Beitrag

zur

theoretischen Erklärung der Interferenzerscheinungen, welche Platten aus Zwillingskrystallen im konvergenten polarisierten Lichte zeigen.

Die Interferenzerscheinungen, welche Platten aus Zwillingskrystallen im konvergenten polarisierten Lichte zeigen, sind für mehr oder weniger specielle Fälle schon von verschiedenen Seiten behandelt worden. Am vollständigsten ist dieses wohl von Fr. Pockels für Zwillingsplatten optisch einaxiger Krystalle, deren Grenzflächen der Zwillingsfläche parallel sind, geschehen (Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen, 1890). Hier, wie in der „Physikalischen Krystallographie" von Liebisch (Leipzig, 1891) findet man auch die einschlägige Literatur zusammengestellt. Es soll nun im folgenden der Versuch gemacht werden, eine allgemeine Theorie zur Erklärung der in Rede stehenden Erscheinungen zu geben, dieselbe möglichst weit zu verfolgen und dann auf einige spezielle Fälle anzuwenden.

Da es sich nicht um Messungen, sondern nur um die Art der Erscheinungen handelt, so sollen ausser den bei der Behandlung von Interferenzerscheinungen in Krystallplatten auch sonst üblichen beschränkenden Annahmen nach folgende beiden gemacht werden. Erstens sei vorausgesetzt, dass sich die Richtung der Lichtwellen bei dem Übertritt aus einem Krystallindividuum in das benachbarte nicht ändere. Diese Voraussetzung ist zulässig, da die Brechungsindices in dem ganzen Komplexe von verschiedenen Individuen derselben Substanz sich innerhalb gewisser Grenzen sehr nahe kommen. Sodann sei angenommen, dass an der Grenze zweier Individuen keine Schwächung des Lichtes durch Reflexion eintritt.

Ob die Verwachsungsfläche parallel oder senkrecht zur Zwillingsebene liegt, ist gleichgültig; nur sollen für einen Zwilling aus mehreren Individuen alle Zwillingsebenen unter einander und alle Verwachsungsflächen unter einander parallel sein. Die Richtung, in welcher die Grenzflächen den Zwilling schneiden, ist vollkommen beliebig. In § 5 und § 6 werden die beiden Grenzflächen einander parallel angenommen.

§ 1. Durchgang des polarisierten Lichtes durch m Krystallindividuen derselben Substanz, welche untereinander nach demselben Zwillingsgesetze verbunden sind.

In Fig. 1 sei die Ebene der Zeichnung parallel zu den Lichtwellen, die sich in dem System von m Individuen fortpflanzen und sämtlich aus einer einfallenden linear polarisierten einfarbigen Lichtwelle entstanden sind. Die Schwingungen des in das erste Individuum eintretenden Lichtes mögen parallel OP stattfinden und durch die Funktion $a \cos \tau$ dargestellt werden. Beim Eintritt in den Krystall zerlegt sich dieselbe in zwei Schwingungen, welche senkrecht zu einander stattfinden und sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen. Die schneller fortschreitende Schwingung finde parallel OH_1, die langsamer fortschreitende parallel OS_1 statt. Der Winkel POH_1 sei gleich ψ, wobei der Winkel hier, wie auch später in dem Sinne positiv gerechnet werden soll, welcher durch die Pfeilspitze in der Figur angedeutet ist.

Die beiden Schwingungen werden dann durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$h_1 = a \cos \psi \cos \tau, \quad s_1 = - a \sin \psi \cos \tau. \tag{1}$$

Bezeichnet man den Phasenunterschied, den die beiden Schwingungen beim Durchgang durch das erste Individuum erlangen, mit $2\varDelta_1$, so treten folgende Schwingungen aus dem ersten in das zweite Individuum:

$$h_1 = a \cos \psi \cos (\tau - \varDelta_1), s_1 = - a \sin \psi \cos (\tau + \varDelta_1). \tag{2}$$

Jede von diesen Schwingungen wird beim Eintritt in das zweite Individuum wiederum in zwei zerlegt, die auf einander senkrecht stehen und sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen. Die schneller fortschreitende finde parallel OH_2 statt, die andere parallel OS_2, der Winkel H_1OH_2 sei gleich ϑ und die Phasendifferenz, die diese beiden Schwingungen beim Durchgang durch das zweite Individuum erreichen, sei gleich $2\varDelta_2$. Da man die Schwingungen, welche in derselben Richtung stattfinden, durch Addition zusammensetzen kann, treten dann in das zweite Individuum die Schwingungen:

$$\begin{aligned} h_2 &= a \cos \psi . \gamma \cos (\tau - \varDelta_1) - a \sin \psi . \sigma \cos (\tau + \varDelta_1) \\ s_2 &= - a \cos \psi . \sigma \cos (\tau - \varDelta_1) - a \sin \psi . \gamma \cos (\tau + \varDelta_1) \end{aligned} \tag{3}$$

ein und aus demselben treten die Schwingungen:

$$\begin{aligned} h_2 &= a \cos \psi . \gamma \cos (\tau - \varDelta_1 - \varDelta_2) - a \sin \psi . \sigma \cos (\tau + \varDelta_1 - \varDelta_2) \\ s_2 &= - a \cos \psi . \sigma \cos (\tau - \varDelta_1 + \varDelta_2) - a \sin \psi . \gamma \cos (\tau + \varDelta_1 + \varDelta_2), \end{aligned} \tag{4}$$

worin $\cos \vartheta = \gamma$, $\sin \vartheta = \sigma$ gesetzt ist.

Da nun jedes folgende Individuum mit dem vorhergehenden durch eine Drehung von 180° um die Zwillingsaxe in parallele Stellung gebracht werden kann, so sind alle Individuen von ungerader Stellenzahl unter einander, so wie alle Individuen von gerader Stellenzahl unter einander, gleich orientiert.

Die Schwingungen finden also in jenen parallel OH_1 und OS_1, in diesen parallel OH_2 und OS_2 statt.

Die Phasendifferenz, welche die beiden Schwingungen im pten Individium erhalten, sei $2\varDelta_p$. Dann ergeben sich durch Betrachtungen, die den obigen analog sind, die nachfolgenden Schwingungen beim Austritt aus dem dritten Individuum:

$$
\begin{aligned}
(5)\qquad h_3 &= a\cos\psi\,\gamma^2\cos(\tau - \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3) - a\sin\psi\,\gamma\,\sigma\cos(\tau + \Delta_1 - \Delta_2 - \Delta_3)\\
&\quad + a\cos\psi\,\sigma^2\cos(\tau - \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3) + a\sin\psi\,\gamma\,\sigma\cos(\tau + \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3)\\
s_3 &= a\cos\psi\,\gamma\,\sigma\cos(\tau - \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3) - a\sin\psi\,\sigma^2\cos(\tau + \Delta_1 - \Delta_2 + \Delta_3)\\
&\quad - a\cos\psi\,\gamma\,\sigma\cos(\tau - \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) - a\sin\psi\,\gamma^2\cos(\tau + \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3)
\end{aligned}
$$

Vergleicht man (2), (4) und (5) mit einander, so ergiebt sich, dass

1. von den Kombinationen der Vorzeichen in $\cos(\tau \pm \Delta_1 \pm \Delta_2 \ldots \pm \Delta_p)$ jede einmal vorkommt,
2. die Glieder mit $-\Delta_p$ in h_p, die Glieder mit $+\Delta_p$ in s_p vorkommen,
3. die Glieder mit $-\Delta_1$ den Faktor $\cos\psi$, die Glieder mit $+\Delta_1$ den Faktor $\sin\psi$ haben,
4. zu jedem Gliede der Faktor $\gamma^f\sigma^w$ hinzutritt, worin f die Anzahl der Zeichenfolgen, w die Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Δ bedeutet, und
5. die Glieder mit $\sin\psi$ den Faktor -1 und sämtliche Glieder noch den Faktor $(-1)^n$ haben, worin n gleich der Anzahl der Zeichenwechsel in der Reihe der Δ ist, bei welchen das Δ von gerader Stellenzahl positiv ist.

Man würde demnach beim Austritt aus dem pten Individuum erhalten:

$$
\begin{aligned}
(6)\qquad h_p &= a\cos\psi\sum(-1)^n\gamma^f\sigma^w\cos(\tau - \Delta_1 \mp \Delta_2 \mp \Delta_3 \ldots \mp \Delta_{p-1} - \Delta_p)\\
&\quad - a\sin\psi\sum(-1)^n\gamma^f\sigma^w\cos(\tau + \Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{p-1} - \Delta_p)\\
s_p &= a\cos\psi\sum(-1)^n\gamma^f\sigma^w\cos(\tau - \Delta_1 \mp \Delta_2 \mp \Delta_3 \ldots \mp \Delta_{p-1} + \Delta_p)\\
&\quad - a\sin\psi\sum(-1)^n\gamma^f\sigma^w\cos(\tau + \Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots, \pm \Delta_{p-1} + \Delta_p).
\end{aligned}
$$

Beim Eintritt in das $(p+1)$te Individium entstehen hieraus die Schwingungen (Fig. 1)

$$
\begin{aligned}
h_{p+1} &= \gamma h_p - \sigma s_p,\quad s_{p+1} = \sigma h_p + \gamma s_p \text{ für gerade p,}\\
h_{p+1} &= \gamma h_p + \sigma s_p,\quad s_{p+1} = -\sigma h_p + \gamma s_p \text{ für ungerade p.}
\end{aligned}
$$

Allgemein wäre also:

$$
(7)\qquad h_{p+1} = \gamma h_p + (-1)^{p-1}\sigma s_p,\quad s_{p+1} = (-1)^p\sigma h_p + \gamma s_p.
$$

Beim Austritt aus dem $(p+1)$ten Individuum ergiebt sich daher:

$$
\begin{aligned}
h_{p+1} &= a\cos\psi\sum(-1)^n\gamma^{f+1}\sigma^w\cos(\tau - \Delta_1 \mp \Delta_2 \mp \Delta_3 \ldots \mp \Delta_{p-1} - \Delta_p - \Delta_{p+1})\\
(8)\qquad &\quad + a\cos\psi\sum(-1)^{n+p-1}\gamma^f\sigma^{w+1}\cos(\tau - \Delta_1 \mp \Delta_2 \mp \Delta_3 \ldots \mp \Delta_{p-1} + \Delta_p - \Delta_{p+1})\\
&\quad - a\sin\psi\sum(-1)^n\gamma^{f+1}\sigma^w\cos(\tau + \Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{p-1} - \Delta_p - \Delta_{p+1})\\
&\quad - a\sin\psi\sum(-1)^{n+p-1}\gamma^f\sigma^{w+1}\cos(\tau + \Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{p-1} + \Delta_p - \Delta_{p+1})\\
s_{p+1} &= a\cos\psi\sum(-1)^{n+p}\gamma^f\sigma^{w+1}\cos(\tau - \Delta_1 \mp \Delta_2 \mp \Delta_3 \ldots \mp \Delta_{p-1} - \Delta_p + \Delta_{p+1})\\
&\quad + a\cos\psi\sum(-1)^n\gamma^{f+1}\sigma^w\cos(\tau - \Delta_1 \mp \Delta_2 \mp \Delta_3 \ldots \mp \Delta_{p-1} + \Delta_p + \Delta_{p+1})\\
&\quad - a\sin\psi\sum(-1)^{n+p}\gamma^f\sigma^{w+1}\cos(\tau + \Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{p-1} - \Delta_p + \Delta_{p+1})\\
&\quad - a\sin\psi\sum(-1)^n\gamma^{f+1}\sigma^w\cos(\tau + \Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{p-1} + \Delta_p + \Delta_{p+1}).
\end{aligned}
$$

Es ist leicht zu ersehen, dass auch diese Ausdrücke den obigen fünf Bedingungen genügen, wenn man dieselben auf $(p+1)$ statt auf p anwendet. Damit ist die allgemeine Giltigkeit der Gleichungen (6) erwiesen. Jede der Summen enthält darin 2^{p-2} Glieder.

Die aus dem letzten, dem mten Individuum austretenden Schwingungen sollen nun durch einen Analysator sich fortpflanzen, welcher nur Licht hindurchlässt, bei dem die Schwingungen parallel OA stattfinden. Der Winkel POA sei gleich χ und der Winkel H_m OA gleich α. Es folgt dann:

(9) $$\alpha = \chi - \psi \text{ für ungerades m,}$$
$$\alpha = \chi - \psi - \vartheta \text{ für gerades m.}$$

Die aus dem Analysator tretende Schwingung wird dargestellt durch:

(10) $$A_m = h_m \cos\alpha + s_m \sin\alpha.$$

Es ergiebt sich daher aus (6) und (10):

(11)
$$\begin{aligned} A_m = {} & a \cos\alpha \cos\psi \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \cos(\tau - \varDelta_1 \mp \varDelta_2 \mp \varDelta_3 \dots \mp \varDelta_{m-1} - \varDelta_m) \\ & - a \sin\alpha \sin\psi \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \cos(\tau + \varDelta_1 \pm \varDelta_2 \pm \varDelta_3 \dots \pm \varDelta_{m-1} + \varDelta_m) \\ & - a \cos\alpha \sin\psi \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \cos(\tau + \varDelta_1 \pm \varDelta_2 \pm \varDelta_3 \dots \pm \varDelta_{m-1} - \varDelta_m) \\ & + a \sin\alpha \cos\psi \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \cos(\tau - \varDelta_1 \mp \varDelta_2 \mp \varDelta_3 \dots \mp \varDelta_{m-1} + \varDelta_m). \end{aligned}$$

Dreht man in einer der Reihen $-\varDelta_1 \mp \varDelta_2 \mp \varDelta_3 \dots \mp \varDelta_{m-1} - \varDelta_m$ und $-\varDelta_1 \mp \varDelta_2 \mp \varDelta_3 \dots \mp \varDelta_{m-1} + \varDelta_m$ sämtliche Vorzeichen um, so bleiben die Anzahl der Zeichenfolgen und die Anzahl der Zeichenwechsel dieselben. Zeichenwechsel, bei denen ein $\varDelta$ gerader Stellenzahl positiv ist, gehen aus den Zeichenwechseln hervor, bei denen dieses $\varDelta$ vorher negativ war; ihre Anzahl ist also jetzt w — n. In den Reihen der ersten Art muss w eine gerade Zahl, in den Reihen der zweiten Art eine ungerade Zahl sein. Für die Reihen der ersten Art erhält man daher $(-1)^n = (-1)^{w-n}$, für die Reihen der zweiten Art dagegen $(-1)^n = -(-1)^{w-n}$. Berücksichtigt man dieses, so erhält man:

(12)
$$\begin{aligned} A_m = {} & a \cos\alpha \cos\psi \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \Big[\cos\tau \cos(\varDelta_1 \pm \varDelta_2 \pm \varDelta_3 \dots \pm \varDelta_{m-1} + \varDelta_m) + \sin\tau \sin(\varDelta_1 \pm \varDelta_2 \pm \varDelta_3 \dots \pm \varDelta_{m-1} + \varDelta_m)\Big] \\ & - a \sin\alpha \sin\psi \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \Big[\cos\tau \cos(\varDelta_1 \pm \varDelta_2 \pm \varDelta_3 \dots \pm \varDelta_{m-1} + \varDelta_m) - \sin\tau \sin(\varDelta_1 \pm \varDelta_2 \pm \varDelta_3 \dots \pm \varDelta_{m-1} + \varDelta_m)\Big] \\ & - a \cos\alpha \sin\psi \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \Big[\cos\tau \cos(\varDelta_1 \pm \varDelta_2 \pm \varDelta_3 \dots \pm \varDelta_{m-1} - \varDelta_m) - \sin\tau \sin(\varDelta_1 \pm \varDelta_2 \pm \varDelta_3 \dots \pm \varDelta_{m-1} - \varDelta_m)\Big] \\ & - a \sin\alpha \cos\psi \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \Big[\cos\tau \cos(\varDelta_1 \pm \varDelta_2 \pm \varDelta_3 \dots \pm \varDelta_{m-1} - \varDelta_m) + \sin\tau \sin(\varDelta_1 \pm \varDelta_2 \pm \varDelta_3 \dots \pm \varDelta_{m-1} - \varDelta_m)\Big] \end{aligned}$$

Setzt man:

$$C_m = \cos(\alpha + \psi) \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \cos(\varDelta_1 \pm \varDelta_2 \pm \varDelta_3 \dots \pm \varDelta_{m-1} + \varDelta_m) - \sin(\alpha + \psi) \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \cos(\varDelta_1 \pm \varDelta_2 \pm \varDelta_3 \dots \pm \varDelta_{m-1} - \varDelta_m)$$
$$S_m = \cos(\alpha - \psi) \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \sin(\varDelta_1 \pm \varDelta_2 \pm \varDelta_3 \dots \pm \varDelta_{m-1} + \varDelta_m) - \sin(\alpha - \psi) \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \sin(\varDelta_1 \pm \varDelta_2 \pm \varDelta_3 \dots \pm \varDelta_{m-1} - \varDelta_m),$$

so folgt:

(13) $$A_m = a\, C_m \cos\tau + a\, S_m \sin\tau.$$

Für die Intensität des austretenden Lichtes ergiebt sich:

(14) $$I_m = a^2 (C^2_m + S^2_m).$$

§ 2. Drehung des Analysators oder des Polarisators um 90°.

Dreht man den Analysator um 90°, so wächst α um 90°; man erhält nun die Intensität:

$$I_m' = a^2 (C'^2_m + S'^2_m)$$

$$C'_m = -\sin(\alpha+\psi)\sum(-1)^n \gamma^f \sigma^w \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{m-1} + \Delta_m) - \cos(\alpha+\psi)\sum(-1)^n \gamma^f \sigma^w \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{m-1} - \Delta_m)$$
$$S'_m = -\sin(\alpha-\psi)\sum(-1)^n \gamma^f \sigma^w \sin(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{m-1} + \Delta_m) - \cos(\alpha-\psi)\sum(-1)^n \gamma^f \sigma^w \sin(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{m-1} - \Delta_m)$$

und es ist:

$$(I_m + I'_m)/a^2 = C_m^2 + S_m^2 + C_m'^2 + S_m'^2$$

(15)
$$= \left[\sum(-1)^n \gamma^f \sigma^w \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{m-1} + \Delta_m)\right]^2 + \left[\sum(-1)^n \gamma^f \sigma^w \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{m-1} - \Delta_m)\right]^2$$
$$+ \left[\sum(-1)^n \gamma^f \sigma^w \sin(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{m-1} + \Delta_m)\right]^2 + \left[\sum(-1)^n \gamma^f \sigma^w \sin(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{m-1} - \Delta_m)\right]^2$$

Die Quadrate der Summen bestehen aus der Summe der Quadrate der einzelnen Glieder und der Summe der doppelten Produkte je zweier Glieder. In jedem von diesen doppelten Produkten muss wenigstens ein Glied Δ vorkommen, welches in beiden Faktoren verschiedene Vorzeichen hat. Sind die Vorzeichen bei Δ_{m-1} verschieden, so kann man die vier Produkte:

$$(-1)^{n_1} \gamma^{f_1} \sigma^{w_1} \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots + \Delta_{m-1} + \Delta_m)\,(-1)^{n_2} \gamma^{f_2} \sigma^{w_2} \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots - \Delta_{m-1} + \Delta_m)$$
$$(-1)^{n_1} \gamma^{f_1} \sigma^{w_1} \sin(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots + \Delta_{m-1} + \Delta_m)\,(-1)^{n_2} \gamma^{f_2} \sigma^{w_2} \sin(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots - \Delta_{m-1} + \Delta_m)$$
$$(-1)^{n_1+m} \gamma^{f_1-1} \sigma^{w_1+1} \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots + \Delta_{m-1} - \Delta_m)\,(-1)^{n_2-m+1} \gamma^{f_2+1} \sigma^{w_2-1} \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots - \Delta_{m-1} - \Delta_m)$$
$$(-1)^{n_1+m} \gamma^{f_1-1} \sigma^{w_1+1} \sin(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots + \Delta_{m-1} - \Delta_m)\,(-1)^{n_2-m+1} \gamma^{f_2+1} \sigma^{w_2-1} \sin(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots - \Delta_{m-1} - \Delta_m)$$

zusammenfassen und erhält, wenn $\Delta_x, \Delta_y \ldots \Delta_{m-1}$ die Glieder mit verschiedenen Vorzeichen in den Produkten sind, als Summe der vier Produkte:

$$(-1)^{n_1+n_2} \gamma^{f_1+f_2} \sigma^{w_1+w_2} \cos 2(\pm \Delta_x \pm \Delta_y \ldots + \Delta_{m-1}) + (-1)^{n_1+n_2+1} \gamma^{f_1+f_2} \sigma^{w_1+w_2} \cos 2(\pm \Delta_x \pm \Delta_y \ldots + \Delta_{m-1}) = 0.$$

Es mögen ferner in einem der doppelten Produkte die Vorzeichen von Δ_{m-1} einander gleich und Δ_p das letzte Δ sein, bei welchem die Vorzeichen verschieden sind. Fasst man dann die folgenden vier Glieder:

$$(-1)^{n_1} \gamma^{f_1} \sigma^{w_1} \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \ldots + \Delta_p + \Delta_{p+1} + \Delta_{p+2} \pm \Delta_{p+3} \ldots + \Delta_m)$$
$$(-1)^{n_2} \gamma^{f_2} \sigma^{w_2} \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \ldots - \Delta_p + \Delta_{p+1} + \Delta_{p+2} \pm \Delta_{p+3} \ldots + \Delta_m),$$
$$(-1)^{n_1} \gamma^{f_1-2} \sigma^{w_1+2} \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \ldots + \Delta_p - \Delta_{p+1} + \Delta_{p+2} \pm \Delta_{p+3} \ldots + \Delta_m)$$
$$(-1)^{n_2+1} \gamma^{f_2} \sigma^{w_2} \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \ldots - \Delta_p - \Delta_{p+1} + \Delta_{p+2} \pm \Delta_{p+3} \ldots + \Delta_m),$$
$$(-1)^{n_1+p} \gamma^{f_1-1} \sigma^{w_1+1} \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \ldots + \Delta_p + \Delta_{p+1} - \Delta_{p+2} \mp \Delta_{p+3} \ldots - \Delta_m)$$
$$(-1)^{n_2+p} \gamma^{f_2-1} \sigma^{w_2+1} \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \ldots - \Delta_p + \Delta_{p+1} - \Delta_{p+2} \mp \Delta_{p+3} \ldots - \Delta_m),$$
$$(-1)^{n_1+p+1} \gamma^{f_1-1} \sigma^{w_1+1} \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \ldots + \Delta_p - \Delta_{p+1} - \Delta_{p+2} \mp \Delta_{p+3} \ldots - \Delta_m)$$
$$(-1)^{n_2+p} \gamma^{f_1+1} \sigma^{w_2-1} \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \ldots - \Delta_p - \Delta_{p+1} - \Delta_{p+2} \mp \Delta_{+3} \ldots - \Delta_m)$$

und die entsprechenden, in welchen sin statt cos steht, zusammen, so ergiebt sich als Summe derselben:

$$(-1)^{n_1+n_2} \gamma^{f_1+f_2} \sigma^{w_1+w_2} \cos 2(\pm \Delta_x \pm \Delta_y \ldots + \Delta_p) + (-1)^{n_1+n_2+1} \gamma^{f_1+f_2-2} \sigma^{w_1+w_2+2} \cos 2(\pm \Delta_x \pm \Delta_y \ldots + \Delta_p)$$
$$+ (-1)^{n_1+n_2} \gamma^{f_1+f_2-2} \sigma^{w_1+w_2+2} \cos 2(\pm \Delta_x \pm \Delta_y \ldots + \Delta_p) + (-1)^{n_1+n_2+1} \gamma^{f_1+f_2} \sigma^{w_1+w_2} \cos 2(\pm \Delta_x \pm \Delta_y \ldots + \Delta_p) = 0.$$

Die Summe aller doppelten Produkte in (15) ist also gleich Null. Von den Quadraten kann man immer zwei

$$\gamma^{2f} \sigma^{2w} \cos^2(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{m-1} \pm \Delta_m) + \gamma^{2f} \sigma^{2w} \sin^2(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \ldots \pm \Delta_{m-1} \pm \Delta_m) = \gamma^{2f} \sigma^{2w}$$

zusammenfassen und erhält dieses Glied so oft, als sich in der Reihe der Δ Vorzeichenkombinationen bilden lassen, welche w Zeichenwechsel enthalten. Es folgt also:

$$C_m^2 + S_m^2 + C'^2_m + S'^2_m = \gamma^{2m-2} + (m-1)\gamma^{2m-4}\sigma^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2}\gamma^{2m-6}\sigma^4 + \ldots + \sigma^{2m-2}$$
$$= (\gamma^2 + \sigma^2)^{m-1} = 1.$$

Für die Intensitäten erhält man daher:

(16)
$$I_m + I'_m = a^2.$$

Bei Drehung des Analysators um 90^0 tritt daher in jedem Falle die der ursprünglichen komplementäre Färbung des Gesichtsfeldes auf. Dasselbe findet, wie leicht ersichtlich, bei Drehung des Polarisators um 90^0 statt. Es geht daraus hervor, dass man bei der Erklärung der Erscheinungen, welche idiocyklophane Krystalle zeigen, die pag. 1 eingeführten Voraussetzungen nicht sämtlich machen darf, dass vielmehr bei diesen Erscheinungen die Reflexion an den Grenzflächen eine wesentliche Rolle spielt.

§ 3. Die Kegelflächen $\operatorname{tg} 2\vartheta = \text{const.}$

Die Gleichungen (13) und (14) geben die Intensitäten des Lichtes, welches den Krystall in einer bestimmten Richtung durchdrungen hat. Betrachtet man nun den Krystall in konvergentem polarisiertem Lichte, so wird das Gesichtsfeld die Farbenverteilung zeigen, welche ebenfalls durch jene Gleichungen gegeben ist, worin aber die Δ und die Winkel α, ψ und ϑ von Punkt zu Punkt wechselnde Werte haben. Die Veränderlichkeit von Δ, α und ψ tritt auch bei den Erscheinungen, welche eine Krystallplatte aus einem einzelnen Individuum zeigt, auf; es kommt also für die Zwillinge noch die Veränderlichkeit des Winkels ϑ hinzu.

Setzt man in (13) die aus (9) fliessenden Worte von α ein, so erhält man für ungerade m:

$$\begin{aligned} C_m &= \cos\chi \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \dots \pm \Delta_{m-1} + \Delta_m) - \sin\chi \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \dots \pm \Delta_{m-1} - \Delta_m) \\ S_m &= \cos(\chi - 2\psi) \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \sin(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \dots \pm \Delta_{m-1} + \Delta_m) - \sin(\chi - 2\psi) \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^w \sin(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \dots \pm \Delta_{m-1} - \Delta_m) \end{aligned} \tag{17}$$

und für gerade m:

$$\begin{aligned} C_m = {} & \cos\chi \sum (-1)^n \gamma^{f+1} \sigma^w \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \dots \pm \Delta_{m-1} + \Delta_m) - \sin\chi \sum (-1)^n \gamma^{f+1} \sigma^w \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \dots \pm \Delta_{m-1} - \Delta_m) \\ & + \sin\chi \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^{w+1} \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \dots \pm \Delta_{m-1} + \Delta_m) + \cos\chi \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^{w+1} \cos(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \dots \pm \Delta_{m-1} - \Delta_m) \\ S_m = {} & \cos(\chi - 2\psi) \sum (-1)^n \gamma^{f+1} \sigma^w \sin(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \dots \pm \Delta_{m-1} + \Delta_m) \\ & - \sin(\chi - 2\psi) \sum (-1)^n \gamma^{f+1} \sigma^w \sin(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \dots \pm \Delta_{m+1} - \Delta_m) \\ & + \sin(\chi - 2\psi) \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^{w+1} \sin(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \dots \pm \Delta_{m+1} + \Delta_m) \\ & + \cos(\chi - 2\psi) \sum (-1)^n \gamma^f \sigma^{w+1} \sin(\Delta_1 \pm \Delta_2 \pm \Delta_3 \dots \pm \Delta_{m+1} - \Delta_m) \end{aligned} \tag{18}$$

Soll die Intensität an einer Stelle gleich Null sein, so müssen C_m und S_m für sich gleich Null werden. Man wird also im allgemeinen für einfarbiges Licht in dem Interferenzbild nach dem Austritt keine dunklen Curven, sondern nur die Durchschnitte von zwei Curvensystemen als dunkle Flecken sehen. Da C_m nicht von ψ abhängt, so bleibt dieser Teil des Intensitätsausdruckes bei einer Drehung des Präparates in seiner Ebene ungeändert. Der Wert, welchen ϑ annimmt, ist für beide Teile des Intensitätsausdruckes von der grössten Bedeutung.

Da $f + w = m - 1$ ist, kommen γ und σ zusammen nur in geraden Potenzen vor und man kann die Grössen C_m und S_m so darstellen, dass sie nur $\sin 2\vartheta$ und $\cos 2\vartheta$ und nicht mehr $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ enthalten.

Der Wert von 2ϑ soll nun für eine beliebige Richtung in dem Zwillingskrystalle bestimmt werden. Die Figur 2 stellt in stereographischer Projektion die zu betrachtenden Linien dar. Jede der Linien soll, da sie ja nur ihrer Richtung nach bestimmt ist, durch einen Punkt O im Innern des Krystalles gehen und ihr Durchschnitt mit der Oberfläche einer Kugel mit dem Mittelpunkt O soll auf die Zwillingsebene, welche auf der Zwillingsaxe Z senkrecht steht, projiciert sein. Die optischen Axen im ersten Individuum seien A_1 und A_1' und mögen mit Z die Winkel ϱ und ϱ' bilden, welche kleiner als 90^0 sind. Der Winkel A_1ZA_1' sei gleich 2ε. Die optischen Axen des zweiten Individuums A_2 und A_2' sind dann dadurch bestimmt, dass Winkel $ZA_2 = ZA_1$, Winkel $ZA_2' = ZA_1'$ sein muss und dass A_1ZA_2 und $A_1'ZA_2'$ in je einer Ebene liegen müssen. Die Ebene ZX halbiere den Winkel A_1ZA_1' und N sei die Richtung, für welche 2ϑ zu bestimmen ist. Der Winkel XZN sei gleich η und Winkel $ZN = \varphi$.

Wenn die Schwingungen, welche sich im ersten Individuum schneller fortpflanzen, in der Ebene stattfinden, welche den Winkel A_1NA_1' halbiert, so finden sie auch im zweiten Individuum in der Halbierungsebene des Winkels A_2NA_2' statt. Gehen die Schwingungen im ersten Individuum senkrecht zu der angegebenen Ebene vor sich, so sind sie auch im zweiten Individuum senkrecht zu der Halbierungsebene von A_2NA_2'. In beiden Fällen erhält man:

$$\sphericalangle A_1 NA_2 + \sphericalangle A_1' NA_2' = -2\vartheta \pm 2h\pi. \tag{19}$$

Nun ist aber:

$$\cos(NA_1) = \cos\varrho\cos\varphi + \sin\varrho\sin\varphi\cos(\eta+\varepsilon),\ \cos(NA_2) = \cos\varrho\cos\varphi - \sin\varrho\sin\varphi\cos(\eta+\varepsilon)$$

$$\begin{aligned}\cos(A_1 NA_2)\sin(NA_1)\sin(NA_2) &= \cos 2\varrho - \cos(NA_1)\cos(NA_2)\\ &= \cos 2\varrho - \cos^2\varrho\cos^2\varphi + \sin^2\varrho\sin^2\varphi\cos^2(\eta+\varepsilon)\\ &= \cos^2\varrho\sin^2\varphi - \sin^2\varrho\sin^2\varphi\sin^2(\eta+\varepsilon) - \sin^2\varrho\cos^2\varphi\\ \sin(A_1 NA_2)\sin(NA_1)\sin(NA_2) &= \sin(NA_1)\sin(NA_1 A_2)\sin 2\varrho\\ &= \sin\varphi\sin(\eta+\varepsilon)\sin 2\varrho = 2\sin\varrho\cos\varrho\sin\varphi\sin(\eta+\varepsilon).\end{aligned}$$

Analog erhält man:

$$\cos(A_1' NA_2')\sin(NA_1')\sin(NA_2') = \cos^2\varrho'\sin^2\varphi - \sin^2\varrho'\sin^2\varphi\sin^2(\eta-\varepsilon) - \sin^2\varrho'\cos^2\varphi$$
$$\sin(A_1' NA_2')\sin(NA_1')\sin(NA_2') = 2\sin\varrho'\cos\varrho'\sin\varphi\sin(\eta-\varepsilon).$$

Aus (19) folgt ferner:

$$\begin{aligned}&\sin 2\vartheta\Big[\cos(A_1NA_2)\cos(A_1'NA_2') - \sin(A_1NA_2)\sin(A_1'NA_2')\Big]\\ &+ \cos 2\vartheta\Big[\sin(A_1NA_2)\cos(A_1'NA_2') + \sin(A_1'NA_2')\cos(A_1NA_2)\Big] = 0\end{aligned}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\sin(NA_1)\sin(NA_2)\sin(NA_1')\sin(NA_2')$ so ergiebt sich:

$$\begin{aligned}&\sin 2\vartheta\Big[(\cos^2\varrho\sin^2\varphi - \sin^2\varrho\sin^2\varphi\sin^2(\eta+\varepsilon) - \sin^2\varrho\cos^2\varphi)(\cos^2\varrho'\sin^2\varphi - \sin^2\varrho'\sin^2\varphi\sin^2(\eta-\varepsilon)\\ &\qquad - \sin^2\varrho'\cos^2\varphi) - 4\sin\varrho\cos\varrho\sin\varrho'\cos\varrho'\sin^2\varphi\sin(\eta+\varepsilon)\sin(\eta-\varepsilon)\Big]\\ &+\cos 2\vartheta\, 2\sin\varphi\Big[\sin\varrho\cos\varrho\sin(\eta+\varepsilon)\Big(\cos^2\varrho'\sin^2\varphi - \sin^2\varrho'\sin^2\varphi\sin^2(\eta-\varepsilon) - \sin^2\varrho'\cos^2\varphi\Big)\\ &\qquad + \sin\varrho'\cos\varrho'\sin(\eta-\varepsilon)\Big(\cos^2\varrho\sin^2\varphi - \sin^2\varrho\sin^2\varphi\sin^2(\eta+\varepsilon) - \sin^2\varrho\cos^2\varphi\Big)\Big] = 0\end{aligned} \tag{20}$$

Zu jedem Wertepaar φ und η kann man hieraus $\operatorname{tg} 2\vartheta$ eindeutig bestimmen und 2ϑ bis auf ein ganzes Vielfaches von π berechnen.

Ist dagegen der Wert von $\operatorname{tg} 2\vartheta$ gegeben, so stellt (20) eine Gleichung zwischen η und φ dar. Dieses ist die Gleichung derjenigen Kegelfläche, auf welcher alle Richtungen liegen, für die der Winkel der Polarisationsebenen im Zwilling einen konstanten Wert ϑ oder den Wert $\vartheta + 90^0$ hat.

Die Gleichung (20) wird unabhängig von dem Werte von ϑ identisch erfüllt für folgende Wertepaare:

$$\eta = -\varepsilon,\ \varphi = \pm\varrho;\ \eta = 180^0 - \varepsilon,\ \varphi = \pm\varrho;\ \eta = +\varepsilon,\ \varphi = \pm\varrho';\ \eta = 180^0 + \varepsilon,\ \varphi = \pm\varrho'.$$

Jede der Kegelflächen $\operatorname{tg} 2\vartheta = \text{const.}$ geht also durch die vier optischen Axen hindurch und bei diesem Durchgange ändert sich der Wert von ϑ jedesmal um 90^0. Im übrigen erfüllt die Schar aller dieser Kegelflächen den Raum so, dass durch jede Gerade N nur eine Fläche hindurchgeht. Die Flächen können sich also ausserhalb der optischen Axen nicht schneiden.

Von besonderem Interesse ist die Kegelfläche $\operatorname{tg} 2\vartheta = 0$. Ihre Gleichung lautet, wenn man von dem Faktor $\sin\varphi = 0$ absieht, welcher die Zwillingsaxe isoliert darstellt:

$$\sin^2\varphi \Big[\sin\varrho\cos\varrho\cos^2\varrho'\sin(\eta+\varepsilon) - \sin\varrho\cos\varrho\sin^2\varrho'\sin(\eta+\varepsilon)\sin^2(\eta-\varepsilon) + \sin\varrho'\cos\varrho'\cos^2\varrho\sin(\eta-\varepsilon)$$
$$- \sin\varrho'\cos\varrho'\sin^2\varrho\sin(\eta-\varepsilon)\sin^2(\eta+\varepsilon)\Big] - \cos^2\varphi\sin\varrho\sin\varrho'\Big(\sin\varrho'\cos\varrho\sin(\eta+\varepsilon) + \sin\varrho\cos\varrho'\sin(\eta-\varepsilon)\Big) = 0$$

oder:

$$\sin^2\varphi\, \mathrm{EF} - \cos^2\varphi\sin\varrho\sin\varrho'\,\mathrm{G} = 0, \tag{21}$$

worin gesetzt ist:

$$\sin\varrho\cos\varrho'\sin(\eta+\varepsilon) + \sin\varrho'\cos\varrho\sin(\eta-\varepsilon) = \mathrm{E},\quad \cos\varrho\cos\varrho' - \sin\varrho\sin\varrho'\sin(\eta+\varepsilon)\sin(\eta-\varepsilon) = \mathrm{F}.$$
$$\sin\varrho'\cos\varrho\sin(\eta+\varepsilon) + \sin\varrho\cos\varrho'\sin(\eta-\varepsilon) = \mathrm{G}.$$

Da sich die Gleichung nicht ändert, wenn man darin $\eta + 180^0$ statt η setzt, so genügt es für die Kenntnis der Fläche, wenn man nur die Werte von η zwischen 0 und 180^0 berücksichtigt.. Man erhält:

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{\sin\varrho\sin\varrho'\,\mathrm{G}\,/\,\mathrm{EF}},$$

wobei nur das positive Zeichen der Wurzel zu berücksichtigen ist, da der negative Wert eine Linie der Kegelfläche giebt, die in der Ebene $\eta + 180^0$ liegt.

E wird gleich Null für den Wert η_0, wenn

$$\operatorname{tg}\eta_0 = \operatorname{tg}\varepsilon\sin(\varrho' - \varrho)\ /\ \sin(\varrho' + \varrho)$$

ist. Wenn $\varrho' > \varrho$ ist (für $\varrho' < \varrho$ würde die Fläche das Spiegelbild der hier betrachteten Fläche nach der Ebene XZ sein), ist $0 < \eta_0 < \varepsilon$. E wird < 0, wenn $0 \leqq \eta < \eta_0$ ist, und E wird > 0, wenn $\eta_0 < \eta \leqq 180^0$ ist.

G wird für η_2 gleich Null, wenn

$$\operatorname{tg}\eta_2 = -\operatorname{tg}\varepsilon\sin(\varrho' - \varrho)\ /\ \sin(\varrho' + \varrho)$$

also $\eta_2 = 180^0 - \eta_0$ ist. Für $0 \leqq \eta < \eta_2$ wird $\mathrm{G} > 0$ und für $\eta_2 < \eta \leqq 180^0$ wird $\mathrm{G} < 0$.

F kann gleich Null werden für η_1, wenn

$$\sin^2\eta_1 = \operatorname{cotg}\varrho\operatorname{cotg}\varrho' + \sin^2\varepsilon$$

ist. Wenn 1) $\operatorname{cotg}\varrho\operatorname{cotg}\varrho' < \cos^2\varepsilon$ ist, so erhält man für η_1 zwei reelle Werte η_1 und η_1', welche den Bedingungen genügen $\eta_1 + \eta_1' = 180^0$ und $\eta_1 > \varepsilon$. Wenn 2) $\operatorname{cotg}\varrho\operatorname{cotg}\varrho' = \cos^2\varepsilon$ ist, so wird $\eta_1 = \eta_1' = 90^0$. Wenn 3) $\operatorname{cotg}\varrho\operatorname{cotg}\varrho' > \cos^2\varepsilon$ ist, so hat η_1 keinen reellen Wert. Im letzten Falle ist F immer positiv. In den ersten Fällen ist $\mathrm{F} > 0$ für $0 \leqq \eta < \eta_1$ und $\eta_1' < \eta \leqq 180^0$ und $\mathrm{F} < 0$ für $\eta_1 < \eta < \eta_1'$.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Für} & 0 \leqq \eta < \eta_0 & \text{ist} & E < 0,\ F > 0,\ G > 0, & \text{also} & \varphi \text{ nicht reell,} \\
" & \eta = \eta_0 & " & E = 0,\ F > 0,\ G > 0, & " & \varphi = 90^0, \\
" & \eta_0 < \eta < \eta_1 & " & E > 0,\ F > 0,\ G > 0, & " & \varphi \text{ reell,} \\
" & \eta = \eta_1 & " & E > 0,\ F = 0,\ G > 0, & " & \varphi = 90^0, \\
" & \eta_1 < \eta < \eta_1' & " & E > 0,\ F < 0,\ G > 0, & " & \varphi \text{ nicht reell,} \\
" & \eta = \eta_1' & " & E > 0,\ F = 0,\ G > 0, & " & \varphi = 90^0, \\
" & \eta_1' < \eta < \eta_2 & " & E > 0,\ F > 0,\ G > 0, & " & \varphi \text{ reell,} \\
" & \eta = \eta_2 & " & E > 0,\ F > 0,\ G = 0, & " & \varphi = 0, \\
" & \eta_2 < \eta < 180^0 & " & E > 0,\ F > 0,\ G < 0, & " & \varphi \text{ nicht reell.}
\end{array}
$$

Zwischen η_0 und η_1 geht die Fläche durch A_1' und zwischen η_1' und η_2 geht sie durch A_2 hindurch. In Fig. 3 und Fig. 4 ist die Fläche für die beiden Fälle $\operatorname{cotg} \varrho \operatorname{cotg} \varrho' < \cos^2\varepsilon$ und $\operatorname{cotg} \varrho \operatorname{cotg} \varrho' > \cos^2\varepsilon$ dargestellt.

Die Kegelflächen $\operatorname{tg} 2\vartheta = \text{const.}$ nehmen eine einfachere Gestalt an, wenn die Zwillingsaxe in eine der optischen Symmetrieebenen des einzelnen Individuums fällt und auch, wenn der Zwilling aus optisch einaxigen Krystallen gebildet ist. Man hat also folgende specielle Fälle zu unterscheiden.

$$1.\ \varrho = \varrho',\quad 2.\ \varepsilon = 0,\quad 3.\ \varrho = \varrho' \text{ und } \varepsilon = 0.$$

Für diese drei Fälle sollen hier noch die Flächen $\operatorname{tg} 2\vartheta = 0$ betrachtet werden. Es folgt aus (21):

$$
(22)\quad
\begin{array}{l}
1.\ \text{für } \varrho = \varrho'\text{: } 2\sin\varrho \cos\varrho \cos\varepsilon \sin\eta \left[\sin^2\varphi \left(\cos^2\varrho - \sin^2\varrho \sin(\eta+\varepsilon)\sin(\eta-\varepsilon)\right) - \cos^2\varphi \sin^2\varrho\right] = 0 \\
2.\ \text{für } \varepsilon = 0\text{: } \sin(\varrho+\varrho')\sin\eta \left[\sin^2\varphi \left(\cos\varrho\cos\varrho' - \sin\varrho \sin\varrho' \sin^2\eta\right) - \cos^2\varphi \sin\varrho \sin\varrho'\right] = 0 \\
3.\ \text{für } \varrho = \varrho',\ \varepsilon = 0\text{: } 2\sin\varrho\cos\varrho \sin\eta \left[\sin^2\varphi \left(\cos^2\varrho - \sin^2\varrho \sin^2\eta\right) - \cos^2\varphi \sin^2\varrho\right] = 0
\end{array}
$$

In allen drei Fällen besteht also die Fläche $\operatorname{tg} 2\vartheta = 0$ aus der Ebene $\sin\eta = 0$ und einem Kegel zweiten Grades. Bezieht man diesen auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem, dessen Z-Axe mit der Zwillingsaxe zusammenfällt, dessen X-Axe in der Ebene $\eta = 0$ und dessen Y-Axe in der Ebene $\eta = 90^0$ liegt, so ist zu setzen:

$$r\cos\varphi = z,\ r\sin\varphi\cos\eta = x,\ r\sin\varphi\sin\eta = y;$$
$$r^2\sin^2\varphi = x^2 + y^2,\ r^2\sin^2\varphi\sin^2\eta = y^2,\ r^2\cos^2\varphi = z^2.$$

Die drei Kegel zweiten Grades werden dann durch folgende Gleichungen dargestellt:

$$
(23)\quad
\begin{array}{l}
1.\ (\cos^2\varrho + \sin^2\varrho \sin^2\varepsilon)\, x^2 + (\cos^2\varrho - \sin^2\varrho\cos^2\varepsilon)\, y^2 - \sin^2\varrho\, z^2 = 0 \\
2.\ \cos\varrho\cos\varrho'\, x^2 + \cos(\varrho+\varrho')\, y^2 - \sin\varrho\sin\varrho'\, z^2 = 0 \\
3.\ \cos^2\varrho\, x^2 + \cos 2\varrho\, y^2 - \sin^2\varrho\, z^2 = 0
\end{array}
$$

Die Koëffizienten von x^2 sind immer positiv, die von z^2 sind immer negativ und die von η können positiv oder negativ sein. In den Grenzfällen, in welchen die letzteren gleich Null sind, zerfallen die Kegel in zwei Ebenen:

$$
\begin{array}{l}
1.\ \text{für } \cos^2\varrho - \sin^2\varrho\cos^2\varepsilon = 0\text{: } (\sqrt{2}\,x + z)(\sqrt{2}\,x - z) = 0 \\
2.\ \text{für } \cos(\varrho+\varrho') = 0\text{: } (x+z)(x-z) = 0 \\
3.\ \text{für } \cos 2\varrho = 0\text{: } (x+z)(x-z) = 0.
\end{array}
$$

Der Schnitt des Kegels zweiten Grades mit der Ebene $\sin\eta = 0$ findet in den Linien statt, für welche in den 3 Fällen φ_0 durch folgende Gleichung bestimmt ist.

$$1.\ \operatorname{tg}^2\varphi_0 = \frac{\sin^2\varrho}{\cos^2\varrho + \sin^2\varrho\sin^2\varepsilon},\quad 2.\ \operatorname{tg}^2\varphi_0 = \operatorname{tg}\varrho\operatorname{tg}\varrho',\quad 3.\ \operatorname{tg}^2\varphi_0 = \operatorname{tg}^2\varrho.$$

Im ersten Falle liegen die optischen Axen auf dem Kegel zweiten Grades. Auf den Teilen des Kegels zwischen den optischen Axen, welche der Ebene $\sin \eta = 0$ benachbart sind, und in dieser Ebene selbst hat ϑ den Wert Null; in den andern Teilen des Kegels hat ϑ den Wert 90^0.

Im zweiten Fall liegen die optischen Axen in der Ebene $\sin \eta = 0$. Für diejenigen Teile dieser Ebene zwischen den optischen Axen, welche von dem Kegel nicht geschnitten werden, ist ϑ gleich Null; für die anderen Teile der Ebene und den Kegel ist ϑ gleich 90^0.

Im dritten Falle schneidet der Kegel die Ebene in den optischen Axen. Auf der Ebene ist ϑ gleich Null, auf dem Kegel gleich 90^0.

§ 4. Interferenzerscheinungen auf der Fläche $\operatorname{tg} 2\vartheta = 0$.

Auf der Fläche $\operatorname{tg} 2\vartheta = 0$, wird entweder $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = 90^0$. Da folglich dort entweder σ oder γ gleich Null sein muss, so kommen in den Ausdrücken für C_m und S_m nur die Glieder vor, welche nur Zeichenfolgen oder nur Zeichenwechsel enthalten.

Für $\sigma = 0, \gamma = 1$ ergiebt sich sowohl aus (17) als aus (18):

$$C_m = \cos\chi \cos(\varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3 \ldots + \varDelta_m),\ S_m = \cos(\chi - 2\psi) \sin(\varDelta_1 + \varDelta_2 + \varDelta_3 \ldots + \varDelta_m).$$

Für $\gamma = 0, \sigma = 1$ ergiebt sich für ungerade m aus (17):

$$C_m = \cos\chi \cos(\varDelta_1 - \varDelta_2 + \varDelta_3 - \varDelta_4 \ldots + \varDelta_m),\ S_m = \cos(\chi - 2\psi) \sin(\varDelta_1 - \varDelta_2 + \varDelta_3 - \varDelta_4 \ldots + \varDelta_m).$$

und für gerade m aus (18):

$$C_m = \cos\chi \cos(\varDelta_1 - \varDelta_2 + \varDelta_3 - \varDelta_4 \ldots - \varDelta_m),\ S_m = \cos(\chi - 2\psi) \sin(\varDelta_1 - \varDelta_2 + \varDelta_3 - \varDelta_4 \ldots - \varDelta_m).$$

Setzt man:

$$\varDelta_1 + \varDelta_3 + \varDelta_5 + \varDelta_7 \ldots = \varDelta_{su},\ \varDelta_2 + \varDelta_4 + \varDelta_6 + \varDelta_8 \ldots = \varDelta_{sg},$$

so erhält man für $\vartheta = 0$:

$$C_m = \cos\chi \cos(\varDelta_{su} + \varDelta_{sg}),\ S_m = \cos(\chi - 2\psi) \sin(\varDelta_{su} + \varDelta_{sg})$$

und für $\vartheta = 90^0$.

$$C_m = \cos\chi \cos(\varDelta_{su} - \varDelta_{sg}),\ S_m = \cos(\chi - 2\psi) \sin(\varDelta_{su} - \varDelta_{sg}).$$

Die Kombination von m Individuen zeigt also auf den Flächen $\operatorname{tg} 2\vartheta = 0$ dieselben Interferenzerscheinungen, welche ein Zwilling von zwei Individuen dort zeigen würde, wenn das erste die Phasendifferenz $\varDelta_{su}$, das zweite die Phasendifferenz $\varDelta_{sg}$ hervorbrächte, wenn also die Dicke des ersten Individuums gleich der Summe der Dicken aller Individuen von ungerader Stellenzahl und die des zweiten Individuums gleich der Summe der Dicken der Individuen von gerader Stellenzahl wäre.

§ 5. Interferenzerscheinungen in Zwillingen, welche aus 2 Individuen bestehen.

Für m = 2 erhält man aus (18):

$$(24)\quad \begin{aligned} C_2 &= \cos\chi\, \gamma^2 \cos(\varDelta_1 + \varDelta_2) - \sin\chi\, \gamma\sigma \cos(\varDelta_1 - \varDelta_2) + \sin\chi\, \gamma\sigma \cos(\varDelta_1 + \varDelta_2) + \cos\chi\, \sigma^2 \cos(\varDelta_1 - \varDelta_2) \\ S_2 &= \cos(\chi - 2\psi)\, \gamma^2 \sin(\varDelta_1 + \varDelta_2) - \sin(\chi - 2\psi)\, \gamma\sigma \sin(\varDelta_1 - \varDelta_2) + \sin(\chi - 2\psi)\, \gamma\sigma \sin(\varDelta_1 + \varDelta_2) \\ &\quad + \cos(\chi - 2\psi)\, \sigma^2 \sin(\varDelta_1 - \varDelta_2) \end{aligned}$$

Es sollen hier fernerhin nur die Erscheinungen zwischen gekreuzten Nicols betrachtet werden, so dass man also $\chi = 90^0$ setzen kann. Es ergeben sich dann die Werte:

$$C_2 = -2\gamma\sigma \sin \varDelta_1 \sin \varDelta_2$$

$$S_2 = \sin 2\psi \left[\sin \varDelta_1 \cos \varDelta_2 + (\gamma^2 - \sigma^2) \cos \varDelta_1 \sin \varDelta_2 \right] + \cos 2\psi . 2\gamma\sigma \cos \varDelta_1 \sin \varDelta_2.$$

Führt man nun die Bezeichnungen

$$\psi_1 = \psi \text{ und } \psi_2 = \psi + \vartheta$$

ein, so folgt

$$(25)\qquad \begin{aligned} C_2 &= -\sin 2\vartheta \sin \Delta_1 \sin \Delta_2 \\ S_2 &= \sin 2\psi_1 \sin \Delta_1 \cos \Delta_2 + \sin 2\psi_2 \cos \Delta_1 \sin \Delta_2 \\ I_2 &= a^2 (C^2_2 + S^2_2) \end{aligned}$$

Damit die Intensität gleich Null wird, müssen C_2 und S_2 für sich gleich Null sein. Es werden also im allgemeinen keine dunklen Kurvensysteme auftreten können, sondern nur die Durchschnitte von zwei Kurvensystemen werden bei einfarbigem Lichte als dunkle Flecken erscheinen. Die dunklen isochromatischen Kurven, welche das erste Individuum allein zeigen würde, sollen nach Pockels als „erstes primäres Kurvensystem", die des zweiten als „zweites primäres Kurvensystem" bezeichnet werden.

C_2 wird in vier Fällen gleich Null, nämlich: 1. für $\sin \Delta_1 = 0$, 2. für $\sin \Delta_2 = 0$, 3. für $\vartheta = 0$ und 4. für $\vartheta = 90^0$.

Ist 1. $\sin \Delta_1 = 0$, so wird auch $S_2 = 0$ für $\sin 2\psi_2 \sin \Delta_2 = 0$.

Ist 2. $\sin \Delta_2 = 0$, so wird $S_2 = 0$ für $\sin 2\psi_1$, $\sin \Delta_1 = 0$.

Als dunkle Punkte erscheinen also die Durchschnitte des ersten primären Kurvensystems $\sin \Delta_1 = 0$ mit dem zweiten primären Kurvensystem $\sin \Delta_2 = 0$. Durch diese beiden Systeme wird das ganze Gesichtsfeld in viereckige Felder von verschiedener Gestalt geteilt, deren vier Ecken als schwarze Punkte erscheinen. Ein solches Feld soll ein „Elementarviereck" des Gesichtsfeldes genannt werden.

Ferner erscheint das erste primäre Kurvensystem dunkel, soweit es auf den dunklen Isogyren des zweiten Individuums liegt, und das zweite primäre Kurvensystem, soweit es auf den dunklen Isogyren des ersten Individuums liegt.

Ist 3. $\vartheta = 0$, also $\psi_2 = \psi_1$, so wird $S_2 = 0$ für $\sin 2\psi_1 \sin (\Delta_1 + \Delta_2) = 0$.

Ist 4. $\vartheta = 90^0$, also $\psi_2 = \psi_1 + 90^0$, so wird $S_2 = 0$ für $\sin 2\psi_1 \sin (\Delta_1 - \Delta_2) = 0$.

Dunkel sind daher die Stellen, für welche $\sin 2\psi_1 = \sin 2\psi_2 = 0$ ist, d. h. die Durchschnitte der dunklen Isogyren der beiden Individuen. Sodann erscheinen auf der Kurve, in welcher der Kegel $\operatorname{tg} 2\vartheta = 0$ das Gesichtsfeld schneidet, Stücke von zwei neuen Kurvensystemen $\sin (\Delta_1 + \Delta_2) = 0$ und $\sin (\Delta_1 - \Delta_2) = 0$, welche (wiederum nach Pockels) als das „erste und zweite sekundäre Kurvensystem" bezeichnet werden mögen. Der Verlauf dieser Kurven ist mit Hilfe der Elementarvierecke leicht festzustellen. Die ersten Kurven $\sin (\Delta_1 + \Delta_2) = 0$, welche für $\vartheta = 0$ auftreten, verbinden zwei Ecken des Elementarvierecks, so dass auf der Verbindungslinie Δ_1 und Δ_2 sich immer um dieselbe Grösse aber in entgegengesetztem Sinne ändern. Die Kurven des zweiten Systems $\sin (\Delta_1 - \Delta_2) = 0$, welche im Gesichtsfeld da erscheinen, wo $\vartheta = 90^0$ ist, verbinden zwei gegenüberliegende Ecken des Elementarvierecks in der Art, dass sich auf ihnen Δ_1 und Δ_2 immer um dieselbe Grösse in demselben Sinne ändern.

An anderen Stellen als an den betrachteten kann I_2 nicht gleich Null werden. Um die Verteilung des Lichtes, dessen Intensität für jede Stelle durch die aus (25) fliessende Gleichung (der Faktor a^2, der immer wiederkehrt, ist gleich 1 gesetzt):

$$I_2 = \sin^2 2\vartheta \sin^2 \Delta_1 \sin^2 \Delta_2 + \sin^2 2\psi_1 \sin^2 \Delta_1 \cos^2 \Delta_2 + \sin^2 2\psi_2 \cos^2 \Delta_1 \sin^2 \Delta_2 + 2 \sin 2\psi_1 \sin 2\psi_2 \sin \Delta_1 \cos \Delta_1 \sin \Delta_2 \cos \Delta_2 \quad (26)$$

gegeben ist, zu bestimmen, soll angenommen werden, dass innerhalb eines Elementarvierecks die Werte von ψ_1 und ψ_2 und folglich auch von ϑ constant seien. Nahezu wird diese Annahme in den meisten Fällen zutreffen. In einem solchen Elementarviereck kann man dann für bestimmte Wertepaare ψ_1 und ψ_2 die Intensitäten für alle Stellen berechnen, an welchen Δ_1 und Δ_2 ganze Vielfache von $\pi/8$ sind. Man erhält so mit Einschluss der Seiten des Vierecks für 81 Punkte desselben die Intensitäten. Zum Beispiel ergaben sich für $\psi_1 = 67^1/_2{}^0$, $\psi_2 = 11^1/_4{}^0$ die in folgender Tabelle vereinigten Werte der Intensitäten in Hundertsteln der Maximalintensität des ganzen Gesichtsfeldes:

$\Delta_2 =$ π	0	8	25	43	50	43	25	8	0
$\frac{7\pi}{8}$	2	3	20	40	55	54	39	17	2
$\frac{6\pi}{8}$	8	8	24	50	68	69	51	27	8
$\frac{5\pi}{8}$	13	16	37	63	80	77	57	30	13
$\frac{4\pi}{8}$	15	26	50	75	85	75	50	26	15
$\frac{3\pi}{8}$	13	30	57	77	80	63	37	16	13
$\frac{2\pi}{8}$	8	27	51	69	68	50	24	8	8
$\frac{\pi}{8}$	2	17	39	54	55	40	20	3	2
0	0	8	25	43	50	43	25	8	0
$\Delta_1 =$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{2\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{4\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{6\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{8}$	π

In den Fig pag. 15 sind nun immer vier Elementarvierecke zusammengesetzt und die kleinen Quadrate je nach der Intensität ihres Mittelpunktes heller oder dunkler schraffiert. Es bedeuten dabei

schwarze Quadrate eine Intensität zwischen 0 und $^1/_6$
dunkle Schraffierung „ „ „ $^1/_6$ „ $^1/_3$
mittlere „ „ „ $^1/_3$ „ $^2/_3$
helle „ „ „ $^2/_3$ „ $^5/_6$
weisse Quadrate „ „ „ $^5/_6$ „ $^6/_6$
der Maximalintensität des Elementarvierecks.

Unter jeder Figur ist ihre Buchstabenbezeichnung und die Maximalintensität des Elementarvierecks angegeben, wobei die Maximalintensität des ganzen Gesichtsfeldes gleich 1 gesetzt ist. Zum Beispiel ist das Viereck, für welches oben die Intensitäten angegeben sind in Fig. 1 dargestellt. Die Maximalintensität ist gleich 0,85, und diejenigen Quadrate sind schwarz, deren Intensität in der Tabelle kleiner als 85/6 ist u. s. w.

Die Stellen im Gesichtsfeld, an welchen die einzelnen Interferenzbilder auftreten, sind aus der Tabelle pag. 14 ersichtlich. In dieser sind für alle Werte von ψ_1 und ψ_2, welche Vielfache von $\pi/16$ sind, die zugehörigen Interferenzbilder angegeben. Für a ist das ganze Elementarviereck schwarz. Ferner bedeutet in dieser Tabelle ein Strich neben dem Buchstaben, dass das gesuchte Interferenzbild aus dem angegebenen durch Spiegelung an einer Diagonale der Figur hervorgeht. Zwei Striche geben an, dass das gesuchte Interferenzbild aus dem angeführten durch Spiegelung an einer Kante der Figur entsteht. Drei Striche endlich besagen, dass man die angegebene Figur um 90^0 in ihrer Ebene drehen muss, um das gewünschte Interferenzbild zu erhalten. Es stellen zum Beispiel b, c, d und e das erste primäre Kurvensystem, b′, c′, d′ und e′ dagegen das zweite primäre Kurvensystem dar. f, n, s und v sind Abbildungen des ersten sekundären Kurvensystems, wogegen f″, n″, s″ und v″ das zweite sekundäre Kurvensystem veranschaulichen. In h sind dunkle Flecken vorhanden, welche nach dem ersten primären Kurvensystem gestreckt sind und eine leichte Biegung nach dem ersten sekundären Kurvensystem zeigen. In h′ (resp. h″, resp. h‴) sind die dunklen Flecken nach dem zweiten (resp. ersten, resp. zweiten) primären Kurvensystem gestreckt und zeigen eine Biegung nach dem ersten (resp. zweiten) sekundären Kurvensystem.

Die auf pag. 15 dargestellten Typen von Interferenzbildern genügen, um sich auch für andere in der Tabelle pag. 14 nicht angeführte Stellen des Gesichtsfeldes durch Übergänge zwischen den Typen eine Vorstellung von dem Interferenzbilde zu verschaffen.

Die Verteilung der Typen im Gesichtsfelde ist von Fall zu Fall verschieden. In Fig. 5—8 ist dieselbe für einige der vorzüglichen photographischen Wiedergaben von Interferenzbildern in der physikalischen Krystallographie von Liebisch angegeben. Die Figuren sind so verkleinert zu denken, dass die optischen Axen in den Figuren und in den Photogrammen sich decken. Die Figuren 5—7 stellen die Verteilung der Typen für einen Zwilling eines einaxigen Krystalles dar, bei welchem die Zwillingsaxe nur einen kleinen Winkel mit der optischen Axe bildet, bei welchem die Verwachsungsebene parallel der Zwillingsebene ist und aus welchem eine Platte parallel zur Verwachsungsfläche geschnitten ist. In Fig. 5 (Liebisch Taf. VII Fig. 3 und 5) sind die Schwingungsrichtungen im Polarisator und Analysator parallel und senkrecht zu der Ebene, welche die beiden optischen Axen enthält. In Fig. 6 (Liebisch Taf. VII Fig. 4 und 6) bilden jene Schwingungsrichtungen mit dieser Ebene Winkel von 45^0. In Fig. 7 betragen die entsprechenden Winkel $22\frac{1}{2}^0$ resp. $67\frac{1}{2}^0$. Aus diesen Figuren geht, wie auch aus Tabelle pag. 14, hervor, dass auf den Kurven ϑ = const. immer nur ganz bestimmte Gruppen von Interferenzbildern auftreten, die bei einer Drehung des Präparates auf diesen Kurven wandern. Es kann sich hierbei natürlich auch die Gestalt der Bilder ändern, indem die Elementarvierecke verzerrt erscheinen, der Charakter der Bilder bleibt derselbe.

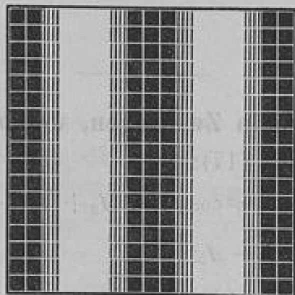
Fig. 8 (Liebisch Taf. VI Fig. 5 und 6) giebt die Verteilung der Typen für einen Diopsidzwilling nach (100), wenn die Schwingungsrichtungen im Polarisator und Analysator parallel und senkrecht zu der Ebene stehen, in welcher die optischen Axen liegen. In dem Photogramm Fig. 6 sind die Elementarvierecke infolge der verschiedenen Dicke der der beiden Individuen bedeutend verzerrt.

Ein weiteres Beispiel würde das Inferenzbild darbieten, welches die Brezina'sche Doppelplatte zeigt.

$\psi_2 =$ \ $\psi_1 =$	0	11¼	22½	33¾	45	56¼	67½	78¾	90	101¼	112½	123¾	135	146¼	157½	168¾	180
0	a	b	c	d	e	d	c	b	a	b	c	d	e	d	c	b	a
11¼	b′	f	g	h	i	k	l	m	b′	f″	g″	h″	i″	k″	l″	m″	b′
22½	c′	g′	n	o	p	q	r	l′	c′	g‴	n″	o″	p″	q″	r″	l‴	c′
33¾	d′	h′	o′	s	t	u	q′	k′	d′	h‴	o‴	s″	t″	u″	q‴	k‴	d′
45	e′	i′	p′	t′	v	t′	p′	i′	e′	i‴	p‴	t‴	v″	t‴	p‴	i‴	e′
56¼	d′	k′	q′	u	t	s	o′	h′	d′	k‴	q‴	u″	t″	s″	o‴	h‴	d′
67½	c′	l′	r	q	p	o	n	g′	c′	l‴	r″	q″	p″	o″	n″	g‴	c′
78¾	b′	m	l	k	i	h	g	f	b′	m″	l″	k″	i″	h″	g″	f″	b′
90	a	b	c	d	e	d	c	b	a	b	c	d	e	d	c	b	a
101¼	b′	f″	g″	h″	i″	k″	l″	m″	b′	f	g	h	i	k	l	m	b′
112½	c′	g‴	n″	o″	p″	q″	r″	l‴	c′	g′	n	o	p	q	r	l′	c′
123¾	d′	h‴	o‴	s″	t″	u″	q‴	k‴	d′	h′	o′	s	t	u	q′	k′	d′
135	e′	i‴	p‴	t‴	v″	t‴	p‴	i‴	e′	i′	p′	t′	v	t′	p′	i′	e′
146¼	d′	k‴	q‴	u″	t″	s″	o‴	h‴	d′	k′	q′	u	t	s	o′	h′	d′
157½	c′	l‴	r″	q″	p″	o″	n″	g‴	c′	l′	r	q	p	o	n	g′	c′
168¾	b′	m″	l″	k″	i″	h″	g″	f″	b′	m	l	k	i	h	g	f	b′
180	a	b	c	d	e	d	c	b	a	b	c	d	e	d	c	b	a

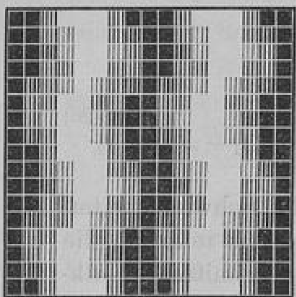
b. M J = 0,15

c. M J = 0,5

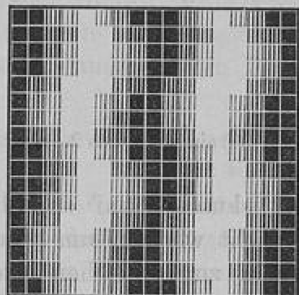


d. M J = 0,85

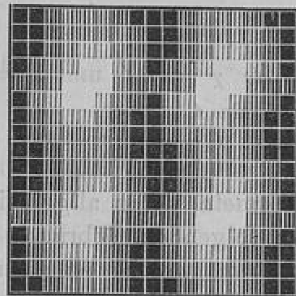
e. M J = 1



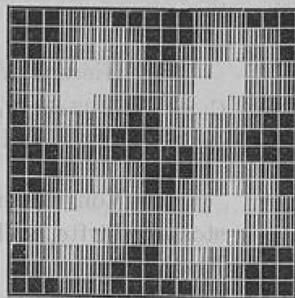
i. M J = 1



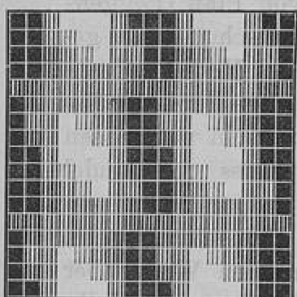
k. M J = 1



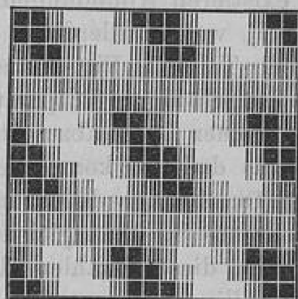
l. M J = 0,85



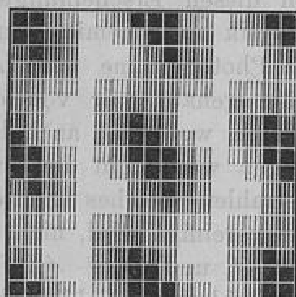
m. M J = 0,5



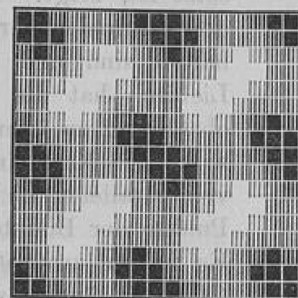
h. M J = 0,85



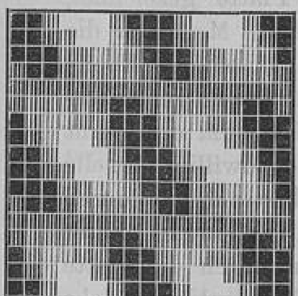
p. M J = 1



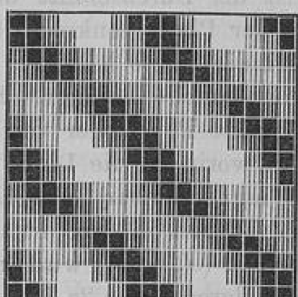
q. M J = 1



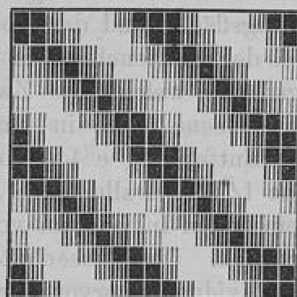
r. M J = 1



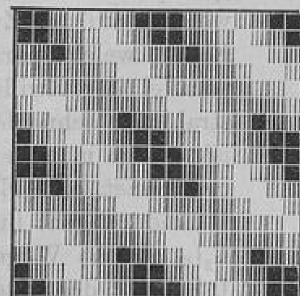
g. M J = 0,5



o. M J = 0,85



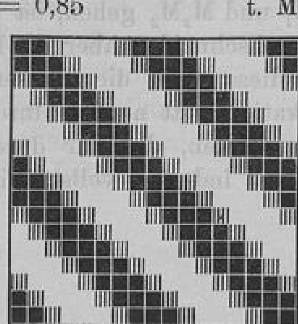
t. M J = 1



u. M J = 1

f. M J = 0,15

n. M J = 0,5



s. M J = 0,85

v. M J = 1

§ 6. Interferenzerscheinungen in Zwillingen, welche aus 3 Individuen bestehen.

Für m = 3 ergiebt sich aus (17):

$$
\begin{aligned}
C_3 &= \cos\chi\left[\gamma^2\cos(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3)+\sigma^2\cos(\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3)\right]+\sin\chi\left[\gamma\sigma\cos(\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3)\right. \\
&\qquad \left.-\gamma\sigma\cos(\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3)\right] \\
S_3 &= \cos(\chi-2\psi)\left[\gamma^2\sin(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3)+\sigma^2\sin(\Delta_1-\Delta_2+\Delta_3)\right]+\sin(\chi-2\psi)\left[\gamma\sigma\sin(\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3)\right. \\
&\qquad \left.-\gamma\sigma\sin(\Delta_1-\Delta_2-\Delta_3)\right].
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Hieraus folgt für $\chi = 90^0$ und a = 1:

$$
\begin{aligned}
C_3 &= -\sin 2\vartheta\sin(\Delta_1-\Delta_3)\sin\Delta_2 \\
S_3 &= \sin 2\psi\sin(\Delta_1+\Delta_3)\cos\Delta_2+\sin 2\psi\cos 2\vartheta\cos(\Delta_1+\Delta_3)\sin\Delta_2+\cos 2\psi\sin 2\vartheta\cos(\Delta_1-\Delta_3)\sin\Delta_2 \\
I_3 &= C_3^2+S_3^2.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Von diesen Formeln, deren allgemeine Diskussion auf erhebliche Schwierigkeiten stossen dürfte, soll im folgenden Gebrauch gemacht werden, um wenigstens teilweise die Erscheinungen zu erklären, welche eine senkrecht zur optischen Axe geschnittene Kalkspathplatte, die von einer Zwillingslamelle nach dem ersten stumpferen Rhomboeder durchsetzt ist, zeigt. Von diesen Erscheinungen existieren Abbildungen von Pfaff (Poggendorf's Annalen der Physik und Chemie, Band 107), welche allerdings sehr schematisch gehalten sind, und die Photogramme von Liebich Tafel 7, Fig. 1 und 2. Herr Professor Liebisch hat die Güte gehabt, mir von den zugehörigen Präparaten mehrere zur Beobachtung zu übersenden, wofür ich auch hier meinen Dank abzustatten nicht unterlassen will. Die Erscheinungen werden in diesem Falle dadurch kompliziert, dass das Bündel von parallelen Lichtstrahlen, welches nach dem Durchgange durch das Präparat in einem Punkte der Bildebene vereinigt wird, nicht mehr aus Strahlen gleicher Intensität besteht. Es haben zwar ψ, ϑ, Δ_2 und $(\Delta_1 + \Delta_3)$ für alle diese Strahlen denselben Wert, aber $(\Delta_1 - \Delta_3)$ ändert sich infolge der Schiefe der Zwillingsgrenze gegen die Ebene der Kalkspathplatte von Stelle zu Stelle. In Fig. 9 ist der Durchschnitt der Platte gezeichnet, welcher auf der Zwillingsfläche und der Ebene der Platte senkrecht steht. $M_1 M_1$ sei die Ebene, welche parallel der Plattenebene ist und die Platte halbiert; $M_2 M_2$ sei die Ebene parallel der Zwillingsfläche, welche die Zwillingslamelle halbiert. Ein beliebiger Lichtstrahl QQ schneide die Ebene $M_1 M_1$ in dem Punkte P, welcher von $M_2 M_2$ um e entfernt ist. Legt man in der Entfernung e + d von P, worin 2d die Dicke der Zwillingslamelle bezeichnet, eine Ebene $L'_2 L'_2$ parallel $L_2 L_2$, so legt offenbar jeder Lichtstrahl, der durch P hindurchgeht in dem ersten Individium vor $L'_2 L'_2$ und in dem dritten Invividuum hinter $L_2 L_2$ gleiche Wege zurück. Der Phasenunterschied $(\Delta_1 - \Delta_3)$ wird nur durch die Platte $L_1 L_1 L'_2 L'_2$ des ersten Individuums hervorgebracht, deren Dicke 2e ist. Für Strahlen, welche durch den Schnittpunkt von $M_1 M_1$ und $M_2 M_2$ gehen, ist also $\Delta_1 - \Delta_3 = 0$. Die einzelnen Strahlen der parallelen Bündel durchschneiden aber die Ebene $M_1 M_1$ in verschiedener Entfernung von $M_2 M_2$, so dass für diese auch die Phasenunterschiede verschiedene Werte annehmen. Eine fernere Komplikation tritt noch dadurch ein, dass bei Verschiebung des Präparates sehr bald Strahlen hinzutreten, die nur durch zwei oder nur durch ein Individuum gegangen sind. Hiervon soll indessen vollständig abgesehen werden.

Da der Winkel, den die optische Axe des zweiten Individuums mit der Plattennormale bildet, ungefähr $52^1/_2{}^0$ beträgt, die optische Axe also ganz ausserhalb des Gesichtsfeldes liegt, kann man für die Zwillingslamelle annehmen, dass darin die Schwingungen, die sich schneller fortpflanzen, annähernd parallel (nach Fresnel) zu der Ebene, in der die beiden optischen Axen liegen, stattfinden.

Die Fläche $\vartheta = 0$ fällt also mit der letzteren Ebene zusammen und die Fläche $\vartheta = 90^0$ steht senkrecht zu ihr, enthält die erste optische Axe in sich und zeigt sich leicht nach der zweiten Axe zu gebogen.

Die Intensität des austretenden Lichtes zeigt sich in folgenden Fällen von $\varDelta_1 - \varDelta_3$ unabhängig:

1. Wenn $\sin \varDelta_2 = 0$ ist, ergiebt sich

$$I_3 = \sin^2 2\psi \sin^2 (\varDelta_1 + \varDelta_3).$$

Da die Ringe $\sin \varDelta_2 =$ const. wegen der geringen Dicke der Zwillingslamelle sehr breit erscheinen (in dem Präparat, mit dessen Hilfe die Photogramme hergestellt sind, sind für rotes Licht nur Stücke von zwei dunklen Ringen $\varDelta_2 = \pi$ und $\varDelta_2 = 2\pi$ im Gesichtsfeld), so sind auf ihnen bei einfarbigem Lichte Stücke des Ringsystems zu sehen, welches eine aus dem ersten und dritten Individuum bestehende Platte zeigen würde. Ferner erscheinen die Durchschnitte der Ringe $\sin \varDelta_2 = 0$ und der Isogyren des ersten Individuums als ziemlich grosse schwarze Flecken.

2. Wenn $\vartheta = 0$ (vgl. pag. 10) ist, erhält man

$$I_3 = \sin^2 2\psi \sin^2 (\varDelta_1 + \varDelta_3 + \varDelta_2).$$

Es sind also die Durchschnitte der Ringe $\sin (\varDelta_1 + \varDelta_3) =$ const., welche aber um ein in geringem Masse veränderliches Stück nach innen verschoben sind, mit der Ebene $\vartheta = 0$ zu sehen. Die Intensität der hellen Ringe ist durch die Intensität der Isogyre $\sin 2\psi$ gegeben. Ist $\sin 2\psi$ gleich Null, so erscheint ein schwarzer gerader Balken:

3. Für $\vartheta = 90^0$ (vgl. pag. 10) folgt aus (28):

$$I_3 = \sin^2 2\psi \sin^2 (\varDelta_1 + \varDelta_3 - \varDelta_2).$$

Die Durchschnitte der Fläche $\vartheta = 90^0$ mit dem Ringsystem $\sin (\varDelta_1 + \varDelta_3) =$ const. erscheinen um ein etwas variables Stück nach aussen verschoben. Im weissen Lichte erscheint die Stelle für welche $\varDelta_1 + \varDelta_3 = \varDelta_2$ ist, schwarz. Die Intensität der hellen Ringe ist wieder durch die Intensität der Isogyren $\sin 2\psi$ gegeben. Ist $\sin 2\psi = 0$, so erblickt man einen schwarzen Balken, der auf der Ebene der optischen Axen senkrecht steht und schwach nach der Seite der Axe A_2 zu gebogen ist.

4. Für $\sin 2\psi = 0$ ergiebt sich

$$I_3 = \sin^2 2\vartheta \sin^2 \varDelta_2.$$

Auf den dunklen Isogyren des ersten Individuum, die ja bekanntlich ein rechtwinkliges Kreuz bilden, dessen Balken sich nach aussen hin erheblich verbreitern, sieht man die breiten, im weissen Licht intensiv gefärbten Ringe $\sin \varDelta_2 =$ const. Die Intensität derselben ist durch den Faktor $\sin^2 2\vartheta$ bestimmt, der ja für jede Isogyre annähernd konstant ist. Man erblickt daher in der „Normalstellung“ (d. h. wenn die Schwingungsrichtungen im Polarisator und Analysator parallel und senkrecht zu der Ebene der beiden optischen Axen sind) einen schwarzen geraden Balken, dessen beide Ränder gleich gefärbt sind und einen nach A_2 gebogenen schwarzen Balken, bei welchem nur der äussere Rand gefärbt ist. In der „Diagonalstellung" (d. h. wenn die Schwingungsrichtungen im Polarisator und Analysator 45^0 mit der Ebene der optischen Axen bilden) sieht man ein intensiv bunt gefärbtes Kreuz, dessen Arme sich nach aussen verbreitern. Die bunt gefärbten Stellen sind in beiden Fällen Stücke des Ringsystems $\sin \Delta_2 = \text{const.}$ Nebenbei sei bemerkt, dass man aus der Färbung des Mittelpunktes des Gesichtsfeldes und aus dem bekannten Winkel $(A_1 A_2)$ die Dicke der Zwillingslamelle berechnen kann. Im weiteren sollen nur die beiden Fälle behandelt werden, dass die Platte sich in der Normalstellung oder in der Diagonalstellung befinde.

A. **Normalstellung.** Weil die Schwingungrichtung des sich schneller fortpflanzenden Strahles im zweiten Individuum annähernd constant parallel der Ebene der optischen Axen ist, kann man $\vartheta = -\psi$ setzen und erhält aus (28):

$$\begin{aligned}
C_3 &= \sin 2\psi \sin(\Delta_1 - \Delta_3) \sin \Delta_2 \\
\text{(29)} \qquad S_3 &= \sin 2\psi \left[\sin(\Delta_1 + \Delta_3)\cos \Delta_2 + \cos 2\psi \cos(\Delta_1 + \Delta_3) \sin \Delta_2 - \cos 2\psi \cos(\Delta_1 - \Delta_3) \sin \Delta_2\right] \\
&= 2 \sin 2\psi \left[\sin \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2} \cos \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2} \cos \Delta_2 - \cos 2\psi \left(\sin^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2} - \sin^2 \frac{\Delta_1 - \Delta_3}{2}\right) \sin \Delta_2\right] \\
I_3 &= C_3^2 + S_3^2.
\end{aligned}$$

Betrachtet man zunächst den idealen Fall, in welchem alle Strahlen durch den Schnittpunkt der Ebenen $M_1 M_1$ und $M_2 M_2$ gehen, so dass also für alle Strahlen $e = 0$ ist, so wird $\Delta_1 - \Delta_3 = 0$, und die Formeln (29) nehmen folgende Gestalt an:

$$\text{(30)} \qquad C_3 = 0,\ S_3 = 2 \sin 2\psi \sin \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2} \left[\cos \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2} \cos \Delta_2 - \cos 2\psi \sin \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2} \sin \Delta_2\right],\ I_3 = S_3^2.$$

Der Faktor $\sin 2\psi = 0$ giebt die dunklen Isogyren des ersten Individiums. Die Färbung der Ränder ist hier nicht angedeutet, weil ja $\vartheta = -\psi$ gesetzt ist und diese Annahme nur näherungsweise gilt.

Der Faktor $\sin \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2}$ stellt von dem Ringsystem $\sin(\Delta_1 + \Delta_3) = \text{const}$ jeden zweiten dunklen Ring dar, der also hier unverändert erhalten ist. Die dunklen Ringe von ungerader Stellenzahl werden durch den dritten Faktor in der Klammer dargestellt. Ihre Gestalt ist indessen erheblich modifiziert, indem die Klammer gleich Null wird für:

$$\operatorname{tg} \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2} = \operatorname{cotg} \Delta_2 / \cos 2\psi.$$

Zu jedem Wertepaar Δ_2 und ψ kann man hinaus $(\Delta_1 + \Delta_3)/2$ berechnen. Es ergiebt sich $\cos(\Delta_1 + \Delta_3)/2 = 0$ für $\sin \Delta_2 = 0$ und $\cos 2\psi = 0$. Auf den breiten Ringen $\sin \Delta_2 = 0$ sieht man also Stücke der ungeraden Ringe ungestört. Ferner gehen alle Ringe durch die Punkte, in welchen die ungeraden Ringe normaler Weise die Ebenen $\psi = \pm 45^0$ schneiden. Wenn $\operatorname{cotg} \Delta_2$ dort sein Zeichen nicht ändert, so werden die Ringe von jener Stelle aus nach einer Seite zu weiter, nach der anderen enger. Für $\cos \Delta_2 = 0$ und $\cos 2\psi = 0$ wird $(\Delta_1 + \Delta_3)/2$ unbestimmt. An diesen Stellen zeigen sich im einfarbigen Lichte kurze schwarze Büschel in den Ebenen $\psi = \pm 45^0$. Auch im weissen Lichte erblickt man schwache, zu den Ringen $\sin \Delta_2 = \text{const}$ komplementär gefärbte kurze Büschel im Mittelpunkt des Gesichtsfeldes.

Um den Verlauf der Kurven in der Mitte des Gesichtsfeldes näher zu bestimmen, sind für eine Reihe von Wertpaaren $\varDelta_2$ und ψ die zugehörigen Werte von $(\varDelta_1 + \varDelta_3)/_2$ berechnet und in der folgenden Tabelle in ganzen Graden angegeben:

$\psi =$ / $\varDelta_2$	0	$22^1/_2$	45	$67^1/_2$	90	$112^1/_2$	135	$157^1/_2$
0	90	90	90	90	90	90	90	90
45	45	55	90	125	135	125	90	55
$67^1/_2$	22	30	90	150	157	150	90	30
90	0	0	—	0	0	0	—	0
$112^1/_2$	157	150	90	30	22	30	90	150
135	135	125	90	55	45	55	90	125

Offenbar ist in dem Photogramm für Na — Licht Taf. VII Fig. 2 in den unteren Quadranten $\operatorname{cotg} \varDelta_2 > 0$, in den oberen Quadranten $\operatorname{cotg} \varDelta_2 < 0$. Dass dieses keineswegs für alle Farben zutrifft geht aus dem Mittelfelde des Interferenzbildes im weissen Lichte hervor, welches rechts und links gleiche Farbenverteilung zeigt, aber nicht Gleichheit der oberen und unteren Quadranten. An den Stellen, welche dem Schnitte des ersten Ringes der ungestörten Figur und der Ebenen $\psi = \pm 45^0$ entsprechen, sind als Reste des Ringes dunkle Flecken sichtbar.

Die soeben für den idealen Fall beschriebenen Erscheinungen finden sich an dem Präparat, welches zu der angeführten Photographie benutzt ist, bei einer gewissen Lage der Platte im Polarisationsapparate der Hauptsache nach wieder. Offenbar liegt die Platte dann so, dass die optische Axe des Instrumentes durch den Schnitt der Ebenen M_1M_1 und M_2M_2 hindurchgeht. Gewisse Störungen des Bildes in einiger Entfernung vom Mittelpunkte sind wohl darauf zurückzuführen, dass man es mit Strahlenbündeln und nicht mit einzelnen Strahlen zu thun hat.

Verschiebt man nun das Präparat in einer Richtung parallel der Ebene der beiden optischen Axen, so treten die mannigfachsten Veränderungen in dem Bilde auf. Das Aussehen desselben in einem Moment ist Taf. VII. Fig. 1 dargestellt. Diese Veränderungen sind eine Folge des Hinzutretens der Glieder, welche $\varDelta_1 - \varDelta_3$ enthalten. Eine Erklärung derselben aus den Formeln (28) oder (29) habe ich nicht versucht. Jedenfalls treten dieselben aber nicht an den Stellen auf, an denen die Intensität von $\varDelta_1 - \varDelta_3$ unabhängig ist, also für $\sin 2\vartheta = 0$ und $\sin 2\psi = 0$ für weisses Licht und für $\sin \varDelta_2 = 0$ für einfarbiges Licht. Da diese letzteren Stellen für jede Farbe eine andere Lage haben, kann ihre Unveränderlichkeit nur im einfarbigen Lichte hervortreten.

Bei noch weiterem Verschieben des Präparates treten am Rande des Gesichtsfeldes Streifen auf, die sich in höchst eigentümlicher Weise krümmen, zu Ringen schliessen und wieder auseinanderweichen. Diese glaube ich auf ein Mitwirken des Lichtes, welches nur zwei Individuen durchgesetzt hat, zurückführen zu können, weil diese Streifen bei einem Präparat, bei welchem die Zwillingslamelle bedeutend schmäler ist, von vornherein auftreten.

B. Diagonalstellung. Für die Diagonalstellung kann man näherungsweise $\vartheta = 45^0 - \psi$ setzen. Es folgt dann aus (28):

$$
\begin{aligned}
C_3 &= -\cos 2\psi \sin(\varDelta_1 - \varDelta_3) \sin \varDelta_2 \qquad (31)\\
S_3 &= \sin 2\psi \sin(\varDelta_1 + \varDelta_3) \cos \varDelta_2 + \sin^2 2\psi \cos(\varDelta_1 + \varDelta_3) \sin \varDelta_2 + \cos^2 2\psi \cos(\varDelta_1 - \varDelta_3) \sin \varDelta_2 \\
&= \sin 2\psi \sin(\varDelta_1 + \varDelta_3) \cos \varDelta_2 + \sin \varDelta_2 - 2\sin^2 2\psi \sin^2 \frac{\varDelta_1 + \varDelta_3}{2} \sin \varDelta_2 - 2\cos^2 2\psi \sin^2 \frac{\varDelta_1 - \varDelta_3}{2} \sin \varDelta_2 \\
I_3 &= C_3^2 + S_3^2
\end{aligned}
$$

Es soll auch hier nur der ideale Fall $\varDelta_1 - \varDelta_3 = 0$ behandelt werden: Für die Erscheinungen bei der Bewegung der Präparate gilt das bei der Normalstellung Gesagte. Nur sei noch hervorgehoben, dass hier die beiden Kreuze $\sin 2\psi = 0$ und $\sin 2\vartheta = 0$ ungeändert bleiben, so dass also Veränderungen nur in den acht dazwischen liegenden Feldern stattfinden.

Für $\varDelta_1 - \varDelta_3 = 0$ folgt:

$$(32) \quad C_3 = 0,\ S_3 = \sin 2\psi \sin(\varDelta_1 + \varDelta_3) \cos \varDelta_2 + \sin \varDelta_2 - 2\sin^2 2\psi \sin^2 \frac{\varDelta_1 + \varDelta_3}{2} \sin \varDelta_2,\ I_3 = C_3^2 + S_3^2.$$

Für $\sin 2\vartheta = 0$ erhält man

$$I_3^2 = \sin^2 \varDelta_2.$$

Man erblickt also an diesen Stellen, wie schon erwähnt, das Ringsystem $\sin \varDelta_2 = \text{const.}$, welches im weissen Lichte das intensiv gefärbte bunte Kreuz liefert.

Für $\sin 2\psi = +1$ oder $= -1$ ergiebt sich

$$I_3 = \sin^2(\varDelta_1 + \varDelta_3 + \varDelta_2) \text{ resp. } I_3 = \sin^2(\varDelta_1 + \varDelta_3 - \varDelta_2).$$

In den Ebenen $\psi = +45^0$ (Ebene der beiden optischen Achsen) und $\psi = -45^0$ erblickt man also die Durchschnitte der Ringe $\sin(\varDelta_1 + \varDelta_3) = \text{const.}$ Jedoch erscheinen in der ersten Ebene die Ringe nach innen, in der anderen Ebene nach aussen verschoben. In letzterer ist eine kleine schwarze Stelle für $\varDelta_1 + \varDelta_3 = \varDelta_2$ auch im weissen Lichte zu sehen. Will man die Verschiebung der Ringe durch Wachsen von $\varDelta_1 + \varDelta_3$ um das ganze Vielfache von π nicht berücksichtigen, so erhält man die Durchschnitte der dunklen Ringe für $\sin 2\psi \operatorname{tg} \varDelta_2 > 0$ an den Stellen $(\varDelta_1 + \varDelta_3)/2 = h\pi/2 - x$ und für $\sin 2\psi \operatorname{tg} \varDelta_2 < 0$ an den Stellen $(\varDelta_1 + \varDelta_3)/2 = h\pi/2 + x$, worin $0 \leq x \leq 45^0$ ist. Dieser Wert von x hängt von $\varDelta_2$ ab.

Für $\sin 2\psi = \pm 1/\sqrt{2}$, also für $\psi = 22^1/_2{}^0 + k\,45^0$, erhält man:

$$I_3 = \cos^2 \frac{\varDelta_1 + \varDelta_3}{2} \left[\pm\sqrt{2} \sin \frac{\varDelta_1 + \varDelta_3}{2} \cos \varDelta_2 + \cos \frac{\varDelta_1 + \varDelta_3}{2} \sin \varDelta_2\right]^2.$$

Die Durchschnitte der dunklen Ringe liegen also hier an den Stellen $(\varDelta_1 + \varDelta_3)/2 = (2q - 1)\pi/2$ und an den Stellen $\operatorname{tg}(\varDelta_1 + \varDelta_3)/2 = \mp \operatorname{tg} \varDelta_2/\sqrt{2}$. Für die letzteren ergiebt sich, wenn $\sin 2\psi \operatorname{tg} \varDelta_2 > 0$ ist, $(\varDelta_1 + \varDelta_3)/2 = 2q\pi/2 - y$ und wenn $\sin 2\psi \operatorname{tg} \varDelta_2 < 0$ ist, $(\varDelta_1 + \varDelta_3)/2 = 2q\pi/2 + y$, worin y von $\varDelta_2$ abhängt und $0 \leq y \leq 90^0$ ist.

Da für $(\varDelta_1 + \varDelta_3)/2 = 2q\pi/2$ die Intensität gleich $\sin^2 \varDelta_2$ wird, da also die dunklen Ringe im allgemeinen die Grenze $(\varDelta_1 + \varDelta_3)/2 = 2q\pi/2$ nicht überschreiten können, so hat man es hier noch mit denselben Ringen zu thun, welche für $\sin 2\psi = \pm 1$ auftraten. Nur hat $(\varDelta_1 + \varDelta_3)/2$ sich dem Werte $(2q \mp 1)\pi/2$ genähert, denselben für die Hälfte der Ringe sogar erreicht. Wenn sich die Ringe noch weiter nähern, so müssen für einen bestimmten Wert von 2ψ die beiden Werte für $(\varDelta_1 + \varDelta_3)/2$ in den aus (32) für $I_3 = 0$ folgenden Gleichung gleich sein. Diese lautet umgeformt:

33) $$\operatorname{tg}^2 \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2} \cos 4\psi \sin \Delta_2 + 2 \operatorname{tg} \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2} \sin 2\psi \cos \Delta_2 + \sin \Delta_2 = 0.$$

Damit die beiden Wurzeln der Gleichung denselben Wert haben, muss sein:

$$\cos 4\psi \sin^2 \Delta_2 - \sin^2 2\psi \cos^2 \Delta_2 = 0, \operatorname{tg}^2 2\psi = \sin^2 \Delta_2, \sin^2 2\psi = \sin^2 \Delta_2 / (1 + \sin^2 \Delta_2), \cos 4\psi = \cos^2 \Delta_2 / (1 + \sin^2 \Delta_2).$$

Für diesen Wert von 2ψ folgt aus (33):

(34) $$\operatorname{tg} \frac{\Delta_1 + \Delta_3}{2} = - \operatorname{tg} \Delta_2 / \sin 2\psi = \mp \sqrt{(1 + \sin^2 \Delta_2)} / \cos \Delta_2.$$

Je zwei Ringe vereinigen sich also und geben eine geschlossene Kurve, welche in eine dunkle Spitze ausläuft. Diese Spitzen sind in dem Interferenzbild sehr auffallend. Sie liegen in Ebenen, für welche der absolute Wert von $\sin 2\psi$ zwischen den Grenzen 0 und $1 / \sqrt{2}$ eingeschlossen ist. Für $\cos \Delta_2 = 0$ liegen sie in den Ebenen $\psi = 22^1/_2{}^0 + k\, 45^0$ auf den Ringen $(\Delta_1 + \Delta_3)/2 = (2q - 1)\,\pi/2$. Aus (34) folgt, dass der absolute Wert von $\operatorname{tg} (\Delta_1 + \Delta_3)/2 > 1$ sein muss und dass $\operatorname{tg} (\Delta_1 + \Delta_3)/2$ positiv ist, wenn $\operatorname{tg} \Delta_2 \sin 2\psi < 0$, dass es aber negativ ist, wenn $\operatorname{tg} \Delta_2 \sin 2\psi > 0$ ist. Die dunklen Spitzen liegen also im ersten Falle auf den Ringen $(\Delta_1 + \Delta_3)/2 = (2q - 1)\,\pi/2 - z$, im zweiten Falle auf den Ringen $(\Delta_1 + \Delta_3)/2 = (2q - 1)\,\pi/2 + z$, worin $0 < z < 45^0$ ist.

Für $\sin \Delta_2 = 0$ ergiebt sich allgemein:

$$I_3 = \sin^2 2\psi \sin^2 (\Delta_1 + \Delta_3).$$

An diesen Stellen sieht man also Stücke des Interferenzbildes, welches das erste und dritte Individium für sich allein zeigen würde.

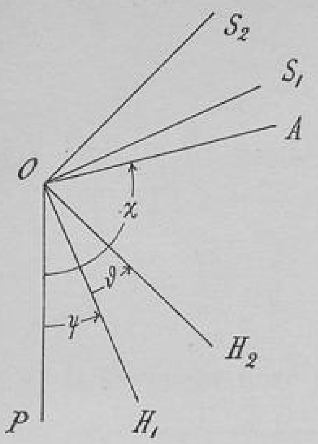


Fig. 1.

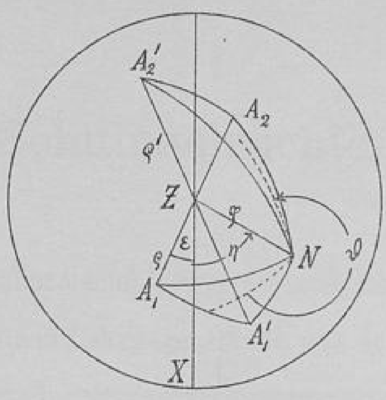


Fig. 2.

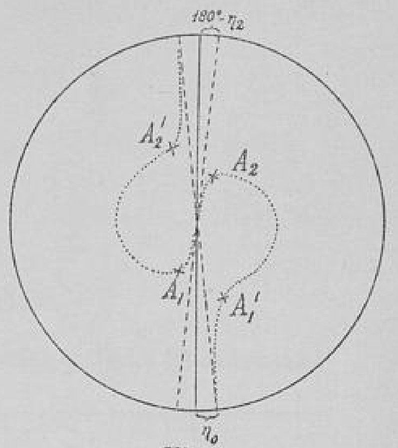


Fig. 3.

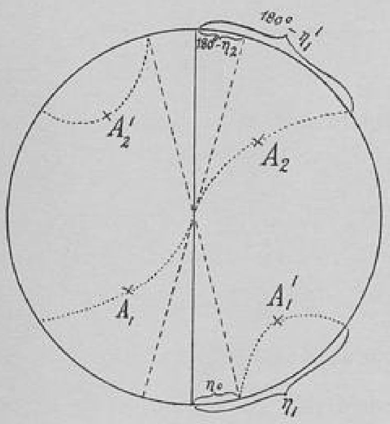


Fig. 4.

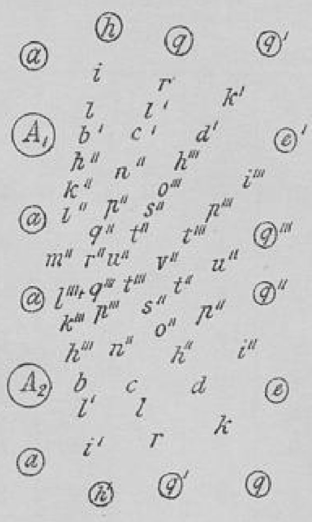


Fig. 5.


Fig. 6.


Fig. 7.

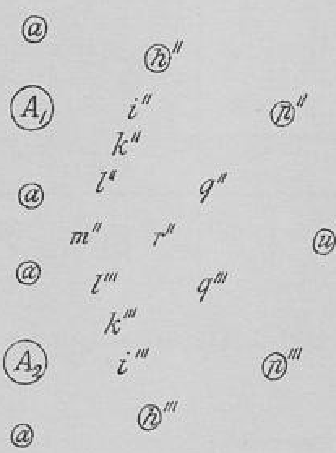


Fig. 8.

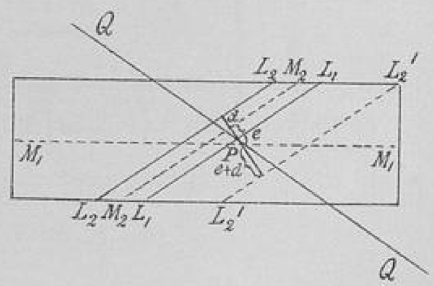


Fig. 9.