Vergleichende Zusammenstellung der Punkt- und Linien-Coordinaten.

Indem wir die Eigenschaften und gegenseitigen Beziehungen der Raumgrößen durch Zahlenausdrücke darstellen, geben wir denselben jene Allgemeinheit, deren die Zahlen und Zahlverbindungen selbst fähig sind. Wir erhalten zugleich in den abstrakten Rechnungsformeln Symbole für räumliche Anschauungen, und das Operiren mit solchen Formeln hat die Eigenthümlichkeit, in zweifacher Weise den Geist zu beschäftigen: einmal durch die Rechnung an und für sich, dann durch die in der Rechnung ausgeprägten geometrischen Combinationen. Demzufolge fordert diese Methode eine umfassende Thätigkeit des mathematischen Denkens; sie ist zudem eben so mannigfaltig in ihren Anwendungen als fruchtbar in ihren Resultaten, und erweis't sich dadurch als wirksames Förderungsmittel geistiger Bildung überhaupt. Auf ihrem nicht minder anziehenden als reichhaltigen Gebiete ist es aber für den Lernenden von wesentlichem Interesse, daß er die Herleitung und Bedeutung der dem großen Ganzen zum Grunde liegenden Rechnungsausdrücke, deren sichere Kenntniß jeden weitern Erfolg unerläßlich bedingt, einfach und klar auffasse und überblicke. Dazu einen Beitrag zu liefern ist der Zweck der folgenden Zeilen, in welchen wir unser besonderes Augenmerk auf Solche richten, die nach zurückgelegtem Schulcursus die mathematischen Studien fortsetzen. Wir versuchen darin, unmittelbar anknüpfend an die Grundbegriffe der rechnenden Methode, die Gleichung ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen unter den beiden Gesichtspunkten, jenachdem dieselbe eine gerade Linie oder einen Punkt darstellt, vergleichend zu erörtern und damit eine übersichtliche Entwickelung der betreffenden Umwandlungsformeln der Coordinaten zu verbinden.

I.

Gleichung der geraden Linie. Punkt-Coordinaten.

Die Gleichung ersten Grades zwischen zwei Veränderlichen

$$y + ax + b = o \qquad (1)$$

worin y als Ordinate und x als Abscisse zusammengehörige Werthe zur Bestimmung beliebiger Punkte einer Ebene oder Punkt-Coordinaten bedeuten, stellt bekanntlich alle möglichen Punkte dar, welche auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie liegen. Diese Linie hat, wenn $(-a) = \frac{\sin\,\alpha}{\sin\,(\vartheta - \alpha)}$ und α den von der Linie mit der Abscissenaxe gebildeten Winkel, ϑ den Coordinatenwinkel bezeichnet, die Richtung $(-a)$ und geht durch den auf der Ordinatenaxe liegenden Punkt $(-b)$, oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch den auf der Abscissenaxe liegenden Punkt $\left(-\frac{b}{a}\right)$. Wir betrachten zunächst die den besondern Lagen dieser Linie entsprechenden Gleichungen.

Geht dieselbe durch den Anfangspunkt der Coordinaten, so ist $b = o$, also die Gleichung

$$y + ax = o. \qquad (2)$$

Fällt die Linie (2) mit der Abscissenaxe zusammen, so ist $a = o$, mithin die Gleichung der Abscissenaxe

$$y = o. \qquad (3)$$

Bringt man (2) auf die Form

$$\frac{1}{a} y + x = o,$$

so ist, wenn die Linie mit der Ordinatenaxe zusammenfällt, $\frac{1}{a} = o$, daher die Gleichung dieser Axe

$$x = o. \qquad (4)$$

Läuft die Linie (1) mit der Abscissenaxe parallel, so ist y **für jeden Werth von** x constant, folglich erhält man

$$y + b = o. \qquad (5)$$

Gibt man der Gleichung (5) die Form

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{b} = o,$$

so ist für die mit der Abscissenaxe parallele, aber in unendlicher Entfernung gedachte Linie $\frac{1}{b} = o$, also die Gleichung dieser Linie

$$\frac{1}{y} = o. \qquad (6)$$

Analog wird bei einer mit der Ordinatenaxe parallelen Linie (1) x constant **für jeden Werth von** y, mithin die entsprechende Gleichung

$$ax + b = o \text{ oder } x + \frac{b}{a} = o, \qquad (7)$$

wo $\frac{b}{a}$ jede beliebige Constante bedeutet.

Für eine derartige in unendlicher Entfernung liegende Parallele ist $\frac{a}{b} = o$, also die Gleichung derselben

$$\frac{1}{x} = o. \qquad (8)$$

II.

Gleichung des Punktes. Linien-Coordinaten.

Beliebige von einander verschiedene gerade Linien werden gemäß I dargestellt durch die Gleichungen:

$$y + ax + b = o$$
$$y + a'x + b' = o$$
$$y + a''x + b'' = o$$
$$y + a'''x + b''' = o \text{ u. s. w.}$$

Gehen diese Linien alle durch einen gegebenen Punkt $(y' x')$, so erhält man:

$$y' + a x' + b = o$$
$$y' + a' x' + b' = o$$
$$y' + a'' x' + b'' = o$$
$$y' + a''' x' + b''' = o \text{ u. s. w.}$$

In diesen Gleichungen behalten die Coordinaten des gemeinschaftlichen Durchschnittspunktes, y' und x', denselben Werth unverändert bei, während sich die Zahlen a und b, welche die jedesmalige Lage der verschiedenen geraden Linien bestimmen, von Linie zu Linie ändern, mithin für alle möglichen Linien, die durch den gegebenen Punkt gehen, alle möglichen Werthe annehmen; mit andern Worten: y und x werden zu Constanten, a und b zu Variabeln. Die Gleichung

$$y + a x + b = o$$

bleibt der Form nach dieselbe, wenn wir einerseits y und b, andrerseits a und x miteinander vertauschen; indessen der Bedeutung nach wird sie eine andere, indem wir nunmehr unter b die Ordinate, unter a die Abscisse eines gegebenen Punktes verstehen, dagegen x und y als zusammengehörige Werthe zur Bestimmung der Lage aller durch jenen Punkt (ab) gehenden geraden Linien auffassen. Diese Coordinaten sind daher Linien-Coordinaten und die in ihnen ausgedrückte Gleichung

$$y + a x + b = o \qquad (9)$$

ist die Gleichung eines gegebenen Punktes, in welchem sich alle durch x und y zu bestimmenden geraden Linien schneiden. Jede dieser Linien hat den Bemerkungen zu (1) gemäß die Richtung $(-x)$ und schneidet die Ordinatenaxe im Punkte $(-y)$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Abscissenaxe im Punkte $\left(-\frac{y}{x}\right)$.

Der in Rede stehende Punkt kann in Beziehung zum Axensysteme besondere Lagen annehmen. Seine Lage kann sein 1) im Coordinaten-Anfangspunkte, 2) auf einer der beiden Axen in endlicher oder unendlicher Entfernung, 3) nach irgend einer gegebenen Richtung in unendlicher Entfernung. Im Falle der unendlichen Entfernung sind alle durch die Gleichung dargestellten geraden Linien entweder in der Richtung der beiden Axen oder in irgend einer gegebenen Richtung unter sich parallel. Wir betrachten die verschiedenen Modifikationen der Gleichung (9) für die angegebenen Fälle.

Für den Anfangspunkt der Coordinaten ist $a = o$ und $b = o$, also heißt die Gleichung

$$y = o. \qquad (10)$$

Liegt der Punkt auf der Abscissenaxe, so ist $b = o$, also

$$y + a x = o. \qquad (11)$$

Liegt er auf dieser Axe in unendlicher Entfernung, so ist $\frac{1}{a} = o$, und es ergibt sich

$$x = o. \qquad (12)$$

Für die Lage des Punktes auf der Ordinatenaxe ist $a = o$, folglich die Gleichung

$$y + b = o. \qquad (13)$$

Liegt er auf der Ordinatenaxe unendlich weit, so wird $\frac{1}{b} = o$, mithin die Gleichung

$$\frac{1}{y} = o. \qquad (14)$$

Wird seine Entfernung nach einer gegebenen Richtung unendlich, so wird x constant für jeden Werth von y und man erhält

$$a x + b = o. \qquad (15)$$

Schreibt man die letzte Gleichung wie folgt:

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{x} = o,$$

so wird für den bereits erwähnten Fall, daß der Punkt auf der Ordinatenaxe unendlich weit liegt, $\frac{a}{b} = o$, also hat die Gleichung

$$\frac{1}{x} = o \qquad (16)$$

mit (14) dieselbe Bedeutung.

III.

Ein Rückblick auf das bisher Gesagte läßt uns in einer und derselben Gleichung, jenachdem wir ihre Veränderlichen als Punkt- oder Linien-Coordinaten auffassen, eine zweifache Bedeutung erkennen. Sie bedeutet nämlich im ersten Falle eine gewisse gerade Linie, im zweiten einen gewissen Punkt nach folgender Zusammenstellung:

$$y + a x = o$$

bedeutet eine durch den Coordinaten-Anfangspunkt gehende gerade Linie (2) oder einen auf der Abscissenaxe liegenden Punkt (11). Die Abscisse dieses Punktes ist a.

$$y = o$$

bedeutet die Abscissenaxe (3) oder den Coordinaten-Anfangspunkt (10).

$$x = o$$

bedeutet die Ordinatenaxe (4) oder einen auf der Abscissenaxe unendlich weit liegenden Punkt (12). Alle durch diesen Punkt gehenden geraden Linien haben die Richtung Null d. h. sie laufen der Abscissenaxe parallel.

$$y + b = o$$

bedeutet eine mit der Abscissenaxe parallele Linie (5) oder einen auf der Ordinatenaxe liegenden Punkt (13). Die Ordinate dieses Punktes ist b.

$$\frac{1}{y} = o$$

bedeutet eine mit der Abscissenaxe parallele Linie in unendlicher Entfernung (6) oder einen auf der Ordinatenaxe liegenden unendlich weit entfernten Punkt (14). Der reciproke Werth des Durchschnittspunktes aller durch denselben gehenden geraden Linien mit der Ordinatenaxe ist Null d. h. diese Linien sind alle der Ordinatenaxe parallel.

$$a x + b = o$$

bedeutet eine mit der Ordinatenaxe parallele Linie (7) oder einen nach gegebener Richtung unendlich weit liegenden Punkt (15). Die Richtung aller durch ihn gezogenen geraden Linien ist $\frac{b}{a}$.

$$\frac{1}{x}=0$$

bedeutet eine mit der Ordinatenaxe parallele unendlich weit entfernte Linie (8) oder einen auf der Ordinatenaxe unendlich weit liegenden Punkt (16). Der reciproke Werth der Richtung aller durch denselben gehenden geraden Linien ist Null d. h. alle diese Linien sind der Ordinatenaxe parallel.

Plücker, welchen der Verfasser mit tiefer Verehrung seinen früheren Lehrer nennt, drückt in seiner die Theorie der Linien-Coordinaten behandelnden ausgezeichneten Schrift (Band 2. der analytisch-geometrischen Entwickelungen) die in obigen Gleichungen des Punktes (9—16) vorkommenden Zahlen in Form von Quotienten aus, indem er statt der obigen a und b die Werthe $\frac{b}{c}$ und $\frac{a}{c}$, so wie statt y und x die Werthe $\frac{w}{u}$ und $\frac{v}{u}$ anwendet. Hiernach erhalten die genannten Gleichungen folgenden Ausdruck:

(9) $au + bv + cw = 0$

(10) $w = 0$

(11) $bv + cw = 0$

(12) $v = 0$

(13) $au + cw = 0$

(14) und (16) $u = 0$

(15) $au + bv = 0$

In Betreff der Coordinatenwerthe für die Richtung der Linien $\left(-\frac{v}{u}\right)$ und für ihren Durchgangspunkt auf der Ordinatenaxe $\left(-\frac{w}{u}\right)$ ist zu bemerken, daß beide zugleich unendlich groß werden, also nothwendig denselben Nenner u haben. Wir werden im Folgenden diese Coordinatenbezeichnung beibehalten.

IV.

Verwandlung der Punkt-Coordinaten.

Die Verwandlung der Coordinaten tritt überhaupt ein, wenn man von einem Coordinatensysteme zu einem andern übergehen will. Die dabei zu lösende Aufgabe besteht darin, die ursprünglichen Coordinaten in Funktion der neuen auszudrücken. Wir behandeln diese Aufgabe hier insofern, als sie die Verlegung des Anfangspunktes und die Aenderung der Axenrichtung betrifft. Die ursprünglichen Coordinaten mögen durch x und y, die neuen durch x und y bezeichnet werden.

a. Verlegung des Anfangspunktes.

Verlegt man den Anfangspunkt der Coordinaten in einen andern, dessen Abscisse m und dessen Ordinate n ist, so erhält man bekanntlich

$$y = n + y \qquad (17)$$

$$x = m + x \qquad (18)$$

mithin für die Rückkehr vom neuen zum ursprünglichen Anfangspunkte

$$y = \mathrm{y} - \mathrm{n} \qquad (19)$$

$$x = \mathrm{x} - \mathrm{m} \qquad (20)$$

was hier nur der Erwähnung bedarf.

b. Aenderung der Axenrichtung.

Wir denken uns die Coordinatenaxen in beliebigen Richtungen und nennen den Coordinatenwinkel des ursprünglichen Systems ϑ, den des neuen ξ, ferner die Winkel, welche die neue Abscissen- und Ordinatenaxe mit der ursprünglichen Abscissenaxe bilden, φ und φ', so wie die Winkel, welche dieselben neuen Axen mit der ursprünglichen Ordinatenaxe bilden, ψ und ψ'.

Zur Herleitung der allgemeinen Verwandlungsformeln gehen wir aus von den beim rechtwinkligen Axensysteme Statt findenden Beziehungen, welche als die einfachsten vorausgesetzt werden dürfen. Wir legen demnach durch den gemeinschaftlichen Anfangspunkt der Coordinaten zwei rechtwinklige Axen, deren Ordinaten Y, und deren Abscissen X heißen mögen, und bezeichnen die Winkel, welche die ursprüngliche Abscissen- und Ordinatenaxe mit der Axe der X bilden, mit α und β, und die von der neuen Abscissen- und Ordinatenaxe mit derselben Axe der X gebildeten Winkel mit γ und δ. Hieraus ergeben sich folgende Relationen:

$$\beta - \alpha = \vartheta$$
$$\delta - \gamma = \xi$$
$$\gamma - \alpha = \varphi$$
$$\delta - \alpha = \varphi'$$
$$\gamma - \beta = \psi$$
$$\delta - \beta = \psi'.$$

Heißt nun ein in der Coordinaten-Ebene beliebig angenommener Punkt im ursprünglichen Systeme (y x), im neuen ($y\, x$), so ergibt sich

$$\mathrm{X} = \mathrm{x} \cos \alpha + \mathrm{y} \cos \beta$$

und $$\mathrm{X} = x \cos \gamma + y \cos \delta.$$

Eben so $$\mathrm{Y} = \mathrm{x} \sin \alpha + \mathrm{y} \sin \beta$$

und $$\mathrm{Y} = x \sin \gamma + y \sin \delta.$$

Folglich $$\mathrm{x} \cos \alpha + \mathrm{y} \cos \beta = x \cos \gamma + y \cos \delta$$

und $$\mathrm{x} \sin \alpha + \mathrm{y} \sin \beta = x \sin \gamma + y \sin \delta.$$

Die Elimination von x oder y aus den beiden letzten Gleichungen führt unter Beachtung obiger Winkel-Relationen zu folgenden Resultaten:

$$\mathrm{y} = \frac{x \sin \varphi + y \sin \varphi'}{\sin \vartheta} \qquad (21)$$

$$\mathrm{x} = -\frac{x \sin \psi + y \sin \psi'}{\sin \vartheta} \qquad (22)$$

Eliminirt man x oder y, so erhält man die Formeln für die Rückkehr vom neuen zum ursprünglichen Axensysteme, nämlich:

$$y = -\frac{\mathrm{x} \sin \varphi + \mathrm{y} \sin \psi}{\sin \xi} \qquad (23)$$

$$x = \frac{\mathrm{x} \sin \varphi' + \mathrm{y} \sin \psi'}{\sin \xi} \qquad (24)$$

Aus diesen allgemeinen Formeln für zwei beliebige Axensysteme lassen sich für die besonderen Fälle, daß eines von beiden oder beide rechtwinklig sind, die entsprechenden Formeln leicht herleiten, wenn man beachtet, daß, falls das ursprüngliche System rechtwinklig ist, $\psi = \varphi - \frac{1}{2}\pi$, $\psi' = \varphi' - \frac{1}{2}\pi$, also $\sin \psi = -\cos \varphi$ und $\sin \psi' = -\cos \varphi'$; falls das neue System rechtwinklig ist, $\varphi' = \varphi + \frac{1}{2}\pi$, $\psi' = \psi + \frac{1}{2}\pi$, folglich $\sin \varphi' = \cos \varphi$ und $\sin \psi' = \cos \psi$; falls beide rechtwinklig sind, $\psi = \varphi - \frac{1}{2}\pi$, $\varphi' = \varphi + \frac{1}{2}\pi$ und $\psi' = \varphi$, mithin $\sin \psi = -\cos \varphi$ und $\sin \varphi' = \cos \varphi$.

V.

Verwandlung der Linien-Coordinaten.

Unserer früheren Bemerkung gemäß bezeichnen wir die Linien-Coordinaten im ursprünglichen Systeme, worin die Punkt-Coordinaten x und y sind, mit den Quotienten $\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}}$ und $\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}}$; im neuen Systeme, worin die Punkt-Coordinaten x und y sind, mit $\frac{v}{u}$ und $\frac{w}{u}$. Die Winkelbezeichnungen zwischen dem ursprünglichen und neuen, ganz beliebig gedachten, Axensysteme sind dieselben wie in IV.

a. Verlegung des Anfangspunktes.

Der neue Anfangspunkt sei wieder (m n) wie in IV a. Heißt nun ein in der Coordinaten-Ebene beliebig angenommener Punkt im ursprünglichen Systeme (x y), im neuen (x y), so ist seine Gleichung im ersten Systeme

$$\mathrm{y} + \mathrm{x}\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} + \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}} = 0 \qquad (25)$$

und im zweiten Systeme

$$y + x\frac{v}{u} + \frac{w}{u} = 0 \qquad (26)$$

Setzen wir voraus, daß in diesen Gleichungen die ursprünglichen Coordinaten $\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}}$ und $\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}}$ und die neuen Coordinaten $\frac{v}{u}$ und $\frac{w}{u}$ einer und derselben Linie angehören, und verwandeln gemäß (19) und (20) y und x in die Coordinaten y und x, so erhalten wir für die Gleichung (26) folgende:

$$\mathrm{y} + \mathrm{x}\frac{v}{u} + \frac{w}{u} - \mathrm{m}\frac{v}{u} - \mathrm{n} = 0 \qquad (27)$$

Da diese Gleichung mit (25) eine und dieselbe durch den Punkt (x y) gehende gerade Linie darstellt, so folgt für den Uebergang zum neuen Coordinatensysteme:

$$\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} = \frac{v}{u} \qquad (28)$$

$$\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}} = \frac{w}{u} - \mathrm{m}\,\frac{v}{u} - \mathrm{n} \qquad (29)$$

Verwandelt man dagegen in (25) x und y in x und y, so kommt:

$$y + x\,\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} + \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}} + \mathrm{m}\,\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} + \mathrm{n} = o \qquad (30)$$

Aus dieser Gleichung und aus (26) folgt für die Rückkehr zum ursprünglichen Systeme:

$$\frac{v}{u} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} \qquad (31)$$

$$\frac{w}{u} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{u}} + \mathrm{m}\,\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} + \mathrm{n} \qquad (32)$$

wie sich auch aus (28) und (29) unmittelbar ergibt.

b. Aenderung der Axenrichtung.

Die gegenseitige Lage der beiden ganz beliebig gedachten Axensysteme sei durch dieselben Winkel wie in IV b bestimmt. Verwandeln wir in (26) die Coordinaten x und y in x und y gemäß den Formeln (23) und (24), so folgt:

$$\mathrm{y} + \mathrm{x}\,\frac{\sin\varphi - \frac{v}{u}\sin\varphi'}{\sin\psi - \frac{v}{u}\sin\psi'} - \frac{\frac{w}{u}\sin\xi}{\sin\psi - \frac{v}{u}\sin\psi'} = o \qquad (33)$$

Diese Gleichung aber drückt den in V a gemachten Bemerkungen zufolge mit (25) eine und dieselbe durch den Punkt (x y) gehende gerade Linie aus. Folglich ist

$$\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} = \frac{\sin\varphi - \frac{v}{u}\sin\varphi'}{\sin\psi - \frac{v}{u}\sin\psi'} \qquad (34)$$

$$\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}} = -\frac{\frac{w}{u}\sin\xi}{\sin\psi - \frac{v}{u}\sin\psi'} \qquad (35)$$

für den Uebergang zum neuen Coordinatensysteme.

Verwandeln wir umgekehrt x und y in x und y gemäß (21) und (22) so ergibt sich aus Gleichung (25)

$$y + x\,\frac{\sin\varphi - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}}\sin\psi}{\sin\varphi' - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}}\sin\psi'} + \frac{\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{u}}\sin\vartheta}{\sin\varphi' - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}}\sin\psi'} = o \qquad (36)$$

Diese Gleichung drückt mit (26) eine und dieselbe durch den Punkt (xy) gehende gerade Linie aus, daher ist

$$\frac{v}{u} = \frac{\sin\varphi - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}}\sin\psi}{\sin\varphi' - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}}\sin\psi'} \qquad (37)$$

$$\frac{w}{u} = \frac{\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}} \sin \vartheta}{\sin \varphi' - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} \sin \psi'} \qquad (38)$$

für die Rückkehr vom neuen zum ursprünglichen Coordinatensysteme.

Zu den nämlichen Resultaten gelangen wir auch vermittelst der Gleichungen (34) und (35). Die erstere nämlich ergibt sofort:

$$\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} \sin \psi - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} \frac{v}{u} \sin \psi' = \sin \varphi - \frac{v}{u} \sin \varphi'$$

$$\text{oder:} \quad \frac{v}{u} \left(\sin \varphi' - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} \sin \psi'\right) = \sin \varphi - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} \sin \psi$$

woraus der Werth für $\frac{v}{u}$ übereinstimmend mit (37) hervorgeht.

Die Gleichung (35) ergibt:

$$\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}} \sin \psi - \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}} \frac{v}{u} \sin \psi' = - \frac{w}{u} \sin \xi.$$

Substituiren wir hierin den so eben erhaltenen Werth für $\frac{v}{u}$, so kommt nach gehöriger Reduction:

$$\frac{\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}} \left(\sin \psi \sin \varphi' - \sin \varphi \sin \psi'\right)}{\sin \varphi' - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} \sin \psi'.} = - \frac{w}{u} \sin \xi \qquad (39)$$

Beachten wir nun, daß gemäß IV b

$$\xi = \varphi' - \varphi = \psi' - \psi$$
$$\vartheta = \varphi - \psi = \varphi' - \psi'$$
$$\text{also } \varphi' = \xi + \varphi \text{ und } \psi' = \xi + \psi,$$

so gestaltet sich die Gleichung (39) also:

$$\frac{\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}} \left[\sin \psi \sin (\xi + \varphi) - \sin \varphi \sin (\xi + \psi)\right]}{\sin \varphi' - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} \sin \psi'} = - \frac{w}{u} \sin \xi$$

oder, wenn wir entwickeln und reduciren:

$$\frac{\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}} \left(\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi\right)}{\sin \varphi' - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} \sin \psi'} = \frac{w}{u}$$

$$\text{d. i.} \quad \frac{\frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}} \sin \vartheta}{\sin \varphi' - \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} \sin \psi'} = \frac{w}{u} \text{ übereinstimmend mit (38).}$$

Für rechtwinklige Coordinaten gelten die hinsichtlich der Winkel gemachten Schlußbemerkungen in IV, und lassen sich danach die allgemeinen Ausdrücke (34), (35), (37) und (38) leicht abändern. Man würde z. B., um von einem beliebigen zu einem rechtwinkligen Systeme überzugehen, aus (34) und (35) erhalten:

$$\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} = \frac{\sin\varphi - \frac{v}{u}\cos\varphi}{\sin\psi - \frac{v}{u}\cos\psi}, \quad \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}} = - \frac{\frac{w}{u}}{\sin\psi - \frac{v}{u}\cos\psi};$$

desgleichen für den Uebergang von einem rechtwinkligen zu einem andern rechtwinkligen Systeme:

$$\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}} = - \frac{\sin\varphi - \frac{v}{u}\cos\varphi}{\cos\varphi + \frac{v}{u}\sin\varphi}, \quad \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{u}} = \frac{\frac{w}{u}}{\cos\varphi + \frac{v}{u}\sin\varphi} \text{ u. s. w.}$$

Was die Nenner jener Ausdrücke betrifft, so werden diese in (34) und (35) zugleich Null, sobald $\left(-\frac{v}{u}\right) = -\frac{\sin\psi}{\sin\psi'} = \frac{\sin(-\psi)}{\sin(\xi+\psi)}$. Dieser Quotient aber bezeichnet im neuen Coordinatensysteme die Richtung einer mit der ursprünglichen Ordinatenaxe zusammenfallenden geraden Linie. Dasselbe ist der Fall mit den Nennern in (37) und (38), sobald $\left(-\frac{\mathrm{v}}{\mathrm{u}}\right) = -\frac{\sin\varphi'}{\sin\psi'} = \frac{\sin\varphi'}{\sin(\vartheta-\varphi')}$, welcher Quotient im ursprünglichen Coordinatensysteme die Richtung einer mit der neuen Ordinatenaxe zusammenfallenden geraden Linie bezeichnet.

Die Herleitung der Umwandlungsformeln für den Fall, wo die Verlegung des Anfangspunktes der Coordinaten und die Aenderung der Axenrichtung gleichzeitig Statt findet, bietet nach Erörterung der Einzelfälle keine besondere Schwierigkeit dar, indem es hierzu nur einer geeigneten Verbindung der entwickelten Formeln bedarf, welche durch die Natur des in Rede stehenden Falles sehr nahe liegt.