Der Rechenunterricht an höheren Lehranstalten.

Die besonders früher sehr verbreiteten Klagen, dass die Schüler mittlerer und oberer Klassen höherer Lehranstalten nicht über die unbedingt nötige Menge von Kenntnissen und Fertigkeiten im Rechnen verfügen, um einfache Aufgaben, wie sie in der Algebra oder im praktischen Leben fortwährend vorkommen, schnell und sicher zu lösen, mögen trotz der bedeutenden Fortschritte, welche der Rechenunterricht in den letzten Jahrzehnten unzweifelhaft gemacht hat, noch immer nicht verstummen. Und in der That machen die meisten Lehrer der Mathematik oft recht traurige Erfahrungen in dieser Beziehung. Wie manche Stunde kostbarer Zeit geht in der Algebra z. B. bei der Lösung von Gleichungen dadurch verloren, dass die grosse Mehrzahl der Schüler nicht imstande ist, mit grösseren ganzen Zahlen, gemeinen Brüchen und Decimalbrüchen leicht und schnell zu rechnen, und dass es ihr beim Aufstellen der Gleichungen oft an Übung und Geschicklichkeit fehlt, die in der Aufgabe gegebenen Beziehungen und Verhältnisse so zu ordnen und zusammenzufassen, dass das Gegebene der Ausgangspunkt und das Gesuchte der Zielpunkt der verlangten Operation werde. Welche Befangenheit zeigen nicht häufig die Schüler, wenn sie mitunter ganz einfache Beziehungen, die ihnen aus dem Rechenunterricht bekannt sein müssten, selbständig verarbeiten sollen, oder wenn Aufgaben mit Brüchen oder Decimalbrüchen vorkommen. Man merkt dann deutlich, mit welcher Scheu, ja mit welchem Widerwillen häufig die Schüler an die Lösung herangehen, weil sie sich bewusst sind, dass sie von den Sachen, die in den unteren Klassen hundert Mal vorgekommen sind, und welche sie eigentlich wissen müssten, nur noch eine dunkle Ahnung haben. Da sie nun auch meistens nicht in der Lage sind, durch selbständiges Denken den richtigen Weg aufzufinden, so legen sie sich häufig auf's Raten, und dann hat man die nicht seltene Erscheinung, dass der Gefragte mehrere Antworten, die er in Bereitschaft hält, nach einander vorbringt, bis ihm das zufriedene Gesicht des Lehrers oder das entsprechende Verhalten der Klasse sagt, dass er endlich das Richtige getroffen hat. Wie häufig sieht sich dann der Lehrer der Mathematik gezwungen, die eine oder andere Regel aus der Bruchrechnung abzuleiten und sich mit Dingen zu beschäftigen, welche in die unteren Klassen gehören. Leider aber halten die auf diese Weise erworbenen Kenntnisse nicht lange vor, und grade im Rechnen gilt ganz besonders das Sprichwort: „Was Hänschen nicht lernt, lernt Hans nimmermehr". —

Die Klagen andrerseits, welche von Kaufleuten, Gewerbetreibenden u. a. über die mangelhaften Kenntnisse im Rechnen bei früheren Schülern höherer Lehranstalten erhoben werden und die oft fast unglaubliche Dinge berühren, scheinen — soweit sie sich nicht etwa auf die sogen. kaufmännischen Rechnungsarten beziehen — nach dem Gesagten nicht unberechtigt zu sein. Es dürfte deshalb die Aufgabe, welche sich der Verfasser in der vorliegenden Arbeit gestellt hat, von allgemeinem Interesse sein. Es sollen nämlich die Gründe erörtert, welche die genannten Erscheinungen hauptsächlich bedingen, sowie im Anschluss daran einige Vorschläge zur Besserung in dieser Beziehung gemacht werden. —

Dem Rechenunterricht der früheren Jahrhunderte lag wohl einzig und allein die Absicht zu Grunde, die Menschen zum Rechnen mit Münzen, Massen und Gewichten oder überhaupt zum Lösen von Aufgaben von ausschliesslich praktischer Bedeutung geschickt zu machen. So sagt z. B. der Altmeister der „Rechenkunst" Adam Riese: „Ich habe gefunden in der Unterweisung der Jugend, dass alle weg, die so auf den Linien anheben, des Rechnens fertiger und läuftiger werden, denn so sie mit den Ziffern, die Feder genannt anfahen. In den Linien werden sie fertig des Zählens und alle Exempla der Kaufhändel und Hausrechnung schöpfen sie einen besseren Grund u. s. w."

Selbst bei schwierigeren Aufgaben ist die Entwickelung des Urteilens und Schliessens nicht Selbstzweck der Riese'schen Methode, die nur auf Erleichterung des Lernens solcher Aufgaben gerichtet ist, welche für das praktische Leben von Bedeutung sind, wie z. B. bei der Aufgabe No. 499 in dem Abschnitt „Erbteilung und Vormundschaft": „Ein Vater vorlest seim Weib | fünff Kinder | an bar schafft u. Güttern | 9870 fl. | die Mutter nimet den 3ten teil | die Vormünder legen den Kindern auff Zins 4800 fl. | Namen jherlich 5 fl. | vom hundert | geben der Mutter von einem Kindt in die kost | zu schuhen u. kleidern das jahr 23 fl. nach ausganck dreier jhar | wandern 2 kinder | geth auff eines das jhar 40 fl. | wieuil gebürt der Mutter erster teilung | und auch jedem Kind nach ausganck fünffer jhar?"

In demselben Sinne lehrten auch die Nachfolger Riese's, und Prof. Sachse*) hat zweifellos recht, wenn er sagt: „Die „Wälsche Praktik", die „Basedow'sche Reihe", die „Kettenregel" und all die zahlreichen praktischen Rezepte, die noch bis in unser Jahrhundert herein die Rechenbücher füllten und zum Teil weit über das Bedürfnis des Verkehrs hinausgehen, bekunden ein Streben nach Vervollkommnung des Rechen-Mechanismus. Letzterer darf nun zwar nie in seiner allgemein mathematischen Bedeutung unterschätzt werden; gleichwohl machen jene Werke gegenwärtig einen traurigen Eindruck auf das Gemüt des Lehrers und Erziehers; denn er erkennt daraus deutlich, wie das ganze Unterrichten nur ein Abrichten auf unverstandenes Können war. Es sieht fast aus, als hätten jene Verfasser geflissentlich die Einführung in das Verständnis vermieden. Man wird unwillkürlich noch an die Zeiten eines Descartes und Galilei erinnert, in denen man Entdeckungen und Lösungen von Aufgaben in Anagrammen und anderen geheimnisvollen Formen veröffentlichte."

Nachdem im vorigen Jahrhundert Comenius, Franke u. a. sich bedeutende Verdienste um die Erziehungs- und Unterrichtswissenschaft erworben hatten, waren die Leistungen Pestalozzi's und seiner Schüler auf dem Gebiete des niederen Rechenunterrichts von grundlegender Bedeutung. Herbart, der die Ausbildung der Erziehungswissenschaft sich zur Lebens-

*) Rechenunterricht und Rechenbuch, eine historisch-kritische Studie mit besonderer Beziehung auf das Gymnasium. Progr. des Gymnasiums Carolo-Alexandrinum zu Jena, Ostern 1884.

aufgabe machte, „war es nun, der die von Pestalozzi instinktiv gefundenen grossen Ideen mit klarem Blick erkannte, wissenschaftlich begründete und fortentwickelte". Im Jahre 1802 schreibt er (an 3 Frauen): „Das Heil des Volkes ist Pestalozzi's Ziel". „Ausser dem ABC der Anschauung und ausser einer Reihe von Vorschlägen zu Sprachübungen —, finden Sie in seinem Buche noch ein drittes sehr allgemeines Mittel **alles Lernens** ausgezeichnet, das mit jenen beiden zusammen das Fundament alles übrigen Unterrichts ausmachen soll. Es ist die Übung im Gebrauch der Rechenkunst." —

Aus einer grossen Menge anderer Stellen aus Herbart's Schriften geht deutlich hervor, welche Bedeutung er der Mathematik im allgemeinen und dem Rechenunterricht im besonderen für die Erziehung beilegt. Es sei mir gestattet, das Allerwichtigste davon kurz anzuführen: „In dieser Rücksicht wird freilich auch davon viel abhängen, wie mächtig Sie sich derjenigen Wissenschaften und Übungen finden, in welchen wir die wichtigsten Hülfsmittel der Erziehung finden werden. — Dahin zähle ich vorzüglich griechische Litteratur und Mathematik. . . . . . Gerade dasjenige Feld der Begriffe, von woher die Erziehung für die gegenwärtige Aufgabe Hülfe erwartet, ist unter allen Regionen des menschlichen Wissens am vortrefflichsten angebaut. Ohne Zweifel, weil dieser Boden für die Kultur am meisten empfänglich war; weil keine andere Art von Kenntnissen, als die, welche Form durch Zahl bestimmen, sich so willig zur Evidenz erheben lassen; weil grade diese Begriffe unter allen die begreiflichsten sind. Demnach ist sowohl diese Wissenschaft vor andern am meisten fertig und bereit, Hülfe zu geben, — als auch diese Hülfe vorzüglich willkommen, weil sie der Natur des menschlichen Denkens am nächsten verwandt ist. In der That, in jedem Kopfe, der, ohne die Arithmetik und Geometrie zu besitzen, sich mit andern Kenntnissen und Ideen vertraut gemacht hat, die ihrer Natur nach spätere Erzeugnisse des menschlichen Denkens sind, findet sich eine Disproportion der Ausbildung, deren Grösse man am leichtesten dadurch schätzen wird, dass man in der Geschichte nachsieht, wie viele Vorbereitungsstufen bis zur andern Art von Ideen durchlaufen werden mussten. Sind schon diese Bemerkungen von einigem Gewicht, so giebt es doch noch weit dringendere Gründe, welche der Pädagogik den Gebrauch der Mathematik empfehlen. Man prüfe die folgenden, hier freilich nur kurz anzudeutenden, Betrachtungen und urteile, ob es eine Uebertreibung wäre, wenn man die Mathematik unentbehrlich nennte, — unentbehrlich für Anfang, Mittel und Ende eines solchen Unterrichts, wie ihn die Pflichten der Erziehung erfordern."

„. . . Die Grössenbegriffe sind es vor allen andern, worüber sich der Lehrer dem Zögling in Worten recht vollkommen ausdrücken und von ihm dasselbe wieder verlangen kann und darf. Hier ist nichts, was sich der Sprache entzöge, nichts, was sich vor umständlichem Hin- und Herreden zu scheuen hätte. Keine Regungen feiner Gefühle sind hier zu schonen, keine Langeweile ist zu fürchten — so lange man nicht etwa den Gegenstand unter seiner Würde behandelt. — Hier also, an der einen und gleichen Stelle, wo auch das Bildungsmittel für die Anschauung liegen muss, — hier hat man zu suchen, was sonst nirgends zu finden ist: Den Faden für einen frühen Kinderunterricht, der so beschaffen sei, dass er sowohl **sich** als **aller andern** Unterweisung eine Autorität schaffe, auf deren Geheiss die Zerstreuung entweiche, die Aufmerksamkeit komme und beharre." .... „Die eigentliche Vollenderin in der Erziehung ist die Philosophie; aber die Gefahren der Philosophie abzuwenden, ist das Amt der Mathematik."

„Um die Vorübung im Denken abzugeben, muss das mathematische Räsonnement keine eigene Art des Denkens sein, sondern es muss den nämlichen Gang nehmen, den allgemein der gesunde Verstand seiner Natur nach geht." ...

.... „Man sieht sogleich, wie sehr diese Unterscheidung auf die Mathematik anwendbar ist. Die grosse Wissenschaft beschäftigt wenigstens eben so sehr die Einbildungskraft, als das Schlussvermögen."

„Der pädagogische Wert des gesamten mathematischen Unterrichts hängt hauptsächlich davon ab, wie tief er in das Ganze des Kreises der Gedanken und Kenntnisse eingreife. Dies führt zunächst darauf, dass man die **Selbstthätigkeit** der Schüler in Anspruch nehmen und nicht blos vortragen soll. Mathematische Beschäftigungen sind nötig. Es muss fühlbar werden, wie viel man durch Mathematik vermag."

Aus den angeführten Stellen ersieht man deutlich, welche Bedeutung Herbart dem mathematischen Unterricht zur Ausbildung des Verstandes beilegt und wie er in Folge dessen überall gegen die mechanische, geistlose und abstumpfende Methode eifert und selbständiges Denken verlangt. — Ganz in demselben Sinne äusserte sich Diesterweg. Er sagt in den Vorreden zu seinem „Methodischen Handbuch für den Gesamt-Unterricht im Rechnen" (1844): „Noch sind wir bekanntlich nicht so weit gekommen, dass wir für die Pädagogik, Didaktik und Methodik allgemein anerkannte Principien überall aufzustellen vermöchten." — Aber im beschränkteren Kreise, für alle rationellen Gegenstände, zu welchen unbestritten der Unterricht in der Zahlenlehre gehört, glauben wir ein oberstes Princip aufstellen zu können. Wir entdecken es, wenn wir den Zustand des Kindes, aus dem ein Mann werden soll, mit der Beschaffenheit des vollendeten Mannes vergleichen. — Nun finden wir in dem Kinde die Empfänglichkeit (Rezeptivität), in dem ausgebildeten Manne die Selbstthätigkeit (Spontaneität) vorherrschen. Folglich soll jene zu dieser umgebildet werden, und unser Princip für die Methodik, wenigstens der rationellen Unterrichtsgegenstände, heisst: Unterrichte so, dass überall die Selbstthätigkeit des Schülers möglichst ausgebildet werde. Gleich dem Kantischen obersten Grundsatze der Moral ist dasselbe ein formales Princip."

Auch Diesterweg's Mitarbeiter Paul Heuser u. a. z. B. Krancke, Scholz u. s. w. haben in der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts sehr energisch in Theorie und Praxis gegen den „alten Riesen", Mechanismus genannt, geeifert und überall auf „vollkommene Einsicht und Erkenntnis" im Rechenunterricht gedrungen. —

Leider aber ist, wie auch Prof. Sachse in seiner Arbeit treffend nachweist, eine Menge von dem allgemein anerkannt Trefflichen und Wahren, welches jene Männer durch Wort und Schrift predigten, noch heute nicht vollständig verwertet, da grade im Rechenunterricht noch sehr viel mechanische und geistlose Thätigkeit anzutreffen ist, welche recht wohl zu entbehren bez. durch selbstthätige Geistesarbeit zu ersetzen ist. Der Grund für diese sehr auffallende Thatsache scheint mir zum grössten Teile darin zu liegen, dass noch heute — wie zu Adam Riese's Zeiten — als der ausschliessliche oder doch der Hauptzweck des Rechenunterrichts vielfach der gilt, „den Schülern die für das bürgerliche Leben nötige Fertigkeit und Sicherheit im Rechnen zu verschaffen", während der erziehliche Zweck erst in zweiter Linie und gewissermassen so nebenbei mit berücksichtigt wird. Diese Behauptung wird am schlagendsten durch den Unterrichtsgang der bei weitem grössten Zahl der Rechenbücher bestätigt und zwar nicht nur derjenigen, welche für Volksschulen bestimmt sind, sondern auch zum sehr überwiegenden Teil der ausdrücklich für höhere Schulen bearbeiteten. Man findet darin unverkennbar fast allgemein ein gewisses Streben, möglichst frühzeitig Aufgaben, wie sie im praktischen Leben vorkommen, zu bringen, gleichgültig, ob die Schüler auf der betreffenden Stufe vollkommene Sicherheit und Gewandtheit im Rechnen mit unbenannten Zahlen haben und ob dieselben geistig so weit gefördert sind, die in der Aufgabe enthaltenen Sachverhältnisse ohne bedeutendere Hülfe richtig aufzufassen und zu verarbeiten. Freilich erfreuen sich dergleichen Rechenbücher meistens der grossen Anerkennung der Eltern, da dieselben es allgemein als einen grossen Vorzug der Methode halten, wenn ihre Kinder recht früh viele und schwierige angewandte Aufgaben lösen. Dabei wird ganz ausser Acht gelassen, ob dies mit den Endzielen im Einklang steht oder nicht, denn nur sehr selten wird von nicht fachmännischer Seite die Wahrheit anerkannt, welche Prof. Schindler in den nachstehenden Worten so zutreffend ausspricht: „Was schliesslich die Bedeutung des mathematischen Unterrichts für die Schule betrifft, so sind wir der Ansicht, dass kein Unterrichts-Gegenstand Selbstzweck ist; dass vielmehr jeder Unterrichtsgegenstand nur ein Unterrichts-Mittel bildet, um eine Seite des jugendlichen Geistes auf eine nur durch diesen Unterrichts-Gegenstand erreichbare Art möglichst vollständig zu entwickeln. Darnach stellt eine Schule auch nur in dem Sinne einen Organismus dar, als dieselbe imstande ist, durch ihre Unterrichts-Gegenstände den jugendlichen Geist allseitig organisch und harmonisch zu bilden, d. h. fähig zu machen, die Gedanken Gottes, welche sich in dem Weltorganismus offenbaren, als organische zu begreifen, zu fühlen und darnach zu handeln."

Damit nun aber überhaupt der noch nicht genügend vorbereitete Schüler möglichst frühzeitig an die Lösung praktischer Aufgaben gehen kann, befindet sich in der genannten Art von Rechenbüchern häufig am Anfang jeder Gruppe von zusammengehörigen Aufgaben ein sogenanntes Musterbeispiel, welches mitunter noch von einer grösseren oder geringeren Anzahl zugehöriger Fragen begleitet ist. Dieses Musterbeispiel wird nun selbstverständlich in der Klasse gründlich durchgenommen, und im Anschluss daran werden viele andere ganz ähnliche Beispiele gerechnet, bis die Schüler in der Lage sind, dergleichen Aufgaben „selbständig" zu Hause zu lösen. Dabei wird dann freilich vergessen, dass von der Selbstthätigkeit des gesunden Menschenverstandes hierbei nicht mehr die Rede sein kann, denn die meisten Schüler werden ohne geistige Arbeit ihre Aufgaben dadurch lösen, dass sie vollständig mechanisch die betreffenden Zahlen in derselben Weise zusammenstellen, wie sie es gelernt haben. So kommt es beispielsweise nicht selten vor, dass nach ein und derselben Aufgabe in der Regel de tri, der Zinsrechnung u. s. w. Dutzende von Beispielen nach einander gerechnet werden, die sich nur durch die bestimmten Zahlen von einander unterscheiden, so dass die Schüler bald ohne weitere Überlegung wissen, dass sie in diesem Falle einen gewissen Teil, im andern ein gewisses Vielfaches zu nehmen haben, ohne dass sie häufig den Grund dafür angeben können. Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass bei dieser Art der Erledigung der angewandten Aufgaben auch die Bruchrechnung, Decimalbruchrechnung, Reduktion, Resolution u. s. w. eine ganz entsprechende mechanische Behandlung erleiden. Auch hier sieht man häufig die betreffende Regel fix und fertig über dem Abschnitt prangen. Es wird im günstigen Falle der Sinn derselben besprochen und ihre Einübung vorgenommen, an welche sich dann eine möglichst grosse Zahl von Aufgaben anschliesst, die nach kurzer Zeit vollständig mechanisch gerechnet werden, da die Schüler sehr bald nicht mehr nötig haben, an die Regel selbst oder deren Sinn zu denken. Sie wissen eben auch ohne Überlegung, dass sie bei dieser Art von Aufgaben die Zähler zu addieren oder zu subtrahieren, bei jener den Zähler zu multiplizieren u. s w. haben, und sie halten es für vollständig überflüssig, sich über die Gründe Rechenschaft abzulegen, da sie es ja so in der Schule gelernt und schon seit Wochen auf diese Weise das richtige Ergebnis erzielt haben. —

Man könnte mit dieser Art der Behandlung noch allenfalls einverstanden sein, wenn die so eingeübten Aufgaben in möglichst vielseitigem und regem Wechsel einander folgen würden, so dass die mechanische Thätigkeit nicht vollständig aufzukommen imstande wäre. Statt dessen aber werden gewöhnlich einige wenige Beispiele, die mit Mühe und Not eingearbeitet sind, wochenlang behandelt und auch schliesslich im Extemporale, das dann natürlich zu allgemeiner Zufriedenheit ausfällt, gegeben. Lässt man aber einige Monate später eine Aufgabe dieser Art rechnen, so wird man erfahren, dass ein sehr grosser Teil der Klasse keine Ahnung mehr davon hat, ein Beweis, dass das Verständnis dafür nicht vorhanden ist. —

Nicht besser ist die ebenfalls sehr verbreitete Art von Rechenbüchern, welche zum Verständnis durch eine Reihe von Fragen gelangen will, die den einzelnen Aufgabengruppen vorangehen. Bei genauer Betrachtung findet man, dass diese Fragen teils unzureichend, teils viel zu schwer für jemanden sind, der sich erst mit dem in Rede stehenden Stoff bekannt machen will, so dass sie häufig erst bei der Wiederholung von den Schülern selbständig beantwortet werden können, während anfangs der Lehrer den grössten Teil derselben selbst beantworten muss, was für die Ausbildung der geistigen Fähigkeiten der Schüler natürlich ohne wesentlichen Nutzen ist. —

Man darf nun wohl annehmen, dass mit diesen kurz charakterisierten Methoden der grössten Zahl von Rechenbüchern die Unterrichtsmethoden im allgemeinen übereinstimmen und nur verhältnismässig selten davon abweichen. Lässt sich somit kaum in Abrede stellen, dass die Richtung auf das Praktische sehr zum Nachteil des rein erziehlichen Zweckes im allgemeinen im Rechenunterrichte stark vorherrscht, so lässt sich andrerseits kaum leugnen, dass dieser praktische Erfolg, wie eingangs erwähnt, nicht der erstrebte ist, da erfahrungsgemäss nach einiger Zeit selbst die besten Rechner nur sehr wenig oder gar nichts mehr von der Bruchrechnung, Zins-, Rabatt-, Gesellschaftsrechnung u. s. w. wissen. Die einseitige Bevorzugung des praktischen Zweckes mag nun für die Volksschule einige Berechtigung haben, für höhere Lehranstalten, welche die männliche Jugend zu einer höheren allgemeinen Bildung durch den Unterricht in den Sprachen, der Mathematik u. s. w. führen sollen, ist dieselbe jedoch ohne Zweifel vollkommen unberechtigt und wohl ohne Frage der Hauptgrund für die geringen Erfolge und das geringe Ansehen, welches der Rechenunterricht an diesen Anstalten sehr häufig hat. Freilich lässt sich nicht leugnen, dass in den letzten Jahrzehnten den Mahnungen Herbart's, Diesterweg's u. a. mehr und mehr Beachtung geschenkt worden ist, nachdem man gesehen hat, dass man auf dem alten Wege um so weniger vorwärts kommt, als die neuere Zeit immer höhere Ansprüche an die anderen Disciplinen stellt, so dass man eher an eine Verminderung als an eine Vermehrung der wöchentlichen Rechenstunden denken musste. Es ist nun neuerdings wohl allgemein, so z. B. auf den Direktorenconferenzen, auf denen der Rechenunterricht mehrfach der Gegenstand eingehender Beratung war, die grosse Bedeutung anerkannt worden, welche derselbe als formales Bildungselement bei richtiger Behandlung zweifellos hat. Der Referent der Direktoren-Versammlung in der Provinz Hannover im Jahre 1879, Herr Dr. Carl Schultze, führt diesen Zweck sogar an erster Stelle an, indem er — entsprechend den Beschlüssen der 13ten westphälischen Direktoren-Versammlung — den dreifachen Zweck des Rechenunterrichts folgendermassen fasst:

1) durch die ihm eigentümlichen formalen Bildungselemente als Mittel zur Ausbildung des jugendlichen Geistes zu dienen;
2) dem Schüler die für das bürgerliche Leben nötige Fertigkeit und Sicherheit im Rechnen zu verschaffen;
3) als Vorbereitung für den mathematischen Unterricht zu dienen.

Mit der Verschiebung des Hauptzweckes muss nun aber natürlich auch die Veränderung der Methode Hand in Hand gehen, denn dieser Hauptzweck kann eben nur dann vollständig erreicht werden, wenn — soweit dies natürlich berechtigt ist — jede mechanische Thätigkeit rücksichtslos über Bord geworfen und durch selbstthätige, auf dem gesunden Menschenverstande beruhende Arbeit ersetzt wird. Dass dann aber das Rechnen nicht mehr nach bestimmten, auswendig gelernten und teilweise unverstandenen Regeln oder Musterbeispielen betrieben werden kann, sondern dass der Schüler sich in jedem einzelnen Falle genaue Rechenschaft von der Art und Weise seiner Thätigkeit ablegen muss, ist selbstverständlich. Er hat also nicht mehr bloss zu bearbeiten, wozu er in der Schule kunstgerecht abgerichtet ist, sondern im allgemeinen etwas seinem geistigen Standpunkt entsprechend Eigenartiges zu schaffen, wozu er in der Klasse nur die Anleitung bekommen hat. —

Die Änderung der Unterrichtsmethode aber fordert gebieterisch auch eine Änderung und Verbesserung der Lehrbücher für den Rechenunterricht, und dass grade in dieser Beziehung noch unendlich viel zu thun ist, geht bereits aus der obigen kurzen Kritik hervor. Ganz besonders aber ist dies nun mit Rücksicht auf die höheren Schulen der Fall, da ich nur sehr bedingungsweise zugeben kann, was Oberlehrer Ruhsam*) sagt: „Der Rechenunterricht in den unteren Klassen der Realschule soll im allgemeinen weder nach anderen pädagogischen Grundsätzen betrieben, noch nach andern Endzielen geleitet werden, als in den oberen Klassen einer gut eingerichteten Elementarschule.“ Prof. Harms, der sich um den Rechenunterricht grosse Verdienste erworben hat, stimmt dieser Ansicht bei und hält aus diesem Grunde ein und dasselbe Lehrbuch sowohl für Volksschulen wie für höhere Lehr-

*) Programmabhandlung der Progymnasial- und Realschulanstalt zu Annaberg 1865.

anstalten für ausreichend. Dieser Auffassung kann ich mich aber deshalb nicht anschliessen, weil sowohl die Endziele, wie die pädagogischen Grundsätze, die Stundenzahl als auch endlich das Schülermaterial auf den beiden Arten von Schulen im allgemeinen sehr verschieden ist. Ich stimme im Gegenteil den Forderungen des Oberlehrers Hickmann vollkommen bei, welcher sagt*): „Und während für die meisten Disciplinen die Litteratur eigene Hilfsmittel für die verschiedenen Arten von Unterrichtsanstalten geschaffen hat — ich erinnere insbesondere an die Durcharbeitung der lateinischen Grammatik — fehlt es für die betreffenden Lehrer der Realschule und des Gymnasiums fast noch ganz an einer speciellen Bearbeitung eines Unterrichtsfaches, dessen geistbildende Kraft der Volksschule zu gute kommen zu lassen, von Pestalozzi ab die tüchtigsten Schulmänner des laufenden Jahrhunderts mit Eifer und voller Hingabe gearbeitet haben, nämlich des Rechnens.“ Noch viel energischer vertritt die letzte Forderung der Direktor der Landwirtschaftsschule zu Flensburg, G. Liedtke**): „Nur der Wunsch möge hier ausgesprochen werden, dass auch das Rechnen, welches meines Erachtens mehr als zulässig von der Arithmetik losgelöst worden, wieder mehr als ein Gegenstand angesehen werde, welcher der Förderung durch die Philosophen und Mathematiker würdig ist, damit wir bald zu einer nach Anlage und Durchführung brauchbaren, nach den verschiedenen Schulen entsprechend modificierten Grammatik des Rechnens gelangen, und das Rechnen dann den mechanisch-empirischen Character mehr und mehr abstreife, der ihm doch noch etwas anklebt.“

Meiner Ansicht nach ist es freilich etwas zu weitgehend, für jede besondere Art von höheren Lehranstalten eine besondere Grammatik des Rechnens zu verlangen, da für alle höheren Lehranstalten die Endziele dieselben sind, während die Stundenzahl nur wenig verschieden ist. Dass aber andrerseits die für den Volksschulunterricht bestimmten Lehrbücher des Rechenunterrichtes für höhere Schulen nicht gut zu brauchen sind, wird jedermann selbst bei oberflächlichem Studium ziemlich bald klar. Die peinliche und kleinliche Gliederung des Stoffes, besonders aber die allzu ängstliche Berücksichtigung der pädagogischen Grundsätze, von der Anschauung und vom Besonderen auszugehen, ist der Hauptgrund für den zum Teil viel zu grossen Umfang und damit auch für die ausserordentlich geringe Übersichtlichkeit und Klarheit des grössten Teiles derselben. Man bedauert unwillkürlich die armen Präparanden bez. Seminaristen, für welche diese Lehrbücher in erster Linie bestimmt sind und noch mehr die armen Schüler, die später häufig nach dieser Methode unterrichtet werden. Wenn z. B. nicht selten sämtliche Regeln der Bruchrechnung durch die Anschauung allein gewonnen werden und jeder einzelne Fall möglichst in seiner Besonderheit und oft getrennt von den ähnlichen und verwandten Fällen behandelt wird, so braucht man sich nicht zu wundern, dass die Ableitung der dahingehörenden Regeln allein 100 Seiten in Anspruch nimmt und dass man dabei oft die wunderlichsten Dinge findet. Das Rechnen ist vorzüglich Denkthätigkeit und lässt sich eben nicht ausschliesslich, sondern nur in seinen Anfängen mit Hülfe der Anschauung betreiben. Da dem aber kaum widersprochen werden kann, so folgt mit Notwendigkeit, dass

*) Ein Beitrag zum Rechenunterricht in den unteren Klassen der Realschule, Programm der Realschule I. Ordnung zu Neustadt-Dresden, Ostern 1881.

**) Beitrag zum Rechenunterricht, Programm der Landwirthschaftsschule zu Flensburg, Ostern 1880.

hauptsächlich der Verstand bei Ableitung der Regeln, sowie beim Ausrechnen der angewandten Aufgaben angestrengt thätig sein muss. Denn nur das, was der Schüler vor seinem geistigen Auge hat entstehen sehen, beziehungsweise das, was er selbst geistig erarbeitet und verarbeitet hat, ist ihm allezeit gegenwärtig, und so wenig wie man ein Kind dadurch grossziehen kann, dass man für dasselbe isst, so wenig kann man auch seine geistigen Fähigkeiten dadurch ausbilden, dass man für dasselbe denkt. Man sage ja nicht, dass der Schüler nicht selbständig denken kann oder gar will, denn wo dies wirklich der Fall ist, da liegt es fast immer daran, dass er nicht rechtzeitig dazu angehalten worden ist. Zweifellos wird die heuristisch-induktive Methode, welche für den mathematischen Unterricht wenigstens der Theorie nach überall unbedingte Anerkennung gefunden hat und die auch für den Rechenunterricht die einzig richtige ist, deswegen hier noch so wenig angewendet, weil sie grade anfangs weniger schnell sichtbare oder gar glänzende Erfolge zu verzeichnen vermag und weil sie auch viel weniger bequem ist, als die mechanische Art. Dass aber diese Methode allein für die Dauer Lehrer sowohl wie Schüler zu befriedigen imstande ist, wird jeder zugeben, der auch nur einmal Gelegenheit hatte, danach den Rechenunterricht auf einer höheren Lehranstalt durchzuführen. Dem Schüler aber, der selbst recht bald merkt, dass er nur auf diese Weise zu dauerndem geistigen Besitz gelangen kann, behagt diese Methode um so mehr, als er seiner Naturanlage gemäss nach Selbstthätigkeit strebt und nur in dieser wahre Befriedigung und gründliche Vorbereitung für das spätere Leben findet. Diese Naturanlage zeigt sich bei jedem Kinde schon sehr frühzeitig und zwar meistens schon lange, bevor es die Schule besucht. Ist es doch allbekannt, dass bei den Kindern sogar im zartesten Alter nur das Spielzeug sich dauernder Anerkennung zu erfreuen hat, aus welchem oder mit welchem etwas zu machen ist, während alles andere schon nach sehr kurzer Zeit in die Ecke geworfen oder — zum grossen Verdruss der Eltern — auf seine innere Beschaffenheit und Zusammensetzung hin untersucht wird. Aus diesem Grunde allein lieben die kleinen Menschen so sehr Baukasten, Tuschkasten, Soldaten, Puppen u. s w., vorausgesetzt, dass ihnen damit recht freie Beweglichkeit und möglichst grosse Selbstthätigkeit gestattet wird. Um wie viel mehr wird nicht das spätere Alter selbstthätige geistige Arbeit abstumpfendem Mechanismus vorziehen! —

Andrerseits aber kann man nicht eindringlich genug davor warnen, die Kinder zu früh zum scharfen Denken anzuhalten und in dieser Beziehung sollte man stets beherzigen, was Prof. Erdmann in seinen „Psychologischen Briefen“ sagt: „Ein Kinderkopf verträgt nicht nur, sondern erfrischt sich durch vieles Lernen; nur Eines macht ihn krank und vielleicht für Zeitlebens: das unzeitige Hervorrufen des eigenen Denkens. Nur durch Gehorchen lernt man befehlen, nur im Lernen übt man sich, selbst zu denken. . . . Das Denken muss in der Jugend gebrochen werden, sonst bricht im Alter der Geist. Wie mancher hat in späterer Zeit an innerer Leere gelitten, weil er in der Jugend nicht auswendig gelernt hatte, ist unfähig zum Denken geblieben, weil man ihn zum Denker machen wollte zu einer Zeit, wo er blosser Nach-Denker sein sollte.“ — U. a. a. O: „Ich verstehe, heisst darum nicht: Ich mache, sondern vielmehr: Ich erfasse und halte fest.“ —

Sind die angeführten Worte zweifellos richtig und ist „die reine Übung des Gedächtnisses die beste Vorübung für den Verstand“, so folgt daraus mit Notwendigkeit, dass die oben empfohlene unterrichtliche Behandlung des Rechnens erst dann beginnen darf, nachdem mit den Schülern bereits 3—4 Jahre lang durch Anschauung und gedächtnismässiges Erfassen das Rechnen mit ganzen Zahlen getrieben worden ist. Bei der Einübung der Bruchrechnung also ist meines Erachtens nach der richtige Zeitpunkt gekommen, von dem an der Rechenunterricht nach den empfohlenen Grundsätzen zu betreiben ist, und dies um so mehr, als grade hierbei die mechanische Methode am wenigsten angebracht und auch am wenigsten geeignet ist, den dritten oben genannten Zweck des Rechenunterrichtes zu erfüllen, nämlich als Vorbereitung für den mathematischen Unterricht zu dienen, während grade dieser Zweck ausschliesslich durch die empfohlene Methode erreicht wird. Direktor Liedke, der (in der oben genannten Abhandlung) den Hauptfehler, der im Rechenunterricht begangen werden kann, in der seiner Ansicht nach „ungerechtfertigten Loslösung des Rechnens, der sogenannten gemeinen Arithmetik, von der allgemeinen Arithmetik“ erblickt, bemerkt hierzu sehr treffend: „Es gilt also, nicht bloss zu betonen, dass der Rechenunterricht auch formal bildend wirken müsse, sondern dies auch bestens zu erleichtern, und dann wird auch durch die rechte Sicherheit im bewussten Operieren mit den Zahlen, benannten wie unbenannten, bestimmten wie unbestimmten, im Lösen der angemessen folgenden und dann abwechselnden konkreten (eingekleideten, dem Leben entnommenen, angewandten) und abstrakten (reinen, **ohne spezifisch praktische, sondern lediglich nach pädagogischen Rücksichten ausgewählten**) Aufgaben eine tüchtige Rechenfertigkeit erreicht werden. Und mehr als durch blosse Vorschriften oder durch die jetzt laut genug erschallenden Mahnungen unserer sachkundigsten Männer würde der Rechenunterricht durch den in dem Unterrichtsgange selbst liegenden Geist davor bewahrt bleiben, nach jenen Kunststücken zu haschen, die durch die Grösse der Zahlen und ausgesuchte Verwickelung der Verhältnisse überraschen, sondern er würde sich damit genügen lassen, die Schüler in den einfachen und allgemein nützlichen Gebieten fest zu begründen.“ —

Nachdem nun an höheren Lehranstalten immer mehr und mehr die Forderung sich geltend machte, die Unterrichtsmethode im Rechnen zu ändern und zu verbessern, hat sich naturgemäss auch das Verlangen nach Lehrbüchern dafür herausgestellt, und während unzweifelhaft eine Überproduktion von Rechenbüchern für Volksschulen festzustellen war, konnte noch im Jahre 1875 Prof. Henrici mit Recht sagen*): „Während in österreichischen Schulen Lehrbücher für den Rechenunterricht allgemein im Gebrauch sind, wie deren zahlreiche Auflagen beweisen, während in Frankreich Mathematiker wie Serret es nicht verschmähen, ein solches Lehrbuch zu schreiben, begnügt man sich bei uns meistens, den Schülern bloss Aufgabensammlungen in die Hände zu geben, und ein Lehrbuch für Schüler muss sich erst die Berechtigung zur Existenz erkämpfen. Die Dürftigkeit und Beschränktheit, welche sich in den theoretischen Fragen und Bemerkungen solcher Aufgabensammlungen häufig dokumentiert, beweisen zur Genüge, dass wenigstens für viele Lehrer ein Lehrbuch nicht überflüssig ist, während andrerseits manche Aufgabensammlungen die Regeln in ungeheuerlicher Frageform geben und dadurch das Bedürfnis einer Anleitung für den Schüler bekunden.“

---

*) Lehrbuch für den Rechenunterricht, Propädeutik der allgemeinen Arithmetik zum Gebrauche an höheren Lehranstalten.

Freilich sind seit jener Zeit eine Menge Rechenbücher zum Gebrauch an höheren Lehranstalten erschienen, welche dem vorhandenen Bedürfnis abhelfen sollten, welche jedoch mehr oder minder hinter den berechtigten Forderungen zurückgeblieben sind. Prof. Sachse, der in der genannten Schrift die bis zum Jahre 1884 erschienenen Rechenbücher für höhere Lehranstalten einer eingehenden und sachgemässen Kritik unterzieht, kommt zu dem überraschenden Ergebnis, dass keins derselben den berechtigten Ansprüchen vollkommen zu genügen imstande ist. Die Gründe für diese sehr auffallende Erscheinung sind wohl zum grössten Teile darin zu suchen, dass die höheren Schulen sich im Rechenunterrichte noch heute — wie ehedem — zu sehr im Banne der Volksschule befinden, bei welcher naturgemäss die Richtung auf das Praktische vorherrscht. Dies wird nicht zum wenigsten dadurch bewiesen, dass bis in die neueste Zeit fast ausschliesslich Volksschullehrer den Rechenunterricht an höheren Schulen geben und dass es vielfach Mathematiker sogar als eine Zurücksetzung unangenehm verspüren, wenn sie damit betraut werden. Daher aber kommt es wieder, dass der mathematische Unterricht gewöhnlich fast gar nicht durch den Rechenunterricht vorbereitet ist, so dass z. B. die Anfangsgründe der Arithmetik dem Tertianer meistens unsägliche Schwierigkeit machen. Diese Behauptung wird besser als durch irgend etwas anderes durch eine These bestätigt, die auf der Strassburger Direktorenconferenz mit allen gegen 4 Stimmen angenommen worden ist und die nicht etwa von einem Mathematiker, sondern von dem vorsitzenden Provinzial-Schulrat aufgestellt worden ist: „Zur Herstellung und Erhaltung einer einheitlichen Unterrichtsführung sind an allen Anstalten die Rechenlehrer (falls nicht der Director selbst Fachmann ist) durch den von letzterem beauftragten Mathematiker zu beaufsichtigen und betreffs der Terminologie, der Erläuterungen und der zweckmässigen Reihenfolge im Unterricht anzuweisen.“

Da nun aber die Mehrzahl der Lehrer über die Existenzberechtigung und die Methode eines Lehrbuches entscheidet, so ist es nach dem Gesagten nicht wunderbar, wenn ein solches nur ganz allmählich, fast unmerklich, den berechtigten Forderungen der höheren Lehranstalten gerecht zu werden versucht. Daher mag es wohl hauptsächlich kommen, dass noch heute vielfach die welsche Praktik, die Kettenregel, die Proportion zur Auflösung von Dreisatzaufgaben u. s. w. empfohlen werden, während sich andrerseits sehr viele Mängel bezüglich des Stoffes und der Form der Aufgaben finden, so dass z. B. die „Krämeraufgaben“ unter den angewandten weit über Gebühr vorherrschen. Daher mag es wohl ferner kommen, dass auch noch heute in diesen Lehrbüchern die unbegründeten Regeln vielfach am Anfang eines jeden Abschnittes stehen, statt dass dieselben möglichst klar und in logischem Zusammenhange entwickelt und in einer besonderen Grammatik des Rechnens zusammengestellt sind, so dass C. V. Stoy noch vor wenigen Jahren mit Recht sagen konnte*): „Die Methode des Rechenunterrichtes ist, trotz einer Überfülle von Abhandlungen, Lehrbüchern und Aufgabensammlungen, noch weit entfernt von einem durch die Klarheit der pädagogischen Grundlagen gesicherten Fortschreiten.“ —

*) Encyklopädie § 116, 2. Auflage.

Es ist nun hier nicht der Ort, solch eine Elementar-Grammatik, wie sie die höheren Lehranstalten unbedingt brauchen, zu entwerfen; ich möchte indes durch einige lose Andeutungen und Bemerkungen, die sich in der Praxis gut bewährt haben, einen bescheidenen Beitrag zum Aufbau einer solchen liefern.

Bei Übernahme des Rechenunterrichtes in der **Sexta** kommt es zu allernächst darauf an, die meist recht verschieden vorgebildeten Schüler möglichst gut zusammenzuschweissen, eine Arbeit, die nicht immer ganz leicht ist, zumal in einer grösseren Stadt, wo man oft aus 10 und mehr Schulen einesteils Schüler erhält, welche im Rechnen mit ganzen Zahlen eine anerkennenswerte Fertigkeit besitzen, während wieder andere nicht einmal das kleine Einmaleins vollkommen beherrschen. Während es nun gilt, die letzteren möglichst schnell auf den Standpunkt der Klasse zu bringen, darf man die ersteren nicht vernachlässigen, wenn man nicht recht bald die unangenehme Erfahrung machen will, dass bereits nach wenigen Wochen eine grössere Zahl der Neulinge dem Unterricht nicht mehr folgt. Man muss also darauf bedacht sein, besonders in der allerersten Zeit die besseren Elemente angemessen zu beschäftigen und ihnen möglichst etwas Neues zu bieten, denn hat erst einmal der eine oder andere Schüler das lebhafte Interesse verloren, welches fast jeder nach der Sexta mitbringt, so hält es häufig recht schwer, ihm dasselbe wieder einzuflössen. Aus diesem Grunde wird vielfach, z. B. vom Oberlehrer Hickmann, die Einführung der decimalen Bezeichnung der benannten Zahlen, welche durch diese Bezeichnungsweise aus mehrfach benannten zu einfach benannten werden, empfohlen. Ich kann mich aber mit diesem Vorschlage aus mehreren Gründen nicht einverstanden erklären; denn einmal fehlt dem Schüler vor der Durchnahme der Decimalbrüche das Verständnis dafür und dann lässt sich auch auf dieser Stufe doch nur ein verhältnismässig geringer Teil des decimalen Münz-, Mass- und Gewichtssystems verwerten, da der Sextaner erfahrungsgemäss nicht geringe Schwierigkeiten bei einem sehr beträchtlichen Teile davon findet. Da ferner das nicht decimale System vollkommen unberücksichtigt bleiben müsste, so würde sich ein unverstandenes Flickwerk ergeben, welches mit unverhältnismässig grossem Zeit- und Kraftaufwand erarbeitet wäre und welches für die spätere gründliche Durchnahme von sehr geringem Nutzen sein würde.

Das geeignetste Mittel, auch den besseren Schülern der Sexta in der ersten Zeit etwas Neues und Anregendes zu bieten, ist — meiner Erfahrung nach — die frühzeitige Einführung der Klammern, welche bei systematischem Vorgehen bei weitem nicht so viele Schwierigkeiten bieten, wie man vielfach anzunehmen scheint. Nachdem erklärt worden ist, dass ein in Klammern stehender Ausdruck als eine Grösse aufzufassen ist, die zunächst für sich berechnet werden muss, ehe man die Operation damit vornehmen kann, welche das davor oder dahinter stehende Zeichen verlangt, kann man sehr bald das für das Verständnis sehr nützliche Fassen solcher Aufgaben in Worte durchnehmen und auch umgekehrt eine in Worten gegebene Aufgabe unter Zuhülfenahme von Klammern schreiben und berechnen lassen. Man wird z. B. ungefähr mit solchen Aufgaben beginnen:

$$37635 + 5309 - (8517 + 653) = ?$$

In Worten: Addiere 37635 und 5309 und subtrahiere davon die Summe aus 8517 und 653, oder: Subtrahiere von der Summe aus 37635 und 5309 die Summe aus 8517 und 653.

Umgekehrt wird man eine in Worten gegebene Aufgabe folgenden Inhalts: Addiere zu der Summe von 6708 und 24307 die Differenz aus 8409 und 938 so zu schreiben haben:

$$6708 + 24307 + (8409 - 938) = ?$$

Schon bei diesen ganz einfachen Aufgaben findet jeder — auch der begabteste — Schüler eine solche Menge Neues und Anregendes, dass der kundige Lehrer sehr bald die grosse Lust und Liebe merkt, mit welcher dergleichen Aufgaben allgemein gerechnet werden. Auch wird man z. B. anfangs dieselben Aufgaben lösen lassen, nachdem die Klammern einfach fortgelassen sind, und es wird sich ergeben, dass bei der ersten der beiden Aufgaben dann ein um 1306 zu grosses Resultat gefunden wird, während bei der zweiten genau dasselbe Ergebnis erhalten wird. Nachdem dann noch an einigen andern Beispielen die Erfahrung gemacht worden ist, dass in einigen Fällen die Klammer unbeschadet fortgelassen werden kann, in andern nicht, werden die begabteren Schüler sehr bald empirisch die Regel gefunden haben, dass, wenn der Klammerausdruck addiert werden soll, die Klammer fortgelassen werden kann, während bei der Subtraktion derselben die Vorzeichen der einzelnen Glieder umzukehren sind. Mit welchem Stolz und welcher Freude aber naturgemäss jeder Schüler erfüllt ist, dem es gelungen ist, die eine oder andere Regel zu finden und auszudrücken, sieht man deutlich an dem glücklichen Gesicht des Betreffenden, der dadurch in den Augen seiner Mitschüler an Achtung bedeutend gewonnen hat und zum nachahmenswerten Beispiel geworden ist. Auf diese Weise wird man nach und nach gelegentlieh eine ganze Menge von Sätzen finden, so z. B.: Anstatt mehrere Zahlen nacheinander zu subtrahieren, kann man deren Summe subtrahieren oder: Ein Polynom wird berechnet, indem man von der Summe der positiven die Summe der negativen Zahlen subtrahiert; ferner: Eine Differenz wird addiert, indem man den Minuenden addiert und den Subtrahenden subtrahiert, während sie subtrahiert wird, indem man grade umgekehrt den Minuenden subtrahiert und den Subtrahenden addiert u. s. w. u. s. w. — Nach und nach wird man nun diese Klammeraufgaben immer schwieriger und schwieriger gestalten, und durch Hinzunahme der Multiplikation und Division ergibt sich eine nie versiegende Quelle der anregendsten und schönsten Aufgaben. Auch empfiehlt es sich, dergleichen schwierigere Aufgaben vor der Ausrechnung von den Schülern bis in ihre Einzelheiten zergliedern zu lassen, so dass die nachstehende Aufgabe:

$$[(6743 - 2518) \,.\, 463 - 8954] : 26 = ?$$

z. B. so zu erklären ist:

Der ganze Ausdruck ist ein Quotient, dessen Divisor 26 und dessen Dividend eine Differenz ist. Der Minuend dieser Differenz ist ein Produkt aus einer Differenz und aus der Zahl 463, während der Subtrahend 8954 ist. Auf diese Weise wird der Schüler gezwungen, sich über jede Operation genaue Rechenschaft abzulegen, ehe er an die Ausrechnung geht, und er wird auf diese Weise am besten vor Flüchtigkeitsfehlern bewahrt bleiben.

Dass aber die Klammeraufgaben für Sextaner durchaus n i c h t z u s c h w e r sind, wie manche meinen, geht für mich hinlänglich aus den s e h r g u t e n E r f a h r u n g e n, die ich damit gemacht habe, hervor. Hiernach kann ich dieselben nicht warm genug empfehlen und es wird jeder Kollege, der in dieser Beziehung einen Versuch macht und sachgemäss vorgeht, sicher bald derselben Ansicht werden, denn er wird recht bald finden, welch grosse Vorteile die ausgedehnte Benutzung derselben ausserdem noch hat. Wegen der Vielseitigkeit der Aufgaben ist ein sinnloses, mechanisches Drauflosrechnen, wie man es so oft findet, vollkommen ausgeschlossen; im Gegenteil wird der Rechner von vornherein gezwungen, nicht nur jede einzelne Aufgabe, sondern sogar jeden einzelnen Teil derselben geistig zu zergliedern, ehe ihm die Ausrechnung gelingen kann. Auch muss derselbe während der ganzen Zeit unbedingt bei der Sache bleiben, da er sehr bald merkt, dass die geringste Unachtsamkeit grade bei dergleichen Aufgaben eine reiche Menge von Fehlern im Gefolge hat. Wird also aus dem letzteren Grunde eine strenge geistige Zucht erzielt, so wird andrerseits der Schüler ganz allmählich zu selbstständiger geistiger Gedankenarbeit, die ihm später von sehr grossem Nutzen ist, geführt. Da derselbe ferner, wie bereits oben erwähnt, bei dieser Gelegenheit angeleitet wird, den einen oder anderen Satz empirisch zu finden und ihn möglichst genau und scharf auszusprechen, so lernt er auch — und zwar früher als dies in einem anderen Unterrichtsgegenstande möglich ist — denkend sprechen, und der auf diese Weise erzielte Nutzen für die formale Bildung ist ein sehr bedeutender. — Es braucht wohl kaum erwähnt zu werden, dass man auf das Merken der hierbei gelegentlich gefundenen Sätze keinen grossen Wert legen wird, dass man höchstens den einen oder andern bei Gelegenheit wiederholt, dass man es aber unbedingt vermeiden wird, dieselben zu diktieren oder gar auswendig lernen zu lassen. Selbstverständlich ist es ferner, dass bei den gemeinen Brüchen und Decimalbrüchen ebenfalls mit Vorteil ein möglichst ausgedehnter Gebrauch von den Klammern gemacht wird. —

Aus dem oben erwähnten Grunde wird ferner beim Schriftrechnen nach und nach möglichste Kürze zu erstreben sein, so dass also alles, was sicher und schnell im Kopfe bewältigt werden kann, nicht zu schreiben sein wird. Bei der Addition z. B. wird man frühzeitig darauf halten, dass nicht erst die einzelnen Summanden mit dem Pluszeichen, sondern sofort die Teilsummen in möglichst schneller Aufeinanderfolge genannt werden, so wie ferner darauf, dass 2 oder auch 3 Summanden gelegentlich zu addieren sind, ohne dass dieselben unter einander stehen, denn ein Schüler, der solche Sachen im frühen Alter nicht lernt, wird dieselben meistens überhaupt nicht mehr lernen.

Bei der Subtraktion wird man darauf hinarbeiten, auch schliesslich nur noch die Teildifferenzen und nicht mehr die einzelnen Minuenden und Subtrahenden oder gar das Borgen auszusprechen und alles andere möglichst schnell im Kopfe zu bewältigen und zwar schneller als dies mit zu Hülfenahme der Sprache überhaupt möglich ist. Schon auf dieser Stufe, wie dies z. B. Oberlehrer Hickmann empfiehlt, die additive Subtraktionsmethode (auch österreichische Methode genannt) einzuführen, halte ich nicht für zweckmässig, denn meines Erachtens müssen die 4 Spezies zunächt rein für sich aufgefasst werden, ehe dem Schüler ihr innerer Zusammenhang klar gemacht werden kann, und ich bin der festen Überzeugung, dass es dem Sextaner häufig vollständig unverständlich ist, wenn man ihm sagt, 13—5 heisst eine Zahl finden, welche zu 5 addiert 13 ergiebt. Er lernt wohl schliesslich auf dieselbe Weise subtrahieren, aber das Wesen der Subtraktion bleibt ihm unklar. Nachdem er dasselbe aber durch die gewöhnliche Subtraktionsmethode in der Sexta gründlich erfasst hat, ist es unbedenklich und sogar von grossem Vorteil, ihn in der Quinta bei der Decimalbruchrechnung die additive Subtraktionsmethode zu lehren, und man wird finden, dass dann wenige Stunden genügen, um ihn damit vollständig vertraut zu machen, und er findet so viel Gefallen daran, dass er von nun an ausschliesslich danach rechnet, besonders weil dadurch bei der Division eine sehr bedeutende Abkürzung und daher Raum- und Zeitersparnis erzielt wird. —

Bei der Multiplikation kann man durch bewusste Anwendung einer ziemlichen Anzahl von Rechenvorteilen bedeutende Zeitersparnis erreichen und — was noch wichtiger ist — weitergehende Anforderungen an die selbständige geistige Arbeit der Rechner stellen. So wird man dieselben frühzeitig daran gewöhnen, sich im Multiplizieren zu üben, wenn die Faktoren nicht untereinander, sondern nebeneinander stehen und bald mit der ersten Ziffer, bald mit der letzten des einen oder andern Faktors beginnen lassen, so dass man im ersten Falle die Teilprodukte rechts, im andern links herauszurücken hat. Abgesehen von den geistbildenden Elementen, die in dieser Abwechselung enthalten sind, erreicht man dadurch den Vorteil, das erste Teilprodukt nicht hinschreiben zu brauchen, wenn die erste Ziffer des Multiplikators eine 1 ist. Ferner wird man selbstverständlich wieder nach möglichster Kürze bei der Berechnung der einzelnen Teilprodukte streben, so dass man beispielsweise bei nachstehender Aufgabe folgendermassen mündlich verfahren wird, wobei die fettgedruckten Ziffern als hinzuschreibende betont werden.

34726 . 157
173630
 243082
5451982

30, 10 **13**, 35 **36**, 20 **23**, 15 **17**
42, 14 **18**, 49 **50**, 28 **33**, 21 **24**

und bei der Addition:

2, **8**, 3 **9**, 3 9 **11**, 5 8 **15**, 3 10 **14**, 2 **5**

Würde die letzte Ziffer des Multiplikators eine 1 gewesen sein, so würde man natürlich mit dieser den Anfang zu machen haben, so dass man dann wieder das erste Teilprodukt nicht hinzuschreiben brauchte. — Auch ist es sehr zweckmässig, auf die grossen Vorteile hinzuweisen, die sich sehr häufig bei denkender Betrachtung aus der besonderen Form des einen Faktors ergeben. Hat man z. B. mit 763 zu multiplizieren, so wird man zunächst mit 7 und das erhaltene Produkt mit 9 multiplizieren, wobei naturgemäss 2 Stellen rechts herausgerückt werden muss. Wenn man aber z. B. mit 426 multiplizieren soll, so wird man zunächst mit 6 und das erhaltene Produkt mit 7 multiplizieren, wobei jedoch nur eine Stelle links herauszurücken ist. Ist der eine Faktor eine zweistellige Zahl, so wird man nicht erst die beiden Teilprodukte einzeln ausrechnen, hinschreiben und addieren, sondern man wird dieselben im Kopfe zusammenfassen und sofort das fertige Resultat hinschreiben. Dies wird man zunächt mit solchen zweistelligen Zahlen üben, welche eine Eins haben, z. B.

73826 . 18
1328868

48, 16 20 **26**, 64 66 **68**, 24 30 **38**, 56 59 **62**, 6 **13**

Oder: 40753 . 51 = 2078403
3, 5 20, 7 9 34, 0 3 38, 4 7 7, 20

Schon nach wenigen Stunden kann man jede Aufgabe mit irgend einem zweistelligen Faktor ohne jedes Bedenken auf diese Weise ausrechnen lassen, z. B.

263054 . 37 = 9732998
28, 35 37 49, 0 4 19, 21 22 22, 42 44 53, 14 19 37, 3 9.

Bei der D i v i s i o n endlich lässt sich nach und nach ebenfalls ganz bedeutende Ersparnis an Raum und Zeit erzielen. So wird man, wenn der Divisor eine Zahl von 1—20 ist, das fertige Resultat allein, ohne alle Nebenrechnungen, hinschreiben; bei allen andern zweistelligen Zahlen wird man nur die Reste hinschreiben, während die einzelnen Teilprodukte im Kopfe subtrahiert werden z. B.

835722 : 58 = 14409
255
237
522

In Worten: 83 : 58 = 1 R 25
255 : 58 = 4 R 23
237 : 58 = 4 R 5
52 : 58 = 0
522 : 58 = 9

Ist endlich der Divisor eine drei- oder mehrstellige Zahl, so wird man in Sexta wegen der Schwierigkeit der Rechnung die einzelnen Produkte nicht fortlassen können. In der Quinta aber ergibt die Zuhülfenahme der additiven Subtraktionsmethode sehr wesentliche Abkürzungen, da man dann so rechnen wird:

684035 : 287 = 2383, . . .
1100
2393
975
114

In Worten: 684 : 287 = 2; 14 + 0 = 14, 16 17 + 1 = 18, 4 5 + 1 = 6
1100 : 287 = 3; 21 + 9 = 30, 24 27 + 3 = 30, 6 9 + 2 = 11
2393 : 287 = 8; 56 + 7 = 63, 64 70 + 9 = 79, 16 23 + 0 = 23
975 : 287 = 3; 21 + 4 = 25, 24 26 + 1 = 27, 6 8 + 1 = 9

Der kundige Lehrer wird nun diese praktischen Rechenvorteile je nach Bedürfnis v e r m e h r e n oder auch n u r z u m T e i l b e n u t z e n, ganz wie es ihm für den betreffenden Jahrgang angezeigt scheint. Jedenfalls wird dadurch — so lange man blosse Rechenkünsteleien vermeidet, die so selten vorkommen, dass sie im Bedarfsfalle immer wieder vergessen sind — ebenso wie durch den vielseitigen Gebrauch der Klammern die mechanische Thätigkeit sogar schon bei den 4 Grundrechnungsarten auf ein möglichst geringes Mass beschränkt und der Schüler frühzeitig gezwungen, in jedem einzelnen Falle v e r n ü n f t i g a n z u s c h a u e n, r i c h t i g zu denken und demgemäss zu handeln. Wird aber das Schriftrechnen in der angedeuteten Weise betrieben, so sind naturgemäss alle Proben, die leider noch oft angewendet zu werden scheinen und die naturgemäss zum Schlendrian verleiten, vollkommen überflüssig, denn der Schüler wird in so guter geistiger Zucht sein, dass er ganz genau weiss, ob er mit vollem Bewusstsein gearbeitet hat oder nicht, und nur im letzteren Falle wird er nötig haben, noch einmal nachzurechnen, was bei einem aufmerksamen Schüler indes selten genug vorkommen wird. —

Mit dem so betriebenen Zifferrechnen wird nun ein nach denselben leitenden Grundsätzen betriebenes Kopfrechnen möglichst Hand in Hand gehen müssen. Hier wird der Rechner am sichersten vor mechanischem Drauflosrechnen bewahrt, wenn denselben ein möglichst vielseitiger Wechsel der verschiedenartigsten Aufgaben zwingt, in jedem einzelnen Falle zunächst zu denken und alle Verhältnisse der Aufgabe genau zu berücksichtigen, um dann den kürzesten und bequemsten Weg zu beschreiten, da ja bekanntlich grade beim Kopfrechnen nur auf diese Weise Sicherheit und Gewandtheit zu erreichen ist. Aus diesem Grunde lasse ich — falls ich nicht etwas Neues einübe — selten 2 Aufgaben derselben Art nach einander rechnen, und auch hiermit habe ich so ausgezeichnete Erfahrungen gemacht, dass ich jedem Kollegen einen möglichst frühzeitigen Versuch in dieser Beziehung auf das angelegentlichste empfehlen möchte. Zweifellos ist es, dass man dadurch die ganze Klasse fortwährend vollständig in der Hand hat und dass ein auch nur vorübergehendes Träumen so gut wie ausgeschlossen ist, was im anderen Falle grade beim Kopfrechnen sehr leicht der Fall ist. Selbstverständlich wird man auch im Kopfrechnen mit Vorteil nach einiger Zeit 2 oder mehr Operationen verbinden, so dass man also Aufgaben ungefähr folgenden Inhalts erhält: Die Differenz von 463 und 247 soll durch 9 dividiert werden, oder: Die Summe aus 148 und 243 soll mit 7 multipliziert werden. —

Nachdem nun auf diese Weise die 4 Grundrechnungsarten gründlich eingeübt sind, nimmt man am zweckmässigsten die Teilbarkeit der Zahlen durch, ein Kapitel, welches leider in seiner grossen Bedeutung nicht nur für den späteren Unterricht im Rechnen, sondern auch für die geistige Ausbildung im allgemeinen nicht genug gewürdigt wird. Hieran schliesst man am besten das Aufsuchen des grössten gemeinschaftlichen Teilers und des kleinsten gemeinschaftlichen Dividenden an, so dass man dann bei dem Gleichnamigmachen der Brüche nicht nötig hat, die Bruchrechnung zu unterbrechen. Nach den entwickelten Grundsätzen ist es wohl selbstverständlich, dass das vielfach noch sehr beliebte mechanische oder, wie man sich auszudrücken pflegt, „praktische" Verfahren zum Aufsuchen des kleinsten gemeinschaftlichen Dividenden unbedingt zu verwerfen und einzig und allein das in der Algebra angewendete zahlentheoretische Verfahren anzuwenden ist, wonach man den kleinsten gemeinschaftlichen Dividenden (bez. den kleinsten Hauptnenner) findet, indem man diejenigen Zahlen, welche nicht Faktoren irgend einer anderen der vorkommenden Zahlen sind, in ihre Primfaktoren zerlegt und aus diesen Primfaktoren ein Produkt bildet, in welches jeder einzelne so viel mal als Faktor gesetzt wird, als er in der Zahl vorkommt, die ihn am häufigsten enthält. —

Gewöhnlich findet man in den Lehrbüchern hierauf das Münz-, Mass- und Gewichtssystem sowie im Anschluss daran die Reduktion und Resolution mit ganzen Zahlen und die

4 Grundrechnungsarten mehrfach benannter Zahlen behandelt. Ich halte es jedoch nach meinen Erfahrungen für bedeutend zweckmässiger, zunächst das theoretische Rechnen durch die methodische und zusammenhängende Behandlung der Brüche und Decimalbrüche zu vollenden, um dann wohlvorbereitet das praktische Rechnen mit dem Masssystem zu beginnen. Man erreicht dadurch den nicht zu unterschätzenden Vorteil, die Reduktion und Resolution vollständig im Zusammenhange durchnehmen zu können; auch erfasst der Quintaner das Masssystem schneller als der Sextaner, dem es erfahrungsgemäss recht grosse Schwierigkeiten macht. —

Bei der Behandlung der Bruch- bez. der Decimalbruchrechnung kommt es nun — wie bereits angedeutet — vor allem darauf an, dass die Begriffe und Sätze möglichst klar, und in innerem Zusammenhange vor den Augen der Schüler, unter möglichst selbständiger reger Anteilnahme derselben abgeleitet und scharf und deutlich in Worte gefasst werden, da sie nur auf diese Weise zu dauerndem, selbsthätig reproducierbarem geistigem Eigentum der Schüler werden. Besonders aber dulde man hier bei keiner Antwort die geringste Redefaulheit, weil das Denken meist ebenso lückenhaft ist wie die Rede, und weil auch schon der Sextaner das, was er wirklich verstanden hat, in Worte fassen kann, denn auch hier gilt, was Lotze in seinem Mikrokosmos von der grammatischen Form der Sprache sagt: „Sie kann allerdings hinter der logischen Gliederung zurückbleiben, aber wo sie es thut, bleibt sie in der That zurück. Diese Form ist mehr als nur ein entbehrlicher ästhetischer Zusatz zu der logisch notwendigen Gliederung der Gedanken. Entbehrlich nur dann, wenn man die Sprache ausschliesslich für einen Abdruck der allgemeinsten Denkmittel halten wollte, durch deren willkürliche Anwendung die Erkenntnis der Dinge erst vollzogen werden soll. Aber unstreitig wollte sie von Anfang an mehr sein; sie will einen grossen Teil der Arbeit, die so geleistet werden musste, schon fertig dem Bewusstsein bieten und damit einen Ausgangspunkt zu weiterem Fortschritte. Die rechten Definitionen sollen ein gemeinsam beschaffter und sicherer Besitz werden.“ —

Nachdem nun eine einzelne Regel oder eine zusammengehörige kleinere Gruppe von Regeln auf diese Weise entwickelt und gut und deutlich ausgedrückt ist, empfiehlt sich ihre gründliche Einübung durch leichtere Beispiele, die jedoch nur soweit gehen darf, dass die gedankenlose Anwendung unbedingt ausgeschlossen ist. Man wird daher, sobald die Klasse den Sinn und die Anwendung der Regel vollständig verstanden hat, was häufig bereits nach wenigen Beispielen der Fall ist, sofort weitergehen bez. die früheren Regeln wiederholen und durch Beispiele befestigen. Auf diese Weise ist es sehr gut möglich, die Theorie der Brüche in etwa 6—7 Wochen durchzunehmen, um nachher mindestens dieselbe Zeit zu tüchtiger Einübung durch immer schwerer werdende Zahlenbeispiele in möglichst vielseitigem Wechsel zu verwenden. Im allgemeinen genügt das letzte Vierteljahr von Weihnachten bis Ostern in der Sexta vollkommen zur Durchnahme der Bruchrechnung, vorausgesetzt, dass in den ersten $^3|_4$ Jahren die 4 Grundrechnungsarten und die Zahlentheorie — wie vorgeschlagen — durchaus sicher, gründlich und verstandesgemäss durchgearbeitet bez. befestigt worden sind, da jede Stunde, welche dafür verständig verwendet worden ist, für den ganzen späteren Unterricht von ausserordentlichem Nutzen ist. — Ferner ist es äusserst ratsam, die Regeln auf das geringste zulässige Mass zu beschränken d. h. nur möglichst allgemeine Regeln abzuleiten und nicht jeden einzelnen besondern Fall zu einer Regel zu machen. So wird man z. B. nicht — wie dies häufig geschieht — zunächst die Multiplikation bez. Division eines Stammbruches mit einer ganzen Zahl und später mit Hülfe davon die betreffenden Regeln für einen abgeleiteten Bruch durchnehmen, sondern man wird nur die letzten Regeln ableiten, da die ersteren besondere Fälle davon sind. Auch wird man beispielsweise folgende Regeln fortlassen können: Ein Bruch wird mit einer ganzen Zahl multipliziert, indem man den Nenner durch diese Zahl dividiert oder: Ein Bruch wird durch eine ganze Zahl dividiert, indem man den Zähler durch diese Zahl dividiert, falls die Divisionen aufgehen. Man wird diese Regeln um so leichter entbehren können, wenn man frühzeitig darauf hält, vor der Ausrechnung nachzusehen, ob sich etwas kürzen lässt. Auch wird man mehrere zusammengehörige Regeln schliesslich in eine zusammenfassen und z. B. folgende allgemeine Regel erhalten: Man dividiert durch einen Bruch, indem man mit dem umgekehrten Bruche multipliziert u. s. w. — Während man nun bei der Einleitung in die Bruchrechnung die Anschauung unbedingt zu Hülfe nehmen muss und dieselbe auch bei der Ableitung der einfacheren Sätze mit Vorteil anwenden wird, hüte man sich vor dem vielfach verbreiteten Streben, alle Sätze ohne jede Ausnahme nur durch die Anschauung abzuleiten. Dies ist eben, wie bereits oben erwähnt, so gut wie unmöglich, und ausserdem ist es nach den entwickelten Grundsätzen pädagogisch richtiger, alles, was der Schüler im vorgeschrittenen Alter leicht und sicher durch freie Denkthätigkeit begreifen kann, auch auf diesem Wege zu erreichen. —

Nachdem nun in der **Quinta** die gemeinen Brüche während der ersten Wochen wiederholt und durch angewandte Aufgaben eingeübt worden sind, geht man am besten sofort zu den Decimalbrüchen über, welche den Schülern nach sicherem Verständnis der ersteren wenig Schwierigkeit machen, zumal wenn man als Einleitung dazu die Beschaffenheit des dekadischen Zahlensystems einer gründlichen Besprechung unterzieht und die Decimalbrüche durch Erweiterung desselben entstehen lässt. Man wird hier bei der Ableitung der Sätze und Regeln nach denselben Grundsätzen verfahren wie bei der Bruchrechnung und wird selbstverständlich nicht verfehlen, recht oft die Abhängigkeit und Verwandtschaft der beiden Bruchrechnungsarten zu beleuchten und zum Ausgangspunkt der Erörterungen zu machen. —

Nachdem auf diese Weise das theoretische Rechnen beendet worden ist, wird man wohl vorbereitet das praktische Rechnen mit dem Mass-, Münz- und Gewichtssystem beginnen und im Anschluss daran die Reduktion und Resolution durchnehmen. Auch bei diesem Abschnitt ist selbstverständlich wieder ein recht reger Wechsel in den Aufgaben im schriftlichen Rechnen sowohl wie im Kopfrechnen sehr zu empfehlen. Man wird also nach der Einübung der einzelnen Systeme dieselben nicht nur in bunter Aufeinanderfolge zu Aufgaben benutzen, sondern man wird auch Reduktions- und Resolutionsaufgaben mit ganzen Zahlen, Brüchen und Decimalbrüchen vermischt in möglichst vielseitiger Abwechselung einander folgen lassen. Es wird dadurch unzweifelhaft das halbmechanische Rechnen vermieden, dessen Folgen man sehr häufig noch bei den Schülern der mittleren und oberen Klassen bemerkt und welches darin besteht, dass bei den Reduktionsaufgaben ohne weitere

Überlegung durch die schnell gefundene Reduktionszahl dividiert wird, während bei den Resolutionsaufgaben erfahrungsgemäss mit der Resolutionszahl zu multiplizieren ist, so dass die Schüler später bei einzelnen vorkommenden Aufgaben nicht recht wissen, ob sie in diesem Falle zu multiplizieren oder zu dividieren haben. Dieser Übelstand wird am sichersten vermieden, wenn man schon bei diesen Aufgaben die Rechner frühzeitig dazu anhält, das Gegebene zum Ausgangspunkt und das Gesuchte zum Zielpunkt ihrer verstandesmässigen Thätigkeit zu machen und sich demgemäss in jedem einzelnen Falle den Bedingungssatz selbständig zu bilden. —

Die Dreisatzaufgaben, welche sich naturgemäss anschliessen, sind für die meisten nachfolgenden praktischen Rechenarten von grundlegender Bedeutung, so dass man auf dieselben bei der Durchnahme nicht Sorgfalt genug verwenden kann. Auch hier wird der Schüler wieder frühzeitig anzuhalten sein, recht klar das Gegebene und Gesuchte der Aufgabe auseinanderzuhalten und sich aus derselben den Bedingungssatz und Fragesatz so herauszuschälen, dass das Gesuchte als das Ziel am besten am Ende steht, während das Gegebene den Anfang bildet. Bei der Berechnung der Dreisatzaufgaben wird als selbstverständlich vorausgesetzt, dass die seit einigen Jahrzehnten fast allgemein gebräuchliche Auflösungsform der Schlussrechnung in Verbindung mit dem Bruchansatz angewendet wird, denn dieses Verfahren ist ohne Zweifel das einzige, welches den entwickelten Grundsätzen voll und ganz entspricht, während die Anwendung der Proportionen, die auch noch vielfach nebenbei empfohlen wird, sehr leicht wieder zu mechanischer Arbeit führt und auch ausserdem viel zu grosse Schwierigkeiten mit sich bringt, als dass dieselbe für Quintaner geeignet wäre. Auch hat die Schlussrechnung den grossen Vorteil, dass sie gleichmässig auf die verschiedensten Arten von Aufgaben anwendbar ist und dass sie sich — wie Stubba sehr richtig bemerkt — ohne weitere Einleitung unmittelbar an das Kopfrechnen anschliessen lässt. Bei der schriftlichen Berechnung der Dreisatzaufgaben ist es zweckmässig, nur den Quotienten zu bilden, der nach und nach während der Auflösung entsteht und schliesslich das Resultat darstellt. In der ersten Zeit empfiehlt es sich, bei den häuslichen Aufgaben den Gedankengang, der dabei durchlaufen wird, möglichst klar und scharf schriftlich wiedergeben zu lassen, denn es wird auf diese Weise am sichersten jeder gedankenlose Schluss, dem man hier sonst so häufig begegnet, vermieden. Auch wird beim Schriftrechnen am besten immer nur die allgemein anwendbare Methode des Schliessens von dem ersten auf das dritte Glied vermittelst der Einheit benutzt, da man so zweifellos am sichersten und im allgemeinen auch am schnellsten zum Ziele kommt, um so mehr als man die ev. günstigen Beziehungen der verschiedenen Zahlen beim Kürzen des Bruches verwerten kann. Beim Kopfrechnen hingegen wird man die Schüler von vornherein dazu anleiten, die verwandschaftliche Beziehung des ersten und dritten Gliedes gebührend zu berücksichtigen und den dadurch für das Rechnen im Kopfe sich ergebenden bequemsten und schnellsten Weg aufzufinden. Auch ist es selbstverständlich, dass man am besten wieder die Aufgaben mit geradem und umgekehrtem Verhältnis gleichzeitig behandelt, da bei der allgemein üblichen getrennten Behandlung die Schüler sicher dem Mechanismus verfallen, denn sie haben sehr bald herausgefunden, dass beim graden Verhältnis zu multiplizieren ist, wenn die Zahl wächst und zu dividieren, wenn dieselbe abnimmt, während beim umgekehrten Verhältnis das Gegenteil der Fall ist. —

Ist aber die einfache und zusammengesetzte Regel de tri während des letzten halben Jahres in der Quinta methodisch behandelt und gründlich eingeübt, so macht das ganze übrige praktische Rechnen, welches in den verschiedenen Formen der Zins-Rabatt-Gesellschafts-Mischungsrechnung eine Fortsetzung bez. Anwendung der Regel de tri-Rechnung ist, auch dem schwächsten Quartaner durchaus keine Schwierigkeiten mehr, und man kann dasselbe ganz bequem in der **Quarta** zum Abschluss bringen, vorausgesetzt, dass das Ausziehen der Quadrat- und Kubikwurzeln sowie die Berechnung von Flächen- und Körperinhalten, Zinseszinsrechnung u. s. w. auf höheren Lehranstalten in den mathematischen und nicht in den Rechenunterricht gelegt wird, während man ev. die Kettenrechnung als „Mitgift für das praktische Leben“ in einigen Stunden behandeln kann. Die schwierigeren Fälle der Wechselrechnung, Calculation, Conto finto (Speculationsrechnung), die Rechnung mit Contocorrent und Staatspapieren, sowie alle specifisch kaufmännischen Rechnungsarten und abgekürzten bez. mechanischen Rechenmethoden etc. gehören dagegen — wie in neuerer Zeit wohl allgemein zugegeben wird — überhaupt nicht auf die Schule, da diese eine allgemeine Bildung vermitteln und nicht für einen bestimmten Lebensberuf vorbereiten soll. In diesem Sinne haben sich auch alle Direktorenversammlungen der neueren Zeit ebenso wie die von Seiten des Königl. Ministeriums im Jahre 1873 in Berlin abgehaltenen Octoberconferenzen ausgesprochen, auf welchen sich überall das Bestreben kundgibt, den Rechenunterricht um seines eingehenden Betriebes willen an Umfang nach Möglichkeit zu beschränken. So sagt z. B. der Referent der Berliner Octoberconferenz, Herr Geh.-Rat Bonitz, „dass der Rechenunterricht noch mehr als bereits geschehen von solchen Kategorien von Aufgaben zu entlasten sei, deren Schwierigkeit nur in den diesem Lebensalter fernliegenden und fernbleibenden thatsächlichen (z. B. kaufmännischen) Verhältnissen liege und deren Durcharbeitung der arithmetischen Einsicht und Ubung keinen dem Zeitaufwande entsprechenden Ertrag gebe“. — Ich möchte hinzufügen, dass überhaupt nicht zu verwickelte Aufgaben zu rechnen, sondern ganz besonders solche zu bevorzugen sind, welche „schnell neuen Stoff zum Nachdenken und zur Bildung von Schlüssen geben“. —

Wegen Mangels an Raum muss ich es mir leider versagen, auf das praktische Rechnen näher einzugehen, wie ich es sehr gern möchte. Erwähnen will ich jedoch, dass man hierbei hauptsächlich darauf zu achten hat, dass der Schüler das Wesen der verschiedenen Rechnungsarten gründlich erfasst und dass er vor der eigentlichen Ausrechnung seine Aufmerksamkeit auf das Verständnis des Sachgehalts der Aufgabe sowie auf die Erkenntnis des Ideenganges, welcher von dem Gegebenen zum Gesuchten führt, lenkt. Auch empfiehlt es sich, nicht zu lange bei jeder besonderen Art von Aufgaben zu verweilen, sondern dieselben — sobald sie begriffen sind — im vielseitigen Wechsel mit den früher behandelten Arten zu verbinden. So wird man beispielsweise die 4 Grundaufgaben der Zinsrechnung ziemlich schnell hintereinander durchnehmen und dann möglichst viel vermischte Aufgaben rechnen. —

Schliesslich will ich noch bemerken, dass ich bei Anerkennung der grossen Bedeutung für die geistige Durchbildung und für das praktische Leben durchaus nicht etwa einer Vernachlässigung des angewandten Rechnens das Wort reden, sondern mich nur gegen das sehr verbreitete Streben wenden möchte, damit allzu früh auf Kosten des rein erziehlichen Zweckes zu beginnen. Bei dem vorgeschlagenen Unterrichtsgange sind nach meinen Erfahrungen in bedeutend kürzerer Zeit mindestens dieselben Leistungen zu erzielen, da die Schüler durch die gründliche Behandlung des theoretischen Rechnens geistig so weit gefördert sind, das sie meistens ohne grössere Hilfe selbständig in das Verständnis des Sachgehalts der Aufgabe eindringen und dieselbe lösen können, auf welche Weise bekanntlich allein dauernder Gewinn für das spätere Leben erzielt wird. —

Das Verhältnis des Kopfrechnens zum Schriftrechnen ergibt sich aus den entwickelten Grundsätzen von selbst. Da nämlich alles Rechnen geistige Arbeit, also Denk- und nicht Regelrechnen sein soll, so wird das Kopfrechnen unbedingt im Mittelpunkt des ganzen Unterrichtes stehen müssen und zwar so, dass besonders in Sexta und Quinta der bei weitem grösste Teil der Stunde dafür zu verwenden ist. Es werden daher auch die Sätze und Aufgaben im allgemeinen zunächst durch eine Reihe von Beispielen, die im Kopfe zu rechnen sind, eingeübt, und nur solche Aufgaben schriftlich erledigt werden, welche für das Kopfrechnen zu schwer sind. Auch wird man von Stufe zu Stufe immer höhere Anforderungen an das Kopfrechnen stellen und davon beim Schriftrechnen einen immer ausgedehnteren Gebrauch machen, also auch hier so viel Operationen wie möglich im Kopfe ausführen und nur dann etwas niederschreiben, wenn das Gedächtnis nicht ausreicht, da nur auf diese Weise allmählich Schnelligkeit erzielt wird. So vorbereitete Schüler werden auch im späteren Leben bei der Addition und Subtraktion 2- oder 3-stelliger Zahlen u. s. w. nicht — wie dies gewöhnlich geschieht — sofort zum Bleistift greifen, da sie gelernt haben, in bedeutend kürzerer Zeit das Ergebnis im Kopfe auszurechnen. Wenn dagegen vielfach geltend gemacht wird, es wäre vollkommen überflüssig, im Kopfe mit mehrstelligen Zahlen zu rechnen, da man im praktischen Leben doch in solchem Falle schriftlich rechne, so liegt eben der Grund für diese Thatsache einzig und allein darin, dass leider nur sehr wenige Menschen sich im Kopfrechnen sicher genug fühlen und daher zum Schriftrechnen ihre Zuflucht nehmen müssen. Selbstverständlich wird man es aber vermeiden, im Kopfrechnen nach Kunststücken zu haschen, „die durch Grösse der Zahlen und ausgesuchte Verwickelung der Verhältnisse überraschen, sondern man begnügt sich damit, den Schüler in den einfachsten und allgemein nützlichsten Gebieten fest zu begründen“.*) —

Sehr empfehlenswerte didaktische Hifsmittel, welche das sichere und flotte Rechnen ungemein befördern und bei den Schülern meistens sehr beliebt sind, habe ich in den Probeextemporalien im Kopfrechnen sowie auch im Wettrechnen gefunden. Die Probeextemporalien im Kopfrechnen bestehen darin, dass man nach jedem Abschnitt 20—30 Aufgaben in möglichst bunter Aufeinanderfolge einzeln zum Rechnen im Kopfe aufgiebt und die Ergebnisse auf einen Zettel neben die laufende Nummer setzen lässt. Auf diese Weise kann man sich sehr leicht von der Sicherheit sowie auch — wenn die Aufgaben etwas flott aufeinander folgen — von der Schnelligkeit im Kopfrechnen überzeugen.

*) Wildermuth in Schmid's Encyklopädie des gesamten Erziehungs- und Unterrichtswesens. Bd. VI, S. 784.

Das Wettrechnen andrerseits besteht darin, dass der Schüler, welcher zuerst die gestellte Aufgabe richtig beantwortet, der erste wird, derjenige, dem dies bei der zweiten Aufgabe gelungen, der zweite u. s. w. Dabei muss man freilich den Schülern gestatten, ungefragt aufzustehen und die richtige Antwort zu sagen; auch muss man anfangs den Übereifer dadurch dämpfen, dass man diejenigen Schüler, welche 2 Aufgaben falsch gerechnet haben, einige Zeit lang von dem Mitbewerb ausschliesst. —

Ein Haupterfordernis aber für das Kopfrechnen ist meiner Erfahrung nach die gründliche Vorbereitung des Lehrers, so dass derselbe imstande ist, soviel als möglich die Aufgaben aus dem Kopfe zu geben, da dann die Schüler mit bedeutend grösserem Eifer bei der Sache sind, als wenn der Lehrer die Aufgaben aus dem Buche entnimmt und das Ergebnis abliest. Dadurch wird auch der Lehrer viel besser in der Lage sein, die für die Ausrechnung nötige Zeit zu beurteilen und die Schüler auf Fehler aufmerksam zu machen. Freilich ist dann das Rechnen nicht nur für den Schüler eine sehr bedeutende geistige Arbeit, sondern auch ganz besonders für den Lehrer, so dass die Rechenstunden — soweit das möglich ist — unbedingt auf die ersten Vormittagsstunden gelegt werden müssten, was leider häufig genug nicht der Fall ist, ein Beweis dafür, dass der Rechenunterricht in seiner Bedeutung nicht immer gewürdigt wird, während Wildermuth*) dieselbe sehr treffend in nachstehenden Worten kennzeichnet: „Durch das Kopfrechnen lernt der Schüler sich innerlich sammeln, die Zahlenvorstellungen, mit denen er zu operieren hat, im Gedächtnis festhalten und seine ganze Aufmerksamkeit auf ein bestimmtes Ziel hinlenken. Dazu wird er um so mehr angetrieben, als jede Nachlässigkeit und jedes Übersehen alsbald in handgreiflichen Folgen, d. h. in einem unrichtigen, oder, gegenüber den Mitschülern, verspäteten Resultat sich offenbart. Führt er seine Rechnungen schriftlich aus, so bleibt die geistige Thätigkeit wesentlich dieselbe; der Rechner muss aber zugleich lernen, sie äusserlich in bestimmter Ordnung, übersichtlich, deutlich und reinlich darzustellen, weil er sich bald durch die Erfahrung überzeugen wird, dass das Gegenteil davon nur Zeitverlust, Fehler und Verdriesslichkeiten aller Art zur Folge hat. — So besteht das Rechnen in einer durchaus klaren, auf den einfachsten Denkgesetzen beruhenden, innerlich und äusserlich geordneten Verstandesthätigkeit der Art, wie sie kein anderer Unterrichtsgegenstand gewährt, weil keiner es mit so einfachen Vorstellungen und Begriffen, so durchsichtigen und bestimmten Urteilen und Schlüssen zu thun hat. Ebendeshalb bildet es eine vortreffliche Vorbereitung für andere schwierigere Fächer; es macht dem Schüler klar oder lässt ihn wenigstens ahnen, was eigentlich zum Lernen gehört: aufmerksame Betrachtung und klare Auffassung des Gegebenen, selbstthätige Verarbeitung der empfangenen Vorstellungen und Begriffe durch allseitige Vergleichung, Zerlegung und Verbindung und Einübung des Erfassten bis zum sichern und fertigen Können.“ —

Steht aber das Kopfrechnen im Mittelpunkt des gesamten Rechenunterrichtes d. h. wird das Lernen auf diesem Gebiete hauptsächlich in die Unterrichtsstunde verlegt, so hört damit von selbst eine Überlastung der Schüler mit häuslichen Arbeiten, wie sie früher gerade hier nicht selten vorkam, unbedingt auf. Ja man kann umgekehrt nicht

*) Schmid's Encyklopädie Bd. VI, S. 786.

mit Unrecht aus einer Überlastung auf einen mangelhaften Unterricht schliessen, da hier ebenso wie in anderen Fächern bei richtiger Behandlung der Schwerpunkt der doch immer gemeinsamen Schularbeit in der Schule belassen werden muss. — Auch wird es nicht mehr nötig sein, das grosse Einmaleins, über dessen Umfang und Bedeutung viel gestritten worden ist, überhaupt noch auswendig lernen zu lassen, da im Kopfrechnen gut ausgebildete Schüler im Augenblick das Resultat zu finden imstande sind, während die auswendig gelernten Ergebnisse bei seltener Benutzung bald verwechselt bez. vergessen werden. —

Aus den in der vorliegenden Arbeit entwickelten Grundsätzen ergibt sich ferner die Beantwortung einer in den letzten Jahren vielfach erörterten Frage eigentlich von selbst, nämlich die Stellung der Decimalbrüche zu den gemeinen Brüchen. Nach Einführung des decimalen Masssystems gewannen die Decimalbrüche so sehr an Bedeutung, dass man vielfach — und zwar hauptsächlich wieder aus praktischen Rücksichten — es für angezeigt hielt, dieselben vor den gewöhnlichen Brüchen durchzunehmen und wegen ihrer Bedeutung für das praktische Leben ausführlicher zu behandeln als die gemeinen Brüche (die mitunter sogar, als überflüssig für Volksschulen, fortzulassen vorgeschlagen wird). So sagt z. B. Direktor Vollhering (Bautzen) in der Februarnummer (1890) der Zeitschrift für lateinlose Schulen: „Diese Einrichtung (nämlich die Decimalbrüche erst in Quinta durchzunehmen) möchten wir als unzweckmässig angreifen. Überall, auch im Rechenunterricht, ist vom Leichteren zum Schwierigeren aufzusteigen. Nun schliesst sich der Decimalbruch so eng an das dekadische Zahlensystem an, wie dieses gegenwärtig auch im Mass-, Münz- und Gewichtssystem zur Anwendung gelangt ist, dass die Erlernung des Rechnens mit Decimalbrüchen der heutigen Jugend bedeutend leichter fällt als die der gemeinen Bruchrechnung. Schon die übliche Schreibweise M. 3,62 für 3 Mk. und 62 Pfg. weist mit Entschiedenheit auf zeitiges Betreiben der Decimalbrüche hin. Zur Zeit, wo der Thaler mit seinen 12 Pfg. gebräuchlich war, wo der süddeutsche Gulden mit 60 Kr. noch vorhanden war, der Centner 110 Pfd. enthielt, und manche andere ähnliche Ungeheuerlichkeit noch bestand, war das anders. Wird aber heute noch die Behandlung des gemeinen Bruches der des Decimalbruches vorangestellt, so ist das ein Zopf aus der guten alten Zeit, der schleunigst zu entfernen ist, zumal an lateinlosen höheren Schulen, die nicht genug darauf bedacht sein können, das für das praktische Leben erforderliche Wissen und Können in verhältnismässig kurzer Zeit ihren Schülern zu übermitteln. Uberhaupt ist die Rechnung mit gemeinen Brüchen bei weitem nicht in der Ausdehnung zu betreiben, als dies vor zwanzig Jahren der Fall war; sie ist ein schönes geistiges Turngerät, aber wir haben deren genug und benutzen vorwiegend diejenigen von ihnen, deren fleissige Anwendung nicht erst mittelbar, sondern unmittelbar Nutzen für das Leben verspricht.“ —

Gegen diese Ausführungen ist nun zu bemerken, dass sich zwar „der Decimalbruch sehr eng an das dekadische Zahlensystem anschliesst“ und dass auch das Rechnen damit nach denselben Gesetzen wie bei ganzen Zahlen geschieht, dass aber trotzdem die systematische Ableitung, wie sie nach meinen Erörterungen für höhere Schulen unbedingt erforderlich ist, ohne die vorhergehende Behandlung der gemeinen Brüche vollkommen unmöglich ist. Zwar ist das Rechnen mit den Decimalbrüchen unbedingt bedeutend leichter wie das mit gemeinen Brüchen, so dass, wenn man sich einzig und allein darauf beschränkt, die Vorwegnahme der ersteren berechtigt ist. Für Volksschulen mag daher diese Änderung angängig sein, für höhere Lehranstalten ist sie aber um so weniger statthaft, als die Behandlung des Decimalbruches sich auf den Begriff des gemeinen Bruches, von dem er ja nur eine besondere Art ist, stützt und ohne denselben zweifellos unverständlich bleibt. Dazu kommt ferner, dass die Vorwegnahme der Decimalbrüche keinen Vorteil für die Behandlung der gemeinen Brüche bringt, während umgekehrt die gründliche Durchnahme der letzteren das Verständnis für die Decimalbrüche und das Rechnen mit denselben ganz bedeutend erleichtert, so dass es methodisch allein richtig ist, bei „dem Zopf aus der guten alten Zeit zu bleiben". — Durch den vorgeschlagenen Unterrichtsgang wird ausserdem auch jedes Bedenken in Beziehung auf das praktische Leben hinfällig, denn da beide Arten von Brüchen im Laufe eines halben Jahres durchgenommen und in den ersten Monaten in Quinta (im theoretischen Rechnen) vollständig eingeübt werden sollen, so kommen nur die Schüler nicht zur Erlernung der Decimalbrüche, welche sich dadurch einen „Einblick in die höhere Bildung verschaffen wollen", dass sie nur die Sexta besuchen. Auf solche Schüler aber kann natürlich keine höhere Schule Rücksicht nehmen. —

Übrigens haben sich auch mehrere Direktorenversammlungen in demselben Sinne ausgesprochen. So hat z. B. auf der 8ten preussischen Direktorenkonferenz die grosse Mehrheit sich der Ansicht des vorsitzenden Prov.-Schulrats Dr. Kruse angeschlossen, dass „es methodisch richtig sei, die Decimalbrüche nach den gemeinen Brüchen zu behandeln; daran könne die Einführung des Decimalsystems in das bürgerliche Leben nichts ändern". Der Referent für Realgymnasien auf der Strassburger Direktorenkonferenz von 1877 sagt in Bezug auf diesen Punkt: „Die Decimalbrüche finden als eine besondere Art der gewöhnlichen Brüche ihre naturgemässe Stellung entweder nach diesen, oder . . . neben denselben; wenigstens die Multiplikation mit einem Decimalbruch als Multiplikator lässt sich nur durch einen Trugschluss aus seiner Analogie mit einer ganzen Zahl herleiten". . . . Ein Referent für die Direktorenkonferenz zu Hannover im Jahre 1879, welche sich ebenfalls in ihrer grossen Mehrheit dieser Ansicht anschloss, drückte sich über diesen Punkt recht drastisch, aber zutreffend aus, wenn er sagte: „In Sexta schon mit Decimalbrüchen rechnen, hiesse die Stenographie vor der Cursivschrift beginnen". —

Wenn nun im Anschluss an diese Frage vielfach (z. B. auch von Herrn Direktor Vollhering) eine weniger eingehende Behandlung der gemeinen Brüche für ratsam gehalten wird, so mag dies auch wieder für Volksschulen angängig sein, für höhere Lehranstalten ist es aber deswegen nicht der Fall, weil die gemeinen Brüche von der allergrössten Bedeutung für die Algebra und bei methodischer Behandlung — wie Herr Direktor Vollhering selbst sagt — eins der schönsten geistigen Turngeräte sind, die wir haben, welches meiner Ansicht nach grade für lateinlose Schulen von noch grösserer Bedeutung ist wie für Gymnasien und Realgymnasien, die bei stärkerem Betriebe der Sprachen weniger darauf angewiesen sind. Schliesslich haben die lateinlosen höheren Schulen durchaus nicht nötig, „das für das praktische Leben erforderliche Wissen und Können" im Rechnen in kürzerer Zeit ihren Schülern zu übermitteln als die Lateinschulen, da ersteren eine grössere Stundenzahl fürs Rechnen zur

Verfügung steht, welche dazu dienen kann, den durchzunehmenden Stoff eingehender einzuüben. —

„„Es werde Licht!“ Diesem grossen Gedanken soll jeder rationelle, also auch der Rechenunterricht dienen, denn der Mensch soll ein Diener sein des Ewigen.“ Diese Forderung, welche mit Recht Diesterweg an jeden vernunftgemässen Unterricht stellt, lässt sich in ganz besonders hohem Grade durch den Rechenunterricht erfüllen, wenn derselbe, wie in der vorliegenden Abhandlung skizziert, in allen seinen Stufen nach möglichst geistbildenden Grundsätzen betrieben wird, da dann nicht allein die Denkkraft, sondern auch das Kombinationsvermögen, die Urteilskraft und das Schlussvermögen entwickelt, sowie überhaupt eine allseitige, harmonische Entwickelung des Geistes erreicht wird. Selbstverständlich ist es auch, dass bei dieser Lehrweise keine besondere mathematische Beanlagung erforderlich ist, wie noch heute vielfach angenommen wird, denn da der Rechenunterricht ebenso, wie später der mathematische keinen anderen Weg einschlagen soll wie den, welchen der gesunde Menschenverstand geht, so kommt es eben nur darauf an, den von Gott dem Menschen verliehenen Verstand richtig anzuwenden, auszubilden und zu schärfen. —

Bei richtiger Behandlung erfüllt der Rechenunterricht aber auch die weitergehende Forderung Diesterweg's: „Aller wahre Unterricht wirkt Menschenbildung. Mehr kann man nicht leisten; soviel soll man aber auch leisten. Auch der Rechenunterricht bildet für das Wahre, Gute, Tüchtige; er erzeugt Liebe zum Wahren; er hat folglich eine sittliche Wirkung.“ Und in der That wird — wenn nicht etwa die Erziehung über dem Unterrichte und der Mensch über dem Schüler vergessen wird — grade der Rechenunterricht mehr denn irgend ein anderer Unterrichtsgegenstand ein wichtiger Faktor wahrer Bildung sein. Denn bei keinem andern Unterrichtsgegenstande wird durch das „Verfolgen der Wahrheit bis in die äussersten Konsequenzen, wir möchten sagen, das energische Durchdenken einer zusammenhängenden Gedankenreihe bis an's fernste Ende derselben“ (Prof. Pick) eine so grosse geistige Zucht und damit eine bedeutende Zügelung der Phantasie, Kräftigung des Willens, der Ausdauer, des Selbstvertrauens, sowie Stählung der Wahrheitsliebe und des Charakters erreicht, wie durch den Rechenunterricht. Bei geistbildender Lehrweise hat also der Rechenunterricht auch „im Leben als eine vom Geist ausgehende Ordnung der äusserlichen Verhältnisse, als ein dem Recht dienender Faktor des menschlichen Verkehrs seine sittliche Bedeutung“,*) und ohne Zweifel hat Wildermuth vollkommen recht, wenn er sagt**): „Der Rechenunterricht hat seine sittliche Bedeutung. Die Gewöhnung des Geistes an eine streng gesetzmässige Thätigkeit, die feste Richtung des Willens auf wahre und sichere Urteile und die Übung in der Beharrlichkeit und Tüchtigkeit sie zu finden, enthalten wichtige sittliche Momente. Wenn es wahr ist, was Pascal in seinen Pensées sagt: „Toute notre dignité consiste dans la pensée, c'est de là qu'il faut nous relever ... Travaillons donc à bien penser; voilà le principe de la morale“, so hat der Rechenunterricht, welcher das Werkzeug des richtigen Denkens, den gebildeten Verstand, ausrüsten hilft, sicherlich eine tiefe Beziehung zur Sittlichkeit“. —

*) Palmers Pädagogik, 1. Ausg., S. 218.

**) A. a. O. S. 786.

Der kundige Leser wird die vorliegende Arbeit als das auffassen, was sie sein soll, als einen bescheidenen Beitrag zum Rechenunterricht an höheren Lehranstalten. Beseelt von dem Wunsche, dass die hohe Bedeutung dieses Unterrichtsgegenstandes mehr und mehr gewürdigt werden möchte, würde der Verfasser für seine Mühe voll und ganz belohnt sein, wenn es ihm ausserdem gelungen wäre, manche Eltern über Ziele, Lehrweise und Bedeutung des Rechnens aufzuklären und sie für die häusliche Arbeit ihrer Söhne zu interessieren, da nur durch sachgemässes Handinhandgehen von Elternhaus und Schule die hohe Aufgabe des Unterrichtes und der Erziehung vollkommen gelöst werden kann.

Crefeld, im März 1890.

Dr. Weisflog.