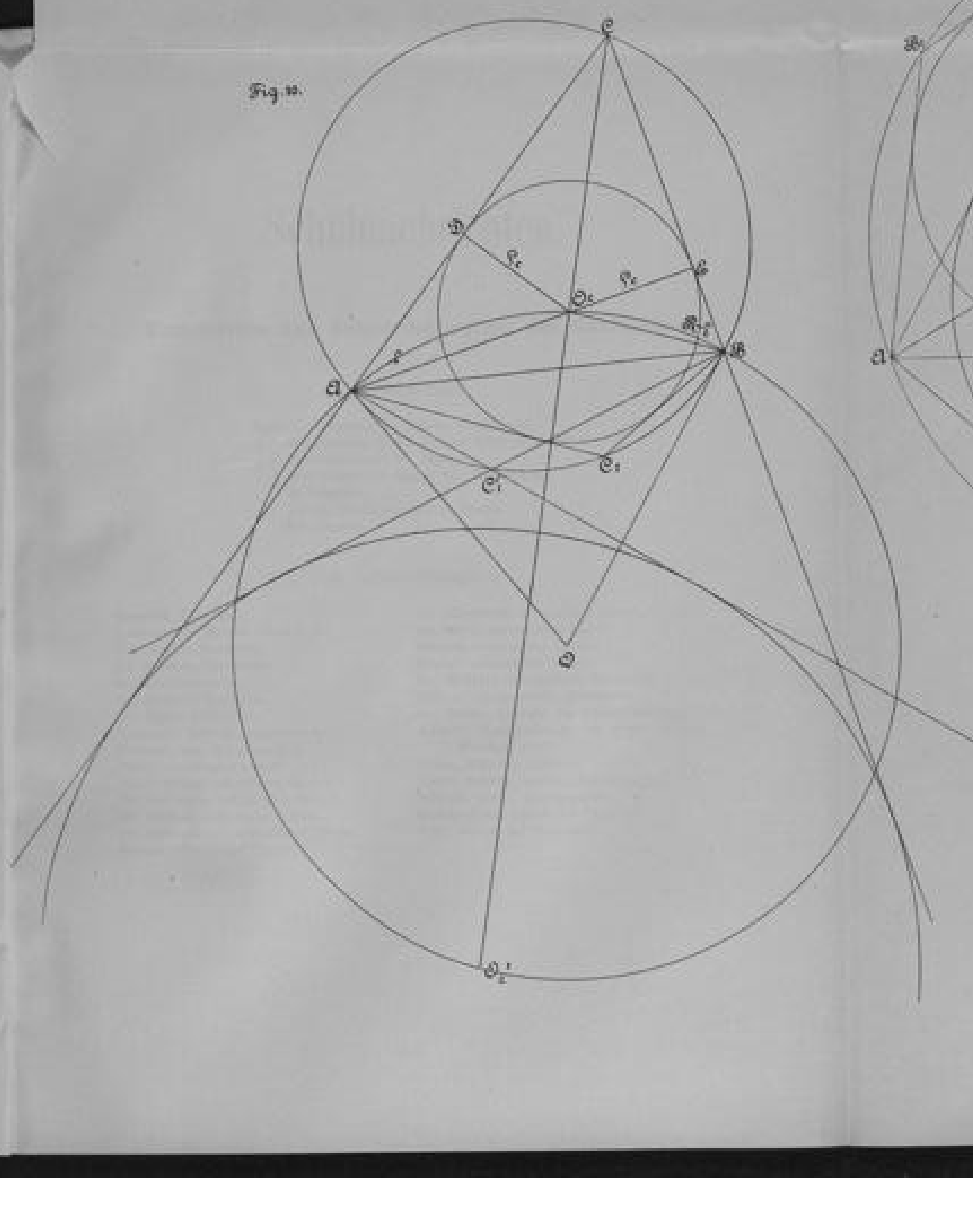

Fig. 11