Der vorbereitende geometrische Unterricht in Quinta.

Vorwort.

Die Forderung, alles Wissen auf Anschauung zu begründen, ist seit Pestalozzi die Grundlage der Pädagogik geworden. Für die Geometrie scheint dieser Grundsatz eigentlich selbstverständlich, und seine Durchführung ergiebt sich auf die natürlichste Weise, während auf anderen Gebieten die Uebertragung des an und für sich richtigen Gedankens in die Praxis grosse Schwierigkeiten bietet. Jedoch gerade in der Geometrie hat derselbe erst spät allgemeinen Anklang gefunden. Die erste amtliche Verordnung, welche für die Gymnasien die Notwendigkeit, dem wissenschaftlichen mathematischen Unterrichte einen vorbereitenden Anschauungskursus vorauszuschicken, betont, ist die Cirkularverfügung vom 7. Januar 1856. Dieselbe scheint aber keine allgemeine Durchführung erfahren zu haben. Indessen rief die angeregte Frage eine reiche Litteratur[1]) hervor.

Durch die revidierten Lehrpläne für die höheren Schulen nebst der darauf bezüglichen Cirkularverfügung vom 31. März 1882 haben die auf einen geometrischen Vorbereitungs-Unterricht gerichteten Betrebungen eine bestimmtere Richtung erhalten. Die betreffende Stelle lautet:

„Die für Quinta eingetretene Erhöhung der Anzahl der Lehrstunden ermöglicht es, eine wöchentliche Lehrstunde dem Zeichnen von Figuren mit Zirkel und Lineal zu widmen und durch diese methodische Ausbildung der Anschauung den davon ausdrücklich zu unterscheidenden geometrischen Unterricht vorzubereiten."

Trotz der kurzen Zeit seit Einführung dieses Quinta-Kursus sind eine Menge von Abhandlungen und Leitfäden[2]) erschienen, welche diesen Gegenstand behandeln. Jedoch gehen die Ansichten noch weit auseinander, was in Anbetracht der kurzen Praxis wohl erklärlich ist. Diese Verschiedenheit der Meinungen mag es rechtfertigen, wenn hier ein weiterer Versuch auf diesem Gebiete gemacht wird. Wenn sich auch ein propädeutischer Unterricht ganz besonders an der Hand der Praxis entwickeln muss, so wird es doch erforderlich sein, die leitenden theoretischen Gesichtspunkte für Ziel und Methode vorauszuschicken.

Die Ziele des vorbereitenden Unterrichtes müssen auf die Hebung der Schwierigkeiten gerichtet sein, welche der erste wissenschaftliche Unterricht bietet. Dieselben sind

---

[1]) Litteraturanhang, Abteilung I.
[2]) Litteraturanhang, Abteilung II.

vornehmlich zweierlei Art. Die erste hat Wittstein[1]) trefflich gekennzeichnet. Während es nämlich in anderen Disciplinen selbstverständlich ist, dass an die Kenntnisse, welche der Schüler mitbringt, angeschlossen und auf denselben weiter gebaut wird, geschieht in der Geometrie die Vorführung des Stoffes und seine Verarbeitung zu schwierigen Abstraktionen gleichzeitig. Die Geometrie arbeitet sofort mit sehr abstrakten und scharf bestimmten Begriffen, ehe der jugendliche Geist dieselben anschaulich geläufig hat. Nun wird aber[2]) „der Wert strenger Beweise nur dann erst vollständig erkannt, wenn man in der Sphäre von Begriffen, wohin sie gehören, schon einheimisch ist.“ Was der Schüler selbst für den Geometrie-Unterricht mitbringt, ist von geringer Bedeutung. Der algebraische Unterricht ist in dieser Beziehung besser gestellt als der geometrische, denn er findet in den Kenntnissen des Rechnens genügenden Stoff, um die abstrakten Begriffe daraus abzuleiten. Das ganze Gebiet der positiven Zahlenreihe, sowie die vier ersten Grundoperationen mit ganzen und gebrochenen Zahlen sind dem Schüler bekannt, bevor ihm zugemutet wird, auch nur den Begriff der Zahl allgemein aufzufassen. Dagegen genügen die geometrischen Vorkenntnisse durchaus nicht, um mit ihnen den wissenschaftlichen Unterricht unmittelbar zu beginnen. Daher ist ein besonderer Kursus notwendig, dessen Aufgabe es demgemäss sein muss, den Schüler mit dem Anschauungsstoff, welchen das Quartapensum enthält, an der Hand von Körpermodellen und Zeichnungen bekannt zu machen. Aus diesem Anschauungsmaterial müssen die abstrakten Begriffe allmählich gewonnen werden und zwar nur durch die klare Auffassung der Zeichnung oder des Körpers. Es dürfen auch nach dieser Vorbereitung keine Definitionen aufgestellt werden, welche der Schüler wörtlich in sein Gedächtnis aufnehmen muss. So genügt es z. B. auf dieser Stufe vollkommen, wenn der Schüler den Nebenwinkel eines gegebenen Winkels zeichnen kann, ohne dass ihm die Definition von Nebenwinkeln sprachlich geläufig sein braucht. Damit ist natürlich nicht gesagt, dass nicht auch hier thunlichst auf den sprachlichen Ausdruck Rücksicht genommen werden soll.

Durch diese fortwährende Beschäftigung mit geeigneten Zeichnungen wird der Vorbereitungskursus auf die Ausbildung des Anschauungsvermögens, also der Fähigkeit des Geistes, sich schnell und leicht in die verschiedensten Lagenbeziehungen geometrischer Figuren hinein zu finden, fördernd wirken[3]). Wie wichtig diese Fähigkeit ist und wie vielen schwächeren Schülern sie fehlt, kann man auf jeder Stufe des mathematischen Unterrichts beobachten.

Die andere der genannten Schwierigkeiten liegt im Beweis. Damit ist nicht die Ungeschicklichkeit gemeint, welche anfangs in der Anwendung der einfachsten logischen Schlussformen hervortritt. Diese Schwierigkeit kann nicht in Quinta gehoben werden, denn die Entwickelung des logischen Denkens ist die fortlaufende Aufgabe des ganzen mathematischen Unterrichtes. Es wäre vollkommen verkehrt, wenn man etwa in einer Art von logischem Vorkursus das erreichen wollte, was erst die Frucht der gesammten Schulerziehung

[1]) Wittstein, die Methode des math. Unterrichts. Hannover 1879, Hahn S. 80 ff.
[2]) Herbart, Umriss pädagogischer Vorlesungen. Göttingen 1841. S. 204.
[3]) Diekmann, Übungen und Aufgaben f. d. geom. prop. Unterricht. I. Teil. Breslau, Hirt, 1888. Vorwort.

sein kann. Es handelt sich hier vielmehr, wie Reidt[1]) treffend sagt, um „eine Brücke zwischen der Erkenntnis durch Anschauung und derjenigen durch logische Schlussfolgerung.“ Dem Anfänger erscheint es höchst überflüssig, für dasjenige, was ihm anschaulich durchaus klar ist, einen Beweis zu geben.[2]) So wird er z. B. zunächst gar nicht begreifen, was bei dem Satze: Zwei gerade Linien, welche auf einer dritten senkrecht stehen, sind parallel, bewiesen werden soll. Er sieht mit einer gewissen Ueberzeugung durch unmittelbare Anschauung ein, dass die Linien parallel laufen und dies genügt ihm. Hier kann und muss der propädeutische Unterricht nützlich wirken, indem er in den Schülern das Bedürfnis nach einem logischen Beweise und nach folgerichtiger Begründung weckt[3]) und ihnen die gesetzmässige Abhängigkeit der einzelnen Teile einer Figur klar zum Bewusstsein bringt.

Was zunächst diesen zweiten Punkt betrifft, so bietet seine methodische Ausführung nicht unerhebliche Schwierigkeiten. Denn, da von einem Beweis keine Rede sein kann, bleiben zur Unterstützung und Prüfung der durch die unmittelbare Anschauung gewonnenen Einsicht als einzige Mittel der Massstab (Zirkel) und Transporteur. Hier ist es nun, um das Bedürfnis nach einem logischen Beweis zu wecken, von grosser Wichtigkeit, dass an jeder Stelle des propädeutischen Unterrichtes darauf hingewiesen wird, dass die Genauigkeit unserer Sinne und Messinstrumente nur eine annähernde ist, während der betreffenden mathematischen Wahrheit unbedingte Gültigkeit zukommt. Geschieht dies fortlaufend, so lernt der Schüler die mathematischen Wahrheiten mehr und mehr als die herrschenden Gesetze kennen, welche über unserer sinnlichen Anschauung und über der Genauigkeit unserer Messinstrumente stehen und auch im letzten Grunde durch andere Mittel als durch unsere Messvorrichtungen eingesehen werden müssen. Weist man ferner darauf hin, dass dieselbe Wahrheit von allen Schülern der Klasse an den verschiedensten Figuren bestätigt worden ist, und dass fehlerhafte Resultate nur in der Ungenauigkeit der Zeichnung begründet sind, so drängt sich der Gedanke auf, dass die betreffende Eigenschaft nicht zufällig, sondern allgemein gültig ist. Dieser Einsicht schliesst sich naturgemäss die Frage an, warum es immer so sein muss.

Eine weitere Vorbereitung für den Beweis, dessen Endpunkte in der Voraussetzung und Behauptung liegen, besteht ferner darin, dass man in jeder Figur die bedingenden und die daraus folgenden Eigenschaften scharf gegenüberstellt. Die Fragen: welche Strecken oder Winkel der Zeichnung sind gleich gemacht, welche dagegen ohne unser Zuthun gleich geworden? werden dem Schüler den Inhalt des Angeschauten oder Gezeichneten klar zum Bewusstsein bringen. Ohne dass die Worte Voraussetzung und Behauptung genannt werden, bekommt der Anfänger durch den fortwährenden Gebrauch dieser wichtigen Unterscheidung Einsicht in die gesetzmässige Abhängigkeit der einzelnen Teile eines mathematischen Ganzen. Für diesen Zweck haben diejenigen Zeichnungen einen ganz besonderen Wert, welche unerwartet und zunächst auch vom Schüler nicht beabsichtigt neue Eigenschaften hervortreten

[1]) Reidt, Anleitung z. math. Unterricht. Berlin, Grote, 1886. S. 165.

[2]) Nebenbei bemerkt sind gerade unter den Anfangssätzen einige, für welche ein eigentlicher Beweis nicht unbedingt erforderlich ist, wie z. B. für den Satz, dass die Summe zweier Nebenwinkel zwei Rechte beträgt.

[3]) Diekmann, a. a. O.

lassen. Derartige Figuren lassen sich allerdings nicht sehr zahlreich finden. Wollte man sich ganz auf die einfachen Figuren des ersten wissenschaftlichen Unterrichts beschränken, so würde das Anschauungsmaterial gar zu spärlich ausfallen. In dem folgenden Leitfaden sind daher im Anschluss an das gleichseitige und gleichschenklige Dreieck und die verschiedenen Parallelogrammarten Figuren entworfen, welche eine grössere Mannigfaltigkeit darbieten. In der dabei erforderlichen grösseren Sorgfalt und Genauigkeit der Zeichnung liegt nicht nur ein allgemeines erziehliches Moment, sondern es ist damit auch eine ganz besonders deutliche Vorstellung von der Gesetzmässigkeit der betreffenden Figur verknüpft.

In Bezug auf das erstgenannte Ziel, nämlich die Einführung des Schülers in das Gebiet geometrischer Gebilde und Begriffe, ist es einleuchtend, dass methodisch durchaus anders verfahren werden muss als beim wissenschaftlichen Unterricht. Es sind besonders Wittstein und Börner, welche auf den Unterschied zwischen dem systematischen Aufbau des Systems und der Methode der Forschung aufmerksam machen. Wittstein sagt[1]): „Nun sind aber die Anfangspunkte der Erkenntnis nicht einerlei mit dem Princip der Wissenschaft. Die Erkenntnis oder, was hier dasselbe sagt, die Forschung nimmt die Objekte so wie ihr der Zufall der Erfahrung dieselben darbietet. Der Gang ihrer Untersuchung ist der Hauptsache nach analytisch, und sie findet eine treue Nachahmerin, mit dem einzigen Unterschiede, dass der Zufall einer Lenkung unterworfen wird und erfolglose Versuche ausgeschlossen bleiben, in dem propädeutischen Unterrichte.“ Entsprechend hebt Börner[2]) hervor, dass der Gang des mathematischen Unterrichtes bisher ein zu wenig natürlicher gewesen sei. Sowohl im ersten Anfang als auch im weiteren Verlaufe des Anfangsunterrichtes wird das Allgemeine an die Spitze gestellt und das Besondere daraus abgeleitet, ein Verfahren, welches kein anderer Unterrichtszweig anwendet. Wenn auch die Mathematik eine durchaus deduktive Wissenschaft ist, deren Methode der naturwissenschaftlichen induktiven genau entgegengesetzt ist, so handelt es sich andrerseits im propädeutischen Unterrichte nicht um den Aufbau der ersten Stufen des mathematischen Systems, sondern um die erste Einführung in eine Formen- und Begriffswelt, welche dem Schüler fast vollkommen fremd ist. Der Anfänger steht der Mathematik ähnlich gegenüber wie die ersten Menschen, welche auf das Bestehen geometrischer Gesetze aufmerksam wurden. Nun sind aber[3]) „zweifellos die ersten mathematischen Wahrheiten auf empirischem Wege gefunden, die Linien, Winkel, Figuren sind an physischen Gegenständen wahrgenommen worden, und das Vergleichen zwischen den Individuen derselben Art und den verschiedenen Arten derselben Gattung hat zum Auffinden des Gemeinschaftlichen, zu den Begriffen und Eigenschaften der Art und Gattung geführt.“ Demgemäss muss die Methode des propädeutischen Unterrichtes eine induktive sein, sowohl was den ersten Anfang als auch den weiteren Verlauf des Unterrichtes betrifft. Es wäre z. B. verkehrt, wenn man die Definition eines Parallelogramms an die Spitze stellen und daraus entsprechend den logischen Möglichkeiten die besonderen Arten deducieren wollte, ehe dieselben anschaulich vorgeführt worden sind. Man wird vielmehr umgekehrt verfahren, die Zeichnung und Be-

---

[1]) Wittstein, a. a. O. S. 28.
[2]) Börner, Lehrbuch z. Einführung in d. Geometrie. Leipzig, Teubner, 1879. Vorwort. S. IV.
[3]) Börner a. a. O.

schreibung der einzelnen Arten vorausschicken und am Schluss erst den Begriff der Gattung Parallelogramm geben müssen. Nachdem dieser Begriff seinem Inhalt und Umfang nach gewonnen ist, kann man immerhin in Form einer Wiederholung die einzelnen Arten aus der Erklärung des Parallelogramms ableiten.

Was den Ausgangspunkt des propädeutischen Unterrichtes anlangt, so weichen die verschiedenen Leitfäden sehr von einander ab. Einige setzen eine Reihe von Definitionen an die Spitze, andere beginnen damit, Strecken von vorgeschriebener Länge zu zeichnen, dieselben um ein gegebenes Stück zu verlängern, Summen und Differenzen von Strecken zu bilden u. s. w., wieder andere gehen von Figuren und Körpern aus. Das erste Verfahren ist sicher verfehlt; das zweite befolgt zwar den Grundsatz, vom Einfachen zum Zusammengesetzten fortzuschreiten, ist aber weit davon entfernt, ein induktives zu sein.[1]) Denn die Strecken und Winkel sind zwar die einfachsten mathematischen Gebilde, aber sie sind durch Abstraktion erhalten. Der Unterricht wird also auf das zurückgehen müssen, wovon sie abstrahiert sind, also auf Figuren und in letzter Linie auf Körper.

Die Frage, ob die Flächen- oder Raumanschauung die ursprüngliche ist, wird von der Psychologie scheinbar zu Gunsten der ersteren entschieden. Denn das Netzhautbildchen ist ein flächenhaftes, und erst allmählich lernt das Kind dasselbe in ein dreidimensionales verwandeln. Aber nachdem es seine aprioristische dreidimensionale Raumanschauung auf die Gegenstände der Aussenwelt anwenden gelernt hat, ein Vorgang, der in den ersten Jahren der Kindheit beendet ist, steht dieselbe in unlöslicher Verbindung mit dem Sehen, und es bedarf einer neuen Geistesoperation, die Fläche vom Körper zu trennen. In diesem Sinne ist die Fläche in der That eine Abstraktion. Daher steht es auch mit dem Wesen der Raumanschauung vollständig im Einklang, wenn die Körper als Ausgangspunkte der Betrachtung gewählt werden.

Andere Gründe gegen den Gebrauch von Körpermodellen führt Heinze[2]) an. „Die Modelle müssen vieles enthalten, was die Aufmerksamkeit der Schüler von dem Wesentlichen, der Auffassung der Gestalt, ablenkt." Dem lässt sich aber einfach dadurch abhelfen, dass die Modelle aus grauem Pappdeckel verfertigt werden. Dann bleibt kaum etwas für die Zerstreuung der Schüler übrig. — Die Sinnestäuschungen, welchen das Auge beim Betrachten von Körpern unterworfen ist, und die Verschiedenheiten im Anblick eines Körpers je nach dem Standpunkt des Beobachters kommen für das in dem folgenden Leitfaden angewendete Verfahren kaum in Betracht; ebenso werden Schwierigkeiten, welche ein tieferes mathematisches Verständnis der Körper erfordern, vermieden. Auf die weitere Bemerkung Heinze's: „Man vergegenwärtige sich z. B. das Verfahren bei der Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks und suche aufzudecken, was für dieses Verfahren aus dem Betrachten eines Oberflächenteiles

[1]) Ausserdem ist zu berücksichtigen, dass ein solches Verfahren auf den jugendlichen Geist eines Quintaners geradezu abschreckend wirken muss. Es ist ein rein mechanisches Ziehen von Linien, was der Schüler meistens schon kann oder, wenn dies nicht der Fall sein sollte, gelegentlich beim Zeichnen der Figuren lernt. (Vergl. Reidt, Anleitung z. math. Unterricht S. 169.)

[2]) Heinze, der Vorbereitungsunterricht in der Geometrie in Quinta. Programmbeilage 1888 des Kneiphöfischen Gymnasiums zu Königsberg.

eines Tetraëders gewonnen wird. Man wird wohl nichts finden, was das gleichseitige Dreieck als solches anginge. Das Tetraëder kann dabei höchstens zerstreuend wirken," lässt sich erwidern, dass es gar nicht in der Absicht des propädeutischen Unterrichtes liegt, aus der Betrachtung des Tetraëders irgend welchen Nutzen für die Konstruktion eines gleichseitigen Dreiecks zu ziehen, dass man es aber vorzieht, das gleichseitige Dreieck am Tetraëder gleichsam als Naturobjekt zu zeigen, bevor man zum Nachzeichnen, zur Konstruktion desselben übergeht.

Eine klassische Durchführung der induktiven Methode, zugleich eine fortlaufende Verknüpfung von Stereometrie und Planimetrie giebt Börner in seinem „Lehrbuch zur Einführung in die Geometrie" und neuerdings in einer Programmbeilage.[1]) Der Kreis wird aus der Betrachtung und Zerlegung der Kugel, das Quadrat aus dem Würfel, das Rechteck aus der quadratischen Säule, der Rhombus aus dem Rhomboëder u. s. w. gewonnen. Der zu grunde liegende Gedanke ist bis ins einzelne scharf durchgeführt, aber es lässt sich nicht läugnen, dass gerade mit der konsequenten Durchführung desselben einige Nachtheile verbunden sind. Der Schüler muss des Prinzipes wegen eine grössere Anzahl von Körpern mit zum teil recht schwierigen Namen wie schiefe Rhombsäule und schiefe Rhomboïdsäule beschreiben, von denen er bis zur Krystallographie und Stereometrie nichts mehr zu hören bekommt. — Eine weitere Eigentümlichkeit der Börnerschen Schriften ist das Ueberwiegen des Vierecks gegenüber dem Dreieck. Börner macht diese Bemerkung selbst und weist darauf hin, dass dies auch naturgemäss ist, denn „der Begriff Viereck liegt dem Knaben viel näher als der Begriff Dreieck, weil der ersten Anschauung überwiegend das Viereck entgegentritt".[2]) Das ist wohl richtig, aber es ist doch zu bedenken, dass der wissenschaftliche Unterricht durchweg auf der Dreieckslehre beruht. Mit Rücksicht darauf wäre es wünschenswert, wenn dieselbe etwas eingehender behandelt würde. So lässt sich z. B. die Kongruenz der Dreiecke im Anschluss an die betreffenden Konstruktionsaufgaben in einfacher Weise vorbereiten. — Auffallend ist in Bezug auf das Dreieck eine gewisse Inkonsequenz der Börnerschen Programmabhandlung. Während jede Parallelogrammart von dem entsprechenden Körper abgeleitet wird, geschieht dies beim Dreieck nicht, sondern, nachdem die Parallelogramme vollständig abgehandelt sind, erhält man das gleichschenklig-rechtwinklige Dreieck aus dem Rechteck, das gleichschenklige Dreieck aus dem Rhombus, das ungleichseitige Dreieck aus dem Rhomboïd und das gleichseitige als besonderen Fall des gleichschenkligen Dreiecks. Es wäre doch konsequenter, wenn man das gleichseitige Dreieck aus dem Tetraëder, das gleichschenklige aus der geraden und das ungleichseitige aus der schiefen Pyramide ableiten würde. Auch vermisst man nach der Besprechung der Parallelogramme ein näheres Eingehen auf die parallelen Linien. Es liegt durchaus in der Schwierigkeit des Gegenstandes und in der systematischen Anordnung des Stoffes begründet, dass die parallelen Linien an den Schluss gesetzt sind, aber, da dieselben in dem wissenschaftlichen System gleich anfangs auftreten und auch im weiteren Verlaufe eine wichtige

[1]) Beilage z. Oster-Programm 1887 des Realgymnasiums zu Elberfeld.

[2]) Börner, Lehrbuch z. Einführung in d. Geometrie. Vorwort S. X.

Stellung einnehmen, scheint es doch praktisch, die Namen und Beziehungen der auftretenden Winkel wenigstens anhangweise hinzuzufügen.

Der folgende Leitfaden wird im Anschluss an die vorausgeschickten Erörterungen diesen Gang beobachten: Die Körper bilden den Ausgangspunkt der Betrachtung, sie werden aber nur insoweit zu grunde gelegt, als es sich um die Herleitung der Grundbegriffe handelt. Vom Tetraëder gelangt man zum Dreieck, welches eingehend behandelt wird, vom Cylinder zum Kreis, welcher mit den geradlinigen Figuren fortlaufend in Verbindung gesetzt wird. Aus jeder der einzelnen Dreiecksarten wird die entsprechende Parallelogrammart abgeleitet. Den Schluss bilden die Polygone und die parallelen Linien.

Die Grundlage aller Betrachtung ist die Konstruktion. Doch halten eigentliche Konstruktionsaufgaben und Lehrsätze, welche nur als Ergebnisse der vorausgeschickten Zeichnung hingestellt werden, einander das Gleichgewicht. Der Verfasser hält einen propädeutischen Unterricht, der sich nur mit Konstruktionsaufgaben beschäftigt, wie z. B. der Leitfaden von E. zur Nieden,[1]) nicht geeignet, um die im Vorhergehenden genannten Schwierigkeiten des ersten wissenschaftlichen Unterrichtes zu beseitigen.

Als Anschauungsmittel sind erforderlich recht grosse Modelle von: Würfel, Kugel, Cylinder und Tetraëder. Der Schüler braucht ein Lineal mit Millimeter-Einteilung, ein hölzernes rechtwinkliges Dreieck, einen Transporteur von Papier und einen Zirkel mit Bleistifteinsatz.

Leitfaden.

Würfel und Quadrat.

§ 1.

Gegenstand der Betrachtung: Ein möglichst grosser aus Pappe gefertigter Würfel.

I. Dieser Körper heisst Würfel. Er ist, wie alle Körper, ringsum begrenzt. Man kann ihn messen 1. von vorn nach hinten, 2. von links nach rechts, 3. von unten nach oben. Er hat also drei Ausdehnungen (Dimensionen). Dieselben heissen Länge, Breite, Höhe.

[5]) E. zur Nieden. Methodisch geordnete Aufgabensammlung f. d. geom. prop. Unterricht in d. Quinta h. Lehranstalten. Bonn, Strauss, 1885.

Der Würfel wird von sechs Flächen begrenzt. Jede Fläche lässt sich nur nach zwei Ausdehnungsrichtungen messen, nämlich der Länge und Breite nach. Sie besitzt dagegen keine Höhe. In diesen Flächen ragt kein Teil über die anderen hervor. Solche Flächen werden ebene Flächen genannt. Man überzeugt sich von dieser Eigenschaft mit Hülfe eines Lineales, welches sich in verschiedenen Richtungen so auf die Fläche legen lässt, dass es an allen Stellen dieselben berührt.

Jede Würfelfläche ist von geraden Linien begrenzt. Jede Linie kann nur der Länge nach gemessen werden. Sie hat weder Breite noch Höhe. Je zwei Würfelflächen stossen in einer Linie (Kante) zusammen.

Jede Linie ist auf beiden Seiten durch einen Punkt (Ecke) begrenzt. Einen Punkt kann man überhaupt nicht messen. Er hat keine Ausdehnung. In einer Ecke stossen 3 Flächen und 3 Kanten zusammen.

II. Uebungen. Wie viel Kanten und Ecken hat der Würfel?
Wieviel Kanten liegen in einer Fläche?
Wieviel Kanten müsste es demnach im ganzen geben?
Warum giebt es nur zwölf Kanten?
Wieviel Ecken liegen in einer Fläche?
Wieviel Ecken müsste es demnach im ganzen geben?
Warum giebt es nur acht Ecken?
Welche Ecken begrenzen die obere vordere Kante?
Welche Kanten stossen in der rechts, oben, hinten gelegenen Ecke zusammen? u. s. w.

III. Man zeichne den Umriss einer Würfelfläche an die Tafel und messe die Längen der vier Seiten. Mit Hülfe des hölzernen rechtwinkligen Dreiecks überzeugt man sich, dass je zwei von einem Eckpunkte ausgehende Seiten einen rechten Winkel bilden. Eine solche Figur heisst Quadrat.

Man sagt von zwei Linien, welche einen rechten Winkel bilden, dass sie aufeinander senkrecht stehen.

Wo finden sich im Schulzimmer senkrechte gerade Linien und rechte Winkel?

IV. Aufgaben. 1. Mit Hülfe des rechtwinkligen Dreiecks soll zu einer beliebigen Geraden eine senkrechte Gerade gezeichnet werden.

2. Dieselbe Aufgabe nach Augenmass. Prüfung der Richtigkeit der Zeichnung durch Anwendung des rechtwinkligen Dreiecks.

3. Man unterscheide die beiden Fälle, dass die Senkrechte durch einen auf oder ausserhalb der ersten Geraden gelegenen Punkt hindurchgeht.

a) Auf einer gegebenen Geraden in einem Punkte derselben die Senkrechte zu errichten.

b) Auf eine gegebene Gerade von einem ausserhalb derselben gelegenen Punkte die Senkrechte zu fällen.

4. Es ist ein Quadrat zu zeichnen, dessen Seite 6 cm beträgt.

Kugel, Cylinder oder Walze und Kreis.

§ 2.

Gegenstände der Betrachtung: 1. Eine Kugel und ein eiförmiger Körper, 2. ein Cylinder (Walze).

I. Die Kugel hat eine krumme Oberfläche. Im Gegensatz zu anderen krummen Flächen, z. B. der Oberfläche eines Eies, ist die Kugel überall gleich gekrümmt.

II. Die Walze oder der Cylinder hat eine krumme und zwei ebene Flächen.

III. Man zeichne den Umriss einer der letzteren an die Tafel.] Die erhaltene krumme Linie heisst Kreis. Man kann einen Kreis mit Hülfe eines Stäbchens, welches um einen Endpunkt gedreht wird, oder mit dem Zirkel zeichnen. Der feste Punkt heisst Mittelpunkt oder Centrum. Man unterscheide die Kreislinie oder Peripherie von der Kreisfläche. Die Verbindungslinie eines Punktes der Peripherie mit dem Mittelpunkte heisst Radius. Alle Radien desselben Kreises sind gleich lang. Die Verbindungslinie zweier Punkte der Peripherie heisst Sehne, das zwischen diesen Punkten gelegene Stück der Kreislinie Bogen. Ein Durchmesser ist eine durch den Mittelpunkt gehende Sehne. Der Durchmesser ist doppelt so lang wie der Radius.

Tetraëder und gleichseitiges Dreieck.

§ 3.

Gegenstand der Betrachtung: Ein möglichst grosses aus Pappe gefertigtes Tetraëder.

I. Fragen. Wieviel Flächen, Kanten und Ecken hat das Tetraëder?
Wieviel Flächen stossen in einer Kante, wieviel in einer Ecke zusammen?
Wieviel Kanten treffen in einer Ecke zusammen?
Wieviel Kanten liegen in einer Fläche?
Wieviel Kanten müsste es demnach im ganzen geben?
Warum giebt es nur sechs Kanten?
Wieviel Ecken liegen in einer Fläche?
Wieviel Ecken müsste es demnach im ganzen geben?
Warum giebt es nur vier Ecken?

II. Man zeichne den Umriss einer Tetraëderfläche an die Wandtafel. Durch Messen überzeugt man sich von der gleichen Länge der Seiten des entstandenen Dreiecks.

Erklärung. Ein Dreieck, dessen drei Seiten gleich lang sind, heisst gleichseitig.

Ein Tetraëder ist ein von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzter Körper.

Man überzeuge sich mit Hülfe des rechtwinkligen Dreiecks, dass die Winkel des gleichseitigen Dreiecks kleiner sind als ein rechter Winkel. Solche Winkel heissen spitz. Die beiden geraden Linien, welche einen Winkel bilden, werden Schenkel, ihr Schnittpunkt wird Scheitelpunkt des Winkels genannt. Das Zeichen für Winkel ist $\sphericalangle$.

Vorbereitung.[1]) Man schlage um die Eckpunkte A und B eines gleichseitigen Dreiecks ABC Kreise mit dem Radius AB, so gehen dieselben durch den Punkt C hindurch.

III. Aufgaben. 1. Es ist über einer Strecke von 5 cm ein gleichseitiges Dreieck zu zeichnen.

2. Man zeichne über jeder Seite des vorigen ein weiteres gleichseitiges Dreieck, so entsteht ein grösseres gleichseitiges Dreieck, in welchem die Mitten der Seiten gleichzeitig die Ecken des ursprünglichen Dreiecks sind.

3. Man verbinde die Mitten der drei Seiten eines gleichseitigen Dreiecks mit den gegenüberliegenden Ecken. Die Verbindungslinien (Mittellinien) gehen durch einen Punkt hindurch. Man messe die Entfernungen dieses Punktes von den drei Ecken des Dreiecks. Schlägt man daher mit der Entfernung dieses Punktes von einer Dreiecksecke den Kreis um diesen Punkt, so geht dieser durch die drei Ecken des Dreiecks hindurch.

Erklärung. Der Kreis, welcher durch die Ecken einer Figur hindurchgeht, heisst dieser Figur umbeschrieben.

4. Man zeichne über einer Strecke von 10 cm ein gleichseitiges Dreieck und verbinde die Mitten der drei Seiten, so entstehen vier kleinere gleichseitige Dreiecke.

Vergleiche diese Figur mit der vorigen.

5. Die vorige Figur ist auszuschneiden, und durch Umbiegen längs der Seiten des mittleren gleichseitigen Dreiecks ist ein Tretraëder herzustellen.

6. Man verbinde jede Ecke des inneren gleichseitigen Dreiecks mit der gegenüberliegenden Ecke des äusseren.

Die drei Verbindungslinien treffen einander in einem Punkte und halbieren die Seiten des inneren Dreiecks (d. h. sie gehen durch die Mitten dieser Seiten).

Die Verbindungslinien dieser Mitten ergeben ein neues gleichseitiges Dreieck. Diese Zeichnung lässt sich beliebig weit fortsetzen.

7. Es ist dieselbe Figur von innen nach aussen zu zeichnen.

Das gleichschenklige und das rechtwinklige Dreieck.

§ 4.

I. Man zeichne eine Strecke AB = 5 cm und schlage um A und B einen Kreis mit einem Radius von 4 cm und verbinde den Schnittpunkt C der beiden Kreise mit A und B.

Erklärung. Ein Dreieck, in welchem zwei Seiten gleich lang sind, heisst gleichschenklig. Die beiden gleichen Seiten heissen Schenkel, ihr Schnitt-

[1]) Die Ecken eines Dreiecks bezeichnet man durch die grossen lateinischen Buchstaben A, B, C, die Seiten durch ihre beiden Endpunkte AB, AC und BC, die Winkel durch drei Buchstaben in der Weise, dass der Scheitelpunkt in die Mitte zu stehen kommt, also $\sphericalangle$ ABC, $\sphericalangle$ ACB und $\sphericalangle$ BAC.

punkt **Spitze**, die dritte Seite wird **Basis** oder **Grundlinie**, ihre anliegenden Winkel werden **Basiswinkel** genannt.

II. **Aufgaben.** 1. Es soll ein gleichschenkliges Dreieck gezeichnet werden, dessen Basis = 8 cm und dessen Schenkel = 10 cm sind. Die Seiten sind zu halbieren und ihre Halbierungspunkte zu verbinden.

Es entsteht ein neues gleichschenkliges Dreieck, dessen Spitze in der Mitte der Basis des ersteren liegt.

2. Man verbinde in dem ursprünglichen Dreieck die Mitten der Seiten mit den gegenüberliegenden Ecken. Durch diese Linien werden die Seiten des inneren Dreiecks halbiert. Die Verbindungslinien dieser Halbierungspunkte ergeben ein drittes gleichschenkliges Dreieck u. s. w.

3. Man gehe von diesem dritten Dreieck aus und konstruiere durch Verdoppelung der Mittellinien über die Mitten der Seiten hinaus die Figur der vorhergehenden Aufgabe von innen nach aussen.

III. Man zeichne ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck. Um die Grösse der Basiswinkel zu vergleichen, schlage man mit demselben Radius um die Endpunkte der Basis Kreise und messe die zwischen den Schenkeln der beiden Winkel gelegenen Bogen (Sehnen). Aus der gleichen Grösse der Bogen kann man auf die gleiche Grösse der Winkel schliessen.

Ergebnis. In einem gleichschenkligen Dreieck sind die Basiswinkel gleich.

§ 5.

1. Man zeichne ein beliebiges gleichschenkliges Dreieck ABC und verbinde die Mitte D der Basis mit der Spitze C.

Was für Winkel bilden die Geraden AB und CD?

Erklärung. Ein Dreieck, welches einen rechten Winkel enthält, heisst rechtwinklig.

Durch die Gerade CD wird das gleichschenklige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt.

2. Man zeichne einen rechten Winkel und mache den einen Schenkel = 5 cm, den anderen = 6 cm. Verbindet man die Endpunkte, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck. Die dem rechten Winkel gegenüberliegende Seite heisst **Hypotenuse**, die den rechten Winkel einschliessenden Seiten werden **Katheten** genannt.

3. Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem beide Katheten = 4 cm sind. Dasselbe ist **rechtwinklig und gleichschenklig.**

Was entsteht, wenn man die Katheten desselben über den Scheitelpunkt des rechten Winkels um 4 cm verlängert und die Endpunkte sowohl unter einander als mit den Endpunkten der Hypotenuse verbindet?

Winkel und Transporteur.

§ 6.

I. Von zwei Stäbchen, welche um den einen ihrer gemeinschaftlichen Endpunkte drehbar sind, wird das eine festgehalten, das andere gedreht. Das bewegliche Stäbchen bildet in jeder Lage mit dem festen Stäbchen einen gewissen Winkel. Wenn das erstere Stäbchen wieder mit dem festen zusammenfällt, so ist eine ganze Drehung vollendet. Der entsprechende Winkel heisst Vollwinkel. Ist nur eine halbe Drehung ausgeführt worden, so heisst der gebildete Winkel ein gestreckter. Die Schenkel eines gestreckten Winkels bilden (in entgegengesetzter Richtung) eine gerade Linie. — Der Winkel, welcher durch eine Vierteldrehung entsteht, ist schon unter dem Namen rechter Winkel (R) bekannt.

Ein rechter Winkel ist gleich der Hälfte eines gestreckten.

Ein Vollwinkel ist = 4 R.

Durch weniger als eine Vierteldrehung entstehen Winkel, welche kleiner als 1 R sind; sie wurden im Vorhergehenden spitze Winkel genannt. Die Winkel, zu deren Erzeugung mehr als eine Viertel-, aber weniger als eine halbe Drehung erforderlich ist, heissen stumpf, diejenigen, welche mehr als eine halbe Drehung erfordern, überstumpf.

II. Man zeichne einen Kreis und ziehe in demselben einen Radius.

Es sind in diesem Kreise andere Radien zu ziehen, welche nach einander mit dem ersteren einen spitzen, 1 R, einen stumpfen, 2 R, einen überstumpfen und schliesslich einen Winkel = 3 R bilden.

Zeichne ohne Hülfe des Kreises einen spitzen, einen rechten, einen stumpfen, einen gestreckten und einen überstumpfen Winkel.

§ 7.

I. Zum Messen der Winkel dient der Transporteur. Derselbe besteht im wesentlichen aus einem Halbkreis, welcher in 180 gleiche Teile geteilt ist. Jeder dieser Teile heisst ein Bogengrad. Die Teilpunkte sind mit dem Mittelpunkte des Kreises verbunden oder diese Linien sind wenigstens durch Striche angedeutet. Jeder der entstehenden Winkel heisst ein Winkelgrad (°). Am Teilstrich jedes 10ten Grades befinden sich Zahlen.[1])

II. Um einen Winkel zu messen, legt man den Mittelpunkt des durch den Transporteur gebildeten Halbkreises auf den Scheitelpunkt des Winkels und lässt den einen Schenkel desselben durch den Nullpunkt gehen. Die Zahl, auf welche der zweite Schenkel weisst, giebt die Anzahl der Grade (°) des Winkels an.

III. Wenn z. B. ein Winkel von 50° gezeichnet werden soll, so zieht man eine beliebige Gerade und nimmt auf derselben einen beliebigen Punkt an. Alsdann legt man den Mittelpunkt des Transporteurs auf den angenommenen Punkt und lässt die Gerade durch den Nullpunkt gehen, bezeichnet die Stelle, wo die Zahl 50 steht, und verbindet diesen Punkt mit dem ersteren. Der von den beiden Geraden eingeschlossene Winkel ist der verlangte.

[1]) Für den Anfänger ist es besser, wenn der Transporteur nur eine Reihe von Zahlen, etwa in der Richtung von links nach rechts, enthält. Die zweite Zahlenreihe in der umgekehrten Richtung ruft leicht Verwechselungen mit dem Nebenwinkel hervor.

IV. Wie ändert sich die Grösse eines Winkels, wenn man seine Schenkel beliebig weit verlängert?

Wie viel Grad beträgt 1 R, 2 R, 3 R, 4 R, $^1/_2$ R, $^1/_3$ R u. s. w.?

Es ist ein Winkel von 35°, 48°, 90°, 120°, 137°, 180° zu zeichnen.

Es sind nach einander ein gegebener spitzer und stumpfer Winkel zu messen.

§ 8.

I. Man zeichne einen Winkel ABC = 57° und lege an BC im Punkte C einen Winkel CBD = 21° an. Zwei Winkel, welche einen Schenkel und den Scheitelpunkt gemeinsam haben, heissen anstossende Winkel. Wie gross ist der Winkel ABD?

Verlängert man den einen Schenkel eines Winkels über den Scheitelpunkt hinaus so entsteht ein anstossender Winkel, welcher mit dem ersteren zusammen 180° beträgt. Diese besondere Art von anstossenden Winkeln heisst Nebenwinkel. Jeder von beiden ist der Nebenwinkel des anderen.

Wie gross ist der Nebenwinkel eines rechten Winkels?

Wie gross sind die Nebenwinkel von 75°, 123°, 158°?

II. Man zeichne einen Winkel von 53° und verlängere beide Schenkel über den Scheitelpunkt hinaus. Die Verlängerungen bilden einen neuen Winkel, welcher der Scheitelwinkel des ersteren genannt wird.

Wie gross ist derselbe? Wie gross ist der Scheitelwinkel von 67°, 128°?

Ergebnis. Scheitelwinkel sind gleich.

Wieviel Paare von Scheitelwinkeln giebt es jedesmal?

Wieviel Paare von Nebenwinkeln giebt es in derselben Figur?

Das Dreieck im allgemeinen.

§ 9.

I. Man zeichne eine Strecke AB von 4 cm, schlage um A mit 3 cm, um B mit 3,5 cm den Kreis und verbinde den Schnittpunkt C der beiden Kreise mit A und B. Das entstandene Dreieck heisst ungleichseitig.

II. Man messe die drei Winkel desselben und bilde ihre Summe. Wiederholung desselben Verfahrens an einem beliebigen zweiten und dritten Dreieck.

Woran liegt es, wenn die Summe nicht immer ganz genau stimmt?

Ergebnis. Die Summe der drei Winkel eines jeden Dreiecks beträgt 180°.

III. Man zeichne ein beliebiges gleichseitiges Dreieck. Wie gross ist jeder Winkel desselben und wie gross ist ihre Summe?

Ergebnis. Jeder Winkel eines gleichseitigen Dreiecks beträgt 60° = $^2/_3$ R.

IV. Man zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Schenkel = 6 cm und dessen Winkel an der Spitze = 47° ist, und ein zweites Dreieck mit denselben Schenkeln und einem Winkel an der Spitze = 125°.

Ergebnis. Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks kann spitz oder stumpf sein.

Bestimmung der Basiswinkel in den obigen Dreiecken 1. durch Messen, 2. durch Rechnung auf Grund der Thatsache, dass die Summe der drei Winkel eines jeden Dreiecks 180° beträgt.

Es ist ein gleichschenkliges Dreieck zu zeichnen, in welchem die Basis = 5,6 cm und ein Basiswinkel = 65° ist.

Bestimmung des Winkels an der Spitze 1. durch Messen, 2. durch Rechnung.

Ergebnis. Durch einen Winkel eines gleichschenkligen Dreiecks, sei es der Winkel an der Spitze oder ein Basiswinkel, ist die Grösse der beiden anderen bestimmt.

Zeichne ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Basis = 4 cm und dessen Basiswinkel 1. = 90° und 2. = 125° sind.

Ergebnis. Jeder Winkel an der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks ist ein spitzer.

V. Man zeichne ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck.

Bestimmung der Basiswinkel 1. durch Messen, 2. durch Rechnung.

Es ist ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen, in welchem eine Kathete = 2,9 cm und der anliegende spitze Winkel = 48° ist.

Wie gross ist der andere spitze Winkel 1. auf Grund der Messung, 2. auf Grund der Rechnung?

6. Man zeichne Dreiecke aus einer Seite AB = 4,8 cm, wenn ausserdem die Grösse der beiden anliegenden Winkel gegeben ist:

1. $\sphericalangle$ BAC = 46°, $\sphericalangle$ ABC = 67°
2. $\sphericalangle$ BAC = 90°, $\sphericalangle$ ABC = 43°
3. $\sphericalangle$ BAC = 120°, $\sphericalangle$ ABC = 24°
4. $\sphericalangle$ BAC = 90°, $\sphericalangle$ ABC = 90°
5. $\sphericalangle$ BAC = 90°, $\sphericalangle$ ABC = 100°
6. $\sphericalangle$ BAC = 120°, $\sphericalangle$ ABC = 140°

Ergebnis. Ein Dreieck kann nur einen rechten oder stumpfen Winkel haben.

Wie findet man dasselbe Resultat durch Rechnung?

In den drei ersten Beispielen ist die Grösse des dritten Winkels zu bestimmen 1. durch Messen, 2. durch Rechnung.

Ergebnis. Durch zwei Winkel eines ungleichseitigen Dreiecks ist der dritte mitbestimmt.

Vorbereitung auf die Kongruenz der Dreiecke. Dreieckskonstruktion aus Seiten und Winkeln.

§ 10.

I. Aufgabe 1. Es ist ein Dreieck ABC zu zeichnen, in welchem die Seite $AB = 5{,}3$ cm, der Winkel $BAC = 48^0$ und der Winkel $ABC = 54^0$ ist.

Man zeichne ein zweites Dreieck $A_1B_1C_1$, in welchem $A_1B_1 = AB$, $\sphericalangle B_1A_1C_1 = \sphericalangle BAC$ und $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle ABC$ ist.

Wie gross sind die übrigen gleichliegenden (homologen) Seiten und Winkel in beiden Dreiecken?

Welche Seiten und Winkel sind gleich gemacht, welche anderen sind dagegen ohne unser Zuthun gleich geworden?

Erklärung. Zwei Dreiecke, welche in allen Seiten und Winkeln übereinstimmen, heissen kongruent.

Schneide die Dreiecke aus und bringe sie zur Deckung.

Kongruente Dreiecke lassen sich zur Deckung bringen.

Ergebnis. Wenn zwei Dreiecke in einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen, so stimmen sie auch in den drei übrigen Stücken paarweise überein, oder sind kongruent. (Erster Kongruenzsatz.)

II. Aufgabe 2. Es ist ein Dreieck ABC zu zeichnen, in welchem die Seite $AB = 3$ cm, die Seite $BC = 4{,}4$ cm und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel $ABC = 68^0$ ist.

Man zeichne ein zweites Dreieck $A_1B_1C_1$, in welchem $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$ und $\sphericalangle A_1B_1C_1 = \sphericalangle ABC$ ist.

Wie gross sind die übrigen gleichliegenden Stücke?

Welche Stücke sind gleich gemacht, welche sind ohne unser Zuthun gleich geworden?

Ergebnis. Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen, so stimmen sie auch in den drei übrigen Stücken überein, oder sind kongruent. (Zweiter Kongruenzsatz.)

III. Aufgabe 3. Es ist ein Dreieck ABC zu zeichnen, in welchem die Seite $AB = 7$ cm, die Seite $BC = 5$ cm und der Winkel ACB, welcher der grösseren Seite gegenüberliegt, $= 50^0$ ist.

Man zeichne ein zweites Dreieck $A_1B_1C_1$, in welchem $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$ und $\sphericalangle A_1C_1B_1 = \sphericalangle ACB$ ist.

Sind die Dreiecke eindeutig bestimmt?

Wie gross sind die anderen homologen Stücke?

Es sind zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ zu zeichnen, in welchen $AB = A_1B_1 = 4$ cm, $BC = B_1C_1 = 5$ cm und der Winkel $ACB = A_1C_1B_1$, welcher der kleineren Seite gegenüberliegt, $= 50^0$ ist.

Hierbei ist zu beachten, dass der mit dem Radius 4 cm um B geschlagene Kreis die gegenüberliegende Seite in 2 Punkten trifft. Nimmt man für das Dreieck ABC den einen und für das Dreieck $A_1B_1C_1$ den anderen Schnittpunkt, so sind die homologen Stücke der beiden Dreiecke nicht gleich, die Dreiecke sind also nicht kongruent.

Ergebnis. Wenn zwei Dreiecke in zwei Seiten und dem Winkel übereinstimmen, welcher der grösseren von ihnen gegenüberliegt, so stimmen sie auch in den drei übrigen Stücken überein, oder sind kongruent. (Dritter Kongruenzsatz.)

IV. Aufgabe 4. Es sind zwei Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ zu zeichnen, in welchen die Seite $AB = A_1B_1 = 5{,}6$ cm, die Seite $AC = A_1C_1 = 4{,}2$ cm und die Seite $BC = B_1C_1 = 3{,}8$ cm ist.

Wie gross sind die drei Winkel der beiden Dreiecke?

Ergebnis. Wenn zwei Dreiecke in den drei Seiten übereinstimmen, so stimmen sie auch in den drei Winkeln überein, oder sind kongruent. (Vierter Kongruenzsatz.)

V. Zu einem beliebigen Dreieck ist nach jedem der vier Kongruenzsätze ein kongruentes Dreieck zu zeichnen.

Leichtere Dreiecks-Konstruktionen.

§ 11.

I. Man fälle von der Ecke C eines Dreiecks ABC die Senkrechte auf AB, der Fusspunkt heisse D.

Die Linie CD nennt man die zu der Seite AB gehörige Höhe.

Aufgaben. Es ist ein Dreieck zu zeichnen aus

1. $AC = 6{,}2$ cm, $CD = 5$ cm und $BD = 3$ cm.
2. $BC = 5$ cm, $AC = 4$ cm und $CD = 3{,}4$ cm.
3. $AC = 4{,}8$ cm, $CD = 3{,}6$ cm und $\sphericalangle ACB = 76^\circ$.
4. $BD = 3$ cm, $DA = 2$ cm und $CD = 4{,}4$ cm.
5. $AC = 3{,}9$ cm, $CD = 3{,}2$ cm und $AB = 5$ cm.

II. Man verbinde die Mitte E von AB mit der gegenüberliegenden Ecke C. EC heisst die zu der Seite AB gehörige Mittellinie.

Aufgaben. Ein Dreieck zu zeichnen aus

1. $CD = 4$ cm, $CE = 4{,}6$ cm und $AC = 4{,}3$ cm.
2. $CD = 5$ cm, $CE = 5{,}8$ cm und $AB = 6$ cm.
3. $CE = 4{,}2$ cm, $CA = 4{,}5$ cm und $AB = 7$ cm.
4. $CE = 6$ cm, $AB = 4$ cm und $\sphericalangle CBE = 62^\circ$.

III. Der Winkel ACB sei halbiert. Die Halbierungslinie desselben schneide die gegenüberliegende Seite in F.

Aufgaben. Ein Dreieck zu zeichnen aus
1. CF = 5 cm, CD = 4,6 cm und ∢ ACB = 80°.
2. CF = 6 cm, CD = 5,4 cm und ∢ CAB = 70°.
3. CF = 4,8 cm, ∢ ABC = 48° und ∢ ACB = 66°.
4. CF = 7 cm, ∢ CAB = 52° und CA = 6 cm.

IV. Ein rechtwinkliges Dreieck zu zeichnen aus
1. CD = 4 cm und CB = 6 cm.
2. CD = 5 cm und BD = 3 cm.

Die Vierecke.

§ 12. Das Quadrat.

I. Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten AB und AC = 5 cm sind und über der Hypotenuse AC desselben nach der andern Seite ein zweites Dreieck ACD, dessen Seiten AD und CD ebenfalls = 5 cm sind.

Das entstandene Viereck ABCD hat gleiche Seiten.

Bestimmung der vier Winkel desselben 1. durch Messen, 2. durch Rechnung mittelst der Kongruenz der beiden Dreiecke.

Erklärung. Ein rechtwinklig-gleichseitiges Viereck heisst Quadrat.

Dasselbe ist schon als Fläche des Würfels bekannt.

Wie gross ist die Summe der Winkel eines Quadrates?

II. Man verbinde D mit B.

Erklärung. Die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Eckpunkte eines Vierecks heissen Diagonalen.

Man messe die Diagonalen, die durch den Schnittpunkt gebildeten Abschnitte derselben und die Winkel, welche die Diagonalen bilden.

Ergebnis. In einem Quadrate halbieren die Diagonalen einander, sind gleich lang und stehen auf einander senkrecht.

III. Aufgaben. 1. Es ist der einem Quadrate umbeschriebene Kreis zu zeichnen.

2. Man verbinde die Mitten der Seiten eines Quadrates. Die Seiten des entstehenden Quadrates werden durch die Diagonalen des ursprünglichen Quadrates halbiert. Die Verbindungslinien dieser Halbierungspunkte ergeben ein neues Quadrat, dessen Seiten durch die Diagonalen des vorhergehenden halbiert werden u. s. w.

3. Man gehe von einem der inneren Quadrate aus, ziehe die Diagonalen und errichte auf denselben in ihren Endpunkten die Senkrechten. Dieselben schliessen ein Quadrat ein, dessen Seitenmitten mit den Ecken des ersteren zusammenfallen und dessen Diagonalen die Seiten des ersteren halbieren. Diese Konstruktion kann nach aussen beliebig weit fortgesetzt werden.

4. Man ziehe einen Kreis und in demselben zwei senkrechte Durchmesser. Die Verbindungslinien ihrer Endpunkte bilden ein dem Kreise einbeschriebenes Quadrat.
   Errichtet man auf den beiden Durchmessern in ihren Endpunkten die Senkrechten, so entsteht ein dem Kreise umbeschriebenes Quadrat.
   Die Diagonalen des letzteren stehen auf den Seiten des ersteren senkrecht und gehen durch die Mitten derselben.
5. Man errichte über jeder Seite eines beliebigen Quadrates ein neues Quadrat und verbinde die nicht gemeinschaftlichen Ecken, so bilden diese Verbindungslinien wieder ein Quadrat.
6. (Unter dem Netz eines Körpers versteht man die Figur, welche entsteht, wenn die Flächen desselben zusammenhängend in eine Ebene ausgebreitet werden.)
   Zeichne das Netz eines Würfels.

§ 13. **Das Rechteck.**

I. Man zeichne ein rechtwinkliges Dreieck ABC, dessen Katheten AB = 5,6 cm und BC = 3 cm sind und über der Hypotenuse nach der anderen Seite ein Dreieck ACD, in welchem CD = 5,6 cm und AD = 3 cm ist.

Nach welchem Kongruenzsatze sind die beiden Dreiecke kongruent?

Welches sind die homologen Stücke?

Bestimmung der Grösse der Seiten und Winkel des entstandenen Vierecks 1. durch Messen, 2. durch Rechnung.

Wodurch unterscheidet sich dieses Viereck von einem Quadrat?

Erklärung. Ein rechtwinklig-ungleichseitiges Viereck heisst Rechteck.

Ergebnis. In einem Rechteck sind je zwei gegenüberliegende Seiten (Gegenseiten) gleich.

II. Man messe die beiden Diagonalen und ihre Abschnitte, sowie die Winkel, welche die Diagonalen bilden.

Ergebnis. Die Diagonalen eines Rechtecks halbieren einander und sind gleich.

III. Aufgaben. 1. Es ist ein Rechteck aus einer Diagonale = 6 cm und einer Seite = 5,2 cm zu zeichnen.

2. Es ist der diesem Rechteck umbeschriebene Kreis zu zeichnen.
3. Man zeichne einen Kreis und in demselben zwei Durchmesser, welche sich unter einem beliebigen Winkel schneiden. Was entsteht durch Verbindung der Durchmesser-Endpunkte?

§ 14. **Der Rhombus.**

I. Man zeichne ein gleichschenkliges Dreieck ABC, dessen Grundlinie = 4,7 cm und dessen Basiswinkel = 52° sind, und über der Basis AC nach der anderen Seite ein kongruentes gleichschenkliges Dreieck.

Wie gross sind die Seiten und Winkel des entstandenen Vierecks? Die Winkel sind 1. durch Messen, 2. durch Rechnung zu bestimmen.

Wie gross ist die Summe der vier Winkel?

Erklärung. Ein schiefwinklig-gleichseitiges Viereck heisst Rhombus.

Ergebnis. In einem Rhombus sind je zwei gegenüberliegende Winkel gleich und die Summe der vier Winkel beträgt 4 Rechte.

II. Man messe die Diagonalen und ihre Abschnitte, sowie die Winkel, welche die beiden Diagonalen unter einander und mit den Seiten des Rhombus bilden.

Ergebnis. In einem Rhombus halbieren die Diagonalen einander, stehen aufeinander senkrecht und halbieren die Winkel.

III. Aufgaben. Es ist ein Rhombus ABCD zu zeichnen aus

1. einer Seite AB = 4 cm und dem Winkel ABC = 70°.
2. einer Seite AB = 5 cm und einer Diagonale AC = 5,8 cm.
3. Man zeichne einen Rhombus und verbinde die Mitten der Seiten. Das entstandene Viereck ist ein Rechteck.
4. Man zeichne ein Rechteck und verbinde die Mitten der Seiten. Das entstandene Viereck ist ein Rhombus.
5. In Aufgabe 3 halbieren die Diagonalen des Rhombus die Seiten des Rechtecks. Demnach bilden die Verbindungslinien dieser Halbierungspunkte nach Aufgabe 4 einen Rhombus. Diese Zeichnung lässt sich beliebig weit fortsetzen.
6. Es ist Aufgabe 4 in derselben Weise fortzusetzen.
7. Die Figur der Aufgabe 6 ist von innen nach aussen zu zeichnen.
8. Man zeichne einen Kreis und in denselben ein Rechteck (nach § 13, $III_{,3}$), alsdann errichte man auf den Diagonalen desselben in ihren Endpunkten die Senkrechten, so entsteht ein dem Kreise umbeschriebener Rhombus.
9. Man zeichne die vorige Figur ausgehend von dem umbeschriebenen Rhombus.

Das Parallelogramm.

§ 15.

I. Man zeichne ein Dreieck ABC, in welchem die Seite AC = 6,2 cm, ∢ ACB = 67° und ∢ CAB = 58° ist.

Uber AC ist nach der anderen Seite ein zweites Dreieck ACD zu zeichnen, in welchem ∢ ACD = 58° und ∢ CAD= 67° ist.

Warum sind die Dreiecke kongruent? Welches sind die homologen Stücke?

II. Man nehme auf CD mehrere Punkte F, G, H u. s. w. an und fälle von diesen Punkten auf AB die Senkrechten F_1F, GG_1, HH_1 u. s. w. Dieselben stehen auch auf CD senkrecht und sind gleich lang. Daraus folgt, dass die Linien AB und CD einander niemals schneiden können.

Erklärung. Zwei Linien, welche einander nicht schneiden, soweit man sie auch verlängern mag, heissen parallel.

Man überzeuge sich in derselben Weise, dass BC und AD ebenfalls parallel sind.

Erklärung. Ein Viereck, in welchem beide Paare Gegenseiten parallel sind, heisst Parallelogramm.

Ist der Abstand der Linien AB und CD gleich dem Abstand zwischen BC und AD?

III. Man bestimme die Grösse der Seiten und Winkel des vorigen Parallelogramms 1. durch Messen, 2. durch Rechnung.

Wie gross ist die Summe der vier Winkel des Parallelogramms?

Ergebnisse. 1. In einem Parallelogramm sind je zwei Gegenseiten einander gleich.

2. In einem Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Winkel gleich und die Summe der vier Winkel beträgt 4 Rechte.

Man messe die Diagonalen und ihre Abschnitte.

Ergebnis. In einem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

IV. Aufgaben. Man zeichne ein Parallelogramm ABCD aus

1. AB = 5 cm, BC = 4 cm und AC = 7 cm.
2. AB = 4,5 cm, AC = 6 cm, und BD = 7 cm.
3. AB = 7 cm, BD = 8 cm und dem Winkel zwischen AC und BD = 55^0.
4. Man verbinde die Mitten der Seiten eines Parallelogramms. Es entsteht ein kleineres Parallelogramm, dessen Seiten von den Diagonalen des ersten halbiert werden. Die Verbindungslinien dieser Halbierungspunkte ergeben ein drittes Parallelogramm, dessen Seiten denen des ursprünglichen Parallelogramms parallel laufen u. s. w.
5 Die vorhergehende Figur ist von innen nach aussen zu zeichnen.
6. Man zeichne ein beliebiges Parallelogramm, halbiere zwei Gegenseiten, verlängere die Verbindungslinie der beiden Halbierungspunkte nach beiden Seiten um die Hälfte der geschnittenen Seiten und verbinde die Endpunkte dieser Linie mit den Endpunkten der geschnittenen Seiten, so erhält man ein Rechteck. Errichtet man auf den Diagonalen dieses Rechtecks die Senkrechten, so ensteht (nach § 14, III, Aufgabe 8) ein Rhombus.
7. Man zeichne ein beliebiges Dreieck und ziehe die drei Mittellinien, welche einander in einem Punkte schneiden. Alsdann verlängere man jede Mittellinie über die Mitte der zugehörigen Seite hinaus um ihre eigene Länge und verbinde die Endpunkte mit den beiden anderen Ecken des Dreiecks. Es entsteht ein Dreieck, dessen Seiten durch die Ecken des ursprünglichen Dreiecks hindurchgehen; ausserdem enthält die Figur drei Parallelogramme.
8. Wiederholung der vorigen Zeichnung für den besonderen Fall des gleichseitigen Dreiecks.

§ 16.

I. Man zeige in der Weise von § 15. I, dass in einem Quadrat, Rechteck und Rhombus beide Paar Gegenseiten parallel sind.

Ergebnis. Quadrat, Rechteck und Rhombus sind besondere Arten von Parallelogrammen.

Das Quadrat ist ein gleichseitiges und rechtwinkliges Parallelogramm.

Das Rechteck ist ein ungleichseitiges und rechtwinkliges Parallelogramm.

Der Rhombus ist ein gleichseitiges und rechwinkliges Parallelogramm.

II. Welche Eigenschaften sind allen Parallelogrammen gemeinschaftlich in Bezug auf 1. die Seiten, 2. die Winkel, 3. die Diagonalen?

Welche Eigenschaften kommen im besonderen zu 1. den rechtwinkligen 2. den gleichseitigen Parallelogrammen?

Die Vielecke.

§ 17.

I. Man zeichne ein beliebiges Viereck, messe die vier Winkel desselben und addiere die Zahlen der Grade.

Ergebnis. In einem Viereck beträgt die Summe der Winkel 4 Rechte.

Man ziehe eine Diagonale und berechne die Winkelsumme des Vierecks aus der der beiden Dreiecke.

Man ziehe die zweite Diagonale und messe die Abschnitte der beiden Diagonalen. Vergleich mit dem Parallelogramm.

II. Es ist ein beliebiges Fünfeck zu zeichnen und die Summe der Winkel desselben zu berechnen.

Wieviel Diagonalen kann man von einer Ecke aus ziehen? Wieviel im ganzen? Warum nicht 10, sondern 5? In wieviel Dreiecke zerfällt das Fünfeck durch die von einer Ecke aus gezogenen Diagonalen?

III. In einem beliebigen Sechseck sind die Winkel zu messen und ihre Summe zu bilden.

Man ziehe die Diagonalen von einer Ecke aus. Wieviel giebt es?

Wieviel Diagonalen giebt es im ganzen? Warum nicht 18, sondern 9?

IV. Man berechne ohne Zeichnung 1. die Anzahl der von einer Ecke ausgehenden Diagonalen, 2. diejenige der sämtlichen Diagonalen, 3. die Anzahl der Dreiecke, welche durch die von einer Ecke ausgehenden Diagonalen gebildet werden, 4. die Summe der Winkel in einem Vieleck, a) von 14, b) von 18, c) von 24 Ecken.

Die regelmässigen Vielecke.

§ 18.

Erklärung. Ein Vieleck, in welchem alle Seiten und Winkel gleich sind, heisst regelmässig (regulär).

I. Aufgaben. 1. In einen Kreis ist nach § 12.III ein regelmässiges Viereck (Quadrat) einzuzeichnen.

2. Man verbinde den Mittelpunkt des Kreises mit den Mitten der Seiten des Quadrates, verlängere die Verbindungslinien über die Seitenmitten hinaus bis zum Durchschnitt mit dem Kreise und verbinde diese Schnittpunkte mit den benachbarten Ecken des Quadrates, so entsteht ein dem Kreise einbeschriebenes regelmässiges Achteck.

3. Es ist ein dem Kreise einbeschriebenes Sechzehneck zu zeichnen.

II. Wie gross ist die Winkelsumme eines Fünfecks? Wie gross ist jeder Winkel eines regelmässigen Fünfecks?

Aufgaben. 1. Man trage an einer Strecke AB = 4 cm in A und B Winkel von 108° an, mache BC und AE = 4 cm und trage an BC in C und an AE in E Winkel von 108° an, der Schnittpunkt der beiden freien Schenkel heisse D.

Wie gross sind CD, ED und $\sphericalangle$ EDC?

Was ist demnach ABCDE für ein Fünfeck?

2. Die Verbindungslinien der Ecken eines regelmässigen Fünfecks mit den Mitten der gegenüberliegenden Seiten treffen sich in einem Punkte.

Man messe die Entfernungen des Schnittpunktes von den Ecken des Fünfecks.

Es ist der dem Fünfeck umbeschriebene Kreis zu zeichnen.

3. Man zeichne ein dem Kreise einbeschriebenes regelmässiges Zehneck.

III. Wie gross ist jeder Winkel eines regelmässigen Sechsecks?

Aufgaben. 1. Man zeichne über einer Strecke von 5 cm ein regelmässiges Sechseck und verbinde die gegenüberliegenden Ecken.

Die Verbindungslinien gehen durch einen Punkt.

Wie weit ist derselbe von den einzelnen Ecken des Rechtecks entfernt?

Es ist der dem Sechseck umbeschriebene Kreis zu zeichnen.

2. In einem Kreise mit einem Radius von 5 cm ist der Radius sechsmal als Sehne nebeneinander einzutragen.

Was entsteht durch Verbindung der Endpunkte der eingetragenen Sehnen?

Die Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken gehen durch den Mittelpunkt des Kreises hindurch.

3. Man errichte auf den letztgenannten Linien in ihren Endpunkten Senkrechte. Diese begrenzen ein dem Kreise umbeschriebenes regelmässiges Sechseck.

Die Ecken des einbeschriebenen Sechsecks sind die Mitten der Seiten des umbeschriebenen.

Die Verbindungslinien der gegenüberliegenden Eckpunkte des umbeschriebenen Sechsecks gehen durch den Mittelpunkt des Kreises und durch die Mitten der Seiten des einbeschriebenen Sechsecks.

4. Man verbinde die Mitten der Seiten des einbeschriebenen Sechsecks mit dem Mittelpunkte des Kreises, verlängere die Verbindungslinien bis zum Durchschnitt mit dem Kreise und errichte auf denselben in den Schnittpunkten die Senkrechten.

   Dieselben bilden ein dem Kreise umbeschriebenes Sechseck, dessen Seiten denen des einbeschriebenen Sechsecks parallel gehen.

5. Es ist ein dem Kreise einbeschriebenes regelmässiges (gleichseitiges) Dreieck zu zeichnen.
6. Es ist ein dem Kreise einbeschriebenes regelmässiges Zwölfeck zu zeichnen.

Die parallelen Linien.

§ 19.

I. Es ist nach § 15,IV ein Parallelogramm ABCD zu zeichnen. Um die Lage der Linie CD zu erhalten, ist hiernach nur erforderlich, dass der Winkel DCA gleich dem Winkel CAB gemacht wird.

Aufgabe. Es ist zu einer gegebenen Geraden durch einen ausserhalb derselben gelegenen Punkt die Parallele zu ziehen.

II. Wenn zwei gerade Linien von einer dritten geschnitten werden, so entstehen acht Winkel. Die Winkel seien durch einzelne griechische Buchstaben bezeichnet: $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ und $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \delta_1$.

Man suche sämtliche Paare von Scheitel- und Nebenwinkeln auf.

Man unterscheidet die vier äusseren Winkel $\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ und die vier inneren Winkel $\alpha_1\ \beta_1\ \gamma_1\ \delta_1$.

Zwei Winkel $(\alpha\alpha_1)\ (\beta\beta_1)\ (\gamma\gamma_1)\ (\delta\delta_1)$, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen und von denen der eine ein äusserer, der andere ein innerer ist, heissen korrespondierende[1]) Winkel.

Zwei Winkel $(\alpha\delta_1)\ (\beta\gamma_1)\ (\delta\alpha_1)\ (\gamma\beta_1)$, welche auf derselben Seite der schneidenden Geraden liegen und beide entweder äussere oder innere Winkel sind, heissen Gegenwinkel.[2])

Zwei Winkel $(\alpha\gamma_1)\ (\beta\delta_1)\ (\delta\beta_1)\ (\gamma\alpha_1)$, welche die Seite wechseln und beide entweder äussere oder innere Winkel sind, heissen Wechselwinkel.[3])

III. Man zeichne zwei parallele Linien, welche von einer dritten Geraden geschnitten werden und messe die entstandenen Winkel.

Wie viel verschiedene Zahlenwerte ergeben sich?

---

[1]) [2]) [3]) Benennung nach Reidt, die Elemente der Mathematik.

In welcher Beziehung stehen je zwei korrespondierende, je zwei Wechselwinkel und je zwei Gegenwinkel?

Ergebnis. Werden zwei parallele Linien von einer dritten Geraden durchschnitten, so sind 1. je zwei korrespondierende Winkel einander gleich, 2. je zwei Wechselwinkel einander gleich und 3. beträgt die Summe je zweier Gegenwinkel zwei Rechte.

IV. Man zeichne zwei nicht parallele Linien, welche von einer dritten Geraden durchschnitten werden und messe die 8 Winkel.

Wie viel verschiedene Zahlenwerte ergeben sich?

Sind auch in diesem Falle je zwei korrespondierende Winkel gleich, je zwei Wechselwinkel gleich und beträgt die Summe je zweier Gegenwinkel zwei Rechte?

V. Man trage an einer Geraden in zwei beliebigen Punkten einen Winkel von 50^0 an und zwar so, dass die Winkel 1. in die Lage von korrespondierenden, 2. von Wechselwinkeln kommen; drittens trage man in dem einen Punkte einen Winkel von 50^0, in dem anderen einen Winkel von 130^0 in der Lage von Gegenwinkeln an.

Wie laufen in jedem dieser drei Fälle die Geraden?

Ergebnis. Wenn an zwei Geraden, welche von einer dritten durchschnitten werden, zwei korrespondierende Winkel gleich oder zwei Wechselwinkel gleich sind oder die Summe zweier Gegenwinkel zwei Rechte beträgt, so sind die geschnittenen Linien parallel.

Gebrauch des hölzernen rechtwinkligen Dreiecks zum Ziehen von Parallelen.

Litteratur-Anhang.

Schriften vor 1882.

1. Schmids Encyklopädie des gesammten Erziehungs- und Unterrichtswesens. Die Artikel: Anschauungsunterricht, Formenlehre, Geometrie, Zeichnen.
2. Wittstein, Die Methode des mathematischen Unterrichts. Hannover, 1879. Hahn.
3. Herbert, Umriss pädagogischer Vorlesungen. Göttingen, 1841.
4. Börner, Anleitung zu einem vorbereitenden Lehrgang der Geometrie. Programm der Realschule I. O. zu Ruhrort 1874/76.
5. Börner, Lehrbuch zur Einführung in die Geometrie. Leipzig, 1879. Teubner.
6. J. C. V. Hoffmann, Vorschule der Geometrie. Halle 1874—81. Nebert.

7. Hartmann, Aufgaben zur Übung im geometrischen Zeichnen.
8. Junghänel, Kursus zur Einführung in die Geometrie. Programm der Realschule I. O. zu Döbeln, 1879.
9. Junghänel, Kursus zur Einführung in die Geometrie. Berlin, 1879. Hempel.
10. Kretschmer, Geometrische Anschauungslehre. Posen, 1877. Jolowicz.
11. Reishaus, Vorschule zur Geometrie. Leipzig. Teubner.
12. Falke, Propädeutik der Geometrie, gegründet auf praktische Aufgaben aus der Geodäsie. Leipzig. Quandt & Händel.
13. Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht. 1874. S. 347—353.
14. Mohr, Darlegung der hauptsächlichsten Richtungen, welche in der geometrischen Formenlehre eingeschlagen worden sind. Programm. Rudolstadt. 1873.

Schriften nach 1882.

1. Schiller, Handbuch der praktischen Pädagogik. Leipzig 1886. S. 558—560.
2. Reidt, Anleitung zum mathematischen Unterricht. Berlin, 1886. Grote. S. 163—177.
3. Heinze, Der Vorbereitungs-Unterricht in der Geometrie in Quinta. Programm des Kneiphöfischen Gymnasiums zu Königsberg. 1888.
4. Kempe, Zur Methode des vorbereitenden Zeichenunterrichts in Quinta. Programm der Realschule zu Remscheidt. 1888.
5. Weingärtner, Über den geometrischen Anschauungsunterricht in Quinta. Programm des Gymnasiums zu Marburg. 1884.
6. Meyer, Der geometrische Unterricht in Quinta. Programm des Progymnasiums zu Schwetz. 1885.
7. Börner, Geometrischer Anschauungs- und Zeichen-Unterricht für die Quinta höherer Lehranstalten. Beilage zum Osterprogramm 1887 des Realgymnasiums zu Elberfeld.
8. Dickmann, Übungen und Aufgaben für den propädeutischen Unterricht, I. Teil. Breslau, 1886. Hirt.
9. Köstler, Vorschule der Geometrie. 6. Auflage 1887. Halle, Nebert.
10. E. zur Nieden. Methodisch geordnete Aufgabensammlung für den geometrisch-propädeutischen Unterricht in der Quinta höherer Lehranstalten. Bonn, 1885. Strauss.
11. E. Schulze, Vorschule für den geometrischen Unterricht, 2 Teile. Bielefeld 1887. Velhagen & Klasing.
12. Rattke, Leitfaden für den geometrischen propädeutischen Unterricht. Hannover 1886.
13. Rattke, Übungsaufgaben für den propädeutischen Unterricht. Hannover 1887.
14. Breitsprecher, Der erste Unterricht in der Geometrie. Für die Quinten aller höheren Lehranstalten bearbeitet, 2 Hefte. Breslau 1885.
15. Rumpen und Blind, Kurzer Leitfaden für den vorbereitenden geometrischen Unterricht in der Quinta höherer Lehranstalten. Köln, 1888. Ahn.

16. Paul Horn, Zeichenhefte für den propädeutischen geometrischen Unterricht in Quinta. Breslau, 1888. Woywod.
17. E. R. Müller. Oldenburg, Stalling.
18. Helber, Geometrie für Anfänger.
19. Der Normallehrplan des Gymnasiums zu Luckau, 1886.
20. Strack, Die Propädeutik der Geometrie. Karlsruhe 1883 (für Quarta).
21. Krimphoff, Vorschule der Geometrie. Programm des Gymnasiums zu Coesfeld. 1888 (für Quarta).
22. Schmidt, Das geometrische Zeichnen in der ersten und zweiten Klasse des Gymnasiums. Programm des Gymnasiums zu Schässburg in Siebenhürgen, 1888.[1])
23. von Mocnik, Geometrische Anschauungslehre für Untergymnasien, 1te Abteilung. Wien. 1885. 21. Auflage.

---

[1]) Hier finden sich weitere Litteraturangaben für konstruktives und Linearzeichnen.