Das Alhazen'sche Problem.

Zu den interessanteren Aufgaben, welche die Mathematiker früherer Zeit beschäftiget haben, und die einer gewissen Celebrität in der Geschichte der Wissenschaft genießen, gehört unter anderen, welche Klügel in seinem mathem. Lexicon Th. I S. 228 aufführt, auch die Alhazenische. Sie trägt diesen ihren Namen von dem Arabischen Schriftsteller Al-Hazen oder Al-Hassan, der sie zuerst in seinem bekannten Werke über Optik aufstellte und einen Versuch zur Lösung derselben machte. Dem Gegenstande nach gehört sie in der Weise, wie Alhazen sie darstellt, zur Katoptrik. Er fordert nämlich die Bestimmung desjenigen Punktes eines sphärischen Spiegels, in welchem ein Lichtstrahl reflectirt werden muß, um von einem gegebenen Punkte ausgehend, nach der Reflexion zu einem andern ebenfalls gegebenen Punkte hin zu gelangen. Entkleidet man aber die so gestellte Aufgabe ihres physikalischen Gewandes und führt sie mittels des Grundgesetzes der Katoptrik auf die rein mathematischen Bedingungen ihrer Auflösung zurück, so fällt sie ganz in das Gebiet der Geometrie und erhält folgenden Ausdruck:

„In der Ebene eines Kreises sind zwei Punkte A und B gegeben. Man soll „den- oder diejenigen Punkte X des Umfanges bestimmen, an welchen zwei „von dort aus nach A und B gezogene gerade Linien entweder gleiche oder „zu 2 R sich ergänzende Winkel mit dem nach X gehenden Radius des Krei- „ses bilden, je nachdem nämlich jene Winkel auf verschiedener oder auf der- „selben Seite dieses Radius liegen.

Da die bisherigen Bearbeitungen dieser Aufgabe, wie man sie zerstreut in den Werken des Alhazen und Vitello, Barrow, Huygens, Kästner, Klügel rc. findet, den Gegenstand keineswegs erschöpfen, indem die der Erstgenannten außerordentlich weitschweifig und verworren sind, die der Letzteren aber bei der Reduction des Problems auf eine Gleichung höherer Ordnung stehen bleiben, so wird es zu Gunsten des rein geometrischen Interesse, welches die Aufgabe darbietet, nicht überflüssig sein, derselben eine tiefer eingehende Betrachtung zu widmen, welche im Folgenden versucht wird.

den Umfang des Kreises zweimal schneiden und die beiden Punkte, worin dieses geschieht, gehören zu den durch die Aufgabe verlangten. Der andere Zweig, der durch G geht, kann aber den Kreisumfang nur dann treffen, wenn sein kleinster Abstand von C noch kleiner oder höchstens eben so groß als r ist. Das Quadrat dieses Abstandes ist aber im Allgemeinen für einen beliebigen Punkt der Hyperbel, dessen Coord. x und y sind, $= x^2 + y^2$ und wird, mit Rücksicht auf die Relation $my + nx = xy$ ein Minimum, wenn $x = m + \sqrt[3]{mn^2}$, $y = n + \sqrt[3]{nm^2}$, wie man durch die bekannten Methoden leicht findet. Das Quadrat des kleinsten Abstandes der Hyperbel vom Punkte C wird hierdurch $= \left(m^{2/3} + n^{2/3}\right)^3$, woraus sich ergibt, daß der in Rede stehende Zweig den gegebenen Kreis zweimal schneidet, wenn $r^{2/3} > m^{2/3} + n^{2/3}$, daß beide einander berühren, wenn $r^{2/3} = m^{2/3} + n^{2/3}$ und sich gar nicht treffen, wenn $r^{2/3} < m^{2/3} + n^{2/3}$. Im ersten Falle gibt es im Ganzen vier, im zweiten drei, im letzten nur zwei Punkte, welche den in der Aufgabe gestellten Bedingungen entsprechen. Obige Construction wurde zuerst von Hüygens gefunden.

§. 4.

Für die Liebhaber der rein geometrischen (Euklidischen) Methode füge ich noch folgenden synthetischen Beweis hinzu, daß durch die im vorigen §. angegebene Construction die Aufgabe gelöſ't wird.

Lehrsatz 1. Gerade Linien, welche irgend einen Punkt einer gleichseitigen Hyperbel mit den Endpunkten eines beliebigen Durchmessers verbinden, treffen (nöthigen Falls verlängert) jede der beiden Asymptoten unter gleich großen Winkeln. Beweis: Jener Punkt sei X (Fig. 3 und 4), die Endpunkte eines Durchmessers F und G. FX treffe die Asymptoten in M, N, GX treffe sie bezüglich in P, Q. Nach einer bekannten Eigenschaft der Hyperbel ist $QX = GP$, $XN = MT$. Fällt man daher aus X, F, G auf die Asymptote PM die Senkrechten XR, FS, GT, so ist auch, wenn O der Mittelpunkt der Hyperbel, $OR = TP$ und $OR = SM$, folglich auch $TP = SM$. Außerdem ist wegen der Congruenz der Dreiecke OFS, OGT, $FS = GT$. Hieraus aber und aus $SM = TP$ folgt, daß auch $\triangle SMF$ mit TPG congruent ist, daß mithin auch $\sphericalangle FMS = TPG$ oder $XMP = XPM$ und hieraus sogleich weiter, daß auch $\sphericalangle XQN = XNQ$. Die beiden Linien FX und GX schneiden also jede der beiden Asymptoten unter gleichen Winkeln.

Lehrsatz 2. Verbindet man irgend zwei Punkte z. B. X und C einer gleichseitigen Hyperbel mit den Endpunkten F und G eines beliebigen Durchmessers, so ist immer $\sphericalangle XFC =$ entweder XGC oder dessen Nebenwinkel, je nachdem die Dr. CFX, CGX auf verschiedener oder auf derselben Seite von CX liegen.

Beweis. Denn nach dem ersten Lehrsatze ist $\sphericalangle XMP = XPM$. Treffen nun CF und CG die Asymptote MOP in U und V, so ist ebenmäßig $\sphericalangle CUV = CVU$. Hieraus folgt aber für den Fall, daß die Dreiecke CFX und CGX auf verschiedenen Seiten von CX liegen, $\sphericalangle XMP \pm CUV$

$=XPM \pm CVU$ d. i. $\sphericalangle CFX = CGX$; für den Fall aber, daß jene Dreiecke auf derselben Seite von CX liegen: $CUV \pm XMP = CVU \pm XPM$, d. i. $CFX = 2R - CGX$ oder $CGX = 2R - CFX$.

Wendet man nun diesen letztern Lehrsatz auf die oben construirte gleichseitige Hyperbel an, so erhellt alsbald, daß die von A und B (Fig. 2) nach X hin gezogenen geraden Linien gleiche oder zu 2R sich ergänzende Winkel mit dem Radius CX bilden. Denn nach jener Construction ist $CA : CX = CX : CF$ und $CB : CX = CX : CG$, daher ist $\triangle CAX \sim CXF$, $\triangle CBX \sim CXG$ und mithin $\sphericalangle AXC = CFX$, $\sphericalangle BXC = CGX$. Dem vorigen Lehrsatze zufolge ist $\sphericalangle CFX = CGX$ oder dessen Nebenwinkel, also ist auch entweder $\sphericalangle AXC = BXC$ oder diese Winkel ergänzen sich zu 2R, je nachdem sie neben- oder ineinander liegen.

§. 5.

Es gibt einige besondere Fälle, in welchen die Anwendung der Hyperbel als entbehrlich zur Bestimmung der gesuchten Punkte wegfällt, nämlich:

1) Wenn die Punkte A, B vom Centrum C gleich weit abstehen, oder, wenn $a = b$. Offenbar sind dann die Endpunkte des den Winkel ACB halbirenden Durchmessers schon zwei Punkte, die der Aufgabe entsprechen. Außer diesen gewinnt man noch, wofern $a > r \cos\alpha$, zwei andere Punkte, wenn man durch A, B und C einen Kreis beschreibt. Die Durchschnittspunkte desselben mit dem gegebenen leisten gleichfalls das Verlangte. Die obige Gleichung der Hyperbel reducirt sich, da hier wegen $a = b$, $m = o$ auf $nx = xy$ oder $x(y - n) = o$ und zerfällt daher in zwei andere: $x = o$ und $y = n = \frac{r^2}{a}\cos\alpha$, wovon jene die Ordinatenaxe, diese eine Senkrechte darauf bezeichnet, deren Abstand von $C = n$. Es sind dieses die Asymptoten, in welche die Hyperbel für diesen Fall übergeht.

2) Wenn die drei Punkte A, B, C in gerader Linie liegen, oder, wenn $\alpha = 0$ oder $= 90^0$. Die Punkte F, O, G liegen dann gleichfalls in dieser Linie, welche da, wo sie den Kreis trifft, unmittelbar zwei der verlangten, bisher mit X bezeichneten Punkte liefert, in so fern nämlich in diesen Punkten die Winkel AXC und $BXC = 0$ oder $= 2R$ werden, mithin als gleiche oder zu 2R sich ergänzende zu betrachten sind. Liegt C zwischen A und B so ist $\alpha = 90^0$, $n = o$, m (nun der Abstand des Punktes O von C) wird $= \frac{r^2(a-b)}{2ab}$. Liegen dagegen A und B auf einerlei Seite von C, so ist $\alpha = o$, $m = o$, $n = \frac{r^2(a+b)}{2ab}$. Errichtet man nun in O, der Mitte von FG eine Senkrechte auf AB, so gibt der Durchschnitt derselben mit dem Kreise, wenn er stattfindet, noch zwei der verlangten Punkte. Dasselbe ergibt sich durch Betrachtung der oben angewendeten Hyperbel. Die Gleichung derselben wird, wenn $\alpha = 90^0$, $y(x - m) = o$ und zerfällt in $y = o$ und $x = m$; sie wird, wenn $\alpha = 90$, $x(y - n) = o$ und zerfällt in $x = o$, $y = n$. In beiden Fällen bezeichnen diese Gleichungen die Linie AB und eine in O darauf Senkrechte als solche, in welche die Hyperbel übergeht und sich mit ihren Asymptoten identifizirt.

3) Außer diesen Fällen gibt es noch einen dritten, in welchem die Aufgabe ohne Anwendung der Hyperbel geometrisch gelös't werden kann, wenn nämlich **m = n** ist. Dieses fordert, daß $(a-b)\sin\alpha = (a+b)\cos\alpha$, also $\operatorname{tg}.\alpha = \frac{a+b}{a-b}$ oder $\operatorname{tg}.(\alpha - 45) = \frac{b}{a}$. Der Winkel ACB oder 2α muß also, damit dieser Fall eintrete, ein stumpfer und dabei so beschaffen sein, daß die ihn halbirende Linie CD mit derjenigen, welche C und die Mitte von AB verbindet, einen Winkel von 45^0 macht. Denselben Winkel macht dann auch CO mit CD. Ist nun $m = n$, so geht die obige Gleichung der Hyperbel: $my + nx = xy$ in $m(x+y) = xy$ über, welche, combinirt mit $x^2 + y^2 = r^2$ gibt: $x + y = m \pm \sqrt{m^2 + r^2}$ und sogleich zu folgender Construction führt: Fig. 5. Man ziehe einen auf CO senkrechten Radius CK, verbinde O mit K und beschreibe um O mit OK einen Kreis; derselbe treffe die Coordinatenaxen in P, Q, R, S, in der Ordnung wie die Figur es zeigt. Verbindet man nun noch P mit Q, R mit S, so treffen PQ und RS (welche beide mit den Coordinatenaxen Winkel von 45^0 machen) den gegebenen Kreis in den verlangten Punkten. Die Linie PQ schneidet dabei immer, SR aber nur dann, wenn $r > 2m\sqrt{2}$ d. i. $r > 2CO$, oder, nach Substitution des Werthes von m, wenn $r < \frac{ab\sqrt{a^2 + b^2}}{a^2 - b^2}$. Sie berührt, wenn r diesem Werthe gleich ist und trifft gar nicht, wenn r diesen Werth übersteigt. Je nachdem also $r >=$ oder < 2 CO, gibt es im gegenwärtigen Falle vier, drei oder zwei Punkte, welche die Forderung der Aufgabe erfüllen. Ihre Coordinaten ergeben sich leicht aus $xy = m(x+y) = m(m \pm \sqrt{r^2 + m^2})$. Zu bemerken bleibt noch, daß in dem speziellern Falle, wo $r = 2CO$, zwei der gesuchten Punkte sich im Endpunkte des durch O gehenden Radius vereinigen; die beiden anderen liegen um ein Drittel des Kreisumfangs von ihm ab.

Noch ein vierter Fall wird sich später ergeben.

§. 6.

Durch das Bisherige ist das vorliegende Problem in so weit gelös't, als eine Linie von bekannter Art, Lage und Dimension gefunden ist, deren Durchschnitt mit dem gegebenen Kreisumfange die gesuchten Punkte liefert. So wenig es aber bei arithmetischen Aufgaben hinreicht, die Gleichungen aufgestellt zu haben, von deren Auflösung die Bestimmung der unbekannten Größen abhängt, sobald diese Auflösung in Strenge oder näherungsweise möglich ist, eben so wenig kann es bei geometrischen Problemen genügen, Curven anzugeben, deren Durchschnitt gewisse verlangte Punkte liefern; denn diese Curven sind selbst nur geometrische Darstellungen der Gleichungen zwischen den veränderlichen Größen. Es bleiben daher noch die Coordinaten x, y der Durchschnittspunkte der Hyperbel mit dem gegebenen Kreise zu bestimmen, eine Bestimmung, welche die Auflösung der beiden Gleichungen

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ und } my + nx = xy$$

erfordert, wenn darin x, y als unbekannte, m, n, r als gegebene Größen betrachtet werden. Das gewöhnliche Verfahren hiezu besteht darin, eine jener Unbekannten zu eliminiren und dann die entstehende biquadratische Gleichung nach einer der bekannten Methoden aufzulösen. Ohne mich hierauf einzulassen, schlage ich folgenden, zu gleichem Ziele führenden kürzeren Weg ein.

Es sei $x = x' + m$, $y = y' + n$, wodurch die Gleichungen des Kreises und der Hyperbel auf die Asymptoten der letztern bezogen und diese zu neuen Coordinatenaxen gemacht werden. Diese Gleichungen werden dadurch $(x' + m)^2 + (y' + n)^2 = r^2$ und $x'y' = mn$. Da die Elimination einer der beiden Unbekannten voraussichtlich zu einer Gleichung vom 4ten Grade führt, so setze ich $2x' = M \pm \sqrt{t}$, $2y' = N \mp \sqrt{u}$ und bestimme nun M, N, t, u so daß diese Werthe von $2x'$ und $2y'$ den aufzulösenden Gleichungen Genüge thun. Ihre Substitution in der Gleichung $x'y' = mn$ gibt $(M \pm \sqrt{t})(N \mp \sqrt{u}) = 4mn$ oder $MN - \sqrt{tu} \pm (N\sqrt{t} - M\sqrt{u}) = 4mn$. Dieser Gleichung wird genügt, wenn t, u so genommen werden, daß $N\sqrt{t} = M\sqrt{u}$ und $\sqrt{tu} = MN - 4mn$. Zur Abkürzung sei $MN - 4mn = MNQ^2$, also $Q = \sqrt{1 - \frac{4mn}{MN}}$, $\sqrt{tu} = MNQ^2$, woraus in Verbindung mit $N\sqrt{t} = M\sqrt{u}$, $\sqrt{t} = MQ$, $\sqrt{u} = NQ$ und mithin

$$2x' = M(1 \pm Q),\quad 2y' = N(1 \mp Q).$$

Bleiben M und N zu bestimmen. Zu dem Ende substituire ich die zuletzt erhaltenen Formwerthe von $2x'$ und $2y'$ in die Gleichung $(x' + m)^2 + (y' + n)^2 = r^2$ und erhalte dadurch nach kurzer Entwickelung

$$(M + 2m)^2 + (N + 2n)^2 + (M^2 + N^2)Q^2 \pm 2Q\left\{M(M + 2m) - N(N + 2n)\right\} = 4r^2.$$

Um dieser Gleichung zu genügen, sei

$$M(M + 2m) = N(N + 2n) = h^2$$

woraus $M = \pm\sqrt{h^2 + m^2} - m$, $N = \pm\sqrt{h^2 + n^2} - n$ und es bleibt nunmehr nur noch h so zu bestimmen, daß auch $(M + 2m)^2 + (N + 2n)^2 + (M^2 + N^2)Q^2 = 4r^2$. Die Entwickelung dieser Gleichung und Substitution des obigen Werths von Q^2 gibt: $\left(\frac{M}{N} + \frac{N}{M}\right)(MN - 2mn) + 2m(M + m) + 2n(N + n) = 2r^2$. Es ist aber:

$$\frac{M}{N} = \frac{\pm\sqrt{h^2 + m^2} - m}{\pm\sqrt{h^2 + n^2} - n} = \frac{1}{h^2}\left\{\sqrt{(h^2 + m^2)(h^2 + n^2)} \mp m\sqrt{h^2 + n^2} \pm n\sqrt{h^2 + m^2} - mn\right\}$$

$$\frac{N}{M} = \frac{\pm\sqrt{h^2 + n^2} - n}{\pm\sqrt{h^2 + m^2} - m} = \frac{1}{h^2}\left\{\sqrt{(h^2 + m^2)(h^2 + n^2)} \pm m\sqrt{h^2 + n^2} \mp n\sqrt{h^2 + m^2} - mn\right\}$$

$$\text{folglich } \frac{M}{N} + \frac{N}{M} = \frac{2}{h^2}\left(\sqrt{(h^2 + m^2)(h^2 + n^2)} - mn\right).$$

Ferner ist: $MN - 2mn = \sqrt{(h^2 + m^2)(h^2 + n^2)} \mp m\sqrt{h^2 + n^2} \mp n\sqrt{h^2 + m^2} - mn$, und mithin

$$\left(\frac{M}{N} + \frac{N}{M}\right)(MN - 2mn) = \frac{2}{h^2}\left\{(h^2 + m^2)(h^2 + n^2) \mp mh^2\sqrt{h^2 + m^2} \mp nh^2\sqrt{h^2 + n^2} - 2mn\sqrt{(h^2 + m^2)(h^2 + n^2)} + m^2n^2\right\}$$

$$= \frac{2}{h^2}\left\{\left[\sqrt{(h^2 + m^2)(h^2 + n^2)} - mn\right]^2 \mp mh^2\sqrt{h^2 + m^2} \mp nh^2\sqrt{h^2 + n^2}\right\}$$

Hierdurch und da $M+m=\pm\sqrt{h^2+m^2}$, $N+n=\pm\sqrt{h^2+n^2}$ reduzirt sich die letzte Bedingungsgleichung alsbald auf: $\sqrt{(h^2+m^2)(h^2+n^2)}-mn=rh$. Hieraus folgt: $(h^2+m^2)(h^2+n^2)=(mn+rh)^2$, oder, nach der Entwickelung und Division mit h

$$\mathbf{h^3+h(m^2+n^2-r^2)=2mnr.}$$

Es kommt nun nur noch darauf an, h aus dieser cubischen Gleichung zu bestimmen.

§. 7.

Um diese Bestimmung zu treffen, sind drei Fälle zu unterscheiden, je nachdem $r^{2/3}=,>$ oder $< m^{2/3}+n^{2/3}$.

Ist 1. $r^{2/3}=m^{2/3}+n^{2/3}$, so ist $r^2=m^2+n^2+3(mnr)^{2/3}$ und die cubische Gleichung reducirt sich auf $h^3-3h(mnr)^{2/3}=2mnr$. Die einzige positive Wurzel derselben, die sich sofort darbietet, ist $h=2(mnr)^{1/3}$; außerdem hat sie zwei negative, beide $=-(mnr)^{1/3}$, auf die es hier weiter nicht ankommt.

2. Ist $r^{2/3}<m^{2/3}+n^{2/3}$, so ist $r^2<m^2+n^2+3(mnr)^{2/3}$ *). Die aufzulösende cubische Gleichung hat dann jedenfalls, es möge $r^2>=$ oder $<m^2+n^2$ sein, nur Eine reelle Wurzel und diese ist positiv, indem, selbst wenn $r^2>m^2+n^2$, doch $\left(\frac{r^2-m^2-n^2}{3}\right)^3<(mnr)^2$ Man setze

$(mnr)^2+\left(\frac{m^2+n^2-r^2}{3}\right)^3$ oder $(mnr)^2-\left(\frac{r^2-m^2-n^2}{3}\right)^3=K^2$, K ist eine reelle Größe und die Cardanische Formel gibt:

$$h=\sqrt[3]{mnr+K}+\sqrt[3]{mnr-K}$$

In dem besondern, hierunter begriffenen Falle, daß $r^2=m^2+n^2$ ist $K=mnr$, $h=\sqrt[3]{2mnr}$,

3. Ist $r^{2/3}>m^{2/3}+n^{2/3}$, so ist $r^2>m^2+n^2+3(mnr)^{2/3}$. Die Gleichung ist dann im sogenannten irreduziblen Falle und hat drei reelle Wurzeln, die sich aber, wie bekannt, nicht durch geschlossene algebraische Ausdrücke darstellen lassen. Dagegen läßt sich nun, da $mnr<\left(\frac{r^2-m^2-n^2}{3}\right)^{3/2}$, ein Winkel zwischen 60° und 90° so bestimmen, daß $mnr=\left(\frac{r^2-m^2-n^2}{3}\right)^{3/2}\sin(3\lambda-180)$.

Es ist dann $h=2\sqrt{\frac{r^2-m^2-n^2}{3}}.\sin\lambda$ als einziger positiver Werth von h. Außer diesem hat h noch zwei negative Werthe, auf die es hier nicht weiter ankommt.

---

*) Aus der Voraussetzung $r^{2/3}<m^{2/3}+n^{2/3}$ folgt nämlich, indem man beiderseits mit der jedenfalls positiven Größe $r^{4/3}+r^{2/3}(m^{2/3}+n^{2/3})+m^{4/3}+n^{4/3}-(mn)^{2/3}$ multiplizirt, hierauf $r^{4/3}(m^{2/3}+n^{2/3})+r^{2/3}(m^{4/3}+n^{4/3}-m^{2/3}n^{2/3})$ beiderseits abzieht: $r^2<m^2+n^2+3(mnr)^{2/3}$. Wäre dagegen $r^{2/3}>m^{2/3}+n^{2/3}$, so würde daraus folgen, daß auch $r^2>m^2+n^2+3(mnr)^{2/3}$.

§. 8.

Nachdem auf diese Weise h für alle Fälle seine Bestimmung gefunden, sind auch die davon abhängigen Werthe von M, N, Q als gegeben zu betrachten und dadurch auch die der Coordinaten x', y', x, y. Der Uebersicht wegen stehen die gewonnenen Ausdrücke hier zusammen:

Aus den gegebenen Größen a, b, r und α berechnen sich zuerst m und n mittels der Formeln

$$m = \frac{r^2(a-b)\sin\alpha}{2ab}, \quad n = \frac{r^2(a+b)\cos\alpha}{2ab}$$

dann aus diesen und r die Größe h. Ist

1. $r^{2/3} = m^{2/3} + n^{2/3}$, so ist $h = 2\sqrt[3]{mnr}$

2. $r^{2/3} < m^{2/3} + n^{2/3}$, so ist $h = \sqrt[3]{mnr + K} + \sqrt[3]{mnr - K}$, wo

$$K^2 = (mnr)^2 + \left(\frac{m^2+n^2-r^2}{3}\right)^3 = (mnr)^2 - \left(\frac{r^2-m^2-n^2}{3}\right)^3$$

3. $r^{2/3} > m^{2/3} + n^{2/3}$, so ist $h = 2\sqrt{\frac{r^2-m^2-n^2}{3}} \cdot \sin\lambda$, wo λ zwischen 60° und 90° so zu nehmen, daß

$$\left(\frac{r^2-m^2-n^2}{3}\right)^{3/2} \sin(3\lambda - 180) = mnr.$$

Aus h, m und n berechnen sich nun weiter:

$$M = \pm\sqrt{h^2+m^2} - m, \quad N = \pm\sqrt{h^2+n^2} - n, \quad Q = \sqrt{1 - \frac{4mn}{MN}}$$

$$\text{endlich } x' = \frac{1}{2}M(1 \pm Q), \quad y' = \frac{1}{2}N(1 \mp Q), \quad x = x' + m, \quad y = y' + n.$$

Die doppelten Vorzeichen in den Werthen von M und N so wie des Q lassen vier Paar Werthe für x, y entstehen. Setzt man, um diese getrennt darzustellen, zur bessern Unterscheidung

$$\sqrt{h^2+m^2} + m = M, \quad \sqrt{h^2+n^2} + n = N, \quad \sqrt{1 - \frac{4mn}{MN}} = Q$$

$$\sqrt{h^2+m^2} - m = M', \quad \sqrt{h^2+n^2} - n = N', \quad \sqrt{1 - \frac{4mn}{M'N'}} = Q'$$

und versieht die Coordinatenzeichen x, y noch mit beigesetzten Ordnungszahlen, so hat man

$$\begin{aligned}
x'_1 &= -\tfrac{1}{2}M(1-Q), & y'_1 &= -\tfrac{1}{2}N(1+Q)\\
x'_2 &= -\tfrac{1}{2}M(1+Q), & y'_2 &= -\tfrac{1}{2}N(1-Q)\\
x'_3 &= \tfrac{1}{2}M'(1+Q'), & y'_3 &= \tfrac{1}{2}N'(1-Q')\\
x'_4 &= \tfrac{1}{2}M'(1-Q'), & y'_4 &= \tfrac{1}{2}N'(1+Q')
\end{aligned}$$

ferner:

$$\begin{aligned}
x_1 &= \tfrac{1}{2}(MQ - M'), & y_1 &= -\tfrac{1}{2}(N' + NQ)\\
x_2 &= -\tfrac{1}{2}(M' + MQ), & y_2 &= \tfrac{1}{2}(NQ - N')\\
x_3 &= \tfrac{1}{2}(M + M'Q'), & y_3 &= \tfrac{1}{2}(N - N'Q')\\
x_4 &= \tfrac{1}{2}(M - M'Q'), & y_4 &= \tfrac{1}{2}(N + N'Q')
\end{aligned}$$

§. 9.

Es bleibt noch hinsichtlich der Realität dieser Werthe das Nöthige zu sagen. Diese hängt, wie sogleich erkannt wird, lediglich davon ab, ob die Größen Q und Q′ reell oder imaginair sind.

Was zunächst Q betrifft, so ist diese Größe stets reell; denn, wofern nicht $h = o$, ist $\sqrt{h^2+m^2} > m$, $\sqrt{h^2+n^2} > n$, daher $M > 2m$, $N > 2n$, $MN > 4mn$ und mithin Q, somit auch die mit Nro. 1 und 2 bezeichneten Coordinaten stets reell. Es sind dies die Coordinaten derjenigen Punkte, worin der durch das Centrum des Kreises gehende Hyperbelzweig den Kreis selbst trifft. Sie sind in Beziehung auf die Asymptoten sämmtlich negativ, im anfänglichen Coordinatensystem dagegen sind x_1 und y_2 positiv, x_2 und y_1 negativ.

Dagegen sind die mit Nro. 3 und 4 bezeichneten Coordinaten, welche den eventuellen Durchschnittspunkten des zweiten, nicht durch C gehenden Hyperbelzweiges mit dem gegebenen Kreise angehören, reell oder imaginair, je nachdem die Größe Q′ es ist, d. i. nach der Bedeutung derselben, je nachdem $M'N' >$ oder $< 4mn$. Es ist aber $M'N'$ d. i. das Product von $\sqrt{h^2+m^2}-m$ mit $\sqrt{h^2+n^2}-n$, nämlich $\sqrt{(h^2+m^2)(h^2+n^2)} - m\sqrt{h^2+n^2} - n\sqrt{h^2+m^2} + mn$, oder, da die erste dieser vier Wurzeln $= rh + mn$ (s. §. 6. zu Ende), es ist $M'N' = rh + 2mn - m\sqrt{h^2+n^2} - n\sqrt{h^2+m^2} >=$ oder $< 4mn$, je nachdem $rh - 2mn >=$ oder $< m\sqrt{h^2+n^2} + n\sqrt{h^2+m^2}$, also auch, je nachdem $r^2h^2 - 4mnrh + 4m^2n^2 >=< (m^2+n^2)h^2 + 2m^2n^2 + 2mn(rh+mn)$ oder reduzirt: je nachdem $r^2h >=< 6mnr + h(m^2+n^2)$. Ist $r^2 = m^2+n^2$ oder $r^2 < m^2+n^2$, so erhellt sofort, daß $r^2h < (m^2+n^2)h + 6mnr$, daher $M'N' < 4mn$. Der Mittelpunkt der Hyperbel liegt dann außerhalb des Kreises oder in dessen Umfang. Ist aber $r^2 > m^2+n^2$, so hängt die Ungleichheit $M'N' >=$ oder $< 4mn$ weiter davon ab, ob gleichzeitig $(r^2-m^2-n^2)h >=< 6mnr$, daher, weil $h^3 = h(r^2-m^2-n^2) + 2mnr$, davon, ob $h^3 >=$ oder $< 8mnr$, $h >=$ oder $< 2(mnr)^{1/3}$. Man multiplizire beiderseits mit $\left[h + (mnr)^{1/3}\right]^2$, so ergibt sich weiter, daß $M'N' >=$ oder $< 4mn$, je nachdem $h^3 >=$ oder $< 3h(mnr)^{2/3} + 2mnr$, d. i. nach Substitution des Werthes von h^3, je nachdem $h(r^2-m^2-n^2) >=< 3h(mnr)^{2/3}$ oder $r^2 >=< m^2+n^2+3(mnr)^{2/3}$, folglich (s. Anmerk. in §. 7) je nachdem $r^{2/3} >=$ oder $< m^{2/3}+n^{2/3}$. Die Werthe von x_3, y_3, x_4, y_4 sind daher reell und dabei stets positiv, wenn $r^{2/3} >$ oder $= m^{2/3}+n^{2/3}$, dagegen sind sie imaginair, wenn $r^{2/3} < m^{2/3}+n^{2/3}$. Im Falle daß $r^{2/3} = m^{2/3}+n^{2/3}$ wird $M' = 2\sqrt[3]{mn^2}$, $N' = 2\sqrt[3]{nm^2}$, daher $Q' = 0$, $x'_3 = x'_4 = \sqrt[3]{mn^2}$, $y'_3 = y'_4 = \sqrt[3]{nm^2}$, $x_3 = x_4 = \sqrt[3]{mr^2}$, $y_3 = y_4 = \sqrt[3]{nr^2}$.

Faßt man das Gesagte zusammen, so erhellt übereinstimmend mit dem in §. 3 bei der Construction der Hyperbel schon Erinnerten, daß, je nachdem $r^{2/3} >=$ oder $< m^{2/3}+n^{2/3}$, es vier, drei oder nur zwei Punkte gibt, welche die Forderung der Aufgabe erfüllen und deren Coordinaten im Obigen bestimmt sind. Die mit Nr. 1 und 4 bezeichneten gehören denjenigen Punkten an, bei welchen die in der Aufgabe bedeuteten Winkel gleich sind, die mit Nr. 2 und 3 bezeichneten den beiden andern Punkten, an welchen diese Winkel sich zu $2R$ ergänzen.

§. 10.

Auch die geometrische Beziehung der im Vorigen angewandten fünf Hülfsgrößen M, N, M', N', und h ist der Beachtung werth.

Zieht man nämlich (s. Fig. 6) durch die auf dem durch C gehenden Hyperbelzweige liegenden Punkte X_1 und X_2, deren Coordinaten resp. x'_1, y'_1 und x'_2, y'_2 eine gerade Linie X_1X_2, und verlängert diese bis zu den Asymptoten, von welchen sie die zur Abscissenaxe genommene in P, die andere in Q treffen möge, so sind bekanntlich die Verlängerungen PX_2 und QX_1 gleich, daher sind es auch deren Projectionen auf die Coordinatenaxen, woraus sogleich folgt, daß dem absoluten Werth nach $OP = -(x'_1 + x'_2)$, $OQ = -(y'_1 + y'_2)$. Nach den oben ermittelten Werthen dieser Coordinaten ist aber $x'_1 + x'_2 = -M$, $y'_1 + y'_2 = -N$, daher ist auch $OP = M$, $OQ = N$. Zieht man eben so durch die Punkte X_3, X_4, welche, wenn sie existiren, auf dem andern Hyperbelzweige liegen, eine gerade Linie, welche verlängert die zur Abscissenaxe genommene Asymptote in R, die andere in S treffe, so ist aus gleichem Grunde wie vorher, $OR = x'_3 + x'_4$, $OS = y'_3 + y'_4$, mithin nach den obigen Werthen dieser Coordinaten, $OR = M'$, $OS = N'$. Die vier Hülfsgrößen M, N, M', N', sind daher die absoluten Längen der durch die geraden Linien X_1X_2 und X_3X_4 bei ihrer Verlängerung auf den Asymptoten abgeschnittenen vier Stücke OP, OQ, OR, OS. Sucht man die Abstände der vier Punkte P, Q, R, S von C so findet man diese gleich groß. Es ist nämlich

$$CP^2 = n^2 + (M - m)^2 = n^2 + h^2 + m^2$$
$$CQ^2 = m^2 + (N - n)^2 = m^2 + h^2 + n^2$$
$$CR^2 = n^2 + (M' + m)^2 = n^2 + h^2 + m^2$$
$$CS^2 = m^2 + (N' + n)^2 = m^2 + h^2 + n^2$$

Diese vier Punkte liegen also sämmtlich im Umfange eines mit dem gegebenen concentrischen Kreises, dessen Radius (er sei ϱ) $= \sqrt{h^2 + m^2 + n^2}$. Zieht man durch O eine auf CO senkrechte Sehne dieses Kreises, so ist die Hälfte derselben $= h$, mithin h^2 die sogenannte Potenz dieses Kreises in Beziehung auf den Punkt O. Die Construction der vier Durchschnittspunkte der Hyperbel und des Kreises hängt also lediglich von der Größe h ab und folgt, sobald diese bekannt ist, von selbst. Mit h ist nämlich der besprochene concentrische Kreis gegeben, damit sind es die 4 Punkte P, Q, R, S auf den Asymptoten, damit die geraden Linien PQ und RS, deren Durchschnitt mit dem gegebenen Kreisumfang die vier Punkte X_1, X_2, X_3, X_4 liefert, welche die Aufgabe verlangt.

Was nun die Größe h selbst betrifft, so ist die Construction derselben durch die Mittel der Elementar-Geometrie nur in besondern Fällen ausführbar. In den zwei ersten der schon oben §. 5 betrachteten speziellen Fälle, wo einmal $a = b$ dann $\alpha = o$ oder $\alpha = 180$ angenommen wurde, ist wenn $n < r$, $h = \sqrt{r^2 - n^2}$, $\varrho = r$, wenn aber $n =$ oder $> r$, $h = o$, $\varrho = n$. Im dritten Falle, wo angenommen wurde, daß $\operatorname{tg.} \alpha = \frac{a + b}{a - b}$, also $m = n$ sei, ergibt sich $h = r$, $\varrho = \sqrt{r^2 + 2m^2}$;

Außer diesen ist nun noch der Fall zu betrachten, wo $r^{2/3} = m^{2/3} + n^{2/3}$, d. i. wo Kreis und Hyperbel sich berühren. In diesem ist $h = 2(mnr)^{1/3}$, h^2 also $= 4(mnr)^{2/3}$; aber auch $r^2 = m^2 + n^2 + 3(mnr)^{2/3}$; folglich $h^2 = \frac{4}{3}(r^2 - m^2 - n^2)$, $\varrho^2 = h^2 + m^2 + n^2 = \frac{4r^2 - m^2 - n^2}{3}$. Dieser Ausdruck führt zu folgender Construction. Nachdem der Punkt O durch Halbirung von FG bestimmt worden, ziehe man CO, dann eine durch die Mitte von CO gehende, auf CO selbst senkrechte Sehne des gegebenen Kreises. Ueber dieser Sehne errichte man ein gleichseitiges Dreieck und beschreibe einen mit dem gegebenen concentrischen Kreis, eben so groß als ein dem gleichseitigen Dreieck umschriebener. Die Punkte, worin dieser die Asymptoten trifft, sind die vorhin genannten vier Punkte P, Q, R, S. Die Verbindungslinie PQ schneidet den gegebenen Kreis in den verlangten Punkten X_1 und X_2, die Linie SR aber wird denselben berühren und X_3, X_4 vereinigen sich im Berührungspunkte. Denn es ist $CO^2 = m^2 + n^2$, daher das Quadrat der Sehne$^2 = 4r^2 - m^2 - n^2$, das Quadrat des Radius des dem gleichseitigen Dreieck umschriebenen Kreises, und daher auch das Quadrat des Radius ϱ des concentrischen Kreises d. i. $\varrho^2 = \frac{1}{3}(4r^2 - m^2 - n^2)$. Durch diese Construction wird ferner $OR = \sqrt{\varrho^2 - n^2} - m = \sqrt{\frac{1}{3}(4r^2 - 4n^2 - m^2)} - m$, oder, da $r^{2/3} = m^{2/3} + n^{2/3}$, $OR = 2\sqrt[3]{mn^2}$. Eben so $OS = 2\sqrt[3]{nm^2}$, daher $SR^2 = 4\sqrt[3]{(mnr)^2}$. Es ist aber $\varrho^2 = r^2 + \frac{r^2 - m^2 - n^2}{3} = r^2 + (mnr)^{2/3}$, daher der Abstand der SR vom Mittelpunkt $C = r$. SR berührt also den gegebenen Kreis, und da die Berührung in der Mitte von SR geschieht, so berührt SR auch die Hyperbel, daher Kreis und Hyperbel sich auch unter einander in der Mitte von SR berühren.

§. 11.

Von theoretischer Seite möchte die bisherige Auflösung des Problems als vollständig zu betrachten sein; es bleibt, auch der praktischen die gebührende Rücksicht zu schenken. Veranlassung dazu gibt die Erwägung, daß obgleich die in §. 8 als Resultate der Theorie zusammengestellten Ausdrücke in den Stand setzen, die unbekannten Größen der Aufgabe direct und mit jedem beliebigen Grade von Schärfe zu bestimmen, es dennoch wünschenswerth bleibt, eine solche Bestimmung mit weit geringerem Aufwande von Rechnung treffen zu können, als jene Ausdrücke in der Anwendung erfordern. Man könnte versucht sein, Hülfswinkel zu diesem Zwecke einzuführen, um die Anwendung der Logarithmen zu erleichtern, oder man könnte die Werthe von x und y in Reihen entwickeln wollen, die eine hinreichende Convergenz darböten; aber diese Mittel stehen in Rücksicht auf practische Brauchbarkeit weit hinter denjenigen Methoden, welche durch successive, aber rasche Näherung, wenn auch indirect zum Resultate führen und die ich hier in der Kürze noch angeben will.

Erste Methode, auf den Gebrauch der Logarithmentafel gegründet. Eliminirt man aus den beiden aufzulösenden Gleichungen $x^2 + y^2 = r^2$ und $nx + my = xy$ abwechselnd die Eine und Andere der Unbekannten, so erhält man $(r^2-x^2)(x-m)^2=n^2x^2$, $(r^2-y^2)(y-n)^2=m^2y^2$ und durch Uebergang zu den Logarithmen:

$$\log(r+x)+\log(r-x)+2\log(x-m)-2\log x=2\log n$$
$$\log(r+y)+\log(r-y)+2\log(y-n)-2\log y=2\log m$$

Obgleich jede dieser beiden Gleichungen zur Berechnung aller vier Werthe der darin enthaltenen Unbekannten gebraucht werden kann, so benutze ich doch die erste vorzugsweise zur Berechnung von x_1 und x_4, die zweite zur Berechnung von y_2 und y_3. Um diese auszuführen ist es zweckmäßig die Gränzwerthe zu bestimmen, zwischen welchen die zu berechnenden Größen nothwendig liegen. Leicht wird man erkennen, daß

$$x_1 \text{ stets zwischen } \frac{mr}{n+r} \text{ und } \frac{m\sqrt{r^2-m^2}}{n+\sqrt{r^2-m^2}},\ y_2 \text{ zwischen } \frac{nr}{m+r} \text{ und } \frac{n\sqrt{r^2-n^2}}{m+\sqrt{r^2-n^2}}\text{*)}$$

$$y_3 \text{ stets zwischen } \sqrt[3]{nr^2} \text{ und } \frac{n\sqrt{r^2-n^2}}{\sqrt{r^2-n^2}-m},\ x_4 \text{ zwischen } \sqrt[3]{mr^2} \text{ und } \frac{m\sqrt{r^2-m^2}}{\sqrt{r^2-m^2}-n}$$

fällt. Man gehe nun von irgend einem zwischen diesen Gränzen genommenen Anfangswerthe aus, z. B. dem Werthe p für x, und berechne den Ausdruck $\log(r+p)+\log(r-p)+2\log(p-m$ oder $m-p)+2\log p$; der Unterschied des Gefundenen von $2\log n$ sei d; dividirt man nun d durch die (algeb.) Summe der Veränderungen, welche die vier aus den Tafeln genommenen Logarithmen für eine bestimmte Dezimaleinheit, etwa 0,001 in p erleiden und welche durch die Tafeln selbst unmittelbar angegeben werden, so erhält man eine entsprechende Correction von p und damit einen verbesserten Werth von x_1, der nun, für p gesetzt, eine Wiederholung desselben Verfahrens gestattet. Diese ist so oft vorzunehmen, als nöthig ist, um der logarithmischen Gleichung innerhalb der Gränzen der Genauigkeit, welche die Tafeln zulassen, Genüge zu leisten. Ein Beispiel wird das Verfahren sogleich klar machen.

Es sei $m=27$, $n=64$, $r=100$. Die Gränzen für x_1 sind nach den oben gegebenen Ausdrücken dafür: 16,464 und 16,219. Man nehme nun eine beliebige Zahl zwischen diesen beiden, etwa den Mittelwerth 16,341, so ist für $p=16{,}341$, $r+p=116{,}341$, $r-p=83{,}659$, $m-p=10{,}659$ und nun

$$\begin{array}{rll}
\log(r+p) = & 2.0657328, & \text{Diff. für } 0{,}001 \text{ in } p = -0.0000038 \\
\log(r-p) = & 1.9225127, & \text{,, ,, } \ldots = +0.0000052 \\
2\log(m-p) = & \underline{2.0554330}; & 2\times\text{Diff.} \ldots = +\underline{0.0000816} \\
 & 6.0436785 & \qquad\qquad +0.0000830 \\
-2\log p = - & \underline{2.4265572}; & 2\times\text{Diff.} \ldots +\underline{0.0000532} \\
 & 3.6171213 & \text{Summe dieser Diff. } S = +0.0001362
\end{array}$$

Es ist aber $2\log n = \underline{3.6123600}$, daher $d = 0.0047613$, $\frac{S}{d} = \frac{47613}{1362} = 34{,}96$ Einheiten der 3. Dez. Stelle

*) Anm. Wäre $r=$ oder $<m$, so hätte man 0 als untere Gränze für x_1 eben so, wenn $r=$ oder $<n$, 0 als untere Gränze von y_2 zu setzen.

daher $p = 16{,}341 + 0{,}03496 = 16{,}37596$. Da die Wiederholung derselben Rechnung mit diesem neuen Werthe von p keine Correction der fünften Dezimalstelle liefert, so ist $x_1 = 16{,}37596$, woraus mittels der Gleichung $m y_1 + n x_1 = x_1 y_1$, $y_1 = -98{,}65002$.

Auf gleiche Weise ist die zweite logar. Gleichung zu benutzen, um y_2 zu finden. Die Gränzen sind hier 50,394 und 47,321. Man nehme $p = 48{,}858$, dem Mittel aus beiden, so ergibt sich als erste Correction $+16{,}33$, mithin als verbesserter Werth $p = 48{,}87433$; dieser liefert als zweite Correction nur $-0{,}01$, daher $y_2 = 48{,}87432$ und nun $x = -87{,}24277$.

Zweite Methode auf die Benutzung der trigon. Tafeln gegründet. Man setze (§. 1) $x = r \sin\varphi$, $y = r \cos\varphi$, dadurch wird die Gleichung $my + nx = xy$ nach Division mit $r\cos\varphi$ auf

$$m + n \operatorname{tg}\varphi - r \sin\varphi = 0$$

gebracht und es kommt nur darauf an, hieraus φ zu bestimmen. Die vorhin angegebenen Gränzwerthe von x und y geben, durch Division mit r, die von $\sin\varphi$ und $\cos\varphi$ und dadurch die von φ selbst. Für einen zwischen diesen Gränzen genommenen ersten Näherungswerth von φ (er sei w) berechne man nun den Ausdruck $m + n \operatorname{tg} w - r \sin w$, notire dabei aber gleichzeitig aus den Tafeln die Veränderungen, welche die beiden letzten Glieder dieses Ausdrucks durch Zusatz oder Abnahme einer Secunde in w erleiden. Gibt der Ausdruck statt Null die Größe d, so ist d durch die (algeb.) Summe S der genannten Veränderungen zu dividiren. Der Quotient liefert eine erste Correction von w, worauf dann mit dem verbesserten Werthe von w wiederholt auf gleiche Weise zu verfahren ist.

Beispiel. Es sei $m = 27$, $n = 64$, $r = 150$, x_4 und y_4 zu berechnen. Die Gränzen für $\sin\varphi_4$ sind $0{,}56462 = \sin 34^\circ 23'$, und $0{,}31788 = \sin 18^\circ 32'$, also liegt φ zwischen $18^\circ 32'$ und $34^\circ 23'$. Wie ein leichter Versuch gleich zeigt, kommt φ der ersten Gränze bedeutend näher als der zweiten; man setze deßhalb $w = 19^\circ$; es ist dann $\operatorname{tg} w = 0.3443276$, $\sin w = 0{,}3255682$;

$$\begin{array}{rll} m + n \operatorname{tg} w = 49{,}0369664; & 64 \times \text{Diff. für } 1'' \text{ in } w = & 0{,}0003471 \\ r \sin w = 48{,}8352300; & 150 \times \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} \quad = & 0{,}0006875 \\ \hline d = \quad 0{,}2017364 & \qquad\qquad\qquad s = & 0{,}0003404 \end{array}$$

$\frac{d}{s} = \frac{2017364}{3404} = 593'' = 9' 43''$, also $w = 19^\circ 9' 43''$; mit diesem verbesserten Werth erhält man weiter

$$\begin{array}{rll} m + n \operatorname{tg} w = 49{,}2395008, & 64 \times \text{Diff. für } 1'' \text{ in } w = & 0{,}0003477 \\ r \sin\varphi = 49{,}2359010; & 150 \times \text{,, \quad ,, \quad ,, \quad ,,} \quad = & 0{,}0006870 \\ \hline d = \quad 0{,}0035998 & \qquad\qquad\qquad s = & 0{,}0003393 \end{array}$$

$\frac{d}{s} = \frac{35998}{3393} = 10'',61$, daher $\varphi_4 = w + 10'',61 = 19^\circ 9' 53'',61$. Aus diesem Werthe von φ_4 folgt $x_4 = r \sin\varphi_4 = 49{,}24319$, $y_4 = r \cos\varphi_4 = 141{,}68667$.

Auf gleiche Weise ist mit φ_1 φ_2 und φ_3 zu verfahren. Die Anwendung der Methode wird geben: $\varphi_1 = 172^\circ 46' 9'',14$, $\varphi_2 = 290^\circ 57' 35'',85$, $\varphi_3 = 57^\circ 6' 21'',40$ und aus diesen

$$x_1 = 18{,}87997,\quad x_2 = -140{,}07462,\quad x_3 = +123{,}95145$$

$$y_1 = -148{,}80710,\quad y_2 = +53{,}657315,\quad y_3 = +81{,}46311.$$

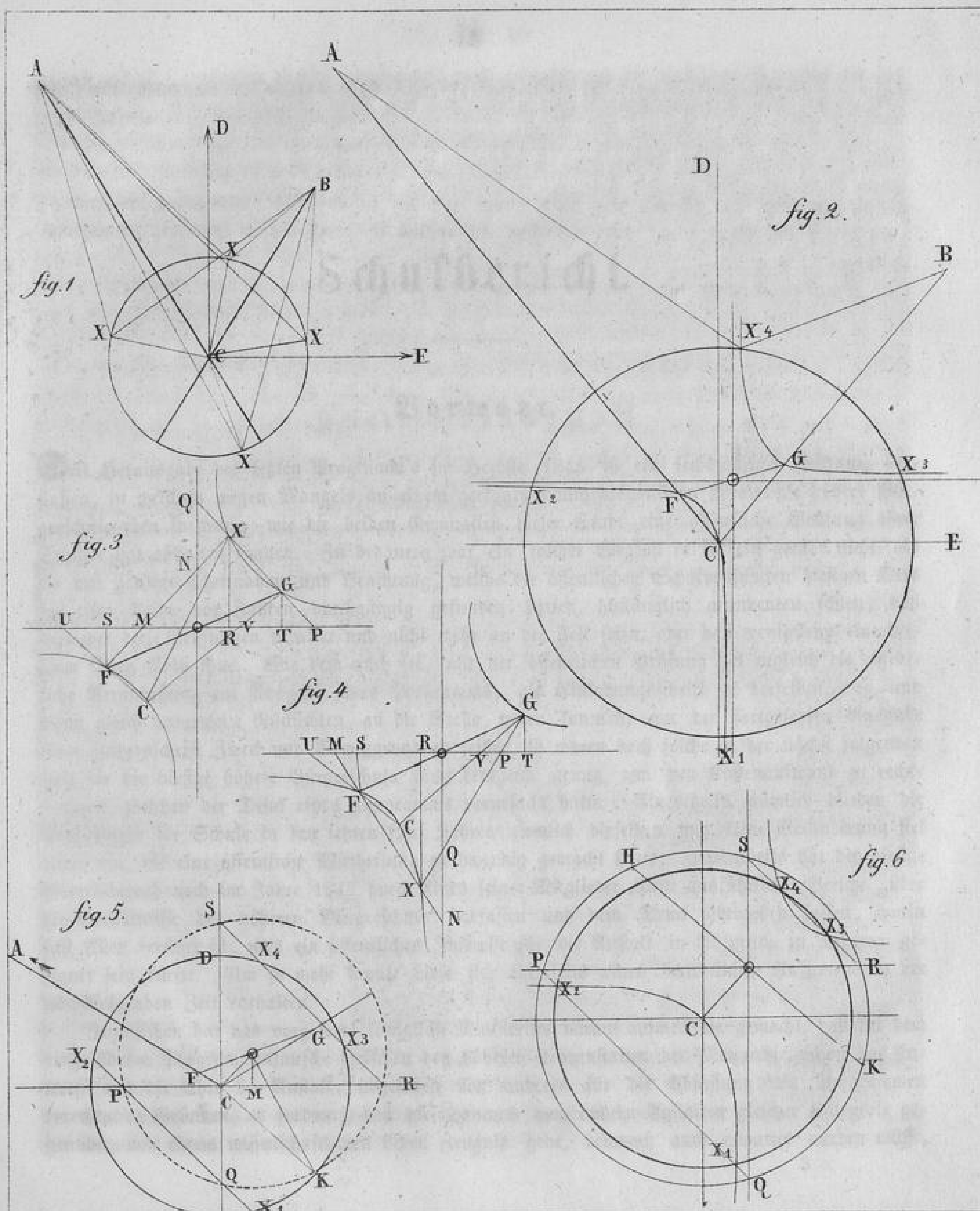
fig. 1
fig. 2.
fig. 3
fig. 4
fig. 5.
fig. 6
A
B
C
D
E
X
F
G
Q
N
U
S
M
R
V
T
P
H
K
X_1
X_2
X_3
X_4