# Über die Umformung unendlicher Reihen und Produkte mit Beziehung auf die Theorie der elliptischen Funktionen.

## § I. Einleitung.

In den beiden Abhandlungen von Schröter „De aequationibus modularibus, Regiomonti 1854“ und „Über die Entwickelung der Potenzen der elliptischen Transcendenten $\vartheta$ und die Teilung dieser Funktionen, Breslau 1855“ ist eine Methode der Umformung unendlicher Reihen gezeigt, welche dann später Herstowski („Zur Theorie der Jakobischen Thetafunktionen, Clebsch Ann. XI, 1—29. 1877“) auf unendliche Produkte, speciell auf die Produktentwickelungen der Thetafunktionen, übertragen hat.

Dem von Schröter benutzten Verfahren zur Zerlegung einer Thetafunktion in eine Summe von Thetafunktionen und eines Produkts zweier Thetafunktionen in eine Summe ähnlicher Produkte haftet eine gewisse Willkürlichkeit an. Es drängt sich die Aufgabe auf, das seiner Methode zu Grunde liegende Princip in konsequenter Allgemeinheit darzulegen und eventuell anzuwenden.

Ich bezeichne eine einfach unendliche Reihe durch $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} f(h)$, mehrfach unendliche Reihen durch

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_2} f(h_1,h_2)\,,\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_2}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_3} f(h_1,h_2,h_3)\quad \text{u. s. w.}$$

oder kürzer

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1 h_2} f(h_1,h_2)\,,\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1 h_2 h_3} f(h_1,h_2,h_3)\,,\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1 h_2 \ldots h_n} f(h_1,h_2,\ldots h_n)\,.$$

Von solchen Reihen soll in der Folge durchweg vorausgesetzt werden, dass sie **unbedingt** konvergent seien; derart, dass ihr Wert unabhängig sei von der Anordnung ihrer Glieder, dass es erlaubt sei, die Glieder der Reihe in Gruppen zu fassen und jede Gruppe für sich zu summieren, ferner auch eine endliche oder unendliche Anzahl solcher Glieder oder Gliedergruppen einzuschieben, welche insgesamt sich aufheben.

Die von Schröter bei einer Thetareihe und dem Produkte zweier Thetareihen benutzte Umformungsmethode (oder, wenn man will, Zerlegungsmethode) läuft nun darauf hinaus, dass er statt h resp. $h_1$, $h_2$ andere Summierungszahlen einführt mittels ganz bestimmter lineärer Substitutionen.

Der Gedanke, auch andere als lineäre Substitutionen anzuwenden, scheint aussichtslos; jedenfalls soll er hier unerörtert bleiben.

Es präcisiert sich demnach die Aufgabe dahin, eine unbedingt konvergente einfach oder mehrfach unendliche Reihe durch Einführung neuer Summierungszahlen statt der ursprünglichen mittels einer lineären Substitution in allgemeinster Weise umzuformen.

Die Übertragung auf unendliche Produkte schliesst sich leicht an.

## § II. **Umformung einer einfachen Reihe und eines einfachen Produkts.**

Die allgemeinste zur Einführung einer neuen Summierungszahl $l$ statt der ursprünglichen h bei der unendlichen Reihe $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} f(h)$ anzuwendende lineäre Substitution ist $mh = nl + \nu$. Die Koefficienten m, n, $\nu$ müssen rational sein und können, da die Nenner durch Multiplikation der Gleichung fortzuschaffen sind, unbeschadet der Allgemeinheit als ganze Zahlen gedacht werden. Die Substitution lässt sich zusammensetzen aus den beiden Substitutionen $mh = l'$ und $l' = nl + \nu$, welche gesondert zu behandeln sind.

I. Setzt man $mh = l$, also $h = \frac{l}{m}$ und lässt $l$ alle ganzen Zahlen durchlaufen, so durchläuft h alle Brüche mit dem Nenner m; es sind also unendlich viele Glieder eingeschoben. Nimmt man nun aber eine Summe solcher Reihen und giebt jedem Gliede einen solchen Multiplikator, dass in der Summe alle eingefügten Glieder sich aufheben und die ursprünglichen mit dem Faktor 1 behaftet übrig bleiben, so wird man zufolge der Voraussetzung der unbedingten Konvergenz wieder $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} f(h)$ haben. Es bezeichne $M_\mu^{(l)}$ eine Funktion von $\mu$ und $l$, welche die Eigenschaft hat, dass $\sum\limits_{0}^{m-1}{}^{\mu} M_\mu^{(l)}$ den Wert 0 oder 1 hat, je nachdem $l$ durch m nicht teilbar oder teilbar ist. Nun ist

$$\sum_{0}^{m-1}{}^{\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l} M_\mu^{(l)} \cdot f\left(\frac{l}{m}\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l} \left\{ f\left(\frac{l}{m}\right) \cdot \sum_{0}^{m-1}{}^{\mu} M_\mu^{(l)} \right\},$$

weil $\mu$ in $f\left(\frac{l}{m}\right)$ nicht enthalten ist. Zufolge der festgesetzten Eigenschaft der Funktion $M_\mu^{(l)}$ erhalten in der Klammer alle Reihenglieder $f\left(\frac{l}{m}\right)$, in welchen $\frac{l}{m}$ ein Bruch ist, den Faktor 0; es bleiben nur diejenigen, in welchen $\frac{l}{m}$ eine ganze Zahl ist, mit dem Faktor 1 behaftet. Also

$$1') \quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h}\, f(h) = \sum_{0}^{m-1}{}^{\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l}\, M_\mu^{(l)} \,.\, f\left(\frac{l}{m}\right).$$

Die Aufgabe, derartige Multiplikatoren $M_\mu^{(l)}$ zu finden, scheint eine sehr unbestimmte. Eine solche Form derselben aber, wie sie gerade für die Anwendung auf Thetareihen geeignet ist, bieten die Potenzen der $m^{\text{ten}}$ Wurzeln der Einheit dar. Es ist

$$\sum_{0}^{m-1}{}^{\mu}\, e^{2\mu i\pi\frac{l}{m}} = 1 + e^{2i\pi\frac{l}{m}} + e^{4i\pi\frac{l}{m}} + \ldots\ldots + e^{2(m-1)i\pi\frac{l}{m}}$$

$$= \frac{1 - \left(e^{2i\pi\frac{l}{m}}\right)^m}{1 - e^{2i\pi\frac{l}{m}}} = \frac{1 - e^{2i\pi l}}{1 - e^{2i\pi\frac{l}{m}}}$$

Der Zähler ist null für alle ganzzahligen $l$, der Nenner nur für die durch m teilbaren Werte von $l$. Für alle nicht durch m teilbaren Werte von $l$ ist demnach die Summe null; für einen durch m teilbaren Wert von $l$ wird aber jedes Glied gleich 1, demnach die Summe gleich m. Hienach kann man

$$M_\mu^{(l)} = \frac{1}{m} \cdot e^{2\mu i\pi\frac{l}{m}}$$

setzen, und Formel 1') geht über in die speciellere

$$1) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h}\, f(h) = \frac{1}{m}\sum_{0}^{m-1}{}^{\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l}\, e^{2\mu i\pi\frac{l}{m}} \,.\, f\left(\frac{l}{m}\right),$$

wo m eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet. Statt $\mu$ kann man hier auch $\varepsilon\mu$ setzen, wo $\varepsilon$ eine beliebige relative Primzahl zu m bezeichnet.

II. Setzt man $h = nl + \nu$, so wird, während $l$ alle ganzen Zahlen durchläuft, h alle in Bezug auf n den Rest $\nu$ lassenden durchlaufen. Soll nun die unendliche Summierung in Bezug auf $l$ sämtliche Glieder der nach h fortschreitenden Reihe wiedergeben, so muss man $\nu$ ein vollständiges Restsystem in Bezug auf den Modul n durchlaufen lassen und nochmals in Bezug auf $\nu$ summieren. Also

$$2) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h}\, f(h) = \sum_{0}^{n-1}{}^{\nu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l}\, f(nl + \nu),$$

wo n eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet. Da $\nu$ nur irgend ein vollständiges Restsystem in Bezug auf n zu durchlaufen hat, kann man statt $\nu$ auch $\varepsilon\nu$ setzen, wenn $\varepsilon$ eine beliebige positive oder negative ganze Zahl ohne gemeinsamen Teiler mit n bezeichnet.

III. Die beiden in Nr. I und II gegebenen Umformungen einer unendlichen Reihe unterscheide ich als **Umformung erster Art** und **Umformung zweiter Art.** Schröter hat nur die letztere.

Für das Beispiel $f(h) = q^{h^2} . e^{2ihx}$ ergeben sich die beiden Formeln

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_h\, q^{h^2} . e^{2ihx} = \frac{1}{m} . \sum_0^{m-1}{}_\mu \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_l\, q^{\frac{l^2}{m^2}} . e^{2i\frac{lx}{m} + 2i\mu\frac{l\pi}{m}}$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_h\, q^{h^2} . e^{2ihx} = \sum_0^{n-1}{}_\nu \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_l\, q^{(nl+\nu)^2} . e^{2i(nl+\nu)x}$$

$$= \sum_0^{n-1}{}_\nu\, q^{\nu^2} e^{2\nu ix} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_l\, q^{n^2 l^2} . e^{2il(nx - n\nu i \log. q)}$$

d. i. mit Anwendung der Jakobischen Bezeichnung:

$$\vartheta_3(x, q) = \frac{1}{m} \sum_0^{m-1}{}_\mu\, \vartheta_3\left(\frac{x + \mu\pi}{m},\ q^{\frac{1}{m^2}}\right)$$

$$\vartheta_3(x, q) = \sum_0^{n-1}{}_\nu\, q^{\nu^2} e^{2\nu ix}\, \vartheta_3\left(nx - \frac{\nu i}{n} \log. q^{n^2}, q^{n^2}\right)$$

Von diesen beiden Formeln, deren erste, wenn man $mx$ für $x$ und $q^{m^2}$ für $q$ setzt, in $\vartheta_3\left(mx, q^{m^2}\right) = \frac{1}{m} \sum_0^{m-1}{}_\mu\, \vartheta_3\left(x + \mu\frac{\pi}{m}, q\right)$ übergeht, lässt sich für $n = m$ jede als die inverse der anderen ansehen. Denn setzt man in der ersten, die zuletzt angegebene Form benutzend, der Reihe nach $x, x - i . \log. q,\ x - 2i . \log q, \ldots . x - (m-1) i . \log q$ für $x$, so erhält man ein System von $m$ linearen Gleichungen mit den Unbekannten

$$\vartheta_3(x, q),\ \vartheta_3\left(x + \frac{\pi}{m}, q\right),\ \vartheta_3\left(x + \frac{2\pi}{m}, q\right), \ldots\ldots\ \vartheta_3\left(x + \frac{(m-1)\pi}{m}, q\right).$$

Berechnet man daraus die erste Unbekannte, so ergiebt sich die zweite Formel für $n = m$.

(Man vergleiche Formel 6 der ersten und Formel 4 und 13 der zweiten der im Eingange erwähnten Abhandlungen von Schröter, sowie § 4 der letztern, wo bemerkt ist, wie mittels dieser Formeln die Teilung der Thetafunktionen in Bezug auf die eine der beiden Perioden zurückzuführen ist auf die für die andere)

Noch bemerke ich, dass es leicht ist, die Formeln 1 und 2 so zu modifizieren, dass sie für negative wie für positive m und n gelten. Sie lauten dann

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_h\, f(h) = \frac{1}{\sqrt{m^2}} \sum_0^{\sqrt{m^2}-1}{}_\mu \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_l\, e^{2\mu i\pi\frac{l}{m}} . f\left(\frac{l}{m}\right),\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_h\, f(h) = \sum_0^{\sqrt{n^2}-1}{}_\nu \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_l\, f(nl + \nu),$$

wo $\sqrt{m^2}$ und $\sqrt{n^2}$ die positiven Quadratwurzeln d. i. die absoluten Werte der Zahlen m und n anzeigen. Ferner kann man die Formeln noch durch Verschiebung der Grenzen der endlichen Summation verallgemeinern, so dass in Bezug auf $\mu$ von $\mu_0$ bis $\mu_0 + \sqrt{n^2} - 1$ summiert wird (wobei innerhalb beider Summenzeichen der Exponentialfaktor $e^{-2\mu_0 i\pi\frac{l}{m}}$ hinzutritt), in Bezug auf $\nu$ von $\nu_0$ bis $\nu_0 + \sqrt{n^2} - 1$. Doch ist dies alles im Grunde nur eine Zusammensetzung der Formeln 1 und 2 mit den Identitäten

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} f(h) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} f(-h),\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} f(h) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} f(h+n),\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} f(h) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} e^{2ihn\pi} . f(h),$$

welche für $f(h) = q^{h^2} . e^{2ihx}$ die drei Grundformeln

$\vartheta_3(x,q) = \vartheta_3(-x,q)$, $\vartheta_3(x,q) = q^{n^2} . e^{2inx}\, \vartheta_3(x - ni.\log q, q)$, $\vartheta_3(x,q) = \vartheta_3(x + n\pi, q)$ liefern.

IV. Den beiden hergeleiteten Umformungen einer unendlichen Reihe entsprechen solche eines unendlichen Produkts, welche sich in folgender Weise leicht ergeben:

In Formel 1' setze ich $\varphi$ statt des Funktionszeichens f und folgere:

$$e^{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} \varphi(h)} = e^{\sum_{0}^{m-1}{}^{\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l} M_\mu^{(l)} \cdot \varphi\left(\frac{l}{m}\right)}$$

$$\prod_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} e^{\varphi(h)} = \prod_{0}^{m-1}{}^{\mu} e^{\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l} M_\mu^{(l)} \cdot \varphi\left(\frac{l}{m}\right)}$$

$$= \prod_{0}^{m-1}{}^{\mu} \prod_{-\infty}^{+\infty}{}^{l} e^{M_\mu^{(l)} \cdot \varphi\left(\frac{l}{m}\right)} = \prod_{0}^{m-1}{}^{\mu} \prod_{-\infty}^{+\infty}{}^{l} \left(e^{\varphi\left(\frac{l}{m}\right)}\right)^{M_\mu^{(l)}}$$

Wenn nun $e^{\varphi(h)} = f(h)$, so

$$3') \quad \prod_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} f(h) = \prod_{0}^{m-1}{}^{\mu} \prod_{-\infty}^{+\infty}{}^{l} \left[f\left(\frac{l}{m}\right)\right]^{M_\mu^{(l)}}$$

Die Specialfunktion $M_\mu^{(l)} = \frac{1}{m} \cdot e^{2\mu i\pi \cdot \frac{l}{m}}$ giebt

$$3) \quad \prod_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} f(h) = \prod_{0}^{m-1}{}^{\mu} \prod_{-\infty}^{+\infty}{}^{l} \left[f\left(\frac{l}{m}\right)\right]^{\frac{1}{m} \cdot e^{2\mu i\pi \cdot \frac{l}{m}}}$$

Ebenso ergiebt sich aus Formel 2 oder wird auch leicht direkt abgeleitet:

$$4)\qquad \prod_{-\infty}^{+\infty}{}^{h} f(h) = \prod_{0}^{n-1}{}^{\nu} \prod_{-\infty}^{+\infty}{}^{l} f(nl+\nu)$$

## § III. Umformung einer Doppelreihe.

Die allgemeinste zur Umformung der Doppelreihe

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_2} f(h_1, h_2)$$

anzuwendende lineare Substitution wird erhalten, indem man zwei lineare Funktionen von $h_1$ und $h_2$ mit ganzzahligen Koefficienten gleich zwei andern ebenso beschaffenen Funktionen der neu einzuführenden Summierungszahlen $l_1$ und $l_2$ setzt. Diese allgemeinste Substitution lässt sich, ebenso wie in § II, in zwei aufeinanderfolgende zerlegen, welche getrennt behandelt werden mögen.

I. Setzt man

$$A)\qquad \begin{aligned} \alpha' h_1 + \alpha'' h_2 &= l_1 \\ \beta' h_1 + \beta'' h_2 &= l_2, \end{aligned}$$

so folgt

$$B)\qquad \begin{aligned} h_1 &= \frac{\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2}{\Delta} \\ h_2 &= \frac{\alpha_1 l_1 + \beta_2 l_2}{\Delta} \end{aligned}$$

wo $\alpha_1 = \beta''$, $\beta_1 = -\alpha''$, $\alpha_2 = -\beta'$, $\beta_2 = \alpha'$ und $\Delta = \alpha'\beta'' - \alpha''\beta' = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ ist. Während nun $h_1$ und $h_2$ als Summierungszahlen einer unendlichen Doppelreihe sämtliche ganzzahlige Werte in beliebiger Paarung durchlaufen, werden $l_1$ und $l_2$ wegen der Ganzzahligkeit der Substitutionskoefficienten, wie aus den Gleichungen A) ersichtlich, ebenfalls nur ganzzahlige Werte annehmen. Doch zeigen die Gleichungen B), dass $l_1$ und $l_2$ nicht alle ganzzahligen Werte in beliebiger Paarung annehmen, sondern nur diejenigen, die die folgenden beiden Kongruenzen erfüllen:

$$C)\qquad \begin{aligned} \alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2 &\equiv 0 \\ \alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2 &\equiv 0 \end{aligned} \qquad \text{mod. } \Delta$$

Diese beiden Kongruenzen sind, da $\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = \Delta$, also auch $\equiv 0\ (\Delta)$ ist, nicht von einander unabhängig. Es lässt sich zeigen, dass jede von beiden eine Folge der anderen ist, falls man betreffs der Substitutionskoefficienten eine gewisse, ohne Beschränkung der Allgemeinheit zulässige Voraussetzung eintreten lässt. Dieselbe besteht darin, dass je zwei derselben Horizontalreihe und je zwei derselben Vertikalreihe angehörende Koefficienten relativ prim seien. Hätten z. B. $\alpha'$ und $\beta'$ einen gemeinsamen Teiler f, so brauchte man, um ihn fortzuschaffen, nur in der ursprünglichen Substitution $\frac{h_1}{f}$ für h zu setzen, was auf eine „Umformung erster Art" in Bezug auf $h_1$ allein hinauskommt; hätten $\alpha'$ und $\alpha''$ einen gemeinsamen Teiler g, so hätte man, um ihn wegzuschaffen, nur $l_1 = gl'$ zu setzen und die Substitutionsgleichung durch g zu dividieren. Die angegebene Voraussetzung kommt somit darauf hinaus, dass man von der Umformung der Doppelsumme alle nur auf eine einzelne Summation sich beziehenden Transformationen abtrennt. Aus unserer Voraussetzung folgt nun weiter, dass jeder der vier Koefficienten $\alpha_1\ \beta_1\ \alpha_2\ \beta_2$ relativ prim gegen $\Delta$ ist. Denn hätte z. B. $\alpha_1$ mit $\Delta = \alpha_1\ \beta_2 - \alpha_2\ \beta_1$ irgend einen Primfaktor gemein, so müsste es ihn entweder mit $\alpha_2$ oder mit $\beta_1$ gemeinsam haben, was gegen die Voraussetzung.

Ist nun z. B. die erste Kongruenz erfüllt, so ist auch

$$\begin{array}{ll} & \alpha_2\alpha_1 l_1 + \alpha_2\beta_1 l_2 \equiv 0\ (\Delta) \\ \text{Identisch ist} & (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) . l_2 \equiv 0\ (\Delta) \\ \hline \text{Addiert} & \alpha_1\alpha_2 l_1 + \alpha_1\beta_2 l_2 \equiv 0\ (\Delta). \end{array}$$

Hieraus folgt, da $\alpha_1$ relativ prim gegen $\Delta$,

$$\alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2 \equiv 0\ (\Delta).$$

d. h. durch Erfüllung der ersten Kongruenz wird zugleich die zweite befriedigt. Ebenso ergiebt sich, dass mit Erfüllung der zweiten zugleich die erste befriedigt wird.

Hienach folgt, dass, während die Kombination $h_1 h_2$ sämtliche Paare ganzer Zahlen durchläuft, die Kombination $l_1\ l_2$ alle diejenigen Zahlenpaare durchläuft, welche einer der beiden Kongruenzen C) genügen; oder, anders ausgedrückt, die unbeschränkte Summierung in Bezug auf $h_1 h_2$ ist zu ersetzen durch eine beschränkte Summierung in Bezug auf $l_1 l_2$.

Da aber schliesslich als Summierungszahlen nur solche verwendbar sind, welche sämtlich ganzzahlige Werte in unbeschränkter Verbindung annehmen, so erübrigt die Aufgabe,

> entweder mittels des im ersten Teil des § II eingeführten Multiplikatorprincips die bei unbeschränkter Verbindung der neuen Summierungszahlen zu viel genommenen Glieder auszuscheiden (Umformung **erster** Art)
>
> oder das Zahlenpaar $l_1, l_2$ durch ein anderes $l_1', l_2'$ zu ersetzen, welches, die Kongruenzen C) identisch erfüllend, mit $h_1$ und $h_2$ so verbunden sein muss, dass jedem ganzzahligen Wertepaar $h_1\ h_2$ ein und nur ein ganzzahliges Wertepaar $l_1' l_2'$ entspricht und umgekehrt (Umformung **zweiter** Art).

Behufs Ausführung der Umformung erster Art ist zu bedenken, dass bei unbeschränkter Summierung die Verbindung $\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2$ alle Reste in Bezug auf $\Delta$ durchläuft, während sie nur die durch $\Delta$ teilbaren Zahlenwerte durchlaufen soll. Die Ausmerzung der zuviel genommenen Glieder wird erreicht durch einen Multiplikator $M_\mu^{(l_1, l_2)}$ von der Art, dass

$$\sum_0^{\Delta-1}{}^{\mu}\ M_\mu^{(l_1, l_2)} = 0 \text{ oder } 1,$$

je nachdem $\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2$ durch $\Delta$ nicht teilbar oder teilbar ist Dieser Bedingung genügt die Funktion $M_\mu^{(l_1, l_2)} = \frac{1}{\Delta} . e^{2i\mu\pi . \frac{\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2}{\Delta}}$

Hienach ergiebt sich folgende, die Umformung erster Art für eine Doppelreihe liefernde Formel

$$5)\qquad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_2} f(h_1, h_2) = \frac{1}{\varDelta}\cdot\sum_{0}^{\varDelta-1}{}^{\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_2} e^{2i\mu\pi\frac{\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2}{\varDelta}} . f\left(\frac{\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2}{\varDelta}, \frac{\alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2}{\varDelta}\right)$$

$$= \frac{1}{\varDelta}\sum_{0}^{\varDelta-1}{}^{\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_2} e^{2i\mu\pi\frac{\alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2}{\varDelta}} . f\left(\frac{\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2}{\varDelta}, \frac{\alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2}{\varDelta}\right),$$

wo $\varDelta = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1$ und $\alpha_1\ \beta_1\ \alpha_2\ \beta_2$ ganze Zahlen bedeuten, von denen nur $\alpha_1$ mit $\beta_2$, $\alpha_2$ mit $\beta_1$ einen gemeinsamen Teiler haben darf.

Behufs Ausführung der Umformung zweiter Art legen wir zunächst die erste der Kongruenzen C) zu Grunde und setzen, um sie identisch zu erfüllen,

$$l_1 = \varDelta l_1' - \beta_1 \nu,\ l_2 = \varDelta l_2' + \alpha_1 \nu,$$

wo $l_1'$, $l_2'$ und $\nu$ ganze Zahlen bedeuten. Aus den Gleichungen A) folgt mit Beachtung der betreffs der Substitutionskoeffizienten gemachten Voraussetzung, dass sowohl $l_1$ als $l_2$ alle ganzzahligen Werte durchläuft. Damit dies der Fall sei, muss jede der Zahlen $l_1'$ $l_2'$ alle ganzzahligen Werte annehmen, $\nu$ aber alle Reste in Bezug auf $\varDelta$, d. h. die Zahlen $0, 1, 2, \ldots\ldots \varDelta-1$.

Führt man $l_1'$ und $l_2'$ statt $l_1$ und $l_2$ in die Gleichungen A) und B) ein, so folgt nunmehr

$$\text{D)}\qquad \begin{matrix} \beta_2 h_1 - \beta_1 h_2 + \beta_1 \nu = \varDelta . l_1' \\ -\alpha_2 h_1 + \alpha_1 h_2 - \alpha_1 \nu = \varDelta . l_2' \end{matrix}\ ,\quad \begin{matrix} h_1 = \alpha_1 l_1' + \beta_1 l_2' \\ h_2 = \alpha_2 l_1' + \beta_2 l_2' + \nu. \end{matrix}$$

Von diesen Gleichungen zeigt das rechts stehende Paar, dass, während von $l_1'$, $l_2'$ alle Zahlenpaare und von $\nu$ die Zahlen $0, 1, \ldots\ldots \varDelta-1$ durchlaufen werden, sowohl $h_1$ als $h_2$ nur ganzzahlige und alle ganzzahligen Werte annimmt. Dies würde zwar auch der Fall sein, wenn man $\nu = 0$ oder konstant setzte; es würden dann aber nicht alle ganzzahligen Werte von $h_1$ mit allen von $h_2$ zusammenkommen, weil für gewisse Zahlenpaare $h_1$ $h_2$ sich aus den links stehenden Gleichungen gebrochene Werte von $l_1'$ $l_2'$ ergeben würden. Dem wird eben durch die Einführung der laufenden Restzahl $\nu$ begegnet. Für jedes Zahlenpaar $h_1$ $h_2$ giebt es einen Wert von $\nu$ zwischen 0 und $\varDelta-1$, für welchen $l_1'$ und $l_2'$ ganzzahlig werden, weil, wie leicht zu zeigen, jede der Kongruenzen

$$\beta_1 \nu \equiv -\beta_2 h_1 + \beta_1 h_2 \pmod{\varDelta}$$
$$-\alpha_1 \nu \equiv \alpha_2 h_1 - \alpha_1 h_2 \pmod{\varDelta}$$

eine Folge der andern ist; und durch $h_1$, $h_2$ und $\nu$ sind $l_1'$ und $l_2'$ eindeutig bestimmt. Somit ist gezeigt, dass jedem Wertsystem $l_1'$ $l_2'$ $\nu$ ein und nur ein Zahlenpaar $h_1$ $h_2$, umgekehrt jedem Zahlenpaar $h_1$ $h_2$ ein und nur ein Wertsystem $\nu$ $l_1'$ $l_2'$ entspricht.

Leicht ersichtlich ist, wie man $l_1'$ und $l_2'$ so einführen kann, dass die zweite der Kongruenzen C) identisch erfüllt wird; ebenso leuchtet ein, dass man $\pm\nu$ oder allgemeiner $\pm\varepsilon\nu$ statt $\nu$ setzen kann, wenn $\varepsilon$ irgend eine zu $\varDelta$ relativ prime Zahl bedeutet.

Schreibt man jetzt schliesslich der Einfachheit halber statt $l_1'$, $l_2'$ wieder $l_1$, $l_2$, so ergiebt sich folgende die Umformung zweiter Art für eine Doppelreihe liefernde Formel

$$6)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mathfrak{h}_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mathfrak{h}_2} \mathrm{f}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2) = \sum_{0}^{\Delta-1}{}^{\nu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_2} \mathrm{f}(\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2, \alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2 \pm \varepsilon\nu)$$

$$= \sum_{0}^{\Delta-1}{}^{\nu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_2} \mathrm{f}(\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2 \pm \varepsilon\nu, \alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2),$$

wo $\Delta$ und $\alpha_1\ \beta_1\ \alpha_2\ \beta_2$ dieselbe Bedeutung wie bei Formel 5 haben.

Bemerkenswert ist, dass man drittens noch eine allgemeinere, die Formeln 5 und 6 als besondere Fälle enthaltende Gleichung aufstellen kann, indem man die Kongruenzen C) zu einem Teile identisch erfüllt, zum andern Teile das Multiplikatorprincip anwendet. Es sei $\Delta = \Delta_1 . \Delta_2$ irgend eine Zerlegung von $\Delta$ in ein Produkt zweier ganzzahliger Faktoren; man setze $\Delta_2 l_1 - \beta_1 \nu$ statt $l_1$, $\Delta_2 l_2 + \alpha_1 \nu$ statt $l_2$. Dann geht die Kongruenz $\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2 \equiv 0$ (mod. $\Delta$) über in $\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2 \equiv 0$ (mod. $\Delta_1$); für die Erfüllung dieser restierenden Kongruenz wende man das Multiplikatorprincip an. Es folgt:

$$7)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mathfrak{h}_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mathfrak{h}_2} \mathrm{f}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2) = \frac{1}{\Delta_1} \sum_{0}^{\Delta_1-1}{}^{\mu} \sum_{0}^{\Delta_2-1}{}^{\nu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_2} e^{2i\mu\pi\frac{\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2}{\Delta_1}} . \mathrm{f}\left(\frac{\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2}{\Delta_1}, \frac{\alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2}{\Delta_1} \pm \varepsilon . \nu\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta_1} . \sum_{0}^{\Delta_1-1}{}^{\mu} \sum_{0}^{\Delta_2-1}{}^{\nu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_2} e^{2i\mu\pi\frac{\alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2}{\Delta_1}} . \mathrm{f}\left(\frac{\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2}{\Delta_1} \pm \varepsilon . \nu, \frac{\alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2}{\Delta_1}\right),$$

wo $\Delta_1 . \Delta_2 = \Delta$ und $\Delta$, $\alpha_1$, $\beta_1$, $\alpha_2$, $\beta_2$ die bei Formel 5 angegebene Bedeutung haben.

II. Setzt man $\mathfrak{h}_1 = \alpha_1 \mathfrak{l}_1 + \beta_1 \mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{h}_2 = \alpha_2 \mathfrak{l}_1 + \beta_2 \mathfrak{l}_2$, so folgt $\mathfrak{l}_1 = \frac{\beta_2 \mathfrak{h}_1 - \beta_1 \mathfrak{h}_2}{\Delta}$, $\mathfrak{l}_2 = \frac{-\alpha_2 \mathfrak{h}_1 + \alpha_1 \mathfrak{h}_2}{\Delta}$, wo $\Delta = \alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1$. Wenn nun $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ alle ganzzahligen Werte durchlaufen, werden $\mathfrak{l}_1$ und $\mathfrak{l}_2$ im Allgemeinen Brüche mit dem Nenner $\Delta$. Setzt man $\mathfrak{l}_1 = \frac{l_1}{\Delta}$, $\mathfrak{l}_2 = \frac{l_2}{\Delta}$, so wird $\mathfrak{h}_1 = \frac{\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2}{\Delta}$, $\mathfrak{h}_2 = \frac{\alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2}{\Delta}$. Dies ist die nämliche Substitution, welche in den Gleichungen B) enthalten ist. Es kann sich somit nichts Neues ergeben.

---

Mit Beziehung auf den Schluss von § II genüge an dieser Stelle der blosse Hinweis darauf, dass für unendliche Doppelprodukte die entsprechenden Formeln gelten.

Anmerkung. Für den Fall eines negativen $\Delta$ ist in den Formeln 5 und 6 in der oberen Grenze des Summenzeichens, ausserdem in Formel 5 auch in dem Faktor vor dem Summenzeichen, statt $\Delta$ der absolute Wert $\sqrt{\Delta^2}$ zu setzen.

## § IV. Allgemeinere Formeln für die Doppelreihe.

Obgleich die in § III hinsichtlich der Substitutionskoefficienten eingeführte Voraussetzung eine Beschränkung der Allgemeinheit nicht in sich schliesst (weil jede beliebig angenommene, dieser Voraussetzung nicht entsprechende Substitution auf eine ihr entsprechende zurückgeführt werden kann), so ist es doch von Vorteil, die Untersuchung auch mit Weglassung dieser Voraussetzung durchzuführen, einmal wegen der bequemeren Anwendung der Formeln, andrerseits zur Vorbereitung einer bei der allgemeinen Umformung dreifacher und mehrfacher Reihen nicht zu umgehenden Aufgabe. Ich ziehe es hiebei vor, das fertige Ergebnis der Untersuchung voranzustellen, wobei ich von der zweiten der Substitutionen des § III ausgehe, welche, wie gezeigt, mit der ersten zu gleichem Ziele führen muss.

Es sei also

$$\left.\begin{array}{ll} \mathfrak{h} = \alpha\mathfrak{l} + \beta\mathfrak{l}_1 & \mathfrak{l} = \dfrac{\beta_1\mathfrak{h} - \beta\mathfrak{h}_1}{\Delta} \\ & , \\ \mathfrak{h}_1 = \alpha_1\mathfrak{l} + \beta_1\mathfrak{l}_1 & \mathfrak{l}_1 = \dfrac{-\alpha_1\mathfrak{h} + \alpha\mathfrak{h}_1}{\Delta} \end{array}\right., \quad \Delta = \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta.$$

Es werde der grösseste gemeinsame Teiler zweier Zahlen a und b durch [a, b] bezeichnet, und es sei

$$[\alpha, \alpha_1] = \varphi, \qquad [\beta, \beta_1] = \psi, \qquad \left[\frac{\alpha_1}{\varphi}, \frac{\beta_1}{\psi}\right] = \mathfrak{f}, \qquad \left[\frac{\alpha}{\varphi}, \frac{\beta}{\psi}\right] = \mathfrak{f}_1$$

$$\left[\frac{\beta}{\psi\mathfrak{f}_1}, \mathfrak{f}_1\right] = \varphi_1'', \qquad \left[\frac{\alpha}{\varphi\mathfrak{f}_1}, \mathfrak{f}_1\right] = \varphi_1', \qquad \left[\frac{\beta_1}{\psi\mathfrak{f}}, \mathfrak{f}\right] = \varphi'', \qquad \left[\frac{\alpha_1}{\varphi\mathfrak{f}}, \mathfrak{f}\right] = \varphi'$$

$$\left[\frac{\beta}{\psi\mathfrak{f}_1\varphi_1''}, \varphi_1''\right] = \varphi_1^{\mathrm{IV}}, \qquad \left[\frac{\alpha}{\varphi\mathfrak{f}_1\varphi_1'}, \varphi_1'\right] = \varphi_1^{\mathrm{III}}, \qquad \left[\frac{\beta_1}{\psi\mathfrak{f}\varphi''}, \varphi''\right] = \varphi^{\mathrm{IV}}, \qquad \left[\frac{\alpha_1}{\varphi\mathfrak{f}\varphi'}, \varphi'\right] = \varphi^{\mathrm{III}}$$

$$\left[\frac{\beta}{\psi\mathfrak{f}_1\varphi_1^{\mathrm{II}}\varphi_1^{\mathrm{IV}}}, \varphi_1^{\mathrm{IV}}\right] = \varphi_1^{\mathrm{VI}}, \left[\frac{\alpha}{\varphi\mathfrak{f}_1\varphi_1'\varphi_1^{\mathrm{III}}}, \varphi_1^{\mathrm{III}}\right] = \varphi_1^{\mathrm{V}}, \left[\frac{\beta_1}{\psi\mathfrak{f}\varphi''\varphi^{\mathrm{IV}}}, \varphi^{\mathrm{IV}}\right] = \varphi^{\mathrm{VI}}, \left[\frac{\alpha_1}{\varphi\mathfrak{f}\varphi'\varphi^{\mathrm{III}}}, \varphi^{\mathrm{III}}\right] = \varphi^{\mathrm{V}}$$

u. s. f.

$$\mathfrak{f}_1'' = \varphi_1'' \cdot \varphi_1^{\mathrm{IV}} \cdot \varphi_1^{\mathrm{VI}} \ldots\ldots, \quad \mathfrak{f}_1' = \varphi_1' \cdot \varphi_1^{\mathrm{III}} \cdot \varphi_1^{\mathrm{V}} \ldots\ldots, \quad \mathfrak{f}'' = \varphi'' \cdot \varphi^{\mathrm{IV}} \cdot \varphi^{\mathrm{VI}} \ldots\ldots,$$
$$\mathfrak{f}' = \varphi' \cdot \varphi^{\mathrm{III}} \cdot \varphi^{\mathrm{V}} \ldots\ldots$$

Hiemit sind $\mathfrak{f}_1''$, $\mathfrak{f}_1'$, $\mathfrak{f}''$, $\mathfrak{f}'$ durch eine endliche Anzahl von Operationen bestimmt. Es seien ferner $\varepsilon_1''$, $\varepsilon_1'$, $\varepsilon''$, $\varepsilon'$ so bestimmt, dass identisch $\frac{\beta_1}{\psi}\varepsilon_1'' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''}$, $-\frac{\alpha_1}{\varphi}\varepsilon_1' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1'}$, $-\frac{\beta}{\psi}\varepsilon'' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}\mathfrak{f}''}$, $\frac{\alpha}{\varphi}\varepsilon' \equiv 1 \pmod{\mathfrak{f}\mathfrak{f}'}$ ist; und man setze $\mathfrak{l} = \frac{\psi l}{\Delta}$, $\mathfrak{l}_1 = \frac{\varphi l_1}{\Delta}$. Dann wird, während die Kombination $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ sämtliche Paare ganzer Zahlen zwischen $-\infty$ und $+\infty$ durchläuft, die Kombination $l l_1$ diejenigen Paare ganzer Zahlen durchlaufen, welche die Kongruenz

$$\delta l + \delta_1 l_1 \equiv 0 \left(\text{mod.}\ \frac{\varDelta}{\varphi\psi}\right)$$

befriedigen, wo

$$\text{entweder}\ \delta = \frac{\frac{\alpha}{\varphi} - \varepsilon_1'' \frac{\varDelta}{\varphi\psi}}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1''},\ \delta_1 = \frac{\frac{\beta}{\psi}}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1''},\ \text{oder}\ \delta = \frac{\frac{\alpha}{\varphi}}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1'},\ \delta_1 = \frac{\frac{\beta}{\psi} - \varepsilon_1' \frac{\varDelta}{\varphi\psi}}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1'},$$

$$\text{oder}\ \delta = \frac{\frac{\alpha_1}{\varphi} - \varepsilon''.\frac{\varDelta}{\varphi\psi}}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}''};\ \delta_1 = \frac{\frac{\beta_1}{\psi}}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}''},\ \text{oder}\ \delta = \frac{\frac{\alpha_1}{\varphi}}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}'},\ \delta_1 = \frac{\frac{\beta_1}{\psi} - \varepsilon'.\frac{\varDelta}{\varphi\psi}}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}'}.$$

Sämtliche möglichen Formen dieser Kongruenz erhält man, wenn man für $\delta$ und $\delta_1$ alle möglichen mit ihnen durch die Kongruenz $\delta\delta_1' - \delta_1\delta' \equiv 0\left(\frac{\varDelta}{\varphi\psi}\right)$ verbundenen Paare ganzer Zahlen $\delta'$, $\delta_1'$ ohne gemeinsamen Teiler mit $\frac{\varDelta}{\varphi\psi}$ setzt.

Beweis. Schreibt man zur Abkürzung $\alpha'$, $\alpha_1'$, $\beta'$, $\beta_1'$ für $\frac{\alpha}{\varphi}$, $\frac{\alpha_1}{\varphi}$, $\frac{\beta}{\psi}$, $\frac{\beta_1}{\psi}$, so ist $\alpha'$ relativ prim gegen $\alpha_1'$, $\beta'$ gegen $\beta_1'$. Hieraus folgt, dass sowohl $l = \beta_1'\mathfrak{h} - \beta'\mathfrak{h}_1$ als auch $l_1 = -\alpha_1'\mathfrak{h} + \alpha'\mathfrak{h}_1$ sämtliche ganzzahligen Werte annimmt, während die Komplexion $\mathfrak{h}\mathfrak{h}_1$ alle Paare ganzer Zahlen durchläuft. Die ganzzahligen Werte von $l$ und $l_1$ paaren sich aber nicht beliebig, sondern nur so, dass

$$\alpha' l + \beta' l_1 = \mathfrak{h}.\varDelta',\ \text{also} \equiv 0\ (\text{mod.}\ \varDelta')$$
$$\alpha_1' l + \beta_1' l_1 = \mathfrak{h}_1.\varDelta',\ \text{also} \equiv 0\ (\text{mod.}\ \varDelta')$$

ist, wo $\varDelta' = \frac{\varDelta}{\varphi\psi} = \alpha'\beta_1' - \alpha_1'\beta' = \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}\left(\frac{\alpha'}{\mathfrak{f}_1}.\frac{\beta_1'}{\mathfrak{f}} - \frac{\alpha_1'}{\mathfrak{f}}.\frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1}\right)$. Diese beiden von $l$ und $l_1$ zu erfüllenden Kongruenzen sind äquivalent*) mit

$$\frac{\alpha'}{\mathfrak{f}_1} l + \frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1} l_1 \equiv 0 \left(\text{mod.}\ \frac{\varDelta'}{\mathfrak{f}_1}\right)$$
$$\frac{\alpha_1'}{\mathfrak{f}} l + \frac{\beta_1'}{\mathfrak{f}} l_1 \equiv 0 \left(\text{mod.}\ \frac{\varDelta'}{\mathfrak{f}}\right)$$

Hier sind infolge der Definition von $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ die Zahlen $\frac{\alpha'}{\mathfrak{f}_1}$, $\frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1}$, $\frac{\varDelta'}{\mathfrak{f}_1}$ relativ prim zu je zwei; desgleichen die Zahlen $\frac{\alpha_1'}{\mathfrak{f}}$, $\frac{\beta_1'}{\mathfrak{f}}$, $\frac{\varDelta'}{\mathfrak{f}}$. Ferner sind $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}_1$ relativ prim, ferner $\mathfrak{f}_1''$ $\mathfrak{f}_1'$ $\mathfrak{f}''$ $\mathfrak{f}'$ relativ prim zu je zwei, dagegen $\mathfrak{f}_1$ durch $\mathfrak{f}_1''\mathfrak{f}_1'$, $\mathfrak{f}$ durch $\mathfrak{f}''\mathfrak{f}'$ teilbar; hätten z. B. $\mathfrak{f}_1''$ und $\mathfrak{f}_1'$ einen gemeinsamen Teiler, so wäre dieser auch gemeinsamer Teiler von $\frac{\alpha'}{\mathfrak{f}_1}$ und $\frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1}$ gegen die Bestimmung, dass $\mathfrak{f}_1$ der grösseste gemeinsame Teiler von $\alpha'$ und

*) Ich nenne zwei Kongruenzen einander „äquivalent“, wenn jede eine Folge der andern ist, so dass jede die andere völlig ersetzt.

$\beta'$ sein soll. Weiter sind auch $\frac{\alpha'}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1'}$, $\frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''}$, $\mathfrak{f}_1$ relativ prim zu je zwei, desgleichen $\frac{\alpha_1'}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}'}$, $\frac{\beta_1'}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}''}$, $\mathfrak{f}$; also, da $\Delta' = \frac{\Delta'}{\mathfrak{f}_1}\cdot\mathfrak{f}_1 = \frac{\Delta'}{\mathfrak{f}}\cdot\mathfrak{f}$, auch $\frac{\alpha'}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1'}$, $\frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''}$, $\Delta'$ relativ prim zu zwei, desgleichen $\frac{\alpha_1'}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}'}$ $\frac{\beta_1'}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}''}$, $\Delta'$.

Von den beiden obigen Kongruenzen ist nun, da $\frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''}$ relativ prim gegen $\Delta'$ ist, die zweite äquivalent mit

$$\frac{\alpha_1'}{\mathfrak{f}}\cdot\frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''}l + \frac{\beta_1'}{\mathfrak{f}}\,\frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''}l_1 \equiv 0\left(\frac{\Delta'}{\mathfrak{f}}\right)$$

Setzt man hierin aus der ersten Kongruenz ein

$$\frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1}l_1 = \frac{\Delta'}{\mathfrak{f}_1}\cdot\mathfrak{Z} - \frac{\alpha'}{\mathfrak{f}_1}\cdot l, \text{ wo } \mathfrak{Z} \text{ eine ganze Zahl bezeichnet,}$$

so folgt

$$\frac{\beta_1'\Delta'\cdot\mathfrak{Z}}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''} - \frac{\Delta' l}{\mathfrak{f}\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''} \equiv 0\left(\frac{\Delta'}{\mathfrak{f}}\right), \text{ also } \beta_1'\cdot\mathfrak{Z} \equiv l \ (\text{mod. } \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1'')$$

Ist nun, was immer möglich, $\varepsilon_1''$ in der oben angegebenen Weise bestimmt, so lautet die Lösung der letzten Kongruenz

$$\mathfrak{Z} \equiv \varepsilon_1'' l \ (\text{mod. } \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''), \text{ also } = \varepsilon_1'' l + \mathfrak{Z}'\cdot\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''.$$

Setzt man dies für $\mathfrak{Z}$ in die Gleichung

$$\frac{\alpha'}{\mathfrak{f}_1}l + \frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1}l_1 = \frac{\Delta'}{\mathfrak{f}_1}\cdot\mathfrak{Z}$$

zurück, so folgt

$$\frac{\alpha' - \varepsilon_1''\Delta'}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''}l + \frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''}l_1 = \Delta'\cdot\mathfrak{Z}', \text{ also } \equiv 0 \ (\text{mod. } \Delta'),$$

oder

$$\delta l + \delta_1 l_1 \equiv 0 \ (\Delta').$$

Hiemit ist die Notwendigkeit der oben aufgestellten resultierenden Kongruenz in der ersten der vier angegebenen Formen hergeleitet; die anderen drei ergeben sich durch leicht ersichtliche Abänderung des Verfahrens.

Es ist zu beweisen, dass diese resultierende Kongruenz auch hinreichend ist, das von $l$ und $l_1$ zu erfüllende Kongruenzenpaar zu ersetzen.

Es ist nach dem Vorhergehenden $\delta_1 = \frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''}$ eine ganze Zahl und relative Primzahl zu $\Delta'$. Dasselbe gilt von $\delta = \frac{\alpha' - \varepsilon_1''\Delta'}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''}$. Denn zufolge der Bestimmung von $\varepsilon_1''$ giebt es eine ganze Zahl $\mathfrak{e}_1''$ von der Art, dass $\beta_1'\varepsilon_1'' = 1 + \mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''\mathfrak{e}_1''$. Daher ist

$$\frac{\alpha' - \varepsilon_1''\Delta'}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''} = \frac{\alpha' - \varepsilon_1''(\alpha'\beta_1' - \alpha_1'\beta')}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''} = \frac{\alpha'(1 - \beta_1'\varepsilon_1'')}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''} + \varepsilon_1''\alpha_1'\frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''} = -\alpha'\mathfrak{e}_1'' + \varepsilon_1''\alpha_1'\frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1\mathfrak{f}_1''}$$

Somit ist $\delta$ eine ganze Zahl. Ist diese ganze Zahl relativ prim gegen $\mathfrak{f}_1$ und $\frac{\Delta'}{\mathfrak{f}_1}$, so ist sie es auch gegen $\mathfrak{f}_1 \cdot \frac{\Delta'}{\mathfrak{f}_1} = \Delta'$. Nun ist $\alpha'$, also auch $-\alpha' \mathfrak{e}_1''$ teilbar durch $\mathfrak{f}_1$, dagegen $\alpha_1' \frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1''}$ und (wegen der Gleichung $\beta_1' \varepsilon_1'' = 1 + \mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1'' \mathfrak{e}_1''$) auch $\varepsilon_1''$ relativ prim gegen $\mathfrak{f}_1$, also auch $\varepsilon_1'' \alpha_1' \frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1''}$ relativ prim gegen $\mathfrak{f}_1$; mithin $\delta = -\alpha' \mathfrak{e}_1'' + \varepsilon_1'' \alpha_1' \frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1''}$ relativ prim gegen $\mathfrak{f}_1$. Zweitens ist $\frac{\alpha' - \varepsilon_1'' \Delta'}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1''} = \frac{\frac{\alpha'}{\mathfrak{f}_1} - \varepsilon_1'' \frac{\Delta'}{\mathfrak{f}_1}}{\mathfrak{f}_1''}$; hier ist $\frac{\alpha'}{\mathfrak{f}_1}$ relativ prim gegen $\frac{\Delta'}{\mathfrak{f}_1}$, dagegen $\varepsilon_1'' \frac{\Delta'}{\mathfrak{f}_1}$ teilbar durch $\frac{\Delta'}{\mathfrak{f}_1}$, mithin $\frac{\alpha'}{\mathfrak{f}_1} - \varepsilon_1'' \frac{\Delta'}{\mathfrak{f}_1}$ relativ prim gegen $\frac{\Delta'}{\mathfrak{f}_1}$, daher um so mehr $\frac{\frac{\alpha'}{\mathfrak{f}_1} - \varepsilon_1'' \frac{\Delta'}{\mathfrak{f}_1}}{\mathfrak{f}_1''}$ relativ prim gegen $\frac{\Delta'}{\mathfrak{f}_1}$. Somit $\delta$ eine ganze Zahl und relativ prim gegen $\Delta'$.

Nun ist die Kongruenz $\alpha' l + \beta' l_1 \equiv 0\ (\Delta')$ äquivalent mit $\alpha' \delta_1 l + \beta' \delta_1 l_1 \equiv 0\ (\Delta')$, weil $\delta_1$ relativ prim gegen $\Delta'$. Ist nun die Kongruenz $\delta l + \delta_1 l_1 \equiv 0\ (\Delta')$ erfüllt, so ist $\delta_1 l_1 \equiv -\delta l\ (\Delta')$. Setzt man dies in jene Kongruenz ein, so geht sie über in $(\alpha' \delta_1 - \beta' \delta) l \equiv 0\ (\Delta')$. Dies ist aber eine Identität; denn es ist

$$\alpha' \delta_1 - \beta' \delta = \alpha' \frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1''} - \beta' \frac{\alpha' - \varepsilon_1'' \Delta'}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1''} = \frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1''} \cdot \varepsilon_1'' \cdot \Delta' \equiv 0\ (\Delta').$$

Ebenso wird die Kongruenz $\alpha_1' l + \beta_1' l_1 \equiv 0\ (\Delta')$ durch Erfüllung der Kongruenz $\delta l + \delta_1 l_1 \equiv 0\ (\Delta')$ zu einer Identität, weil

$$\alpha_1' \delta_1 - \beta_1' \delta = \alpha_1' \frac{\beta'}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1''} - \beta_1' \frac{\alpha' - \varepsilon_1'' \Delta'}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1''} = \frac{-\Delta' + \beta_1' \varepsilon_1'' \cdot \Delta'}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1''} = \frac{\Delta'(\beta_1' \varepsilon_1'' - 1)}{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1''} = \Delta' \cdot \mathfrak{e}_1'' \equiv 0\ (\Delta') \text{ ist.}$$

Und ebenso sieht man ein, dass durch Erfüllung der Kongruenz $\delta l + \delta_1 l_1 \equiv 0\ (\Delta')$ die Kongruenz $\delta' l + \delta_1' l_1$ zu einer Identität wird, falls $\delta \delta_1' - \delta_1 \delta' \equiv 0$ (mod. $\Delta'$) ist. Sind aber zugleich $\delta'$ und $\delta_1'$, ebenso wie $\delta$ und $\delta_1$, relativ prim gegen den Modul $\Delta'$, so wird jede dieser beiden Kongruenzen durch Erfüllung der andern zur Identität.

---

Im Anschluss an diesen Beweis hebe ich hervor, wie die Aufstellung der resultierenden Kongruenz $\delta l + \delta_1 l_1 \equiv 0$ (mod. $\Delta'$) die Kettenbruchentwickelung eines der vier Brüche $\frac{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1''}{\beta_1'}, \frac{\mathfrak{f}_1 \mathfrak{f}_1'}{\alpha_1'}, \frac{\mathfrak{f} \mathfrak{f}''}{\beta'}, \frac{\mathfrak{f} \mathfrak{f}'}{\alpha'}$ erfordert. In den drei besonderen Fällen $\mathfrak{f}_1 = 1$, $\mathfrak{f} = 1$, $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{f} = 1$ kommt die Kettenbruchentwickelung in Wegfall, indem man als resultierende Kongruenz die erste der beiden ursprünglichen, resp. die zweite, resp. eine von beiden nehmen kann. Vgl. § III.

Führt man nunmehr $l$ und $l_1$ statt $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{l}_1$ in die ursprünglichen Substitutionsgleichungen ein, so wird

$$\mathfrak{h} = \frac{\alpha' l + \beta' l_1}{\Delta'}, \ \mathfrak{h}_1 = \frac{\alpha_1' l + \beta_1' l_1}{\Delta'}.$$

Die Befriedigung der resultierenden Kongruenz $\delta l + \delta_1 l_1 \equiv 0 \; (\varDelta')$ kann nun, wie in § III, auf dreierlei Art geschehen. Erstens; man lässt die Kombination $ll_1$ alle Zahlenpaare durchlaufen und merzt die die Kongruenz nicht befriedigenden Paare mittels des Multiplikators $\mathrm{M}_\mu^{(l,l_1)} = \frac{1}{\varDelta'} e^{2i\mu\pi\frac{\delta l + \delta_1 l_1}{\varDelta'}}$ aus. Zweitens; man erfüllt die Kongruenz identisch, indem man für $l$ und $l_1$ beziehentlich $\varDelta' l + \varepsilon\delta_1\nu$ und $\varDelta' l_1 - \varepsilon\delta\nu$ setzt, wo $\varepsilon$ eine beliebige positive oder negative Zahl ohne gemeinsamen Teiler mit $\varDelta'$ bedeutet. Drittens; man zerlegt $\varDelta'$ in ein Produkt zweier ganzen Zahlen $\varDelta_1$ und $\varDelta_2$ und wendet in Bezug auf den ersten das Multiplikatorprincip, in Bezug auf den zweiten die identische Erfüllung der Kongruenz an.

So erhält man drei den Formeln 5, 6, 7 des § III entsprechende allgemeinere Formeln. Indem man noch bemerkt, dass in den Ausdrücken für h und $\mathrm{h}_1$ sich die gemeinsamen Teiler $\varphi$ und $\psi$ völlig herausgehoben haben, kann man schliesslich der Kürze halber $\alpha, \beta, \alpha_1, \beta_1$ statt $\alpha', \beta', \alpha_1', \beta_1'$ schreiben, wobei nur zu beachten ist, dass dann $\alpha$ gegen $\alpha_1$, $\beta$ gegen $\beta_1$ relativ prim sein muss. Dann lauten die Formeln:

$$8) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\mathrm{h}\mathrm{h}_1} f(\mathrm{h},\mathrm{h}_1) = \frac{1}{\varDelta} \cdot \sum_{0}^{\varDelta-1} {}^{\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{ll_1} e^{2i\mu\pi\frac{\delta l + \delta_1 l_1}{\varDelta}} \cdot f\left(\frac{\alpha l + \beta l_1}{\varDelta}, \frac{\alpha_1 l + \beta_1 l_1}{\varDelta}\right)$$

$$9) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\mathrm{h}\mathrm{h}_1} f(\mathrm{h},\mathrm{h}_1) = \sum_{0}^{\varDelta-1} {}^{\nu} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{ll_1} f\left(\alpha l + \beta l_1 + \frac{\alpha\delta_1 - \beta\delta}{\varDelta}\varepsilon\nu, \; \alpha_1 l + \beta_1 l_1 + \frac{\alpha_1\delta_1 - \beta_1\delta}{\varDelta}\varepsilon\nu\right)$$

$$10) \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{\mathrm{h}\mathrm{h}_1} f(\mathrm{h},\mathrm{h}_1) = \frac{1}{\varDelta_1} \cdot \sum_{0}^{\varDelta_1-1} {}^{\mu} \sum_{0}^{\varDelta_2-1} {}^{\nu} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{ll_1} e^{2i\mu\pi\frac{\delta l + \delta_1 l_1}{\varDelta_1}} \cdot f\left(\frac{\alpha l + \beta l_1}{\varDelta_1} + \frac{\alpha\delta_1 - \beta\delta}{\varDelta}\varepsilon\nu, \; \frac{\alpha_1 l + \beta_1 l_1}{\varDelta_1} + \frac{\alpha_1\delta_1 - \beta_1\delta}{\varDelta}\varepsilon\nu\right)$$

$$\varDelta = \varDelta_1 \cdot \varDelta_2 = \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta.$$

Im Falle eines negativen $\varDelta$ ist hier, wie auch in den folgenden Paragraphen, vor dem Summenzeichen und in der oberen Grenze stets der absolute Wert $\sqrt{\varDelta^2}$ für $\varDelta$ zu setzen.

## § V. Umformung einer dreifachen Reihe unter einer die Substitution beschränkenden Voraussetzung.

Die allgemeinste lineäre Substitution zur Umformung einer dreifach unendlichen Reihe wird erhalten, indem man drei von einander unabhängige lineäre Funktionen mit ganzzahligen Koefficienten von den ursprünglichen Summierungszahlen $\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \mathrm{h}_3$ gleich drei anderen ebenso beschaffenen lineären Funktionen der neu einzuführenden Summierungszahlen $l_1, l_2, l_3$ setzt. Diese allgemeinste Substitution ist, wie in § II und III, in zwei aufeinanderfolgende zu zerlegen, welche getrennt zu behandeln sind.

I. Es sei

$$\mathfrak{A}) \quad \begin{cases} \alpha_1 \mathrm{h}_1 + \beta_1 \mathrm{h}_2 + \gamma_1 \mathrm{h}_3 = l_1 \\ \alpha_2 \mathrm{h}_1 + \beta_2 \mathrm{h}_2 + \gamma_2 \mathrm{h}_3 = l_2 \\ \alpha_3 \mathrm{h}_1 + \beta_3 \mathrm{h}_2 + \gamma_3 \mathrm{h}_3 = l_3, \end{cases}$$

$$\sum \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 = \Delta,\ \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1} = \alpha',\ \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_2} = \alpha'' \text{ u. s. w., demnach}$$

$$\mathfrak{B})\quad \begin{cases} h_1 = \dfrac{\alpha' l_1 + \alpha'' l_2 + \alpha''' l_3}{\Delta} \\ h_2 = \dfrac{\beta' l_1 + \beta'' l_2 + \beta''' l_3}{\Delta} \\ h_3 = \dfrac{\gamma' l_1 + \gamma'' l_2 + \gamma''' l_3}{\Delta} \end{cases}$$

Während $h_1$ $h_2$ $h_3$ sämtliche ganzzahlige Werte in jeder möglichen Verbindung annehmen, durchlaufen $l_1$ $l_2$ $l_3$, wie die Gleichungen $\mathfrak{A}$) zeigen, ebenfalls lauter ganzzahlige Werte, aber wegen der Gleichungen $\mathfrak{B}$) nur diejenigen, welche die folgenden Kongruenzen erfüllen:

$$\mathfrak{C})\quad \begin{cases} \alpha' l_1 + \alpha'' l_2 + \alpha''' l_3 \equiv 0 \\ \beta' l_1 + \beta'' l_2 + \beta''' l_3 \equiv 0 \\ \gamma' l_1 + \gamma'' l_2 + \gamma''' l_3 \equiv 0 \end{cases} \text{mod. } \Delta$$

Bei diesem Kongruenzensystem ist die Determinante $\sum \pm \alpha' \beta'' \gamma''' = \Delta^2$ und sind auch sämtliche Partialdeterminanten durch den Modul $\Delta$ teilbar. Die Kongruenzen sind daher nicht von einander unabhängig, sondern müssen sich wesentlich auf eine resultierende Kongruenz zurückführen lassen.

Ist z. B. die erste Kongruenz erfüllt, so ist auch

$$\alpha' \beta' l_1 + \alpha'' \beta' l_2 + \alpha''' \beta' l_3 \equiv 0.\ (\Delta).$$

Identisch ist $\quad (\alpha' \beta'' - \alpha'' \beta') l_2 + (\alpha' \beta''' - \alpha''' \beta') l_3 = \Delta \gamma_3 l_2 - \Delta \gamma_2 l_3 \equiv 0\ (\Delta)$

Addiert: $\quad \alpha' \beta' l_1 + \alpha' \beta'' l_2 + \alpha' \beta''' l_3 \equiv 0\ (\Delta)$

Falls nun $\alpha'$ relativ prim gegen $\Delta$ ist, folgt hieraus

$$\beta' l_1 + \beta'' l_2 + \beta''' l_3 \equiv 0\ (\Delta),$$

d. h. jedes die erste Kongruenz erfüllende Wertsystem $l_1 l_2 l_3$ befriedigt zugleich die zweite; desgleichen, wie ebenso zu zeigen, die dritte.

Allgemein:

$\mathfrak{D}$) Wenn irgend ein Element der adjungierten Determinante relativ prim gegen die Substitutionsdeterminante $\Delta$ ist, so werden durch Erfüllung der dieses Element enthaltenden Kongruenz zugleich die übrigen Kongruenzen befriedigt.

Unter der hiemit eingeführten Voraussetzung ergiebt sich nun, wenn wir die resultierende der drei Kongruenzen $\mathfrak{C}$) im allgemeinen durch

$$\delta_1 l_1 + \delta_2 l_2 + \delta_3 l_3 \equiv 0 \text{ (mod. } \Delta)$$

bezeichnen, mit Hilfe des Multiplikators $M_\mu^{(l_1, l_2, l_3)} = \dfrac{1}{\Delta}.\, e^{2 i \mu \pi \frac{\delta_1 l_1 + \delta_2 l_2 + \delta_3 l_3}{\Delta}}$ die folgende Umformung erster Art für eine dreifach unendliche Reihe:

$$11)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_3}\, \mathfrak{f}(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3) = \frac{1}{\varDelta} \cdot \sum_{0}^{\varDelta-1}{}^{\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1 l_2 l_3}\, e^{2i\mu\pi\frac{\delta_1 l_1 + \delta_2 l_2 + \delta_3 l_3}{\varDelta}} . \mathfrak{f}\left(\frac{\mathfrak{L}'}{\varDelta}, \frac{\mathfrak{L}''}{\varDelta}, \frac{\mathfrak{L}'''}{\varDelta}\right), \\ \qquad \text{wo} \\ \mathfrak{L}' = \alpha' l_1 + \alpha'' l_2 + \alpha''' l_3,\ \mathfrak{L}'' = \beta' l_1 + \beta'' l_2 + \beta''' l_3,\ \mathfrak{L}''' = \gamma' l_1 + \gamma'' l_2 + \gamma''' l_3, \\ \varDelta = \sum \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3 = \sqrt{\sum \pm \alpha' \beta'' \gamma'''} \end{cases}$$

II. Es sei

$$(\mathfrak{E})\quad \begin{cases} \mathfrak{h}_1 = \alpha_1 \mathfrak{l}_1 + \beta_1 \mathfrak{l}_2 + \gamma_1 \mathfrak{l}_3 \\ \mathfrak{h}_2 = \alpha_2 \mathfrak{l}_1 + \beta_2 \mathfrak{l}_2 + \gamma_2 \mathfrak{l}_3 \\ \mathfrak{h}_3 = \alpha_3 \mathfrak{l}_1 + \beta_3 \mathfrak{l}_2 + \gamma_3 \mathfrak{l}_3, \end{cases}$$

demnach

$$(\mathfrak{F})\quad \begin{cases} \mathfrak{l}_1 = \dfrac{\alpha' \mathfrak{h}_1 + \alpha'' \mathfrak{h}_2 + \alpha''' \mathfrak{h}_3}{\varDelta} = \dfrac{l_1}{\varDelta} \\ \mathfrak{l}_2 = \dfrac{\beta' \mathfrak{h}_1 + \beta'' \mathfrak{h}_2 + \beta''' \mathfrak{h}_3}{\varDelta} = \dfrac{l_2}{\varDelta} \\ \mathfrak{l}_3 = \dfrac{\gamma' \mathfrak{h}_1 + \gamma'' \mathfrak{h}_2 + \gamma''' \mathfrak{h}_3}{\varDelta} = \dfrac{l_3}{\varDelta} \end{cases}$$

Dann folgt

$$(\mathfrak{G})\quad \begin{cases} \alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2 + \gamma_1 l_3 = \varDelta . \mathfrak{h}_1, \text{ also} \equiv 0 \pmod{\varDelta} \\ \alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2 + \gamma_2 l_3 = \varDelta . \mathfrak{h}_2, \quad ,, \equiv 0 \quad ,, \\ \alpha_3 l_1 + \beta_3 l_2 + \gamma_3 l_3 = \varDelta . \mathfrak{h}_3, \quad ,, \equiv 0 \quad ,, \end{cases}$$

Die Zahlen $l_1\, l_2\, l_3$ durchlaufen wegen der Gleichungen $\mathfrak{F}$) nur ganzzahlige Werte; sie haben alle diejenigen ganzzahligen Werte anzunehmen, welche das Kongruenzensystem $\mathfrak{G}$) befriedigen. Eliminiert man aus den beiden letzten Kongruenzen zuerst $l_3$, dann $l_2$, so folgt

$$\mathfrak{H})\quad \alpha' l_2 \equiv \beta' l_1,\ \alpha' l_3 \equiv \gamma' l_1 \pmod{\varDelta}.$$

Die Erfüllung dieser zwei Kongruenzen ist unter allen Umständen **notwendig**; sie ist aber, **falls $\alpha'$ relativ prim gegen $\varDelta$ ist, auch hinreichend** für die Befriedigung der Kongruenzen $\mathfrak{G}$). Denn, wenn $\alpha'$ relativ prim gegen $\varDelta$ ist, sind die drei Kongruenzen $\mathfrak{G}$) äquivalent mit

$$\alpha_1 \alpha' l_1 + \beta_1 \alpha' l_2 + \gamma_1 \alpha' l_3 \equiv 0,\ \alpha_2 \alpha' l_1 + \beta_2 \alpha' l_2 + \gamma_2 \alpha' l_3 \equiv 0,\ \alpha_3 \alpha' l_1 + \beta_3 \alpha' l_2 + \gamma_3 \alpha' l_3 \equiv 0 \pmod{\varDelta}.$$

Ersetzt man hier $\alpha' l_2$ und $\alpha' l_3$ durch $\beta' l_1$ und $\gamma' l_1$, so folgt

$$(\alpha_1 \alpha' + \beta_1 \beta' + \gamma_1 \gamma') l_1 \equiv 0,\ (\alpha_2 \alpha' + \beta_2 \beta' + \gamma_2 \gamma') l_1 \equiv 0,\ (\alpha_3 \alpha' + \beta_3 \beta' + \gamma_3 \gamma') l_1 \equiv 0 \ \ldots \bmod \varDelta,$$

oder

$$\varDelta . l_1 \equiv 0, \qquad 0 . l_1 \equiv 0, \qquad 0 . l_1 \equiv 0 \quad \bmod \varDelta,$$

welches Identitäten sind. Allgemein:

$\mathfrak{J}$) **Ist irgend ein Element der adjungierten Determinante relativ prim gegen $\varDelta$, so reduziert sich das Kongruenzensystem $\mathfrak{G}$) auf zwei zweigliedrige Kongruenzen, wie $\mathfrak{H}$).**

Die Kongruenzen $\mathfrak{H}$) werden identisch erfüllt, wenn man setzt

$$l_1 = \varDelta l_1' + \alpha' \nu,\ l_2 = \varDelta l_2' + \beta' \nu,\ l_3 = \varDelta l_3' + \gamma' \nu.$$

Dann gehen die Gleichungen $\mathfrak{E}$) und $\mathfrak{F}$) über in

$$\mathfrak{K})\quad \begin{cases} \mathrm{h}_1 = \alpha_1 l_1' + \beta_1 l_2' + \gamma_1 l_3' + \nu \\ \mathrm{h}_2 = \alpha_2 l_1' + \beta_2 l_2' + \gamma_2 l_3' \\ \mathrm{h}_3 = \alpha_3 l_1' + \beta_3 l_2' + \gamma_3 l_3' \end{cases} \qquad \mathfrak{L})\quad \begin{cases} \alpha' \mathrm{h}_1 + \alpha'' \mathrm{h}_2 + \alpha''' \mathrm{h}_3 = \Delta l_1' + \alpha' \nu \\ \beta' \mathrm{h}_1 + \beta'' \mathrm{h}_2 + \beta''' \mathrm{h}_3 = \Delta l_2' + \beta' \nu \\ \gamma' \mathrm{h}_1 + \gamma'' \mathrm{h}_2 + \gamma''' \mathrm{h}_3 = \Delta l_3' + \gamma' \nu \end{cases}$$

Das Gleichungssystem $\mathfrak{K}$) zeigt, dass jedem ganzzahligen Wertsystem $l_1\ l_2\ l_3\ \nu$ ein einziges ganzzahliges Wertsystem $\mathrm{h}_1\ \mathrm{h}_2\ \mathrm{h}_3$ entspricht. Aus dem Gleichungssystem $\mathfrak{L}$) ist zu erweisen, dass jedes ganzzahlige Wertsystem $\mathrm{h}_1\ \mathrm{h}_2\ \mathrm{h}_3$ stets einen und nur einen ganzzahligen Wert von $\nu$ zwischen 0 und $\Delta - 1$ bestimmt, der $l_1'$, $l_2'$, $l_3'$ ganzzahlig macht; dann folgt wegen der Linearität der Gleichungen $\mathfrak{L}$) sofort, dass jedem Wertsystem $\mathrm{h}_1\ \mathrm{h}_2\ \mathrm{h}_3$ ein einziges ganzzahliges Wertsystem $l_1'\ l_2'\ l_3'$ entspricht. Es bleibt also übrig, zu zeigen, dass die drei Kongruenzen

$$\mathfrak{M})\quad \begin{cases} \alpha'(\mathrm{h}_1 - \nu) + \alpha'' \mathrm{h}_2 + \alpha''' \mathrm{h}_3 \equiv 0 \\ \beta'(\mathrm{h}_1 - \nu) + \beta'' \mathrm{h}_2 + \beta''' \mathrm{h}_3 \equiv 0 \\ \gamma'(\mathrm{h}_1 - \nu) + \gamma'' \mathrm{h}_2 + \gamma''' \mathrm{h}_3 \equiv 0 \end{cases} \quad \text{mod. } \Delta$$

stets eine und nur eine Wurzel $0 \overline{\overline{<}}\ \nu \overline{\overline{<}}\ \Delta - 1$ haben. Wegen der Voraussetzung, dass $\alpha'$ relativ prim gegen $\Delta$ sei, reduzieren sich diese drei Kongruenzen auf die erste, wie aus Satz $\mathfrak{D}$) folgt. Diese eine übrig bleibende Kongruenz $\alpha' \nu \equiv \alpha' \mathrm{h}_1 + \alpha'' \mathrm{h}_2 + \alpha''' \mathrm{h}_3$ (mod. $\Delta$) hat aber, da $\alpha'$ relativ prim gegen den Modul $\Delta$, stets eine und nur eine Wurzel, w. z. b. w.

Hiemit ist gezeigt, dass dem Durchlaufen aller ganzzahligen Wertetripel seitens $\mathrm{h}_1\ \mathrm{h}_2\ \mathrm{h}_3$ das Durchlaufen aller Reste in Bezug auf den Modul $\Delta$ seitens $\nu$ und aller ganzzahligen Wertetripel seitens $l_1'\ l_2'\ l_3'$ entspricht.

Demnach ergiebt sich, wenn wir jetzt statt $l_1'\ l_2'\ l_3'$ der Einfachheit halber wieder $l_1\ l_2\ l_3$ schreiben, die folgende Umformung zweiter Art für eine dreifach unendliche Reihe:

$$12)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mathrm{h}_1\mathrm{h}_2\mathrm{h}_3} \mathrm{f}(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \mathrm{h}_3) = \sum_{0}^{\Delta-1}{}^{\nu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1 l_2 l_3} \mathrm{f}(\mathfrak{L}_1 + \nu, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3), \\ \text{wenn } \mathfrak{L}_1 = \alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2 + \gamma_1 l_3,\quad \mathfrak{L}_2 = \alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2 + \gamma_2 l_3,\quad \mathfrak{L}_3 = \alpha_3 l_1 + \beta_3 l_2 + \gamma_3 l_3, \\ \Delta = \Sigma \pm \alpha_1 \beta_2 \gamma_3, \quad \dfrac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1} \text{ relativ prim gegen } \Delta. \end{cases}$$

Es ist leicht ersichtlich, wie sich die Formel modifiziert, wenn statt $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_1}$ ein anderes Element der adjungierten Determinante relativ prim gegen $\Delta$ ist.

III. Es lässt sich auch an die erste Substitution ($\mathfrak{A}$) eine Umformung der zweiten Art, an die zweite ($\mathfrak{E}$) eine Umformung der ersten Art anschliessen. — Unter der Voraussetzung, dass $\alpha'$ das gegen $\Delta$ relativ prime Element der adjungierten Determinante sei, ist zu ersterem Zwecke die resultierende Kongruenz $\alpha' l_1 + \alpha'' l_2 + \alpha''' l_3 \equiv 0$ (mod. $\Delta$) identisch zu erfüllen, indem man $l_1, l_2, l_3$ als lineäre Funktionen zweier laufender Reste in Bezug auf $\Delta$ ausdrückt; es ist sofort ersichtlich, dass dabei die dreifache Reihe nicht in eine einfache Summe, sondern in eine Doppelsumme zerlegt wird. Hinwiederum zwecks der

Umformung erster Art im Anschluss an die zweite Substitution hat man den beiden resultierenden Congruenzen $\mathfrak{H}$) durch zwei Multiplikatoren gerecht zu werden und kommt gleichfalls auf eine Doppelsumme.

Die Formeln lauten:

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_3} f(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3) = \sum_0^{\Delta-1}{}^{\nu} \sum_0^{\Delta-1}{}^{\nu'} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1 l_2 l_3} f\Big(\mathfrak{L}' - \lambda\alpha''\nu - \lambda\alpha'''\nu',\ \mathfrak{L}'' - (\lambda\beta'' - \varkappa\gamma_3)\nu - (\lambda\beta''' + \varkappa\gamma_2)\nu',\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathfrak{L}''' - (\lambda\gamma'' + \varkappa\beta_3)\nu - (\lambda\gamma''' - \varkappa\beta_2)\nu'\Big),\end{aligned}\right.$$

wo $\varkappa, \lambda$ ein die Gleichung $\alpha'\varkappa - \Delta\lambda = 1$ identisch erfüllendes Paar ganzer Zahlen bezeichnet und $\mathfrak{L}', \mathfrak{L}'', \mathfrak{L}'''$ dieselbe Bedeutung wie bei Formel 11) haben.

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_3} f(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3) = \frac{1}{\Delta^2} \cdot \sum_0^{\Delta-1}{}^{\mu} \sum_0^{\Delta-1}{}^{\mu'} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1 l_2 l_3} e^{\frac{2i\pi}{\Delta}(\mu(\alpha' l_2 - \beta' l_1) + \mu'(\alpha' l_3 - \gamma' l_1))} \cdot f\left(\frac{\mathfrak{L}_1}{\Delta}, \frac{\mathfrak{L}_2}{\Delta}, \frac{\mathfrak{L}_3}{\Delta}\right),$$

wo $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2, \mathfrak{L}_3$ die bei Formel 12 angegebene Bedeutung haben.

Noch ergeben sich, indem man $\Delta$ in $\Delta_1 . \Delta_2$ zerlegt und in Bezug auf den Faktor $\Delta_1$ das Umformungsprincip erster Art, in Bezug auf $\Delta_2$ dasjenige zweiter Art anwendet, die folgenden den früheren Formeln 7) und 10) entsprechenden Formeln, welche die gegebene dreifach unendliche Reihe als eine dreifache unendliche Summe von dreifach unendlichen Reihen darstellen:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_3} f(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3) = \frac{1}{\Delta_1} \sum_0^{\Delta_1-1}{}^{\mu} \sum_0^{\Delta_2-1}{}^{\nu} \sum_0^{\Delta_2-1}{}^{\nu'} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1 l_2 l_3} e^{2i\mu\pi\frac{\alpha' l_1 + \alpha'' l_2 + \alpha''' l_3}{\Delta_1}} \cdot f(\Lambda', \Lambda'', \Lambda'''),$$

wo

$$\Lambda' = \frac{\alpha' l_1 + \alpha'' l_2 + \alpha''' l_3}{\Delta_1} - \lambda\alpha''\nu - \lambda\alpha'''\nu'$$

$$\Lambda'' = \frac{\beta' l_1 + \beta'' l_2 + \beta''' l_3}{\Delta_1} - (\lambda\beta'' - \varkappa\gamma_3)\nu - (\lambda\beta''' + \varkappa\gamma_2)\nu'$$

$$\Lambda''' = \frac{\gamma' l_1 + \gamma'' l_2 + \gamma''' l_3}{\Delta} - (\lambda\gamma'' + \varkappa\beta_3)\nu - (\lambda\gamma''' - \varkappa\beta_2)\nu'$$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2\mathfrak{h}_3} f(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3) = \frac{1}{\Delta_1^{\,2}} \cdot \sum_0^{\Delta_1-1}{}^{\mu} \sum_0^{\Delta_1-1}{}^{\mu'} \sum_0^{\Delta_2-1}{}^{\nu} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1 l_2 l_3} e^{\frac{2i\pi}{\Delta_1}(\mu(\alpha' l_2 - \beta' l_1) + \mu'(\alpha' l_3 - \gamma' l_1))} \cdot f\left(\frac{\mathfrak{L}_1}{\Delta_1} + \nu, \frac{\mathfrak{L}_2}{\Delta_1}, \frac{\mathfrak{L}_3}{\Delta_1}\right)$$

## § VI. **Umformung einer nfachen Reihe unter entsprechender Voraussetzung.**

Die allgemeinste lineäre Substitution zur Umformung einer nfach unendlichen Reihe lässt sich aus zwei aufeinanderfolgenden zusammensetzen, welche ich, wie in den vorhergehenden Paragraphen, getrennt behandle. Wegen der Analogie zu dem ausführlich behandelten Falle n = 3 fasse ich mich hiebei kürzer.

I. Die Substitution sei

$$\mathfrak{A})\begin{cases} \alpha_{11}\mathfrak{h}_1+\alpha_{12}\mathfrak{h}_2+\dots\dots+\alpha_{1n}\mathfrak{h}_n = l_1 \\ \alpha_{21}\mathfrak{h}_1+\alpha_{22}\mathfrak{h}_2+\dots\dots+\alpha_{2n}\mathfrak{h}_n = l_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{n1}\mathfrak{h}_1+\alpha_{n2}\mathfrak{h}_2+\dots\dots+\alpha_{nn}\mathfrak{h}_n = l_n \end{cases} \qquad \mathfrak{B})\begin{cases} \mathfrak{h}_1 = \dfrac{\beta_{11}l_1+\beta_{21}l_2+\dots\dots+\beta_{n1}l_n}{\Delta} \\ \mathfrak{h}_2 = \dfrac{\beta_{12}l_1+\beta_{22}l_2+\dots\dots+\beta_{n2}l_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{h}_n = \dfrac{\beta_{1n}l_1+\beta_{2n}l_2+\dots\dots+\beta_{nn}l_n}{\Delta}, \end{cases}$$

wo $\Sigma\pm\alpha_{11}\alpha_{22}\dots\dots\alpha_{nn} = \Delta$, $\dfrac{\partial\Delta}{\partial\alpha_{ik}} = \beta_{ik}$ bezeichnet ist. Die neu eingeführten Summierungszahlen $l_1 l_2 \dots l_n$ haben das folgende Kongruenzensystem zu befriedigen:

$$\mathfrak{C})\begin{cases} \beta_{11}l_1+\beta_{21}l_2+\dots\dots+\beta_{n1}l_n \equiv 0 \\ \beta_{12}l_1+\beta_{22}l_2+\dots\dots+\beta_{n2}l_n \equiv 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta_{1n}l_1+\beta_{2n}l_2+\dots\dots+\beta_{nn}l_n \equiv 0 \end{cases} \quad \text{mod. } \Delta$$

Unter der beschränkenden Voraussetzung, dass wenigstens ein Element der adjungierten Determinante, etwa $\beta_{ik}$, relativ prim gegen $\Delta$ sei, ist die Erfüllung der dieses Element enthaltenden (d. h. der kten) Kongruenz die notwendige und hinreichende Bedingung für die Erfüllung aller Kongruenzen. Hieraus fliesst die Umformungsformel erster Art:

$$13)\begin{cases} \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_{\mathfrak{h}_1\mathfrak{h}_2\dots\mathfrak{h}_n} f(\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots \mathfrak{h}_n) = \dfrac{1}{\Delta}.\sum\limits_{0}^{\Delta-1}{}_{\mu} \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}_{l_1 l_2\dots l_n} e^{2i\mu\pi\frac{\beta_{1k}l_1+\beta_{2k}l_2+\dots+\beta_{nk}l_n}{\Delta}}.f\left(\dfrac{\mathfrak{L}'}{\Delta}, \dfrac{\mathfrak{L}''}{\Delta}, \dots\dots \dfrac{\mathfrak{L}^{(n)}}{\Delta}\right), \\ \quad \text{wo } \mathfrak{L}^{(k)} = \beta_{1k}l_1+\beta_{2k}l_2\dots+\beta_{nk}l_n, \\ \quad \Delta = \sum \pm\alpha_{11}\alpha_{22}\dots\alpha_{nn} = \sqrt[n-1]{\sum \pm\beta_{11}\beta_{22}\dots\beta_{nn}} \end{cases}$$

II. Setzt man

$$\mathfrak{E})\begin{cases} \mathfrak{h}_1 = \alpha_{11}\mathfrak{l}_1+\alpha_{12}\mathfrak{l}_2+\dots\dots+\alpha_{1n}\mathfrak{l}_n \\ \mathfrak{h}_2 = \alpha_{21}\mathfrak{l}_1+\alpha_{22}\mathfrak{l}_2+\dots\dots+\alpha_{2n}\mathfrak{l}_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{h}_n = \alpha_{n1}\mathfrak{l}_1+\alpha_{n2}\mathfrak{l}_2+\dots\dots+\alpha_{nn}\mathfrak{l}_n \end{cases} \qquad \mathfrak{F})\begin{cases} \mathfrak{l}_1 = \dfrac{\beta_{11}\mathfrak{h}_1+\beta_{21}\mathfrak{h}_2+\dots\dots+\beta_{n1}\mathfrak{h}_n}{\Delta} = \dfrac{l_1}{\Delta} \\ \mathfrak{l}_2 = \dfrac{\beta_{12}\mathfrak{h}_1+\beta_{22}\mathfrak{h}_2+\dots\dots+\beta_{n2}\mathfrak{h}_n}{\Delta} = \dfrac{l_2}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{l}_3 = \dfrac{\beta_{1n}\mathfrak{h}_1+\beta_{2n}\mathfrak{h}_2+\dots\dots+\beta_{nn}\mathfrak{h}_n}{\Delta} = \dfrac{l_n}{\Delta}, \end{cases}$$

wo $\varDelta = \sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots.\alpha_{nn}$, $\beta_{ik} = \dfrac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{ik}}$, so folgt

$$\mathfrak{G})\ \begin{cases} \alpha_{11}l_1+\alpha_{12}l_2+\ldots.+\alpha_{1n}l_n = \varDelta.\mathrm{h}_1, & \text{also} \equiv 0 \pmod{\varDelta} \\ \alpha_{21}l_1+\alpha_{22}l_2+\ldots.+\alpha_{2n}l_n = \varDelta.\mathrm{h}_2, & \quad ,, \equiv 0 \quad ,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ \alpha_{n1}l_1+\alpha_{n2}l_2+\ldots.+\alpha_{nn}l_n = \varDelta.\mathrm{h}_n, & \quad ,, \equiv 0 \quad ,, \end{cases}$$

Bringt man in den letzten n−1 Kongruenzen $l_1$ auf die rechte Seite und bestimmt aus dem so erhaltenen System $l_2, l_3, \ldots. l_n$, so folgt

$$\mathfrak{H})\quad \beta_{11}l_2 \equiv \beta_{12}l_1,\ \beta_{11}l_3 \equiv \beta_{13}l_1,\ \ldots.\ \beta_{11}l_n \equiv \beta_{1n}l_1 \qquad \mathrm{mod.}\ \varDelta$$

Die Erfüllung dieser n—1 zweigliedrigen Kongruenzen ist unter allen Umständen notwendig; falls $\beta_{11}$ relativ prim gegen $\varDelta$, ist sie aber auch hinreichend für die Erfüllung des Systems $\mathfrak{G}$). Der Beweis entspricht genau dem in § V, II gegebenen.

Die Kongruenzen $\mathfrak{H}$) werden identisch erfüllt, indem man setzt

$$l_1 = \varDelta l_1' + \beta_{11}\nu,\ l_2 = \varDelta l_2' + \beta_{12}\nu,\ \ldots.\ l_n = \varDelta l_n' + \beta_{1n}\nu.$$

Es ergiebt sich wie in § V, II, dass dem Durchlaufen aller ganzzahligen Wertsysteme seitens $\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \ldots \mathrm{h}_n$ entspricht das Durchlaufen aller Reste in Bezug auf $\varDelta$ seitens $\nu$ und aller ganzzahligen Wertsysteme seitens $l_1', l_2', \ldots l_n'$. Schreibt man schliesslich der Einfachheit halber wieder $l_1, l_2, \ldots l_n$ statt $l_1', l_2', \ldots l_n'$, so lautet die Umformungsformel zweiter Art:

$$14)\ \begin{cases} \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^{\mathrm{h}_1\mathrm{h}_2\ldots\mathrm{h}_n} f(\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \ldots \mathrm{h}_n) = \sum\limits_{0}^{\varDelta-1}{}^{\nu} \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1 l_2\ldots l_n} f(\mathfrak{L}_1+\nu, \mathfrak{L}_2, \ldots. \mathfrak{L}_n), \\ \text{wo } \mathfrak{L}_k = \alpha_{k1}l_1+\alpha_{k2}l_2+\ldots.\alpha_{kn}l_n,\ \varDelta = \sum \pm \alpha_{11}\alpha_{22}\ldots\alpha_{nn},\ \dfrac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{11}} \text{ relativ prim } \varDelta. \end{cases}$$

Ist statt $\beta_{11}$ etwa $\beta_{ik}$ relativ prim gegen $\varDelta$, so modifiziert sich die Formel nur insoweit, dass $+\nu$ bei $\mathfrak{L}_1$ wegzulassen und dafür bei $\mathfrak{L}_i$ hinzuzufügen ist.

III. Zu den Formeln in § V, III giebt es entsprechende, welche die nfache Reihe in eine n—1fache resp. nfache endliche Summe von nfachen Reihen zerlegen. Es sei indes hier ausgesprochen, was wohl schon dort hervortrat: Zu der ersten Substitution gehört naturgemäss die Umformung erster Art, zu der zweiten Substitution die Umformung zweiter Art, während die umgekehrte Verbindung gekünstelt erscheint. Dies ist völlig analog zu § II. Nur der Fall n = 2 macht eine Ausnahme, weil hier die adjungierte Determinante gleich der ursprünglichen ist und auch ihre Elemente bis auf das Vorzeichen und die Stelle mit denen der ursprünglichen übereinstimmen.

## § VII. Verallgemeinerung der Umformungsformeln für dreifache und mehrfache Reihen.

Ich beziehe mich auf die Substitutionen $\mathfrak{A}$) und $\mathfrak{E}$) der vorigen Paragraphen. Es darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, dass die Elemente einer Vertikalreihe der Substitutionsdeterminante nicht sämtlich *einen gemeinsamen Teiler haben*; desgl. *diejenigen einer Horizontalreihe*. Denn in dieser Voraussetzung liegt nur, dass von der Simultan-Umformung der mehrfachen Reihe alle nur auf eine einfache Reihe sich beziehenden Transformationen abgetrennt werden. (Vgl. § III, S. 7.) Dass für die Elemente der adjungierten Determinante gleiches *nicht* vorauszusetzen ist, erhellt leicht. Ebenso leuchtet ein, dass für die Erfüllung der in § V und § VI eingeführten Einschränkung die hier angegebenen Voraussetzungen notwendig, aber nicht hinreichend sind. *Übrigens wird im folgenden immer angemerkt werden, ob und wann diese Voraussetzungen zur Anwendung kommen.* Dies vorausgeschickt, führe ich zur Verallgemeinerung der Umformungstheorie der vorigen Paragraphen Folgendes aus:

I. Ohne jegliche Voraussetzung über die Koeffizienten kann mittels des Multiplikatorprincips sämtlichen zu erfüllenden Kongruenzen sowohl bei der ersten wie bei der zweiten Substitution genügt werden. Für eine dreifache Reihe erfüllen den Zweck die Multiplikatoren

$$\frac{1}{\varDelta^3}\cdot e^{\frac{2i\pi}{\varDelta}(\mu_1\mathfrak{L}'+\mu_2\mathfrak{L}''+\mu_3\mathfrak{L}''')} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varDelta^3}\cdot e^{\frac{2i\pi}{\varDelta}(\mu_1\mathfrak{L}_1+\mu_2\mathfrak{L}_2+\mu_3\mathfrak{L}_3)},$$

wo $\mathfrak{L}'$, $\mathfrak{L}''$, $\mathfrak{L}'''$, $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, $\mathfrak{L}_3$ die bei den Formeln 11 und 12 angegebene Bedeutung haben; denn diese Multiplikatoren haben, in Bezug auf $\mu_1$ $\mu_2$ $\mu_3$ von 0 bis $\varDelta-1$ summiert, zur Summe 1 oder 0, je nachdem das betreffende Wertsystem $l_1$ $l_2$ $l_3$ die Kongruenzen $\mathfrak{C}$) resp. $\mathfrak{G}$) sämtlich oder nicht sämtlich erfüllt. Für eine nfache Reihe lauten die Multiplikatoren den eben angegebenen entsprechend. Hienach kann für jede von beiden Substitutionen sofort eine Umformungsformel erster Art aufgestellt werden; aber es wird die dreifach resp. nfach unendliche Reihe *nicht als eine einfache, sondern als eine dreifache resp. nfache* Summe von dreifach resp. nfach unendlichen Reihen dargestellt. Die Gesamtzahl der Glieder der endlichen dreifachen resp. nfachen Summe ist $\varDelta^3$ resp. $\varDelta^n$. Diese Gliederanzahl lässt sich noch reduzieren auf $\varDelta^3$ resp. $\varDelta^n$, dividiert durch das Produkt der 3 resp. n grössesten gemeinsamen Teiler sämtlicher Koeffizienten je einer Horizontalreihe in den Kongruenzsystemen $\mathfrak{C}$) und $\mathfrak{G}$), indem man diese gemeinsamen Teiler in den einzelnen Kongruenzen gegen $\varDelta$ forthebt. Ich verzichte der Raumersparung halber auf die Aufstellung der Umformungsformeln dieser Art, die nicht die geringste Schwierigkeit bietet.

Die entsprechende Anwendung des Umformungsprincips zweiter Art scheint im ersten Augenblick noch einfacher. Das Kongruenzensystem $\mathfrak{C}$) des § VI wird ohne jegliche Voraussetzung über die Koeffizienten identisch erfüllt, wenn man $l_i = \varDelta l_i' + \alpha_{ik}\nu$ setzt, wo für i der Reihe nach 1, 2, ....n zu setzen ist; desgleichen das Kongruenzensystem $\mathfrak{G}$), wenn man $l_i = \varDelta l_i' + \beta_{ki}\nu$ setzt. Trotzdem würde dies im allgemeinen falsch sein; denn die Summierungszahlen $l$ müssen sämtliche Zahlensysteme durchlaufen, welche jene Kongruenzensysteme erfüllen; es würde aber bei Einsetzung der angegebenen Ausdrücke $l_i$ nur die durch den grössesten gemeinsamen Teiler von $\varDelta$ und $\alpha_{ik}$ resp. $\beta_{ik}$ teilbaren Zahlenwerte annehmen, und dieser Teiler würde zudem je nach der Wahl von k ein verschiedener sein. Entscheidender noch ist, dass die Probe, ob jedem ganzzahligen Wertesystem der ursprünglichen Summierungszahlen h stets ein und nur ein Wert von $\nu$ zwischen 0 und $\Delta-1$ entspricht, der sämtliche $l'_i$ ganzzahlig macht (welche in der Art wie in § V, II auszuführen ist), verneinend ausfällt, ausser wenn die in § V und VI angenommene Voraussetzung erfüllt ist. — Man kann aber auch die Kongruenzensysteme $\mathfrak{C}$) und $\mathfrak{G}$) beziehentlich durch die allgemeineren Substitutionen

$$l_i = \Delta l'_i + \sum_1^n{}^k \alpha_{ik}\nu_k\,,\ l_l = \Delta l'_l + \sum_1^n{}^k \beta_{kl}\nu_k$$

identisch erfüllen und sich die Aufgabe stellen, $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ als laufende Reste in Bezug auf $\Delta$ oder Teiler von $\Delta$ so zu bestimmen, dass jedem Wertsystem der h ein einziges bestimmtes System der $\nu$ entspricht. Von diesem Princip werde ich in der That weiterhin (in Nr. III dieses Paragraphen) Gebrauch machen.

II. In § IV ist die Verschmelzung zweier nicht voneinander unabhängiger zweigliedriger Kongruenzen zu einer resultierenden Kongruenz angegeben. Ich werde nun nach entsprechender Methode das Kongruenzensystem $\mathfrak{C}$) des § V behandeln. Aus der ersten Kongruenz dieses Systems folgt

$$\alpha' l_1 = \Delta \,.\, \mathfrak{Z} - (\alpha'' l_2 + \alpha''' l_3),$$

wo $\mathfrak{Z}$ eine ganze Zahl bedeutet. Man bestimme nun die kleinste in $\alpha'$ aufgehende Zahl $\mathfrak{a}'$ von der Art, dass $\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}$ relativ prim gegen $\Delta$ ist. Dann ist die zweite der Kongruenzen $\mathfrak{C}$) äquivalent mit

$$\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}(\beta' l_1 + \beta'' l_2 + \beta''' l_3) \equiv 0 \ (\text{mod.}\ \Delta)\,,$$

$$\text{oder}\quad \beta' \,.\, \alpha' l_1 + \alpha'(\beta'' l_2 + \beta''' l_3) \equiv 0 \ (\text{mod.}\ \mathfrak{a}' . \Delta)\,.$$

Setzt man für $\alpha' l_1$ den Ausdruck aus der ersten Kongruenz ein, so folgt

$$\beta'(\Delta \,.\, \mathfrak{Z} - (\alpha'' l_2 + \alpha''' l_3)) + \alpha'(\beta'' l_2 + \beta''' l_3) \equiv 0 \ (\mathfrak{a}' . \Delta)$$
$$\Delta \beta' \,.\, \mathfrak{Z} + (\alpha'\beta'' - \alpha''\beta') l_2 + (\alpha'\beta''' - \alpha'''\beta') l_3 \equiv 0 \ (\mathfrak{a}' . \Delta)$$
$$\Delta \beta' \,.\, \mathfrak{Z} + \Delta\gamma_3 l_2 - \Delta\gamma_2 l_3 \equiv 0 \ (\mathfrak{a}' . \Delta)$$
$$\beta' \,.\, \mathfrak{Z} \equiv -(\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3) \ (\text{mod.}\ \mathfrak{a}').$$

Hieraus folgt, wenn der grösseste gemeinsame Teiler von $\mathfrak{a}'$ und $\beta'$ durch $\tau_{12}$ bezeichnet wird, die Notwendigkeit der Kongruenz

$$\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3 \equiv 0 \ (\text{mod.}\ \tau_{12})\,.$$

Die Erfüllung dieser Kongruenz vorausgesetzt, folgt

$$\frac{\beta'}{\tau_{12}} \cdot \mathfrak{Z} \equiv -\frac{\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3}{\tau_{12}} \left(\text{mod.}\ \frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{12}}\right).$$

Man bestimme die ganze Zahl $\xi$ so, dass identisch ist

$$\frac{\beta'}{\tau_{12}} \xi \equiv 1 \left(\text{mod.}\ \frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{12}}\right),\ \text{also} = 1 + \frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{12}} \cdot \xi'\,.$$

Dann wird $\mathfrak{Z} \equiv -\xi \cdot \frac{\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3}{\tau_{12}} \left(\text{mod.}\ \frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{12}}\right)$, also $= -\xi \cdot \frac{\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3}{\tau_{12}} + \frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{12}} \cdot \mathfrak{Z}'$.

Setzt man dies für $\mathfrak{Z}$ ein, so geht die erste Kongruenz über in

$$\alpha' l_1 = -(\alpha'' l_2 + \alpha''' l_3) - \varDelta \xi \frac{\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3}{\tau_{12}} + \varDelta \cdot \frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{12}} \cdot \mathfrak{Z}',$$

oder: $$\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'} \cdot \tau_{12} l_1 + \frac{\alpha'' \tau_{12} + \varDelta \gamma_3 \xi}{\mathfrak{a}'} l_2 + \frac{\alpha''' \tau_{12} - \varDelta \gamma_2 \xi}{\mathfrak{a}'} l_3 = \varDelta \,.\, \mathfrak{Z}', \text{ also } \equiv 0 \ (\text{mod.}\ \varDelta).$$

Somit ist die zweite Kongruenz mit der ersten verschmolzen zu dieser resultierenden Kongruenz, neben welcher noch die Restkongruenz $\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3 \equiv 0\ (\tau_{12})$ zu erfüllen bleibt.

Ich nehme nun die dritte der Kongruenzen $\mathfrak{C}$) in § V hinzu, welche äquivalent ist mit

$$\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'} (\gamma' l_1 + \gamma'' l_2 + \gamma''' l_3) \equiv 0\ (\varDelta),$$

$$\text{oder} \qquad \gamma' \,.\, \alpha' l_1 + \mathfrak{a}'(\gamma'' l_2 + \gamma''' l_3) \equiv 0\ (\mathfrak{a}' \,.\, \varDelta).$$

Für $\alpha' l_1$ setze ich den zuletzt abgeleiteten Ausdruck ein; es folgt

$$\gamma' \left( -\alpha'' l_2 - \alpha''' l_3 - \varDelta \xi \frac{\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3}{\tau_{12}} + \varDelta \,.\, \frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{12}} \,.\, \mathfrak{Z}' \right) + \alpha'(\gamma'' l_2 + \gamma''' l_3) \equiv 0\ (\mathfrak{a}' \,.\, \varDelta)$$

$$\varDelta \,.\, \gamma' \,.\, \frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{12}} \,.\, \mathfrak{Z}' - \varDelta \gamma' \xi \frac{\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3}{\tau_{12}} + (\alpha' \gamma'' - \alpha'' \gamma') l_2 + (\alpha' \gamma''' - \alpha''' \gamma') l_3 \equiv 0\ (\mathfrak{a}' \,.\, \varDelta)$$

Wegen $\alpha' \gamma'' - \alpha'' \gamma' = -\varDelta \,.\, \beta_3$, $\alpha' \gamma''' - \alpha''' \gamma' = \varDelta \,.\, \beta_2$ geht diese Kongruenz über in

$$\gamma' \cdot \frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{12}} \,.\, \mathfrak{Z}' - \gamma' \xi \,.\, \frac{\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3}{\tau_{12}} - (\beta_3 l_2 - \beta_2 l_3) \equiv 0\ (\mathfrak{a}').$$

Hieraus folgt zunächst, wenn der grösseste gemeinsame Teiler von $\mathfrak{a}'$ und $\gamma'$ durch $\tau_{13}$ bezeichnet wird, die Notwendigkeit der Kongruenz

$$\beta_3 l_2 - \beta_2 l_3 \equiv 0\ (\text{mod.}\ \tau_{13}).$$

Dann geht die vorhergehende Kongruenz über in

$$\frac{\gamma'}{\tau_{13}} \cdot \frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{12}} \cdot \mathfrak{Z}' \equiv \frac{\gamma'}{\tau_{13}} \xi \cdot \frac{\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3}{\tau_{12}} + \frac{\beta_3 l_2 - \beta_2 l_3}{\tau_{13}} \left(\text{mod.}\ \frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{13}}\right).$$

Die rechte Seite muss teilbar sein durch den grössesten gemeinsamen Teiler von $\frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{13}}$ und $\frac{\gamma'}{\tau_{13}} \cdot \frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{12}}$, d. h. von $\frac{\mathfrak{a}' \tau_{123}}{\tau_{13} \tau_{12}} \cdot \frac{\tau_{12}}{\tau_{123}}$ und $\frac{\mathfrak{a}' \tau_{123}}{\tau_{12} \tau_{13}} \cdot \frac{\tau_{13}}{\tau_{123}} \cdot \frac{\gamma'}{\tau_{13}}$, wo $\tau_{123}$ den grössesten gemeinsamen Teiler von $\tau_{12}$ und $\tau_{13}$ bezeichnet. Demnach ist $\tau_{123}$ der grösseste gemeinsame Teiler von $\mathfrak{a}'$, $\beta'$, $\gamma'$, also auch der grösseste gemeinsame Teiler von $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$; als solcher sei $\tau_{123}$ fortan durch $\tau'$ bezeichnet. (Jeder gemeinsame Teiler von $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ ist Teiler von $\varDelta = \alpha_1 \alpha' + \beta_1 \beta' + \gamma_1 \gamma'$, muss also in $\mathfrak{a}'$ stecken, weil sonst $\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}$ nicht relativ prim gegen $\varDelta$ wäre.) Es sei $\frac{\tau_{12}}{\tau'} = \tau'_{12}$, $\frac{\tau_{13}}{\tau'} = \tau'_{13}$; dann sind $\tau'_{12}$ und $\tau'_{13}$ relativ prim. Ferner sind auch, da $\tau'$ der grösseste gemeinsame Teiler von $\tau_{12}$ und $\gamma'$ ist, $\frac{\tau_{12}}{\tau'} = \tau'_{12}$ und $\frac{\gamma'}{\tau'}$ relativ prim; desgleichen sind $\tau'_{13}$ und $\frac{\beta'}{\tau'}$ relativ prim. Hienach reduziert sich der grösseste gemeinsame Teiler von $\frac{\mathfrak{a}'\tau'}{\tau_{13}\tau_{12}} \cdot \frac{\tau_{12}}{\tau'}$ und $\frac{\mathfrak{a}'\tau'}{\tau_{12}\tau_{13}} \cdot \frac{\gamma'}{\tau'}$ auf $\frac{\mathfrak{a}'\tau'}{\tau_{12}\tau_{13}}$ mal den grössesten Teiler von $\frac{\tau_{12}}{\tau'}$ und $\frac{\gamma'}{\tau'}$, also auf $\frac{\mathfrak{a}'\tau'}{\tau_{12}\tau_{13}}$. Es muss also sein

$$\frac{\gamma'}{\tau_{13}}\xi \cdot \frac{\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3}{\tau_{12}} + \frac{\beta_3 l_2 - \beta_2 l_3}{\tau_{13}} \equiv 0 \left(\text{mod.}\ \frac{\mathfrak{a}'\tau'}{\tau_{12}\tau_{13}}\right).$$

Da $\tau_{12}$ der grösseste gemeinsame Teiler von $\mathfrak{a}'$ und $\beta'$ ist, so ist $\frac{\beta'}{\tau_{12}}$ relativ prim gegen $\frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{12}}$, somit a fortiori gegen $\frac{\mathfrak{a}'\tau'}{\tau_{12}\tau_{13}}$. Die letzte Kongruenz ist daher äquivalent mit

$$\frac{\gamma'}{\tau_{13}} \cdot \frac{\beta'}{\tau_{12}}\xi \cdot \frac{\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3}{\tau_{12}} + \frac{\beta'}{\tau_{12}} \cdot \frac{\beta_3 l_2 - \beta_2 l_3}{\tau_{13}} \equiv 0 \left(\frac{\mathfrak{a}'\tau'}{\tau_{12}\tau_{13}}\right),$$

$$\text{oder}\quad \gamma'\left(1 + \frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{12}}\xi'\right)(\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3) + \beta'(\beta_3 l_2 - \beta_2 l_3) \equiv 0\,(\mathfrak{a}'\tau').$$

$$\gamma'(\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3) + \beta'(\beta_3 l_2 - \beta_2 l_3) + \frac{\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3}{\tau_{12}} \cdot \frac{\gamma'}{\tau'} \cdot \mathfrak{a}'\tau'\xi' \equiv 0\ (\mathfrak{a}'\tau').$$

Da der letzte Term der linken Seite durch $\mathfrak{a}'\tau'$ identisch teilbar ist, folgt hieraus

$$(\beta'\beta_3 + \gamma'\gamma_3) l_2 - (\beta'\beta_2 + \gamma'\gamma_2) l_3 \equiv 0\ (\mathfrak{a}'\tau'),$$

$$\text{d. h.}\quad -\mathfrak{a}'\alpha_3 l_2 + \alpha'\alpha_2 l_3 \equiv 0\ (\mathfrak{a}'\tau')$$

$$-\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}(\alpha_3 l_2 - \alpha_2 l_3) \equiv 0\ (\tau')$$

Da $\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}$ relativ prim gegen $\Delta = \frac{\Delta}{\tau'} \cdot \tau'$, also auch gegen $\tau'$ ist, folgt hieraus

$$\alpha_3 l_2 - \alpha_2 l_3 \equiv 0\ (\text{mod.}\ \tau').$$

Die obige Kongruenz zur Bestimmung von $\mathfrak{Z}'$ geht nun über in

$$\frac{\gamma'}{\tau'} \cdot \mathfrak{Z}' \equiv \frac{\gamma'\xi(\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3) + \tau_{12}(\beta_3 l_2 - \beta_2 l_3)}{\mathfrak{a}'\tau'}\quad (\text{mod.}\ \tau'_{12}).$$

Da $\frac{\gamma'}{\tau'}$ relativ prim gegen $\tau'_{12}$ ist, so kann man zwei ganze Zahlen $\eta$ und $\eta'$ so bestimmen, dass identisch ist

$$\frac{\gamma'}{\tau'} \cdot \eta \equiv 1\ (\text{mod.}\ \tau'_{12}),\ \text{und zwar} = 1 + \tau'_{12} \cdot \eta'.$$

$$\text{Dann wird}\quad \mathfrak{Z}' \equiv \eta \cdot \frac{\gamma'\xi(\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3) + \tau_{12}(\beta_3 l_2 - \beta_2 l_3)}{\mathfrak{a}'\tau'}\quad (\text{mod.}\ \tau'_{12})$$

$$\mathfrak{Z}' = \eta \cdot \frac{\gamma'\xi(\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3) + \tau_{12}(\beta_3 l_2 - \beta_2 l_3)}{\mathfrak{a}'\tau'} + \tau'_{12} \cdot \mathfrak{Z}''.$$

Setzt man dies statt $\mathfrak{Z}'$ in die obige resultierende Kongruenz ein, so folgt

$$\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}\tau_{12}l_1+\frac{\alpha''\tau_{12}+\Delta\gamma_3\xi}{\mathfrak{a}'}l_2+\frac{\alpha'''\tau_{12}-\Delta\gamma_2\xi}{\mathfrak{a}'}l_3=\Delta\,\eta\cdot\frac{\gamma'\xi(\gamma_3l_2-\gamma_2l_3)+\tau_{12}(\beta_3l_2-\beta_2l_3)}{\mathfrak{a}'\tau'}+\Delta\,.\,\tau'_{12}\cdot\mathfrak{Z}''$$

Nach gehöriger Ausrechnung:

$$\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}\cdot\tau'l_1+\frac{\alpha''\tau'-\Delta(\beta_3\eta+\gamma_3\xi\eta')}{\mathfrak{a}'}l_2+\frac{\alpha'''\tau'+\Delta(\beta_2\eta+\gamma_2\xi\eta')}{\mathfrak{a}'}l_3\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ \Delta),$$

oder

$$\delta_1l_1+\delta_2l_2+\delta_3l_3\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ \Delta).$$

Dass $\delta_2$ und $\delta_3$ ganze Zahlen sind, folgt zwar aus der vorhergehenden Ableitung, lässt sich aber auch a posteriori durch folgende Umrechnung erkennen:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{a}'\delta_2 &= \alpha''\tau'-\Delta\beta_3\eta-\Delta\gamma_3\xi\eta' = \alpha''\tau'+(\alpha'\gamma''-\alpha''\gamma')\eta-(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')\xi\eta'\\
&= \alpha''\tau'+\alpha'(\gamma''\eta-\beta''\xi\eta')-\alpha''\gamma'\eta+\alpha''\eta'\beta'\xi\\
&= \alpha''\tau'+\alpha'(\gamma''\eta-\beta''\xi\eta')-\alpha''(\tau'+\tau'\,.\,\tau'_{12}\eta')+\alpha''\eta'(\tau_{12}+\mathfrak{a}'\xi')\\
&= \alpha'(\gamma''\eta-\beta''\xi\eta')+\alpha''\eta'\mathfrak{a}'\xi'\\
\delta_2 &= \frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}(\gamma''\eta-\beta''\xi\eta')+\alpha''\xi'\eta'\ ,\qquad \text{ebenso}\ \delta_3=\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}(\gamma'''\eta-\beta'''\xi\eta')+\alpha'''\xi'\eta'
\end{aligned}$$

Man ersieht hieraus noch, dass, wie $\delta_1$ durch $\tau'$, so $\delta_2$ durch $\tau''$ und $\delta_3$ durch $\tau'''$ teilbar ist, wenn $\tau''$ den grössesten gemeinsamen Teiler von $\alpha'', \beta'', \gamma''$ bezeichnet, $\tau'''$ denjenigen von $\alpha''', \beta''', \gamma'''$.

Somit ist gefunden:

A) Das Kongruenzensystem § V, $\mathfrak{C}$) reduziert sich auf eine Haupt-Kongruenz

$$\delta_1l_1+\delta_2l_2+\delta_3l_3\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ \Delta)$$

und drei Rest-Kongruenzen:

$$\gamma_3l_2-\gamma_2l_3\equiv 0\,(\tau_{12}),\quad \beta_3l_2-\beta_2l_3\equiv 0\,(\tau_{13}),\quad \alpha_3l_2-\alpha_2l_3\equiv 0\,(\tau').$$

Die Probe ist derart auszuführen, dass man den aus der in Gleichungsform geschriebenen Haupt-Kongruenz folgenden Ausdruck für $\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}l_1$ in jede der Kongruenzen $\mathfrak{C}$) einführt, nachdem man ihre linke Seite mit $\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}$ multipliziert hat. Dann wird mit Berücksichtigung der Rest-Kongruenzen und der Bedeutung von $\xi$, $\xi'$, $\eta$, $\eta'$ jede der Kongruenzen $\mathfrak{C}$) erfüllt. Ich darf diesen einige Rechnung erfordernden Nachweis hier übergehen, da ich alle Kongruenzen durchweg nur durch äquivalente ersetzt habe. — Es gilt weiter Folgendes:

B) Sind die drei Rest-Kongruenzen erfüllt, so ist identisch

$$\delta_2l_2+\delta_3l_3\equiv 0\ (\mathrm{mod.}\ \tau').$$

Beweis. Nimmt man die zuletzt angegebenen Ausdrücke für $\delta_2$ und $\delta_3$, und drückt man in denselben $\alpha''$, $\alpha'''$, $\beta''$, $\beta'''$, $\gamma''$, $\gamma'''$ durch die ursprünglichen Substitutions-Koeffizienten aus, so wird nach gehöriger Rechnung

$$\delta_2 l_2 + \delta_3 l_3 = \frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}(\beta_1\eta + \gamma_1\xi\eta')(\alpha_3 l_2 - \alpha_2 l_3)$$
$$- \left[\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}\alpha_1\eta - \gamma_1\xi'\eta'\right](\beta_3 l_2 - \beta_2 l_3) - \left[\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}\alpha_1\xi\eta' + \beta_1\xi'\eta'\right](\gamma_3 l_2 - \gamma_2 l_3),$$

wonach, da $\tau_{12}$ und $\tau_{13}$ durch $\tau'$ teilbar sind, die Richtigkeit der zu beweisenden Behauptung unmittelbar erhellt.

C) Die drei Restkongruenzen reduzieren sich auf eine einzige von der Form $\varepsilon_3 l_2 - \varepsilon_2 l_3 \equiv 0 \pmod{\tau'}$ und die Bedingung $l_3 \equiv 0 \pmod{\tau_3}$, wo $\tau_3$ den grössesten gemeinsamen Teiler von $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$ bezeichnet.

Beweis. Ich zeige zuvörderst, dass $\tau'_{12}$ stets Teiler von $\gamma_2$ und $\gamma_3$, desgleichen $\tau'_{13}$ Teiler von $\beta_2$ und $\beta_3$ ist. $\tau_{12}$ ist der grösseste gemeinsame Teiler von $\mathfrak{a}'$ und $\beta'$, $\mathfrak{a}'$ ist Teiler von $\alpha'$; also geht $\tau_{12}$ auf in

$$\gamma_2\gamma' = -(\alpha_2\alpha' + \beta_2\beta') \text{ und } \gamma_3\gamma' = -(\alpha_3\alpha' + \beta_3\beta').$$

Also geht $\tau_{12}$ teils in $\gamma'$, teils in $\gamma_2$ und $\gamma_3$ auf; der grösseste gemeinsame Teiler von $\tau_{12}$ und $\gamma'$ ist auch derjenige von $\mathfrak{a}'$, $\beta'$ und $\gamma'$ d. h. ist $\tau'$; $\frac{\tau_{12}}{\tau'} = \tau'_{12}$ muss demnach in $\gamma_2$ und $\gamma_3$ aufgehen; desgleichen $\tau'_{13}$ in $\beta_2$ und $\beta_3$. Es sei zur Abkürzung $\beta_2 = \tau'_{13}\beta'_2$, $\beta_3 = \tau'_{13}\beta'_3$, $\gamma_2 = \tau'_{12}\gamma'_2$, $\gamma_3 = \tau'_{12}\gamma'_3$. Dann lauten die drei Restkongruenzen:

$$\alpha_3 l_2 - \alpha_2 l_3 \equiv 0, \quad \beta'_3 l_2 - \beta'_2 l_3 \equiv 0, \quad \gamma'_3 l_2 - \gamma'_2 l_3 \equiv 0 \pmod{\tau'.}$$

Man bestimme die kleinste derartige ganze Zahl $\mathfrak{a}_3$, dass $\frac{\alpha_3}{\mathfrak{a}_3}$ relativ prim gegen $\tau'$ ist. Dann ist die zweite Restkongruenz äquivalent mit

$$\frac{\alpha_3}{\mathfrak{a}_3}(\beta'_3 l_2 - \beta'_2 l_3) \equiv 0 \ (\tau'),$$

oder
$$\beta'_3\alpha_3 l_2 - \alpha_3\beta'_2 l_3 \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_3\tau').$$

Führt man aus der ersten ein $\alpha_3 l_2 = \alpha_2 l_3 + \tau' . \mathfrak{z}$ (wo $\mathfrak{z}$ eine ganze Zahl bedeutet), so kommt

$$\beta'_3\tau' . \mathfrak{z} + (\alpha_2\beta'_3 - \alpha_3\beta'_2)l_3 \equiv 0 \ (\mathfrak{a}_3\tau')$$
$$\beta'_3 . \mathfrak{z} \equiv -\frac{\gamma'}{\tau' . \tau'_{13}} l_3 \pmod{\mathfrak{a}_3}$$

Die rechte Seite dieser Kongruenz muss durch den grössesten gemeinsamen Teiler von $\mathfrak{a}_3$ und $\beta'_3$ teilbar sein. Nun ist

$$l_3 = \alpha_3\mathfrak{h}_1 + \beta_3\mathfrak{h}_2 + \gamma_3\mathfrak{h}_3 = \alpha_3\mathfrak{h}_1 + \tau'_{13}\beta'_3\mathfrak{h}_2 + \tau'_{12}\gamma'_3\mathfrak{h}_3$$

teilbar durch den grössesten gemeinsamen Teiler von $\alpha_3$, $\beta_3$, $\gamma_3$, welcher $\tau_3$ sei; $\tau'_{12}$ und $\tau'_{13}$ können nicht Faktoren von $\tau_3$ sein, da sie sonst in $\tau'$ aufgingen; also ist $\tau_3$ zugleich der grösseste gemeinsame Teiler von $\alpha_3$, $\beta'_3$, $\gamma'_3$. Setzt man hienach $l_3 = \tau_3 l'_3$, so geht die letzte Kongruenz über in

$$\frac{\beta'_3}{\tau_3} \cdot \mathfrak{z} \equiv -\frac{\gamma'}{\tau'\tau'_{13}} l'_3 \left(\text{mod. } \frac{\mathfrak{a}_3}{\tau_3}\right)$$

Der grösseste gemeinsame Teiler von $\frac{\mathfrak{a}_3}{\tau_3}$ und $\frac{\beta_3'}{\tau_3}$ sei $\varphi$; er ist Teiler von $\frac{\alpha_3}{\tau_3}$ und $\frac{\beta_3'}{\tau_3}$, also auch von $\frac{\gamma'}{\tau_{13}'} = \alpha_2\beta_3' - \alpha_3\beta_2' = \tau_3\left(\alpha_2\frac{\beta_3'}{\tau_3} - \frac{\alpha_3}{\tau_3}\beta_2'\right)$. Ist $\varphi$ aber auch Teiler von $\frac{\gamma'}{\tau'\tau_{13}'}$? Alle Primfaktoren von $\varphi$ müssen wegen der Definition von $\mathfrak{a}_3$ in $\tau'$ aufgehen, aber nicht ebenso ihre Potenzen. Es sei $\varphi = \varphi_1\varphi_2$, wo $\varphi_1$ in $\frac{\gamma'}{\tau_{13}'}$, nicht aber in $\tau'$ aufgehe, was dagegen bei $\varphi_2$ der Fall sei. Dann ist $\frac{\gamma'}{\tau'\tau_{13}'}$ durch $\varphi_1$ unzweifelhaft teilbar. Aber $\varphi_2$ fällt bei der Division von $\frac{\gamma'}{\tau_{13}'}$ mit $\tau'$ fort. Nun aber ist $\varphi_2$ Faktor von $\frac{\alpha_3}{\tau_3}$ und $\frac{\beta_3'}{\tau_3}$ und, als Faktor von $\tau'$, auch Faktor von $\frac{\beta'}{\tau_{12}'} = \alpha_3\gamma_2' - \alpha_2\gamma_3'$, also von $\alpha_2\gamma_3'$, desgleichen von $\frac{\alpha'}{\tau_{12}'\tau_{13}'} = \beta_2'\gamma_3' - \beta_3'\gamma_2'$, also von $\beta_2'\gamma_3'$, also Faktor von $\alpha_2$ und $\beta_2$ (denn von $\gamma_3'$ kann $\varphi$ wegen der Definition von $\tau_3$ nicht Faktor sein). Hienach ist $\varphi_2$ Faktor von $\alpha_2$, $\beta_2'$, $\alpha_3$, $\beta_3'$, also quadratischer Faktor von $\frac{\gamma'}{\tau_{13}'}$, einfacher von $\tau'$; also ist $\frac{\gamma'}{\tau'\tau_{13}'}$ durch $\varphi_2$ teilbar. Demnach nimmt die letzte Kongruenz folgende Form an:

$$\frac{\beta_3'}{\varphi\tau_3}\cdot\mathfrak{z} \equiv -\frac{\gamma'}{\varphi\tau'\tau_{13}'}\cdot l_3' \left(\text{mod. } \frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi\tau_3}\right).$$

Es sei identisch

$$\frac{\beta_3'}{\varphi\tau_3}\cdot\vartheta \equiv 1\left(\frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi\tau_3}\right) \quad \text{und zwar} = 1 + \frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi\tau_3}\cdot\vartheta'.$$

Dann wird

$$\mathfrak{z} \equiv -\vartheta\cdot\frac{\gamma'}{\varphi\tau'\tau_{13}'}\,l_3'\left(\frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi\tau_3}\right), \text{ also } = -\vartheta\cdot\frac{\gamma'}{\varphi\tau'\tau_{13}'}\,l_3' + \frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi\tau_3}\cdot\mathfrak{z}'.$$

Daher

$$\alpha_3 l_2 = \alpha_2 l_3 + \tau'\cdot\mathfrak{z} = \alpha_2 l_3 - \tau'\cdot\vartheta\cdot\frac{\gamma'}{\varphi\tau'\tau_{13}'}\,l_3' + \tau'\cdot\frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi\tau_3}\cdot\mathfrak{z}'.$$

Diesen Ausdruck für $\alpha_3 l_2$ führe ich ein in die dritte Rest-Kongruenz, welche äquivalent ist mit

$$\frac{\alpha_3}{\mathfrak{a}_3}(\gamma_3' l_2 - \gamma_2' l_3) \equiv 0\,(\tau'), \quad \text{oder} \quad \gamma_3'\alpha_3 l_2 - \alpha_3\gamma_2' l_3 \equiv 0\,(\mathfrak{a}_3\tau').$$

Dann folgt

$$\gamma_3'\tau'\cdot\frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi\tau_3}\cdot\mathfrak{z}' \equiv (\alpha_3\gamma_2' - \alpha_2\gamma_3')\,l_3 + \tau'\vartheta\,\frac{\gamma_3'\gamma'}{\varphi\tau'\tau_{13}'}\,l_3' \text{ (mod. } \mathfrak{a}_3\tau').$$

Es ist

$$(\alpha_3\gamma_2' - \alpha_2\gamma_3')\,l_3 = \frac{\beta'}{\tau_{12}'}\tau_3 l_3' = \frac{\beta'}{\tau'\tau_{12}'}\tau'\tau_3 l_3'.$$

Demnach kann man durch $\tau'$ dividieren:

$$\gamma_3' \cdot \frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi\tau_3} \cdot \mathfrak{z}' \equiv \left[\frac{\beta'}{\tau'\tau_{12}'}\tau_3 + \vartheta\gamma_3' \frac{\gamma'}{\varphi\tau'\tau_{13}'}\right] l_3' \;(\mathrm{mod.}\ \mathfrak{a}_3).$$

Da $l_3'$ alle ganzen Zahlen durchläuft, muss die Klammer, welche ich für den Augenblick mit K bezeichne, teilbar sein durch den grössesten gemeinsamen Teiler von $\mathfrak{a}_3$ und $\gamma_3' \cdot \frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi\tau_3}$, d. i. durch denjenigen von $\frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi} \cdot \varphi$ und $\frac{\gamma_3'}{\tau_3} \cdot \frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi}$, also durch $\frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi}$, da $\varphi$ und $\frac{\gamma_3'}{\tau_3}$ der oben gegebenen Definition nach relativ prim sein müssen. Also

$$\frac{\gamma_3'}{\tau_3} \cdot \mathfrak{z}' \equiv \frac{\mathrm{K}}{\frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi}} \cdot l_3' \;(\mathrm{mod.}\ \varphi).$$

Es sei identisch

$$\frac{\gamma_3'}{\tau_3} \cdot \zeta \equiv 1 \;(\mathrm{mod.}\ \varphi), \text{ und zwar } = 1 + \varphi \,.\, \zeta' .$$

Dann wird

$$\mathfrak{z}' \equiv \zeta \cdot \frac{\mathrm{K}}{\frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi}} l_3' \;(\mathrm{mod.}\ \varphi), \text{ also } = \zeta \cdot \frac{\varphi \mathrm{K}}{\mathfrak{a}_3} l_3' + \varphi \,.\, \mathfrak{z}''.$$

Dies setze für $\mathfrak{z}'$ in den obigen Ausdruck von $\alpha_3 l_2$ ein:

$$\begin{aligned}
\alpha_3 l_2 &= \alpha_2 l_3 - \tau'\vartheta \cdot \frac{\gamma'}{\varphi\tau'\tau_{13}'} l_3' + \tau' \cdot \frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi\tau_3}\left\{\zeta \cdot \frac{\varphi\mathrm{K}}{\mathfrak{a}_3} l_3' + \varphi \cdot \mathfrak{z}''\right\}. \\
&= \alpha_2\tau_3 l_3' - \tau'\vartheta \cdot \frac{\gamma'}{\varphi\tau'\tau_{13}'} l_3' + \tau'\zeta\vartheta\frac{\gamma_3'}{\tau_3} \cdot \frac{\gamma'}{\varphi\tau'\tau_{13}'} l_3' + \frac{\tau'}{\tau_3} \cdot \zeta \cdot \frac{\beta'}{\tau'\tau_{12}'}\tau_3 l_3' + \tau' \cdot \frac{\mathfrak{a}_3}{\tau_3} \cdot \mathfrak{z}''. \\
&= \alpha_2\tau_3 l_3' + \vartheta\frac{\gamma'}{\varphi\tau_{13}'}\left(\frac{\gamma_3'}{\tau_3}\zeta - 1\right) l_3' + \zeta\frac{\beta'}{\tau_{12}'} l_3' + \tau' \cdot \frac{\mathfrak{a}_3}{\tau_3} \cdot \mathfrak{z}''. \\
&= \left\{\alpha_2\tau_3 + \frac{\beta'}{\tau_{12}'}\zeta + \frac{\gamma'}{\tau_{13}'}\vartheta\zeta'\right\} l_3' + \tau' \cdot \frac{\mathfrak{a}_3}{\tau_3} \cdot \mathfrak{z}''.
\end{aligned}$$

Setzt man hierin $\beta' = \alpha_3\gamma_2 - \alpha_2\gamma_3$, $\gamma' = \beta_2\gamma_3 - \beta_3\gamma_2$ ein, so erhält man nach gehöriger Ausrechnung mit Berücksichtigung der Definition von $\zeta$ und $\vartheta$:

$$\frac{\alpha_3}{\mathfrak{a}_3} l_2 = \left\{\alpha_2\vartheta'\zeta' + \frac{\alpha_3}{\mathfrak{a}_3}(\gamma_2'\zeta - \beta_2'\vartheta\zeta')\right\} l_3' + \frac{\tau'}{\tau_3} \cdot \mathfrak{z}'',$$

also

$$\frac{\alpha_3}{\mathfrak{a}_3} l_2 - \left\{\alpha_2\vartheta'\zeta' - \frac{\alpha_3}{\mathfrak{a}_3}(\beta_2'\vartheta\zeta' - \gamma_2'\zeta)\right\} l_3' \equiv 0 \;\left(\mathrm{mod.}\ \frac{\tau'}{\tau_3}\right).$$

Oder, was dasselbe ist:

$$\left\{\begin{aligned} \varepsilon_3 l_2 - \varepsilon_2 l_3 &\equiv 0 \;(\tau') \\ l_3 &\equiv 0 \;(\tau_3) \end{aligned}\right. , \quad \text{wo} \quad \begin{aligned} \varepsilon_3 &= \tau_3 \cdot \frac{\alpha_3}{\mathfrak{a}_3} \\ \varepsilon_2 &= \alpha_2\vartheta'\zeta' - \frac{\alpha_3}{\mathfrak{a}_3}(\beta_2'\vartheta\zeta' - \gamma_2'\zeta). \end{aligned}$$

Anmerkung. Dass wirklich K durch $\frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi}$ teilbar, weist man nach, indem man mittels der Relation $\gamma_3\gamma' = -(\beta_3\beta'+\alpha_3\alpha')$ ableitet, dass

$$\mathrm{K} = \frac{\beta'\tau_3}{\tau'\tau'_{12}}\left(1-\frac{\beta'_3}{\varphi\tau_3}\vartheta\right)-\vartheta\frac{\alpha_3}{\varphi}\cdot\frac{\alpha'}{\tau'\tau'_{12}\tau'_{13}} = -\frac{\beta'}{\tau'\tau'_{12}}\frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi}\vartheta'-\vartheta\cdot\frac{\alpha_3}{\mathfrak{a}_3}\cdot\frac{\mathfrak{a}_3}{\varphi}\cdot\frac{\alpha'}{\tau'\tau'_{12}\tau'_{13}}$$

ist. — Man bemerke, dass, wie $\varepsilon_3$ durch $\tau_3$, so $\varepsilon_2$ durch den grössesten Teiler von $\alpha_2$, $\beta_2$, $\gamma_2$ teilbar ist. Hienach wird bei Erfüllung der Kongruenz $\frac{\varepsilon_3}{\tau_3}l_2 \equiv \varepsilon_2\frac{l_3}{\tau_3}\left(\text{mod. } \frac{\tau'}{\tau_3}\right)$ von selbst $l_2$, wie es sein muss, durch den genannten Teiler teilbar, weil $\frac{\varepsilon_3}{\tau_3}$ relativ prim gegen denselben, $\frac{\tau'}{\tau_3}$ aber teilbar durch ihn ist. Wäre auch, was nicht nachzuweisen ist, $\varepsilon_2$ relativ prim gegen $\tau_3$, so wäre die Kongruenz $l_3 \equiv 0$ $(\tau_3)$, als in der andern enthalten, fortzulassen.

---

Mittels des Satzes B) reduziert sich die Hauptkongruenz in A) auf den Modul $\varDelta:\tau'$, desgleichen durch die Bedingung $l_3 \equiv 0$ $(\tau_3)$ die resultierende Restkongruenz auf den Modul $\tau':\tau_3$. So folgt das **Haupt-Theorem:**

D) Ganz allgemein (d. h. ohne irgend welche Voraussetzung betreffs gemeinsamer Teiler der Substitutionskoeffizienten) reduziert sich das Kongruenzensystem § V, $\mathfrak{C}$) auf das System

$$\frac{\delta_1}{\tau'}l_1+\frac{\delta_2 l_2+\delta_3 l_3}{\tau'} \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } \frac{\varDelta}{\tau'}\right)$$

$$\frac{\varepsilon_3}{\tau_3}l_2-\varepsilon_2\frac{l_3}{\tau_3} \equiv 0 \quad \left(\text{mod. } \frac{\tau'}{\tau_3}\right)$$

$$l_3 \equiv 0 \ (\text{mod. } \tau_3)$$

---

Die Multiplikatoren zur Erfüllung dieser Kongruenzen bei unbeschränkter Summierung in Bezug auf $l_1$ $l_2$ $l_3$ sind

$$\frac{\tau'}{\varDelta}\cdot e^{2i\mu\pi\cdot\frac{\delta_1 l_1+\delta_2 l_2+\delta_3 l_3}{\tau'}:\frac{\varDelta}{\tau'}},\quad \frac{\tau_3}{\tau'}\cdot e^{2i\mu'\pi\cdot\frac{\varepsilon_3 l_2-\varepsilon_2 l_3}{\tau_3}:\frac{\tau'}{\tau_3}},\quad \frac{1}{\tau_3}\cdot e^{2i\mu''\pi\cdot\frac{l_3}{\tau_3}},$$

zu summieren von 0 bis bezüglich $\frac{\varDelta}{\tau'}-1$, $\frac{\tau'}{\tau_3}-1$, $\tau_3-1$. Die allgemeinste Umformungsformel erster Art für eine dreifach unendliche Reihe lautet demnach:

$$\text{15)}\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1h_2h_3}\,\mathrm{f}(h_1,h_2,h_3) = \frac{1}{\varDelta}\cdot\sum_{0}^{\frac{\varDelta}{\tau'}-1}{}^{\mu}\ \sum_{0}^{\frac{\tau'}{\tau_3}-1}{}^{\mu'}\ \sum_{0}^{\tau_3-1}{}^{\mu''}\ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1l_2l_3}\, e^{2i\pi\cdot\left(\mu\cdot\frac{\delta_1 l_1+\delta_2 l_2+\delta_3 l_3}{\varDelta}+\mu'\cdot\frac{\varepsilon_3 l_2-\varepsilon_2 l_3}{\tau'}+\mu''\cdot\frac{l_3}{\tau_3}\right)}\cdot \mathrm{f}\left(\frac{\mathfrak{L}'}{\varDelta},\frac{\mathfrak{L}''}{\varDelta},\frac{\mathfrak{L}'''}{\varDelta}\right),$$

wo $\mathfrak{L}' = \alpha' l_1+\alpha'' l_2+\alpha''' l_3$, $\mathfrak{L}'' = \beta' l_1+\beta'' l_2+\beta''' l_3$, $\mathfrak{L}''' = \gamma' l_1+\gamma'' l_2+\gamma''' l_3$.

Man beachte, dass in dieser allgemeinsten Formel die dreifach unendliche Reihe wieder in eine Summe von $\varDelta$ dreifach unendlichen Reihen umgeformt ist, gerade wie in Formel 11); denn es ist

$$\frac{\varDelta}{\tau'}\cdot\frac{\tau'}{\tau_3}\cdot\tau_3 = \varDelta.$$

Übrigens drängt sich hier die zu Anfang dieses Paragraphen schon als berechtigt dargelegte Voraussetzung, dass die Koeffizienten einer Horizontalreihe der Substitution nicht sämtlich einen gemeinsamen Teiler haben sollen, geradezu von selbst auf, indem sich die nach $\mu''$ fortschreitende Summe als Umformung erster Art in Bezug auf die eine Summierungszahl $l_3$ abtrennt. Setzt man $\tau_3 = 1$, so fällt die Summierung nach $\mu''$ natürlich fort. Aber auch bei beliebigem $\tau_3$ geschieht dies, wenn man die Bedingung $l_3 \equiv 0 \pmod{\tau_3}$ erfüllt, indem man $\tau_3 l_3$ statt $l_3$ setzt. Dann lautet die Formel

$$15') \quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1 h_2 h_3} f(h_1, h_2, h_3) = \frac{\tau_3}{\Delta} \cdot \sum_{0}^{\frac{\Delta}{\tau'}-1}{}^{\mu} \sum_{0}^{\frac{\tau'}{\tau_3}-1}{}^{\mu'} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1 l_2 l_3} e^{2i\pi\left(\mu \cdot \frac{\delta_1 l_1 + \delta_2 l_2 + \delta_3 \tau_3 l_3}{\Delta} + \mu' \cdot \frac{\varepsilon_3 l_2 - \varepsilon_2 \tau_3 l_3}{\tau'}\right)} \cdot f\left(\frac{\mathfrak{L}'}{\Delta}, \frac{\mathfrak{L}''}{\Delta}, \frac{\mathfrak{L}'''}{\Delta}\right),$$

$$\text{wo} \quad \mathfrak{L}' = \alpha' l_1 + \alpha'' l_2 + \alpha''' \tau_3 l_3, \ \mathfrak{L}'' = \beta' l_1 + \beta'' l_2 + \beta''' \tau_3 l_3, \ \mathfrak{L}''' = \gamma' l_1 + \gamma'' l_2 + \gamma''' \tau_3 l_3.$$

Man kann auch so verfahren, dass man zur Erfüllung der Bedingung $l_3 \equiv 0 \ (\tau_3)$ setzt $l_3 = \tau_3 l_3'$ und zur Erfüllung der resultierenden Restkongruenz setzt

$$l_2 = \frac{\tau'}{\tau_3} \cdot \lambda_2 + \varepsilon_2 \cdot \nu, \ l_3' = \frac{\tau'}{\tau_3} \cdot \lambda_3 + \frac{\varepsilon_3}{\tau_3} \cdot \nu.$$

Hier müssen, da $l_2$ alle durch den grössesten Teiler von $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ teilbaren, $l_3'$ aber alle ganzen Zahlen zu durchlaufen hat, $\lambda_2$ und $\lambda_3$ alle ganzzahligen Werte annehmen, während $\nu$ ein Restsystem in Bezug auf $\tau' : \tau_3$ zu durchlaufen hat. Mittels der Gleichungen

$$l_2 = \alpha_2 h_1 + \beta_2 h_2 + \gamma_2 h_3 = \frac{\tau'}{\tau_3} \lambda_2 + \varepsilon_2 \nu, \ l_3' = \frac{\alpha_3 h_1 + \beta_3 h_2 + \gamma_3 h_3}{\tau_3} = \frac{\tau'}{\tau_3} \lambda_3 + \frac{\varepsilon_3}{\tau_3} \nu$$

lässt sich die Probe machen, ob wirklich jeder Zahlenkomplexion $h_1 \ h_2 \ h_3$ stets eine und nur eine Komplexion $\nu, \lambda_2, \lambda_3$ entspricht. Damit jeder Komplexion $h_1 \ h_2 \ h_3$ ganzzahlige $\lambda_2, \lambda_3$ entsprechen, muss $\nu$ folgende zwei Kongruenzen befriedigen:

$$\varepsilon_2 \nu \equiv \alpha_2 h_1 + \beta_2 h_2 + \gamma_2 h_3 \left(\mathrm{mod.} \ \frac{\tau'}{\tau_3}\right), \ \frac{\varepsilon_3}{\tau_3} \nu \equiv \frac{\alpha_3}{\tau_3} h_1 + \frac{\beta_3}{\tau_3} h_2 + \frac{\gamma_3}{\tau_3} h_3 \left(\mathrm{mod.} \ \frac{\tau'}{\tau_3}\right)$$

Da $\frac{\varepsilon_3}{\tau_3} = \frac{\alpha_3}{\mathfrak{a}_3}$ relativ prim gegen $\frac{\tau'}{\tau_3}$ ist, so hat die letzte Kongruenz stets eine und nur eine Wurzel $0 \leqq \nu \leqq \frac{\tau'}{\tau_3} - 1$. Von der ersten Kongruenz aber lässt sich, indem man sie mit $\varepsilon_3 : \tau_3$ multipliziert, zeigen, dass sie durch Erfüllung der zweiten zur Identität wird. Ich übergehe hier diesen etwas Rechnung erfordernden Nachweis der Kürze halber, bemerke aber ausdrücklich, dass diese Probe nicht überflüssig ist, weil Fehlschlüsse auf diesem Gebiet sehr nahe liegen. (Z. B. würde man die Bedingung $l_3 \equiv 0 \ (\tau_3)$ zugleich mit der Kongruenz $\varepsilon_3 l_2 - \varepsilon_2 l_3 \equiv 0 \ (\tau')$ auch identisch erfüllen durch die Substitution $l_2 = \tau' \lambda_2 + \varepsilon_2 \nu$, $l_3 = \tau' \lambda_3 + \varepsilon_3 \nu$, $\nu = 0, 1, \ldots\ldots \tau' - 1$; und dennoch würde dies falsch sein.) — Wir erhalten jetzt folgende Modifikation der Formel 15, wenn wir statt $\lambda_2$ und $\lambda_3$ nunmehr $l_2$ und $l_3$ schreiben:

$$16)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{h_1 h_2 h_3} f(h_1, h_2, h_3) = \frac{\tau'}{\Delta} \cdot \sum_{0}^{\frac{\Delta}{\tau'}-1} {}^{\mu} \sum_{0}^{\frac{\tau'}{\tau_3}-1} {}^{\nu} \sum_{-\infty}^{+\infty} {}^{l_1 l_2 l_3}\, e^{\frac{2i\mu\pi}{\Delta}\cdot\left(\delta_1 l_1 + \delta_2\left(\frac{\tau'}{\tau_3} l_2 + \varepsilon_2\nu\right) + \delta_3(\tau' l_3 + \varepsilon_3\nu)\right)} \cdot f\left(\frac{\Delta'}{\Delta}, \frac{\Delta''}{\Delta}, \frac{\Delta'''}{\Delta}\right),$$

$$\text{wo}\quad \Delta' = \alpha' l_1 + \alpha''\left(\frac{\tau'}{\tau_3} l_2 + \varepsilon_2\nu\right) + \alpha'''(\tau' l_3 + \varepsilon\nu)$$

$$\Delta'' = \beta' l_1 + \beta''\left(\frac{\tau'}{\tau_3} l_2 + \varepsilon_2\nu\right) + \beta'''(\tau' l_3 + \varepsilon_3\nu)$$

$$\Delta''' = \gamma' l_1 + \gamma''\left(\frac{\tau'}{\tau_3} l_2 + \varepsilon_2\nu\right) + \gamma'''(\tau' l_3 + \varepsilon_3\nu)$$

Die Gliederzahl der endlichen Doppelsumme ist in den Formeln 15' und 16 gleich $\Delta : \tau_3$. Es folge hier eine Zusammenstellung der Daten zur Berechnung der Konstanten in den Formeln 15, 15', 16:

17) $\Delta = \Sigma \pm \alpha_1\beta_2\gamma_3$, wo die 9 Elemente beliebige ganze Zahlen sind.

$$\alpha' = \frac{\partial\Delta}{\partial\alpha_1},\ \beta' = \frac{\partial\Delta}{\partial\beta_1},\ \gamma' = \frac{\partial\Delta}{\partial\gamma_1}\ \text{u. s. w.}$$

$\mathfrak{a}'$ die kleinste Zahl der Art, dass $\frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}$ relativ prim gegen $\Delta$.

$\tau'$ der grösseste gemeinsame Teiler von $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$

$\tau_{12}$ " " " " " $\mathfrak{a}'$ und $\beta'$ | $\tau'_{12} = \frac{\tau_{12}}{\tau'}$ ist Teiler von $\gamma_2$ und $\gamma_3$

$\tau_{13}$ " " " " " $\mathfrak{a}'$ und $\gamma'$ | $\tau'_{13} = \frac{\tau_{13}}{\tau'}$ " " " $\beta_2$ und $\beta_3$

$\tau_3$ " " " " " $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$

$\varphi$ " " " " " $\frac{\mathfrak{a}_3}{\tau_3}$ und $\frac{\beta_3}{\tau'_{13}\tau_3}$

$\mathfrak{a}_3$ die kleinste Zahl der Art, dass $\alpha_3 : \mathfrak{a}_3$ relativ prim gegen $\tau'$.

Die ganzen Zahlen $\xi$, $\xi'$, $\eta$, $\eta'$, $\vartheta$, $\vartheta'$, $\zeta$, $\zeta'$ sind aus folgenden Gleichungen zu bestimmen:

$$\frac{\beta'}{\tau_{12}}\xi = 1 + \frac{\mathfrak{a}'}{\tau_{12}}\cdot\xi',\quad \frac{\gamma'}{\tau'}\cdot\eta = 1 + \tau'_{12}\cdot\eta',\quad \frac{\beta_3}{\tau'_{13}\tau_3\varphi}\vartheta = 1 + \frac{\mathfrak{a}_3}{\tau_3\varphi}\vartheta',\quad \frac{\gamma_3}{\tau'_{13}\tau_3}\zeta = 1 + \varphi\zeta'$$

$$\delta_1 = \frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}\cdot\tau'$$

$$\delta_2 = \frac{\alpha''\tau' - \Delta(\beta_3\eta + \gamma_3\xi\eta')}{\mathfrak{a}'} = \alpha''\xi'\eta' - \frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}\left(\beta''\xi\eta' - \gamma''\eta\right)$$

$$\delta_3 = \frac{\alpha'''\tau' + \Delta(\beta_2\eta + \gamma_2\xi\eta')}{\mathfrak{a}'} = \alpha'''\xi'\eta' - \frac{\alpha'}{\mathfrak{a}'}\left(\beta'''\xi\eta' - \gamma'''\eta\right)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\alpha_3}{\mathfrak{a}_3}\cdot\tau_3,\quad \varepsilon_2 = \alpha_2\vartheta'\zeta' - \frac{\alpha_3}{\mathfrak{a}_3}\left(\frac{\beta_2}{\tau'_{13}}\vartheta\zeta' - \frac{\gamma_2}{\tau'_{12}}\zeta\right)$$

Anmerkung. $\mathfrak{a}'$ enthält natürlich nur diejenigen Primzahlen, welche in den grössesten Teiler von $\Delta$ und $\alpha'$ aufgehen, kann sie aber in höheren Potenzen, als der Teiler, enthalten. In dem besonderen Falle $\mathfrak{a}' = \tau'$ wird $\xi = \eta = 0$, $\xi' = \eta' = 1$, $\delta_1 = \alpha'$, $\delta_2 = \alpha''$, $\delta_3 = \alpha'''$ d. h. die resultierende Hauptkongruenz geht in die erste Kongruenz über; die Restkongruenz bleibt aber daneben bestehen.

III. Nachdem im Vorhergehenden die Theorie des § V, I von der dort benutzten beschränkenden Voraussetzung befreit ist, verallgemeinere ich § V, II in folgender Art. — Zufolge des Gleichungssystems $\mathfrak{F}$) durchläuft $l_1$ alle durch den grössesten gemeinsamen Teiler von $\alpha'$, $\alpha''$, $\alpha'''$ teilbaren Zahlen, $l_2$ alle durch den von $\beta'$, $\beta''$, $\beta'''$ teilbaren Zahlen, $l_3$ alle durch den von $\gamma'$, $\gamma''$, $\gamma'''$ teilbaren Zahlen. Dabei müssen $l_1$, $l_2$, $l_3$ aber das Kongruenzensystem $\mathfrak{G}$) befriedigen. Dies geschieht identisch, wenn man setzt

$$l_1 = \Delta l_1' + \alpha'\nu_1 + \alpha''\nu_2 + \alpha'''\nu_3, \quad l_2 = \Delta l_2' + \beta'\nu_1 + \beta''\nu_2 + \beta'''\nu_3, \quad l_3 = \Delta l_3' + \gamma'\nu_1 + \gamma''\nu_2 + \gamma'''\nu_3,$$

wo $l_1' l_2' l_3'$ Summierungszahlen, $\nu_1 \nu_2 \nu_3$ laufende Reste bedeuten. Den beiden Gleichungssystemen $\mathfrak{K}$) und $\mathfrak{L}$) des § V entsprechen nun die folgenden:

$$\begin{array}{ll} \mathrm{h}_1 = \alpha_1 l_1' + \beta_1 l_2' + \gamma_1 l_3' + \nu_1 & \alpha'(\mathrm{h}_1 - \nu_1) + \alpha''(\mathrm{h}_2 - \nu_2) + \alpha'''(\mathrm{h}_3 - \nu_3) = \Delta \,.\, l_1' \\ \mathrm{h}_2 = \alpha_2 l_1' + \beta_2 l_2' + \gamma_2 l_3' + \nu_2 \quad , & \beta'(\mathrm{h}_1 - \nu_1) + \beta''(\mathrm{h}_2 - \nu_2) + \beta'''(\mathrm{h}_3 - \nu_3) = \Delta \,.\, l_2' \\ \mathrm{h}_3 = \alpha_3 l_1' + \beta_3 l_2' + \gamma_3 l_3' + \nu_3 & \gamma'(\mathrm{h}_1 - \nu_1) + \gamma''(\mathrm{h}_2 - \nu_2) + \gamma'''(\mathrm{h}_3 - \nu_3) = \Delta \,.\, l_3'. \end{array}$$

Demnach sind $\nu_1 \nu_2 \nu_3$ unterworfen dem Kongruenzensystem

$$\left.\begin{array}{l} \alpha'(\mathrm{h}_1 - \nu_1) + \alpha''(\mathrm{h}_2 - \nu_2) + \alpha'''(\mathrm{h}_3 - \nu_3) \equiv 0 \\ \beta'(\mathrm{h}_1 - \nu_1) + \beta''(\mathrm{h}_2 - \nu_2) + \beta'''(\mathrm{h}_3 - \nu_3) \equiv 0 \\ \gamma'(\mathrm{h}_1 - \nu_1) + \gamma''(\mathrm{h}_2 - \nu_2) + \gamma'''(\mathrm{h}_3 - \nu_3) \equiv 0 \end{array}\right. \quad \text{mod. } \Delta$$

Dieses System reduziert sich nach dem Haupt-Theorem $\mathfrak{D}$) dieses Paragraphen auf

$$\left\{\begin{array}{r} \dfrac{\delta_1}{\tau'}(\mathrm{h}_1 - \nu_1) + \dfrac{\delta_2(\mathrm{h}_2 - \nu_2) + \delta_3(\mathrm{h}_3 - \nu_3)}{\tau'} \equiv 0 \,.\, \left(\text{mod. } \dfrac{\Delta}{\tau'}\right) \\ \dfrac{\varepsilon_3}{\tau_3}(\mathrm{h}_2 - \nu_2) - \varepsilon_2 \dfrac{\mathrm{h}_3 - \nu_3}{\tau_3} \equiv 0 \,.\, \left(\text{mod. } \dfrac{\tau'}{\tau_3}\right) \\ \mathrm{h}_3 - \nu_3 \equiv 0 \,.\, (\text{mod. } \tau_3) \end{array}\right.$$

Damit die letzte Kongruenz erfüllt sei, muss, da $\mathrm{h}_3$ beliebig ist, $\nu_3$ alle Reste in Bezug auf $\tau_3$ durchlaufen; jedem $\mathrm{h}_3$ entspricht dabei ein einziger ganz bestimmter Wert von $\nu_3$ zwischen 0 und $\tau_3 - 1$. Die zweite Kongruenz, welche sich schreiben lässt

$$\frac{\varepsilon_3}{\tau_3}\nu_2 \equiv \frac{\varepsilon_3}{\tau_3}\mathrm{h}_2 - \varepsilon_2 \frac{\mathrm{h}_3 - \nu_3}{\tau_3}\left(\text{mod. } \frac{\tau'}{\tau_3}\right),$$

ergiebt für jedes Zahlenpaar $\mathrm{h}_2\, \mathrm{h}_3$ einen einzigen Wert von $\nu_2$ zwischen 0 und $\tau' : \tau_3 - 1$, weil $\varepsilon_3 : \tau_3$ relativ prim gegen den Modul $\tau' : \tau_3$ ist. Da $\mathrm{h}_2\, \mathrm{h}_3$ alle möglichen Werte annehmen, wird $\nu_2$ alle Reste in Bezug auf $\tau' : \tau_3$ durchlaufen. Endlich ergiebt die erste Kongruenz, da $\delta_1 : \tau'$ relativ prim gegen $\Delta : \tau'$ ist, stets einen einzigen bestimmten Rest in Bezug auf den Modul $\Delta : \tau'$ als Wurzel für $\nu_1$; und, während $\mathrm{h}_1\, \mathrm{h}_2\, \mathrm{h}_3$ alle Zahlen durchlaufen, durchläuft $\nu_1$ alle Reste in Bezug auf $\Delta : \tau'$. — Hienach erhellt, dass jedem ganzzahligen Wertsystem $h_1\, h_2\, h_3$ ein einziges bestimmtes Restsystem $\nu_3\, \nu_2\, \nu_1$, welches $l_1'\, l_2'\, l_3'$ ganzzahlig macht, entspricht; demnach weiter ein einziges ganzzahliges Wertsystem $l_1'\, l_2'\, l_3'$.

Schreibt man der Einfachheit halber wieder $l_1\, l_2\, l_3$ statt $l_1'\, l_2'\, l_3'$, so gilt nun folgende Umformungsformel zweiter Art ganz allgemein d. h. ohne jede Voraussetzung betreffs gemeinsamer Teiler der Substitutionskoefficienten:

$$18)\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1 h_2 h_3} f(h_1, h_2, h_3) = \sum_{0}^{\frac{\Delta}{\tau'}-1}{}^{\nu_1} \sum_{0}^{\frac{\tau'}{\tau_3}-1}{}^{\nu_2} \sum_{0}^{\tau_3-1}{}^{\nu_3} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1 l_2 l_3} f(\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2 + \gamma_1 l_3 + \nu_1,\ \alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2 + \gamma_2 l_3 + \nu_2,\ \alpha_3 l_1 + \beta_3 l_2 + \gamma_3 l_3 + \nu_3).$$

Die Bedeutung von $\Delta, \tau', \tau_3$ ergiebt das Formelsystem 17). Bemerkenswert ist die Einfachheit dieser Formel, indem die in den Formeln 15 und 16 verbleibenden Zwischengrössen hier alle hinausgehen. Auch verschwindet der Mangel der Symmetrie in Bezug auf die Substitutionskoefficienten durch die wohl einleuchtende Bemerkung, dass man in der Formel statt der angegebenen dreifachen endlichen Summation auch folgende setzen kann:

$$\sum_{0}^{\frac{\Delta}{\tau'}-1}{}^{\nu_1} \sum_{0}^{\tau_2-1}{}^{\nu_2} \sum_{0}^{\frac{\tau'}{\tau_2}-1}{}^{\nu_3},\quad \sum_{0}^{\frac{\tau''}{\tau_3}-1}{}^{\nu_1} \sum_{0}^{\frac{\Delta}{\tau''}-1}{}^{\nu_2} \sum_{0}^{\tau_3-1}{}^{\nu_3},\quad \sum_{0}^{\tau_1-1}{}^{\nu_1} \sum_{0}^{\frac{\Delta}{\tau''}-1}{}^{\nu_2} \sum_{0}^{\frac{\tau''}{\tau_1}-1}{}^{\nu_3},\quad \sum_{0}^{\frac{\tau'''}{\tau_2}-1}{}^{\nu_1} \sum_{0}^{\tau_2-1}{}^{\nu_2} \sum_{0}^{\frac{\Delta}{\tau'''}-1}{}^{\nu_3},\quad \sum_{0}^{\tau_1-1}{}^{\nu_1} \sum_{0}^{\frac{\tau'''}{\tau_1}-1}{}^{\nu_2} \sum_{0}^{\frac{\Delta}{\tau'''}-1}{}^{\nu_3}.$$

Die Gliederzahl der dreifachen endlichen Summe ist immer $\Delta$. Bei der im § V benutzten Voraussetzung ist $\tau' = \tau_3 = 1$; dann geht Formel 18) unmittelbar in Formel 12 über.

IV. Formel 18 ist nicht völlig analog der Formel 9, welche die allgemeinste Umformung zweiter Art für eine Doppelreihe giebt. Verfährt man mit der Doppelreihe ganz ebenso, wie vorstehend mit der dreifachen Reihe geschehen, so ergiebt sich folgende in ihrem Bau der Formel 18 ganz analoge Gleichung:

$$9')\quad \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1 h_2} f(h_1, h_2) = \sum_{0}^{\frac{\Delta}{\tau_2}-1}{}^{\nu_1} \sum_{0}^{\tau_2-1}{}^{\nu_2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1 l_2} f(\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2 + \nu_1,\ \alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2 + \nu_2),$$

$$= \sum_{0}^{\tau_1-1}{}^{\nu_1} \sum_{0}^{\frac{\Delta}{\tau_1}-1}{}^{\nu_2} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1 l_2} f(\alpha_1 l_1 + \beta_1 l_2 + \nu_1,\ \alpha_2 l_1 + \beta_2 l_2 + \nu_2),$$

wo $\tau_1$ den grössesten Teiler von $\alpha_1$ und $\beta_1$, $\tau_2$ denjenigen von $\alpha_2$ und $\beta_2$ bezeichnet. Die Formel 9 lässt sich als eine Verwandlung der in 9' vorkommenden endlichen Doppelsumme in eine einfache Summe ansehen, wobei aber eine durch Kettenbruchentwickelung zu berechnende Hilfskonstante in die Formel eintritt. Die entsprechende Umwandlung der Formel 18 würde eine direkte Reduktion des Kongruenzensystems $\mathfrak{S}$) erfordern. Dagegen lässt sie sich bei Formel 15 leicht ausführen. Man löse die Kongruenz $\varepsilon_3' \varphi \equiv 1 (\mathrm{mod.}\ \tau' : \tau_3)$, wo $\varepsilon_3' = \varepsilon_3 : \tau_3 = \alpha_3 : \mathfrak{a}_3$; man setze dann

$$l_3 = \tau_3\lambda_3\ ,\quad l_2 = \frac{\tau'}{\tau_3}\lambda_2 + \varphi\,\varepsilon_2\lambda_3\,,$$

wodurch die beiden Restkongruenzen in D) identisch erfüllt werden. Es bleibt dann nur die Hauptkongruenz durch das Multiplikatorprincip zu erfüllen, und Formel 15 geht in folgende über:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1h_2h_3} f(h_1, h_2, h_3) = \frac{\tau'}{\Delta}\cdot\sum_{0}^{\frac{\Delta}{\tau'}-1}{}^{\mu}\ \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1\lambda_2\lambda_3}\, e^{\frac{2i\mu\pi}{\Delta}\left(\delta_1 l_1 + \delta_2\frac{\tau'}{\tau_3}\lambda_2 + (\delta_2\varphi\varepsilon_2 + \delta_3\tau_3)\lambda_3\right)} . f\left(\frac{\mathfrak{L}'}{\Delta}, \frac{\mathfrak{L}''}{\Delta}, \frac{\mathfrak{L}'''}{\Delta}\right),$$

wo $\mathfrak{L}' = \alpha' l_1 + \alpha''\frac{\tau'}{\tau_3}\lambda_2 + (\alpha''\varphi\,\varepsilon_2 + \alpha'''\tau_3)\lambda_3$ , $\quad\mathfrak{L}'' = \beta' l_1 + \beta''\frac{\tau'}{\tau_3}\lambda_2 + (\beta''\varphi\,\varepsilon_2 + \beta'''\tau_3)\,\lambda_3$ ,

$$\mathfrak{L}''' = \gamma' l_1 + \gamma''\frac{\tau'}{\tau_3}\lambda_2 + (\gamma''\varphi\,\varepsilon_2 + \gamma'''\tau_3)\,\lambda_3\,.$$

Erfüllt man auch noch die Hauptkongruenz identisch, indem man $\psi$ aus der Kongruenz $\frac{\delta_1}{\tau'}\psi \equiv 1 \left(\text{mod.}\ \frac{\Delta}{\tau'}\right)$ bestimmt, und substituiert dann

$$l_1 = \frac{\Delta}{\tau'}\lambda_1 - \psi\frac{\delta_2}{\tau_3}\lambda_2 - \psi\frac{\delta_2\varphi\varepsilon_2 + \delta_3\tau_3}{\tau'}\lambda_3\,,$$

so ergiebt sich folgende Formel

$$\left\{\begin{aligned}
&\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1h_2h_3} f(h_1, h_2, h_3) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\lambda_1\lambda_2\lambda_3} f\left(\frac{\Lambda'}{\Delta}, \frac{\Lambda''}{\Delta}, \frac{\Lambda'''}{\Delta}\right),\ \text{worin}\\
&\Lambda' = \frac{\alpha'}{\tau'}\Delta\lambda_1 + \frac{\alpha''\tau' - \psi\alpha'\delta_2}{\tau_3}\lambda_2 + \left(\alpha'''\tau_3 + \alpha''\varphi\varepsilon_2 - \alpha'\psi\frac{\delta_2\varphi\varepsilon_2 + \delta_3\tau_3}{\tau'}\right)\lambda_3\\
&\Lambda'' = \frac{\beta'}{\tau'}\Delta\lambda_1 + \frac{\beta''\tau' - \psi\beta'\delta_2}{\tau_3}\lambda_2 + \left(\beta'''\tau_3 + \beta''\varphi\varepsilon_2 - \beta'\psi\frac{\delta_2\varphi\varepsilon_2 + \delta_3\tau_3}{\tau'}\right)\lambda_3\\
&\Lambda''' = \frac{\gamma'}{\tau'}\Delta\lambda_1 + \frac{\gamma''\tau' - \psi\gamma'\delta_2}{\tau_3}\lambda_2 + \left(\gamma'''\tau_3 + \gamma''\varphi\varepsilon_2 - \gamma'\psi\frac{\delta_2\varphi\varepsilon_2 + \delta_3\tau_3}{\tau'}\right)\lambda_3.
\end{aligned}\right.$$

Da aber diese Formel durch Anwendung zweier aufeinanderfolgender lineärer Substitutionen entstanden ist, muss ein gleichwertiges Ergebnis unmittelbarer durch eine einzige Substitution von der Determinante $\Delta = \pm 1$ entstehen. *Es bedarf keines Beweises, dass, wenn die ganzzahlige Substitution*

$$h_i = \alpha_{i1} l_1 + \alpha_{i2} l_2 + \ldots . + \alpha_{in} l_n$$

*die Determinante $\Delta = \pm 1$ hat, dann die Formel gilt:*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1h_2\ldots h_n} f(h_1, h_2, \ldots h_n) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1l_2\ldots l_n} f(\alpha_{11}l_1 + \alpha_{12}l_2 + \ldots + \alpha_{1n}l_n, \ldots\ldots, \alpha_{n1}l_1 + \alpha_{n2}l_2 + \ldots + \alpha_{nn}l_n)$$

Aber das Gebiet der Anwendung dieser Formel ist naturgemäss ein beschränktes. Wird z. B. für $f(h_1, h_2, \ldots h_n)$ ein Thetafunktionenprodukt gesetzt, und soll die umgeformte Reihe wieder aus Thetaprodukten bestehen, so muss die ganzzahlige Substitution gewissen Bedingungen genügen, welche den Wert $\Delta = \pm 1$ im allgemeinen ausschliessen.

V. Die Verallgemeinerung der Umformungsformeln des § VI für nfach unendliche Reihen geschieht analog dem in Nr. II und III des gegenwärtigen Paragraphen für dreifache Reihen gezeigten Verfahren. — Den Angelpunkt des Problems bildet die in II ausgeführte Reduktion des Kongruenzensystems § V, 𝔈. Der analogen Behandlung ist das entsprechende Kongruenzensystem des § VI zu unterziehen. Mit der ersten Kongruenz wird die zweite bis auf eine n—1gliedrige Restkongruenz verschmolzen, mit dem Verschmelzungsergebnis der beiden ersten die dritte Kongruenz u. s. w. Es ergiebt sich eine ngliedrige resultierende Hauptkongruenz nebst $\frac{n(n-1)}{2}$ n—1gliedrigen Restkongruenzen. Das System der letztern ist nach gleicher Methode zu reduzieren u. s. f. Das Endergebnis ist ein treppenförmiges Kongruenzensystem, wie in II, D) dieses Paragraphen. Aus ihm fliesst die allgemeinste Umformungsformel erster Art nach dem Multiplikatorprincip. — Für n = 4 z. B. hat das treppenförmige Kongruenzensystem die Form

$$\begin{aligned}
\delta_{11} l_1 + \frac{\delta_{12} l_2 + \delta_{13} l_3 + \delta_{14} l_4}{\tau_{234}} &\equiv 0 \quad \left(\text{mod. } \frac{\varDelta}{\tau_{234}}\right) \\
\delta_{22} l_2 + \frac{\delta_{23} l_3 + \delta_{24} l_4}{\tau_{34}} &\equiv 0 \quad \left(\text{mod. } \frac{\tau_{234}}{\tau_{34}}\right) \\
\delta_{33} l_3 + \delta_{34} \frac{l_4}{\tau_4} &\equiv 0 \quad \left(\text{mod. } \frac{\tau_{34}}{\tau_4}\right) \\
l_4 &\equiv 0 \quad (\text{mod. } \tau_4),
\end{aligned}$$

wo $\delta_{11}$, $\delta_{22}$, $\delta_{33}$ relativ prim gegen die betreffenden Moduln sind, und $\tau_{234}$, $\tau_{34}$, $\tau_4$ grösseste gemeinsame Teiler von Partialdeterminanten der Substitutionsdeterminante

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix}$$

bedeuten; und zwar ist $\tau_{234}$ der grösseste gemeinsame Teiler der vier aus den drei letzten Zeilen zu bildenden Partialdeterminanten dritten Grades $\left(\frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{11}}, \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{12}}, \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{13}}, \frac{\partial \varDelta}{\partial \alpha_{14}}\right)$, $\tau_{34}$ derjenige der sechs aus den zwei letzten Zeilen zu bildenden Partialdeterminanten zweiten Grades, $\tau_4$ derjenige der Elemente der letzten Zeile.

Die in Nr. III gegebene Methode für die allgemeinste Umformung zweiter Art, welche auf einem Fundamentalsatz der Determinantentheorie und der Benutzung des Reduktionsergebnisses eben jenes Kongruenzensystems beruht, ist ohne weiteres von 3 auf n übertragbar. Die durch den Algorithmus der Reduktion zu bestimmenden Hilfskonstanten $\delta_{ik}$ gehen, wie bei Formel 18, heraus. Die Endformel lautet für n = 4:

$$19)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{h_1 h_2 h_3 h_4} f(h_1, h_2, h_3, h_4) = \sum_{0}^{\frac{\varDelta}{\tau_{234}}-1}{}^{\nu_1} \sum_{0}^{\frac{\tau_{234}}{\tau_{34}}-1}{}^{\nu_2} \sum_{0}^{\frac{\tau_{34}}{\tau_4}-1}{}^{\nu_3} \sum_{0}^{\tau_4-1}{}^{\nu_4} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{l_1 l_2 l_3 l_4} f(\mathfrak{L}_1+\nu_1, \mathfrak{L}_2+\nu_2, \mathfrak{L}_3+\nu_3, \mathfrak{L}_4+\nu_4),\\ &\qquad\text{wo } \mathfrak{L}_i = \alpha_{i1} l_1 + \alpha_{i2} l_2 + \alpha_{i3} l_3 + \alpha_{i4} l_4, \ \ldots\ldots\ i = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}\right.$$

Es hat keine Schwierigkeit, die entsprechende Formel für eine nfache Reihe aufzustellen. Der Erwähnung wert scheint mir noch folgende leichte Begründung dieser Formel. Die Summierungszahlen $l_1 l_2 l_3 l_4$ haben das Kongruenzensystem § VI, $\mathfrak{G}$), $n = 4$ gesetzt, zu erfüllen; dies geschieht identisch, wenn man setzt

$$l_i = \varDelta . l_i' + \beta_{1i}\nu_1 + \beta_{2i}\nu_2 + \beta_{3i}\nu_3 + \beta_{4i}\nu_4, \ \ldots\ldots\ i = 1, 2, 3, 4,$$

wofür sich schreiben lässt

$$l_i = \left\{\left[\left(\frac{\varDelta l_i'}{\tau_{234}} + \frac{\beta_{1i}}{\tau_{234}}\nu_1\right)\frac{\tau_{234}}{\tau_{34}} + \frac{\beta_{2i}}{\tau_{34}}\nu_2\right]\frac{\tau_{34}}{\tau_4} + \frac{\beta_{3i}}{\tau_4}\nu_3\right\} . \tau_4 + \beta_{4i}\nu_4 .$$

Nun durchläuft $l_i$, wenn man zunächst $\nu_1 = 0, 1, \ldots\ldots \varDelta : \tau_{234} - 1$, $\nu_2 = \nu_3 = \nu_4 = 0$ setzt, alle durch $\tau_{234}$ und ausserdem durch den grössesten gemeinsamen Teiler von $\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}$ — soweit dieser nicht auch in $\tau_{234}$ steckt — teilbaren Zahlen; setzt man weiter $\nu_2 = 0, 1, \ldots\ldots \tau_{234} : \tau_{34} - 1$, so durchläuft $l_i$ alle durch $\tau_{34}$ und ausserdem durch den grössesten gemeinsamen Teiler von $\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}$ — soweit letzterer nicht auch in $\tau_{34}$ steckt — teilbaren Zahlen. So weiter schliessend, erkennt man, dass $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4$ gerade die in Formel 19 angegebenen Intervalle durchmessen müssen, wenn $l_i$ alle durch den grössesten Teiler von $\beta_{1i}, \beta_{2i}, \beta_{3i}, \beta_{4i}$ teilbaren Zahlen durchlaufen soll, was zufolge § VI, $\mathfrak{F}$) erforderlich ist. — Doch entbehrt diese Begründung der völligen Strenge, welche letztere nur durch die in Nr. III des gegenwärtigen Paragraphen angewendete Beweismethode zu erreichen ist.

## § VIII. **Formeln für das Produkt zweier Thetareihen.**

Die Potenzenreihen für die elliptischen Transcendenten $\vartheta$ erfüllen, wenn der reelle Teil von $\log q$ negativ, die Voraussetzung der unbedingten Konvergenz; auf sie ist daher die im vorhergehenden dargelegte Umformungstheorie anwendbar. — Soll die Substitution $h = \alpha\mathfrak{l} + \beta\mathfrak{l}_1$, $h_1 = \alpha_1\mathfrak{l} + \beta_1\mathfrak{l}_1$, angewandt auf $\vartheta_3(x, q^a) . \vartheta_3(x_1, q^{a_1})$, wieder Produkte zweier Thetareihen liefern, so muss sie die Bedingung $a\alpha\beta + a_1\alpha_1\beta_1 = 0$ erfüllen, woraus folgt $\alpha\beta : \alpha_1\beta_1 = -a_1 : a$, also, wenn $a = a' . a''$, $a_1 = a_1' a_1''$ eine beliebige Zerfällung der ganzen Zahlen a und $a_1$ in ganzzahlige Faktoren bezeichnet:

$$\alpha = a_1'\varphi,\ \beta = a_1''\psi,\ \alpha_1 = -a'\psi,\ \beta_1 = a''\varphi,\ \varDelta = \alpha\beta_1 - \alpha_1\beta = a_1' a''\varphi^2 + a_1'' a'\psi^2.$$

Behufs Anwendbarkeit der Formel 10 bestimme ich, es sei a relativ prim gegen $a_1$, $\varphi$ gegen $a' a_1''\psi$, $\psi$ gegen $a_1' a''\varphi$. Dann ist nach § IV, wenn man $\varepsilon = 1$ nimmt, schliesslich zu setzen

$$\mathrm{h} = \frac{\alpha l+\beta l_1}{\varDelta_1}+\frac{\alpha\delta_1-\beta\delta}{\varDelta}\nu\ ,\ \mathrm{h}_1 = \frac{\alpha_1 l+\beta_1 l_1}{\varDelta_1}+\frac{\alpha_1\delta_1-\beta_1\delta}{\varDelta}\nu,$$

wo $\delta$ und $\delta_1$ relative Primzahlen zu $\varDelta$ bezeichnen, die die beiden Quotienten $(\alpha\delta_1-\beta\delta):\varDelta$ und $(\alpha_1\delta_1-\beta_1\delta):\varDelta$ identisch zu ganzen Zahlen machen; ihre Berechnung ist in § IV angegeben. Nach gehöriger Rechnung wird

$$\mathrm{ah}^2+\mathrm{a}_1\mathrm{h}_1^2 = \mathrm{a}'\mathrm{a}_1'\cdot\frac{\varDelta_2}{\varDelta_1}l^2+\mathrm{a}''\mathrm{a}_1''\cdot\frac{\varDelta_2}{\varDelta_1}l_1^2+\frac{2\nu}{\varDelta_2}\left(\mathrm{a}'\mathrm{a}_1'\frac{\varDelta_2}{\varDelta_1}\delta_1 l-\mathrm{a}''\mathrm{a}_1''\frac{\varDelta_2}{\varDelta_1}\delta l_1\right)+\frac{\nu^2}{\varDelta_2^2}\left(\mathrm{a}'\mathrm{a}_1'\frac{\varDelta_2}{\varDelta_1}\delta_1^2+\mathrm{a}''\mathrm{a}_1''\frac{\varDelta_2}{\varDelta_1}\delta^2\right)$$

$$\mathrm{hx}+\mathrm{h}_1\mathrm{x}_1 = \frac{\mathrm{a}_1'\varphi\mathrm{x}-\mathrm{a}'\psi\mathrm{x}_1}{\varDelta_1}l+\frac{\mathrm{a}_1''\psi\mathrm{x}+\mathrm{a}''\varphi\mathrm{x}_1}{\varDelta_1}l_1+\nu\cdot\frac{(\mathrm{a}_1'\varphi\mathrm{x}-\mathrm{a}'\psi\mathrm{x}_1)\,\delta_1-(\mathrm{a}_1''\psi\mathrm{x}+\mathrm{a}''\varphi\mathrm{x}_1)\delta}{\varDelta},$$

oder $\mathrm{ah}^2+\mathrm{a}_1\mathrm{h}_1^2 = \mathrm{A}l^2+\mathrm{A}_1 l_1^2+\frac{2\nu}{\varDelta_2}(\mathrm{A}\delta_1 l-\mathrm{A}_1\delta l_1)+\frac{\nu^2}{\varDelta_2^2}(\mathrm{A}\delta_1^2+\mathrm{A}_1\delta^2)$, $\mathrm{hx}+\mathrm{h}_1\mathrm{x}_1 = Xl+X_1 l_1+\frac{\nu}{\varDelta_2}(X\delta_1-X_1\delta)$,

$$\text{wo } \mathrm{A} = \mathrm{a}'\mathrm{a}_1'\cdot\frac{\varDelta_2}{\varDelta_1}\ ,\ \ \mathrm{A}_1 = \mathrm{a}''\mathrm{a}_1''\cdot\frac{\varDelta_2}{\varDelta_1},\ \ X = \frac{\mathrm{a}_1'\varphi\mathrm{x}-\mathrm{a}'\psi\mathrm{x}_1}{\varDelta_1},\ \ X_1 = \frac{\mathrm{a}_1''\psi\mathrm{x}+\mathrm{a}''\varphi\mathrm{x}_1}{\varDelta_1}.$$

Setzt man hienach in Formel 10 ein $\mathrm{f(h,h_1)} = \mathrm{q}^{\mathrm{ah}^2+\mathrm{a}_1\mathrm{h}_1^2}.\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(\mathrm{hx}+\mathrm{h}_1\mathrm{x}_1)}$, so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$\text{I)}\quad \vartheta_3(\mathrm{x},\mathrm{q}^{\mathrm{a}}).\vartheta_3(\mathrm{x}_1,\mathrm{q}^{\mathrm{a}_1}) = \frac{1}{\varDelta_1}\cdot\sum_0^{\varDelta_1-1}{}^{\mu}\ \sum_0^{\varDelta_2-1}{}^{\nu}\ \mathrm{q}^{\frac{\nu^2}{\varDelta_2^2}\cdot(\mathrm{A}\delta_1^2+\mathrm{A}_1\delta^2)}.\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\nu}{\varDelta_2}(X\delta_1-X_1\delta)}.\vartheta_3\left(X+\frac{\delta\mu\pi}{\varDelta_1}-\frac{\delta_1\nu\mathrm{i}.\log\mathrm{q}^{\mathrm{A}}}{\varDelta_2},\mathrm{q}^{\mathrm{A}}\right)$$

$$\times\vartheta_3\left(X_1+\frac{\delta_1\mu\pi}{\varDelta_1}+\frac{\delta\nu\mathrm{i}.\log\mathrm{q}^{\mathrm{A}_1}}{\varDelta_2},\mathrm{q}^{\mathrm{A}_1}\right)$$

In diese Formel setze ich

$$\mathrm{x} = \xi+\frac{\varepsilon\varrho\pi}{\varDelta_{21}}-\frac{\varepsilon_1\sigma\mathrm{i}.\log\mathrm{q}^{\mathrm{a}}}{\varDelta_{11}}\ ,\quad \mathrm{x}_1 = \xi_1+\frac{\varepsilon_1\varrho\pi}{\varDelta_{21}}+\frac{\varepsilon\sigma\mathrm{i}.\log\mathrm{q}^{\mathrm{a}_1}}{\varDelta_{11}},$$

wo $\varDelta_{21}$ einen Teiler von $\varDelta_2$, $\varDelta_{11}$ einen Teiler von $\varDelta_1$, $\varrho$ und $\sigma$ beliebige Zahlen bedeuten. Ich frage, welche ganzzahligen Werte $\varepsilon$ und $\varepsilon_1$ annehmen können, wenn $X$ sich nur um Vielfache von $\pi$ und $\mathrm{i}.\log\mathrm{q}^{\mathrm{A}}$, $X_1$ sich nur um Vielfache von $\pi$ und $\mathrm{i}.\log\mathrm{q}^{\mathrm{A}_1}$ ändern soll. Es wird

$$X = \frac{\alpha\xi+\alpha_1\xi_1}{\varDelta_1}+\frac{\alpha\varepsilon+\alpha_1\varepsilon_1}{\varDelta_1\varDelta_{21}}\varrho\pi-\frac{\alpha\mathrm{a}\varepsilon_1-\alpha_1\mathrm{a}_1\varepsilon}{\varDelta_2\varDelta_{11}\mathrm{a}_1'\mathrm{a}_1'}\sigma\mathrm{i}.\log\mathrm{q}^{\mathrm{A}},$$

$$X_1 = \frac{\beta\xi+\beta_1\xi_1}{\varDelta_1}+\frac{\beta\varepsilon+\beta_1\varepsilon_1}{\varDelta_1\varDelta_{21}}\varrho\pi-\frac{\beta\mathrm{a}\varepsilon_1-\beta_1\mathrm{a}_1\varepsilon}{\varDelta_2\varDelta_{11}\mathrm{a}''\mathrm{a}_1''}\sigma\mathrm{i}.\log\mathrm{q}^{\mathrm{A}_1}.$$

Die Koefficienten von $\varrho\pi$ und $\sigma\mathrm{i}.\log\mathrm{q}^{\mathrm{A}}$ und $\sigma\mathrm{i}.\log^{\mathrm{A}_1}$ werden, wie bestimmt, ganze Zahlen, wenn man setzt

$$\varepsilon = -\alpha_1 = \mathrm{a}'\psi,\ \ \varepsilon_1 = \alpha = \mathrm{a}_1'\varphi\ ,\ \ \text{oder } \varepsilon = \beta_1 = \mathrm{a}''\varphi\ ,\ \ \varepsilon_1 = -\beta = -\mathrm{a}_1''\psi.$$

Es werde

$$X = \Xi+\frac{\alpha\varepsilon+\alpha_1\varepsilon_1}{\varDelta_1\varDelta_{21}}\varrho\pi-\gamma_1\sigma\mathrm{i}.\log\mathrm{q}^{\mathrm{A}}\ ,\quad X_1 = \Xi_1+\frac{\beta\varepsilon+\beta_1\varepsilon_1}{\varDelta_1\varDelta_{21}}\varrho\pi+\gamma\sigma\mathrm{i}.\log^{\mathrm{A}_1}.$$

Dann wird

$$e^{\frac{2i\nu}{\Delta_2}(X\delta_1 - X_1\delta)} = e^{\frac{2i\nu}{\Delta_2}(\Xi\delta_1 - \Xi_1\delta)} . e^{\frac{2i\nu\varrho\pi}{\Delta_2}\left(\frac{\alpha\varepsilon+\alpha_1\varepsilon_1}{\Delta_1\Delta_{21}}\delta_1 - \frac{\beta\varepsilon+\beta_1\varepsilon_1}{\Delta_1\Delta_{21}}\delta\right)} . e^{-\frac{2i\nu\sigma}{\Delta_2}(\gamma_1\delta_1 i . \log q^{A} + \gamma\delta i . \log q^{A_1})}$$

$$\vartheta_3\left(X + \frac{\delta\mu\pi}{\Delta_1} - \frac{\delta_1\nu i . \log q^{A}}{\Delta_2}, q^{A}\right) = q^{-A\gamma_1^2\sigma^2} . e^{-2i\sigma\gamma_1\left(\Xi + \frac{\delta\mu\pi}{\Delta_1} - \frac{\delta_1\nu i . \log q^{A}}{\Delta_2}\right)} . \vartheta_3\left(\Xi + \frac{\delta\mu\pi}{\Delta_1} - \frac{\delta_1\nu i . \log q^{A}}{\Delta_2}, q^{A}\right)$$

$$\vartheta_3\left(X_1 + \frac{\delta_1\mu\pi}{\Delta_1} + \frac{\delta\nu i . \log q^{A_1}}{\Delta_2}, q^{A_1}\right) = q^{-A_1\gamma^2\sigma^2} . e^{2i\sigma\gamma\left(\Xi_1 + \frac{\delta_1\mu\pi}{\Delta_1} + \frac{\delta\nu i . \log q^{A_1}}{\Delta_2}\right)} . \vartheta_3\left(\Xi_1 + \frac{\delta_1\mu\pi}{\Delta_1} + \frac{\delta\nu i . \log q^{A_1}}{\Delta_2}, q^{A_1}\right)$$

Wirft man alles, worin $\varrho$ und $\sigma$, jedoch nicht zugleich $\mu$ und $\nu$, vorkommt, auf die linke Seite, so geht nun die Formel I über in

$$q^{\sigma^2(A\gamma_1^2 + A_1\gamma^2)} . e^{2i\sigma(\Xi\gamma_1 - \Xi_1\gamma)} . \vartheta_3\left(\xi + \frac{\varepsilon\varrho\pi}{\Delta_{21}} - \frac{\varepsilon_1\sigma i . \log q^{a}}{\Delta_{11}}, q^{a}\right) . \vartheta_3\left(\xi_1 + \frac{\varepsilon_1\varrho\pi}{\Delta_{21}} + \frac{\varepsilon\sigma i . \log q^{a_1}}{\Delta_{11}}, q^{a_1}\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta_1} . \sum_0^{\Delta_1 - 1}{}^{\mu} \sum_0^{\Delta_2 - 1}{}^{\nu} . q^{\frac{\nu^2}{\Delta_2^2}(A\delta_1^2 + A_1\delta^2)} . e^{\frac{2i\nu}{\Delta_2}(\Xi\delta_1 - \Xi_1\delta)} . \vartheta_3\left(\Xi + \frac{\delta\mu\pi}{\Delta_1} - \frac{\delta_1\nu i . \log q^{A}}{\Delta_2}, q^{A}\right) . \vartheta_3\left(\Xi_1 + \frac{\delta_1\mu\pi}{\Delta_1} + \frac{\delta\nu i . \log q^{A_1}}{\Delta_2}; q^{A_1}\right)$$

mal $P_\varrho . P_\sigma$,

$$\text{wo } P_\varrho = e^{\left(\frac{\alpha\varepsilon+\alpha_1\varepsilon_1}{\Delta_1\Delta_{21}}\delta_1 - \frac{\beta\varepsilon+\beta_1\varepsilon_1}{\Delta_1\Delta_{21}}\delta\right) . \frac{2i\nu\varrho\pi}{\Delta_2}}, \quad P_\sigma = e^{(\gamma\delta_1 - \gamma_1\delta) . \frac{2i\mu\sigma\pi}{\Delta_1}}.$$

Die erhaltene Gleichung summiere ich in Bezug auf $\varrho$ von 0 bis $\Delta_{21} - 1$, in Bezug auf $\sigma$ von 0 bis $\Delta_{11} - 1$. Auf der rechten Seite ist nur $P_\varrho$ in Bezug auf $\varrho$, $P_\sigma$ in Bezug auf $\sigma$ zu summieren, da sonst rechts $\varrho$ und $\sigma$ nicht vorkommen. Nun ergiebt sich für die beiden vorhin angebenen Wertepaare von $\varepsilon, \varepsilon_1$ Folgendes, worin $\frac{\Delta_2}{\Delta_{21}} = \Delta_{22}$, $\frac{\Delta_1}{\Delta_{11}} = \Delta_{12}$ gesetzt ist:

| | $\varepsilon$ | $\varepsilon_1$ | $\frac{\alpha\varepsilon+\alpha_1\varepsilon_1}{\Delta_1\Delta_{21}}$ | $\frac{\beta\varepsilon+\beta_1\varepsilon_1}{\Delta_1\Delta_{21}}$ | $\gamma$ | $\gamma_1$ | $P_\varrho$ | $P_\sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1^{\text{tens}}$ | $-\alpha_1$ | $\alpha$ | 0 | $\Delta_{22}$ | 0 | $\Delta_{12}$ | $e^{2i\delta\nu\frac{\varrho\pi}{\Delta_{21}}}$ | $e^{-2i\delta\mu\frac{\sigma\pi}{\Delta_{11}}}$ |
| $2^{\text{tens}}$ | $\beta_1$ | $-\beta$ | $\Delta_{22}$ | 0 | $\Delta_{12}$ | 0 | $e^{2i\delta_1\nu\frac{\varrho\pi}{\Delta_{21}}}$ | $e^{2i\delta_1\mu\frac{\sigma\pi}{\Delta_{11}}}$ |

Mithin ist, da $\delta$ und $\delta_1$ relative Primzahlen gegen $\Delta$ sind, in beiden Fällen

$$\sum_0^{\Delta_{21}-1}{}^{\varrho} P_\varrho = \Delta_{21} \text{ oder } 0,$$

je nachdem $\nu$ durch $\Delta_{21}$ teilbar oder nicht teilbar ist; ebenso

$$\sum_{0}^{\Delta_{11}-1}{}^{\sigma}\, P_\sigma = \Delta_{11} \text{ oder } 0,$$

je nachdem $\mu$ durch $\Delta_{11}$ teilbar oder nicht teilbar ist. Mithin fallen rechts eine Menge Glieder fort, und es bleiben nur übrig die Glieder, in welchen $\nu$ durch $\Delta_{21}$, $\mu$ durch $\Delta_{11}$ teilbar ist, d. h. es ist zu setzen $\mu\,.\,\Delta_{11}$ für $\mu$ und $\nu\,.\,\Delta_{21}$ für $\nu$, wo das neue $\mu$ die Zahlen $0, 1, \ldots\ldots \Delta_{12}-1$, das neue $\nu$ die Zahlen $0, 1, \ldots\ldots \Delta_{22}-1$ durchläuft; und diese übrig bleibende Summe erhält den Multiplikator $\Delta_{11}\,.\,\Delta_{21}$. Berücksichtigt man nun noch die durch einfache Rechnung zu erhaltenden Gleichungen

$$A\gamma_1^2 + A_1\gamma^2 = \frac{a\varepsilon_1^2 + a_1\varepsilon^2}{\Delta_{11}^2}, \quad \Xi\gamma_1 - \Xi_1\gamma = \frac{\xi\varepsilon_1 - \xi_1\varepsilon}{\Delta_{11}},$$

und setzt man schliesslich wieder x für $\xi$, $x_1$ für $\xi_1$, so folgt:

II) Es ist

$$\frac{1}{\Delta_{21}}\cdot\sum_{0}^{\Delta_{21}-1}{}^{\varrho}\;\sum_{0}^{\Delta_{11}-1}{}^{\sigma}\; q^{\sigma^2\cdot\frac{a\varepsilon_1^2+a_1\varepsilon^2}{\Delta_{11}^2}}\,.\,e^{2i\sigma\frac{x\varepsilon_1-x_1\varepsilon}{\Delta_{11}}}\,.\,\vartheta_3\left(x+\frac{\varepsilon\varrho\pi}{\Delta_{21}}-\frac{\varepsilon_1\sigma i.\log q^{a}}{\Delta_{11}},\, q^{a}\right).\,\vartheta_3\left(x_1+\frac{\varepsilon_1\varrho\pi}{\Delta_{21}}+\frac{\varepsilon\sigma i.\log q^{a_1}}{\Delta_{11}},\, q^{a_1}\right)$$

$$=\frac{1}{\Delta_{12}}\cdot\sum_{0}^{\Delta_{12}-1}{}^{\mu}\;\sum_{0}^{\Delta_{22}-1}{}^{\nu}\; q^{\nu^2\cdot\frac{A\delta_1^2+A_1\delta^2}{\Delta_{22}^2}}\,.\,e^{2i\nu\cdot\frac{X\delta_1-X_1\delta}{\Delta_{22}}}\,.\,\vartheta_3\left(X+\frac{\delta\mu\pi}{\Delta_{12}}-\frac{\delta_1\nu i.\log q^{A}}{\Delta_{22}},\, q^{A}\right).\,\vartheta_3\left(X_1+\frac{\delta_1\mu\pi}{\Delta_{12}}+\frac{\delta\nu i.\log q^{A_1}}{\Delta_{22}},\, q^{A_1}\right),$$

wenn $\Delta_{11}\cdot\Delta_{12}\cdot\Delta_{21}\cdot\Delta_{22} = \Delta_1\cdot\Delta_2 = \Delta = a_1'a''\varphi^2 + a_1''a'\psi^2$,

$$A = a'a_1'\cdot\frac{\Delta_{21}\Delta_{22}}{\Delta_{11}\Delta_{12}}, \quad A_1 = a''a_1''\cdot\frac{\Delta_{21}\Delta_{22}}{\Delta_{11}\Delta_{12}}, \quad X = \frac{a_1'\varphi x - a'\psi x_1}{\Delta_{11}\Delta_{12}}, \quad X_1 = \frac{a_1''\psi x + a''\varphi x_1}{\Delta_{11}\Delta_{12}}$$

ist, $\delta$ und $\delta_1$ gemäss § IV bestimmt werden, und

entweder $\varepsilon = a'\psi$, $\varepsilon_1 = a_1'\varphi$, $a\varepsilon_1^2 + a_1\varepsilon^2 = a'a_1'\Delta$, $x\varepsilon_1 - x_1\varepsilon = \Delta_{11}\Delta_{12}X$,

oder $\varepsilon = a''\varphi$, $\varepsilon_1 = -a_1''\psi$, $a\varepsilon_1^2 + a_1\varepsilon^2 = a''a_1''\Delta$, $x\varepsilon_1 - x_1\varepsilon = -\Delta_{11}\Delta_{12}X_1$ ist.

---

Bemerkenswerte besondere Fälle dieses allgemeinen Theorems ergeben die drei Annahmen: 1) $\Delta_{21} = \Delta_2$, $\Delta_{11} = \Delta_1$, $\Delta_{22} = \Delta_{12} = 1$ 2) $\Delta_{21} = \Delta_2$, $\Delta_{11} = 1$, $\Delta_{22} = 1$, $\Delta_{12} = \Delta_1$ 3) $\Delta_{21} = 1$, $\Delta_{11} = \Delta_1$, $\Delta_{22} = \Delta_2$, $\Delta_{12} = 1$.

Für jedes Zahlenpaar $aa_1$ ergeben sich, ganz abgesehen von der Willkürlichkeit der Zahlen $\varphi$ und $\psi$, verschiedene Formeln je nach den verschiedenen Zerfällungen von a und $a_1$ in zwei Faktoren; ihre Anzahl ist $2mm_1$ oder $2mm_1-m_1$ oder $2mm_1-m$ oder $2mm_1-m-m_1$, je nachdem weder a noch $a_1$ eine Quadratzahl ist oder a eine solche ist oder $a_1$ es ist oder beide es sind. Ein gemeinsamer Teiler von $a'$ und $a''$ resp. von $a_1'$ und $a_1''$ ist immer quadratischer Teiler von a resp. $a_1$ und bezüglich grössester Teiler von $\alpha_1$ und $\beta_1$ resp. $\alpha$ und $\beta$, d. h. gleich $\mathfrak{f}$ resp. $\mathfrak{f}_1$ in § IV. Ist entweder $a'$ gegen $a''$ relativ prim, oder $a_1'$ gegen $a_1''$, oder beides zugleich, so sind die Annahmen $\delta = \alpha_1$, $\delta_1 = \beta_1$ resp. $\delta = \alpha$, $\delta_1 = \beta$ resp. beide zulässig. Dann ergeben sich aus I) und II) bezüglich folgende Theoreme:

III. Sind $a = a'a''$, $a_1 = a_1'a_1''$, $\Delta = \Delta_1 . \Delta_2$ irgend welche Zerfällungen in zwei Faktoren von den Zahlen a, $a_1$ und $\Delta = a_1'a''\varphi^2 + a_1''a'\psi^2$, wo a relativ prim gegen $a_1$, $\varphi$ gegen $a_1''a'\psi$, $\psi$ gegen $a_1'a''\varphi$ sein muss, und ist

$$A = a'a_1' . \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ A_1 = a''a_1'' . \frac{\Delta_2}{\Delta_1},\ X = \frac{a_1'\varphi x - a'\psi x_1}{\Delta_1},\ X_1 = \frac{a_1''\psi x + a''\varphi x_1}{\Delta_1},$$

so ist, **erstens**, wenn $a'$ und $a''$ relativ prim sind,

$$\vartheta_3(x, q^a) . \vartheta_3(x_1, q^{a_1})$$

$$= \frac{1}{\Delta_1} \sum_0^{\Delta_1 - 1}{}^{\mu} \sum_0^{\Delta_2 - 1}{}^{\nu} q^{a\nu^2} . e^{2i\nu x} . \vartheta_3\left(X - a'\psi\frac{\mu\pi}{\Delta_1} - a''\varphi . \frac{\nu i . \log q^A}{\Delta_2}, q^A\right) . \vartheta_3\left(X_1 + a''\varphi\frac{\mu\pi}{\Delta_1} - a'\psi . \frac{\nu i . \log q^{A_1}}{\Delta_2} . q^{A_1}\right),$$

**zweitens**, wenn $a_1'$ und $a_1''$ relativ prim sind,

$$\vartheta_3(x, q^a) . \vartheta_3(x_1, q^{a_1})$$

$$= \frac{1}{\Delta_1} \sum_0^{\Delta_1 - 1}{}^{\mu} \sum_0^{\Delta_2 - 1}{}^{\nu} . q^{a_1\nu^2} . e^{-2i\nu x_1} . \vartheta_3\left(X + a_1'\varphi\frac{\mu\pi}{\Delta_1} - a_1''\psi\frac{\nu i . \log q^A}{\Delta_2}, q^A\right) . \vartheta_3\left(X_1 + a_1''\psi\frac{\mu\pi}{\Delta_1} + a_1'\varphi\frac{\nu i . \log q^{A_1}}{\Delta_2}, q^{A_1}\right),$$

**drittens**, wenn $a'$, $a''$, $a_1'$. $a_1''$ relativ prim zu je zwei sind, gelten beide Formeln zugleich.

IV.) Gelten dieselben Bezeichnungen wie in III) und ist ausserdem $\Delta_{11} . \Delta_{12} = \Delta_1$, $\Delta_{21} . \Delta_{22} = \Delta_2$, so ist

$$L = R,$$

wo L

$$= \frac{1}{\Delta_{21}} \sum_0^{\Delta_{21} - 1}{}^{\varrho} \sum_0^{\Delta_{11} - 1}{}^{\sigma} q^{A\Delta_{12}^2\sigma^2} e^{2i\sigma\Delta_{12}X} . \vartheta_3\left(x + a'\psi\frac{\varrho\pi}{\Delta_{21}} - a_1'\varphi\frac{\sigma i . \log q^a}{\Delta_{11}}, q^a\right) . \vartheta_3\left(x_1 + a_1'\varphi\frac{\varrho\pi}{\Delta_{21}} + a'\psi\frac{\sigma i . \log q^{a_1}}{\Delta_{11}}, q^{a_1}\right)$$

$$= \frac{1}{\Delta_{21}} \sum_0^{\Delta_{21} - 1}{}^{\varrho} \sum_0^{\Delta_{11} - 1}{}^{\sigma} q^{A_1\Delta_{12}^2\sigma^2} e^{-2i\sigma\Delta_{12}X_1} . \vartheta_3\left(x + a''\varphi\frac{\varrho\pi}{\Delta_{21}} + a_1''\psi\frac{\sigma i . \log q^a}{\Delta_{11}}, q^a\right) . \vartheta_3\left(x_1 - a_1''\psi\frac{\varrho\pi}{\Delta_{21}} + a''\varphi\frac{\sigma i . \log q^{a_1}}{\Delta_{21}}, q^{a_1}\right)$$

ist und **erstens**, wenn $a'$ und $a''$ relative Primzahlen sind,

$$R = \frac{1}{\Delta_{12}} \sum_0^{\Delta_{12} - 1}{}^{\mu} \sum_0^{\Delta_{22} - 1}{}^{\nu} q^{a\Delta_{21}^2\nu^2} e^{2i\nu\Delta_{21}x} . \vartheta_3\left(X - a'\psi\frac{\mu\pi}{\Delta_{12}} - a''\varphi\frac{\nu i . \log q^A}{\Delta_{22}}, q^A\right) . \vartheta_3\left(X_1 + a''\varphi\frac{\mu\pi}{\Delta_{12}} - a'\psi\frac{\nu i . \log q^{A_1}}{\Delta_{22}}, q^{A_1}\right),$$

**zweitens**, wenn $a_1'$ und $a_1''$ relative Primzahlen sind,

$$R = \frac{1}{\Delta_{12}} \sum_0^{\Delta_{12} - 1}{}^{\mu} \sum_0^{\Delta_{22} - 1}{}^{\nu} q^{a_1\Delta_{21}^2\nu^2} . e^{-2i\nu\Delta_{21}X_1} . \vartheta_3\left(X + a_1'\varphi\frac{\mu\pi}{\Delta_{12}} - a_1''\psi\frac{\nu i . \log q^A}{\Delta_{22}}, q^A\right) . \vartheta_3\left(X_1 + a_1''\psi\frac{\mu\pi}{\Delta_{12}} + a_1'\varphi\frac{\nu i . \log q^{A_1}}{\Delta_{22}}\ q^{A_1}\right)$$

ist, **drittens**, wenn $a'$, $a''$, $a_1'$, $a_1''$ relativ prim zu je zwei sind, beide für R angegebene Ausdrücke zu gleich gelten.

Aus dem Theorem III ergiebt sich die allgemeinste Formel von Schröter (§ 1, 5 auf S. 6 der zweiten im Eingange genannten Abhandlung), wenn man $a' = 1$, $a'' = a$, $a_1' = 1$, $a_1'' = a_1$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \Delta$ setzt und ausserdem $x$ und $x_1$ durch $X$ und $X_1$ ausdrückt. Ihr zur Seite stellt sich eine zweite Formel, die der Annahme $a'' = 1$, $a' = a$, $a_1' = 1$, $a_1'' = a_1$ entspricht. Wenn $a$ und $a_1$ absolute Primzahlen, so sind dies die beiden einzigen Formeln. In meinen Bezeichnungen und für beliebiges $\Delta_1$ und $\Delta_2$ lauten sie so:

$$\text{V)}\quad \vartheta_3(x, q^a)\,.\,\vartheta_3(x_1, q^{a_1}) = \frac{1}{\Delta_1}\sum_0^{\Delta_1-1}{}^{\mu}\sum_0^{\Delta_2-1}{}^{\nu}\, q^{a\nu^2}.e^{2i\nu x}\,.\,\vartheta_3\left(\frac{\varphi x-\psi x_1}{\Delta_1}-\frac{\psi\mu\pi}{\Delta_1}-\frac{a\varphi\nu i\log q^{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}}{\Delta_2}, q^{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}\right)$$
$$\times\,\vartheta_3\left(\frac{a_1\psi x+a\varphi x_1}{\Delta_1}+\frac{a\varphi\mu\pi}{\Delta_1}-\frac{\psi\nu i\log q^{aa_1\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}}{\Delta_2}, q^{aa_1\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}\right)$$
$$= \frac{1}{\Delta_1}\sum_0^{\Delta_1-1}{}^{\mu}\sum_0^{\Delta_2-1}{}^{\nu}\, q^{a_1\nu^2}\,e^{-2i\nu x_1}\,.\,\vartheta_3\left(\frac{\varphi x-\psi x_1}{\Delta_1}+\frac{\varphi\mu\pi}{\Delta_1}-\frac{a_1\psi\nu i\log q^{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}}{\Delta_2}, q^{\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}\right)$$
$$\times\,\vartheta_3\left(\frac{a_1\psi x+a\varphi x_1}{\Delta_1}+\frac{a_1\psi\mu\pi}{\Delta_1}+\frac{\varphi\nu i\log q^{aa_1\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}}{\Delta_2}, q^{aa_1\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}\right),$$

wo $\Delta_1 . \Delta_2 = \Delta = a\varphi^2 + a_1\psi^2$, $a$ relativ prim gegen $a_1$, $\varphi$ gegen $a_1\psi$, $\psi$ gegen $a\varphi$.

$$\text{VI.}\quad \vartheta_3(x, q^a)\cdot\vartheta_3(x_1, q^{a_1}) = \frac{1}{\Delta_1}\sum_0^{\Delta_1-1}{}^{\mu}\sum_0^{\Delta_2-1}{}^{\nu}\, q^{a\nu^2}\,e^{2i\nu x}\,.\,\vartheta_3\left(\frac{\varphi x-a\psi x_1}{\Delta_1}-\frac{a\psi\mu\pi}{\Delta_1}-\frac{\varphi\nu i\,.\log q^{a\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}}{\Delta_2}, q^{a\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}\right)$$
$$\times\,\vartheta_3\left(\frac{a\psi x+\varphi x_1}{\Delta_1}+\frac{\varphi\mu\pi}{\Delta_1}-\frac{a\psi\nu i\,.\log q^{a_1\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}}{\Delta_2}, q^{a_1\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}\right)$$
$$= \frac{1}{\Delta_1}\sum_0^{\Delta_1-1}{}^{\mu}\sum_0^{\Delta_2-1}{}^{\nu}\, q^{a_1\nu^2}.e^{-i\nu x_1}.\,\vartheta_3\left(\frac{\varphi x-a\psi x_1}{\Delta_1}+\frac{\varphi\mu\pi}{\Delta_1}-\frac{a_1\psi\nu i\,.\log q^{a.\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}}{\Delta_2}, q^{a.\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}\right)$$
$$\times\,\vartheta_3\left(\frac{a\psi x+\varphi x_1}{\Delta_1}+\frac{a_1\psi\mu\pi}{\Delta_1}+\frac{\varphi\nu i.\log q^{a_1.\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}}{\Delta_2}, q^{a_1.\frac{\Delta_2}{\Delta_1}}\right)$$

wo $\Delta_1\Delta_2 = \Delta = \varphi^2 + aa_1\psi^2$, $a$ relativ prim gegen $a_1$, $\varphi$ gegen $aa_1\psi$.

Zwei entsprechende Formeln ergeben sich aus dem Theorem IV. Sie scheinen mir von Bedeutung für die Theorie der Modulargleichungen in irrationaler Form. Eine Auseinandersetzung hierüber, ebenso wie die Darlegung weiterer Anwendungen der Reihenumformung, welche sich auf die Theorie der Thetafunktionen von zwei und mehr Variablen beziehen, muss, da der dieser Arbeit zur Verfügung gestellte Raum erschöpft ist, späterer Veröffentlichung vorbehalten bleiben.

Königsberg i. Pr., im Februar 1891.

**Eduard Huebner.**