Anwendung der Differentialrechnung.

I. Entwickelung der transscendenten Functionen in Reihen.

Bei dieser Unzuverlässigkeit der Taylor'schen resp. Mac Laurin'schen Reihe ist es gewiß wünschenswerth, den Gebrauch dieser Sätze möglichst einzuschränken. Ich habe bereits weiter oben die vollständige Entbehrlichkeit der Differentialrechnung bei Entwickelung der Potenzen, Logarithmen und Kreisfunctionen behauptet und gesagt, daß die ein klein wenig erweiterte Methode der unbestimmten Coefficienten leicht und sicher zum Ziele führt.

Wir haben uns schon überzeugt, daß man die Form der Reihe für $f(x)$ ganz nach Belieben voraussetzen darf, weil sich, wenn die vorausgesetzte Form unpassend sein sollte, auch die vorausgesetzten Coefficienten nicht berechnen lassen. Ferner haben wir gesehen, daß die ganze rationale Form, also eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots,$$

wenn nicht die natürlichste, jedenfalls die angenehmste ist. Durch Anwendung des bekannten Satzes: „die Reihe gilt für jedes x, also auch für $x = o$" ergiebt sich leicht:

$$\left.\begin{aligned} A &= fx \\ B &= \frac{fx - A}{x} \\ C &= \frac{fx - A - Bx}{x^2} \\ D &= \frac{fx - A - Bx - Cx^2}{x^3} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{für } x = o. \\ &\text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Leider führt uns das aber selten zum Ziele, weil wir überall dem vieldeutigen Symbole $\frac{0}{0}$ begegnen, und wir werden daher gewiß wohl thun, wenn wir uns nach einer Reihenform umsehen, die uns über diese Schwierigkeit hinweg hilft.

Die ganze rationale Form werden wir sicherlich nicht ohne Noth aufgeben; und da, meine ich denn, liegt es wohl nahe genug, statt der gewöhnlichen Potenzen sogenannte Facultäten, d. h. statt der Producte gleicher Factoren, Producte äquidifferenter Factoren, für $f(x)$ also eine Reihe von folgender Form vorauszusetzen:

$$f(x) = A + Bx + Cx(x-m) + Dx(x-m)(x-2m) + \ldots . \qquad \text{I.}$$

Durch wiederholte Anwendung des Satzes: „die Reihe soll für jedes x gelten, also gilt sie auch für $x = o$, $x = m$, $x = 2m \ldots$ sind wir im Stande die Coefficienten A, B, $C \ldots$ zu bestimmen, ohne durch das sich immer wiederholende $\frac{0}{0}$ in Verlegenheit gesetzt zu werden.

Unsere Reihe I. hat zugleich den Vorzug der größeren Allgemeinheit; findet sich nämlich am Ende der Untersuchung, daß das vor der Hand beliebige m auch $= o$ gesetzt werden kann, so geht I. über in die gewöhnliche Reihe:

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \ldots \qquad \text{II.}$$

Es versteht sich übrigens von selbst, daß (I.) nicht die einzige Form ist, welche vorausgesetzt werden kann und darf. Unter Umständen empfiehlt es sich auch, statt der Vielfachen von m, Potenzen von m anzunehmen. Also:

$$f(x) = A + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)(x-m) + Ex(x-1)(x-m)(x-m^2) \ldots . \qquad \text{III.}$$

Legen wir nun die Reihe I. zu Grunde, so erhalten wir leicht folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
A &= f(o) \\
B &= \frac{f(m) - A}{m} \\
C &= \frac{f(2m) - 2Bm - A}{1.2.m^2} \\
D &= \frac{f(3m) - 2.3Cm^2 - 3Bm - A}{1.2.3m^3} \\
E &= \frac{f(4m) - 2.3.4Dm^3 - 3.4Cm^2 - 4Bm - A}{1.2.3.4m^4} \\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}\right\} \quad \text{IV.}$$

und durch wiederholte Substitution

$$\left.\begin{aligned}
A &= f(o) \\
B &= \frac{f(m) - f(o)}{m} \\
C &= \frac{f(2m) - 2f(m) + f(o)}{1.2m^2} \\
D &= \frac{f(3m) - 3f(2m) + 3f(m) - f(o)}{1.2.3m^3} \\
E &= \frac{f(4m) - 4f(3m) + 6f(2m) - 4f(m) + f(o)}{1.2.3.4m^4} \\
&\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot
\end{aligned}\right\} \quad \text{V.}$$

Das allgemeine Gesetz, dem diese interessanten Formeln folgen, ist eben so leicht zu erkennen, als zu beweisen. Es wird sein:

$$A_k = \frac{f(km) - B_k^1 f(k-1)m + B_k^2 f(k-2)m - \ldots (-1)^k B_k^k f(o)}{1.2.3\ldots k\, m^k}. \quad \text{VI.}$$

Mit Hülfe dieser Formel, auf deren Beweis ich sogleich zurückkommen werde, lassen sich sämmtliche Coefficienten der Reihe ohne Schwierigkeit finden.

Eine andere Methode, diese Coefficienten zu bestimmen, welche in vielen Fällen rascher zum Ziele führt, ist folgende:

Hat man

$$y = f(x) = A + Bx + Cx(x-m) + Dx(x-m)(x-2m)\ldots$$

worin m als Abkürzung für Δx angesehen werden soll, so ergiebt sich leicht:

$$y' = f(x+m) = A + B(x+m) + C(x+m)x + D(x+m)x(x-m)\ldots$$

und $$\Delta y = f(x+m) - f(x) = mB + 2mCx + 3mDx(x-m)\ldots,$$

daher: $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = B + 2Cx + 3Dx(x-m) + 4Ex(x-m)(x-2m)\ldots \quad \text{VII.}$$

Sobald wir also im Stande sind, aus den Eigenschaften der gegebenen Function den Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ abzuleiten und ihn durch einen ähnlichen Reihenausdruck darzustellen, z. B.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A' + B'x + C'x(x-m) + D'x(x-m)(x-2m)\ldots,$$

so erhält man durch Gleichsetzung der Coefficienten der gleichen Facultäten:

$$B = A'$$
$$2C = B' \quad \text{also} \quad C = \tfrac{1}{2}B'$$
$$3D = C' \quad " \quad D = \tfrac{1}{3}C' \quad \text{u. s. w.}$$

Stellt sich hierbei heraus, daß $m = o$ gesetzt werden kann, so geht der Differenzenquotient in den Differentialquotienten und die vorausgesetzte Reihe in die gewöhnliche nach den einfachen Potenzen von x geordnete über, so daß es also in diesem Falle angänglich ist, der Function die Form zu geben:

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots.$$

vorausgesetzt, daß die erhaltene Reihe convergirt.

A. Die Exponentialgrößen und der binomische Lehrsatz.

Potenzen werden in den Elementen der Arithmetik zunächst nur als Producte gleicher Factoren aufgefaßt. Zu ihrer Berechnung bedarf es selbstverständlich keiner Reihen. Desto willkommener sind uns dieselben da, wo die Frage nicht mehr zurückgewiesen werden kann, was bedeutet a^x sobald der Exponent keine ganze positive Zahl, vielmehr durchaus beliebig, gleichviel ob ganz oder gebrochen, positiv oder negativ, rational oder irrational, möglich oder imaginair ist? Man behilft sich bei der Beantwortung dieser Frage gewöhnlich so gut es eben gehen will, indem man a^{-m} auf $\frac{1}{a^m}$ und $a^{\frac{m}{n}}$ auf $\sqrt[n]{a^m}$ zurückführt, die übrigen Fälle aber kurz abfertigt, oder wohl gar ignorirt, ungeachtet man besonders in der Differentialrechnung von diesen anderen Fällen den ausgedehntesten Gebrauch macht. Sehen wir uns vor allen Dingen nach einer Erklärung der Potenzen um, so werden wir durch die bekannte Eigenschaft derselben, so bald der Exponent eine ganze positive Zahl ist, genöthigt, zu sagen: Potenz ist eine solche Function, welche die Eigenschaft hat, daß

$$f(x) \,.\, f(y) = f(x + y) \text{ ist.}$$

In der That genügt diese Definition vollständig und es läßt sich aus derselben namentlich die Reihe für a^x eben so kurz und bündig, als allgemein ableiten.

Setzen wir die Reihe voraus:

$$a^x = A + Bx + Cx(x - m) + Dx(x - m)(x - 2m) \ldots$$

oder da $A = f(o) = 1$

$$a^x = 1 + Bx + Cx(x - m) + Dx(x - m)(x - 2m) \ldots. \qquad \text{I.,}$$

so ist zunächst:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = B + 2Cx + 3Dx(x - m) + 4Ex(x - m)(x - 2m) \ldots. \qquad \text{II.}$$

Ferner ist wegen der Grundeigenschaft der Potenzen:

$$a^x \,.\, a^m = a^{x+m},$$

daher $\quad a^{x+m} = a^m\,[1 + Bx + Cx(x - m) + Dx(x - m)(x - 2m) \ldots.],$

und wenn man I. abzieht und mit m dividirt:

$$\frac{a^{x+m} - a^x}{m} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^m - 1}{m}\,[1 + Bx + Cx(x - m) + Dx(x - m)(x - 2m) \ldots.] \qquad \text{III.}$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Facultäten erhält man, $\frac{a^m - 1}{m}$ einstweilen $= g$ gesetzt:

$$B = g$$

$$2C = gB \quad \text{also:} \quad C = \frac{g^2}{1 . 2}$$

$$3D = gC \qquad D = \frac{g^3}{1 . 2 . 3}$$

$$4E = gD \qquad E = \frac{g^4}{1 . 2 . 3 . 4} \text{ u. s. w.}$$

Substituiren wir für die Größen A, B, C ... die gefundenen Werthe, so erhalten wir:

$$a^x = 1 + \left[\frac{a^m - 1}{m}\right] x + \left[\frac{a^m - 1}{m}\right]^2 \frac{x(x-m)}{1 . 2} + \left[\frac{a^m - 1}{m}\right]^3 \frac{x(x-m)(x-2m)}{1 . 2 . 3} \ldots \quad \text{IV.}$$

Dies ist nun die vollständige Reihenentwicklung für die Function a^x, oder es sind deren eigentlich unzählige, weil wir über die Differenz m noch gar nichts festgesetzt haben. Am liebsten möchten wir natürlich $m = o$ setzen. Dadurch wird aber $\frac{a^m - 1}{m} = \mathfrak{g}$, und da wir zur Zeit noch nicht wissen, was hier $\mathfrak{g}$ bedeutet, so lassen wir diesen besonderen Fall vorläufig noch auf sich beruhen und setzen für m das zunächst Einfachste, nämlich $m = 1$. Dadurch wird:

$$a^x = 1 + [a - 1]\, x + [a - 1]^2 \frac{x(x-1)}{1 . 2} + [a - 1]^3 \frac{x(x-1)(x-2)}{1 . 2 . 3} \ldots$$

oder wenn man $a - 1 = b$ nimmt:

$$[1 + b]^x = 1 + xb + \frac{x(x-1)}{1 . 2} b^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 . 2 . 3} b^3 + \ldots \quad \text{V.}$$

und wenn man die üblichen Zeichen für die Binomial-Coefficienten vorziehen sollte:

$$[1 + b]^x = 1 + B^1(x)\, b + B^2(x)\, b^2 + B^3(x)\, b^3 \ldots$$

Wer die harte Geduldsprobe ausgehalten hat, sich auf endlosen Umwegen durch allerlei einzelne Fälle zu einem allgemein sein sollenden Beweise des so überaus wichtigen binomischen Lehrsatzes hindurch zu arbeiten, muß sich angenehm überrascht fühlen, wenn er sich überzeugt, daß sich dieser Satz ganz leicht und ganz allgemein, der Exponent mag sein, was er will, bloß aus der Grundeigenschaft der Potenzen ohne Einmischung fremdartiger Vorstellungen herleiten und beweisen läßt.

Der Fehler, den man bei der Herleitung des binomischen Lehrsatzes zu machen pflegt, ist nach meinem Dafürhalten einfach der, daß man von vorn herein nicht den Exponenten, auf den es doch eben ankömmt, sondern die Basis als ursprünglich variabele Größe betrachtet und in der Reihe abzusondern sucht.

Die im vorigen Abschnitte zur Berechnung der Größen A_1, A_2, A_3 angegebene Formel VI. läßt sich nun ebenfalls allgemein beweisen. Es sei:

$$A_k = \frac{f(o) + a_1 fm + a_2 f2m + a_3 f3m \ldots + a_k fkm}{1 . 2 . 3 . k m^k}.$$

Die Zahlen a_1, a_2, a_3, ... sind offenbar von der Natur der Function unabhängig, also immer dieselben, $f(x)$ mag sein, was es will. Ist nun $fx = a^x$, dann ergiebt sich, wie wir gesehen haben:

$$A_k = \frac{[a^m - 1]^k}{1 . 2 \ldots k\, m^k}$$

$$= [-1]^k \frac{1 - B_k^1 a^m + B_k^2 a^{2m} - B_k^3 a^{3m} \ldots \pm B_k^k a^{km}}{1.2.3 \ldots k\, m^k},$$

woraus die Richtigkeit des Satzes ohne Weiteres folgt.

Um die Convergenz der binomischen Reihe zu prüfen, haben wir das Verhältniß von zwei aufeinander folgenden Gliedern zu untersuchen. Dieses ist:

$$\frac{x-k}{k+1}\, b \quad \text{oder} \quad \frac{\frac{x}{k} - 1}{1 + \frac{1}{k}}\, b.$$

Je größer k wird, desto mehr nähert sich dieser Quotient der Größe $-b$ und die Reihe wird also nur dann convergiren, wenn $b < 1$.

Sobald also der Exponent x keine ganz positive Zahl und $b > 1$ ist, haben wir durchaus kein Recht, zu behaupten, daß die Summe der unendlichen Reihe

$$1 + B_x^1 b + B_x^2 b^2 + \ldots$$

$= (1+b)^x$ sei. Dieselbe ist also zwar richtig für jeden beliebigen Exponenten, keineswegs aber für jede beliebige Wurzel und muß daher, wenn sie praktisch angewendet werden soll, umgeformt werden.

Z. B.: $\sqrt{(50)} = [49 + 1]^{\frac{1}{2}} = 7\,[1 + \tfrac{1}{49}]^{\frac{1}{2}}$, oder

$$[1+b]^{-x} = \left[1 - \frac{b}{1+b}\right]^x \text{ und dergl.}$$

Die Herleitung des binomischen Lehrsatzes aus dem Mac Laurin'schen, ist deshalb nicht zu empfehlen, weil der letztere ohne Newtons Theorem vorauszusetzen, selbst nicht befriedigend bewiesen werden kann und weil die Differentialformel $dx^m = mx^{m-1}dx$ für irrationale und imaginaire Exponenten zweifelhaft bleibt.

B. Die Logarithmen.

Daß man $\log x$ nicht durch eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe

$$a + bx + cx^2 \ldots$$

darstellen kann, ist einleuchtend, weil $a = \log o = -\infty$ werden würde. Es liegt daher nahe, für $\log [1+x]$ einen solchen Reihenausdruck zu suchen, weil in diesem Falle das absolute Glied $= o$ wird.

Unsere Voraussetzung soll also sein:

$$\log [1+x] = Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 \ldots \quad \text{I.}$$

Nun ist: $\log [1+x+m] - \log [1+x] = \log \left[1 + \frac{m}{1+x}\right]$

$$= A\frac{m}{1+x} + B\left[\frac{m}{1+x}\right]^2 + C\left[\frac{m}{1+x}\right]^3 + \ldots$$

daher: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A}{1+x} + m\varphi x$, und wenn $m = o$,

$$= \frac{A}{1+x} = A[1 - x + x^2 - x^3 + \ldots]. \quad \text{II.}$$

Wie wir gesehen haben, ist allgemein:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + 2Bx + 3Cx(x-m) \ldots \text{ und wenn } m = o,$$

$$= A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 \ldots \quad \text{III.}$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten in II. und III.

$$2B = -A \quad \text{und also} \quad B = -\tfrac{1}{2}A$$
$$3C = A \qquad\qquad C = \tfrac{1}{3}A$$
$$4D = -A \qquad\qquad D = -\tfrac{1}{4}A \quad \text{u. s. w.}$$

folglich
$$\log(1+x) = A[x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots] \qquad \text{IV.}$$
$$A \text{ ist } = \frac{\log(1+x)}{x} \text{ für } x = o,$$
oder $\log(1+x) = y$, daher $1 + x = a^y$ gesetzt,
$$A = \frac{y}{a^y - 1} \text{ für } y = o. \qquad \text{V.}$$
Nimmt man $a = 1 + b$, so ist der Nenner dieses Ausdrucks
$$yb + \frac{y(y-1)}{1.2}b^2 + \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3}b^3 \ldots$$
Wenn man daher in V. mit y hebt und dann $y = o$ setzt:
$$A = \frac{1}{b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \ldots}$$
und
$$\log[1+x] = \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \ldots}{b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \ldots} \qquad \text{VI.}$$

Wird die Größe A, der sogenannte Modulus des Logarithmensystems, $= 1$ angenommen, wo dann die Basis e erst noch zu berechnen sein wird, so erhält man den natürlichen Logarithmus
$$\log \operatorname{nat}(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots \qquad \text{VII.}$$
Will man bei dieser Herleitung die oben bereits angegebene Differentialformel
$$d\log x = \frac{dx}{x} \text{ oder vielmehr } d\log(1+x) = \frac{dx}{1+x}$$
zum Grunde legen, so ist dagegen nichts einzuwenden, indessen nothwendig ist es, wie wir gesehen haben, nicht. Vielmehr gebe ich der folgenden ohne Differentialformeln auskommenden Methode um so unbedenklicher den Vorzug, als sie den natürlichen Zusammenhang der Potenzen, Logarithmen und Kreisfunctionen leichter erkennen läßt.

Wir haben gefunden:
$$a^x = 1 + \left[\frac{a^m - 1}{m}\right]x + \left[\frac{a^m - 1}{m}\right]^2 \frac{x(x-m)}{1.2} + \left[\frac{a^m - 1}{m}\right]^3 \frac{x(x-m)(x-2m)}{1.2.3} \ldots \qquad \text{VIII.}$$
Ist $a^x = y$, oder $x = \log y$, so wird $a^{mx} = y^m$ sein.

Setzt man aber in Gleichung VIII. mx statt x, so erhält man
$$a^{mx} = y^m = 1 + [a^m - 1]x + [a^m - 1]^2 \frac{x(x-1)}{1.2} + [a^m - 1]^3 \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3} + \ldots \qquad \text{IX.}$$
und
$$\frac{y^m - 1}{a^m - 1} = x + [a^m - 1]\,\phi x. \qquad \text{X.}$$

Hierin ist m beliebig. Kann ich nun dem m einen solchen Werth beilegen, daß $a^m - 1 = o$ wird, so bleibt auf der rechten Seite die zu bestimmende Größe x oder $\log y$ allein stehen. Ein solcher Werth ist $m = o$, so daß also:
$$\log y = \frac{y^m - 1}{a^m - 1}, \text{ für } m = o. \qquad \text{XI.}$$

Freilich erhalten wir dadurch $\log y = \frac{0}{0}$; indessen ist durch einfache Anwendung des binomischen Lehrsatzes der wahre Werth dieser $\frac{0}{0}$ werdenden Function leicht anzugeben. Es sei nämlich $y = 1 + z$ und $a = 1 + b$, dann ist:

$$\frac{(1+z)^m - 1}{(1+b)^m - 1} = \frac{mz + \frac{m(m-1)}{1.2} z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} z^3 \ldots}{mb + \frac{m(m-1)}{1.2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} b^3 \ldots}$$

Hebt man hierin im Zähler und Nenner m fort und setzt dann $m = o$, so ist zufolge Gleichung XI.

$$\log y = \frac{z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 \ldots}{b - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 \ldots} \quad \text{XII.}$$

wie vorhin.

Wir haben in XI. Zähler und Nenner durch m dividirt, so daß also

$$\log y = \frac{y^m - 1}{m} : \frac{a^m - 1}{m} \text{ für } m = o.$$

Der nur von der Grundzahl abhängige Nenner, oder der sogenannte Modul, ist für die natürlichen Logarithmen $= 1$, daher:

$$\log \text{nat}\, y = \frac{y^m - 1}{m} \text{ für } m = o,$$

und ebenso $\log \text{nat}\, a = \frac{a^m - 1}{m}$ „ „

Damit erledigt sich zugleich eine im vorigen Abschnitte offen gelassene Frage. In der für a^x erhaltenen allgemeinen Reihe konnten wir m nicht $= o$ setzen, weil wir nicht wußten, was $\frac{a^m - 1}{m}$ für $m = o$ bedeutet. Jetzt sehen wir, es ist der natürliche Logarithmus von a oder La, daher:

$$a^x = 1 + x\,La + \frac{x^2 La^2}{1.2} + \frac{x^3 La^3}{1.2.3} \ldots \quad \text{XIII.}$$

Nimmt man für a die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, so erhält man die berühmte Exponential-Reihe:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} \ldots \quad \text{XIV.}$$

aus welcher sich bekanntlich e leicht berechnen läßt, indem man $x = 1$ setzt,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} \ldots$$

Die für $\log(1+x)$ erhaltene Reihe wird nun freilich, wie man sich leicht überzeugen kann nur dann convergiren, wenn $x < 1$ angenommen wird. Das ist auch ganz natürlich, da wir dieselbe aus einer anderen Reihe abgeleitet haben, welche auch nur für $x < 1$ wahr ist, nämlich:

$$1 - x + x^2 - x^3 \ldots = \frac{1}{1+x}.$$

Da aber für $x < 1$ sowohl

$$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 + \ldots, \text{ als auch}$$
$$\log(1-x) = -x - \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3 - \tfrac{1}{4}x^4 - \ldots,$$

so ist auch $$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\left[x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \ldots\right]$$

und $\frac{1+x}{1-x} = z$ gesetzt:

$$\log z = 2\left[\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 \ldots\right]$$

eine Reihe, welche immer convergirt.

Des beschränkten Raums halber, will ich mich bei anderen noch besser convergirenden Reihen, z. B.

$$\log(z+k) = \log z + 2\left[\left(\frac{k}{2z+k}\right) + \tfrac{1}{3}\left(\frac{k}{2z+k}\right)^3 + \ldots\right]$$

nicht weiter aufhalten.

Aus demselben Grunde muß ich darauf verzichten, noch andere Reihenformen anzugeben für **log x.** Nur eine dieser Reihen will ich schließlich hier noch mittheilen, weil mir dieselbe nicht uninteressant zu sein scheint, nämlich:

$$\overset{a}{\log} x = \frac{1}{a-1}(x-1) - \frac{1}{a^2-1}(x-1)\left(\frac{x}{a}-1\right) + \frac{1}{a^3-1}(x-1)\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{x}{a^2}-1\right)$$
$$+ \frac{1}{a^4-1}(x-1)\left(\frac{x}{a}-1\right)\left(\frac{x}{a^2}-1\right)\left(\frac{x}{a^3}-1\right) - \ldots.$$

Der Quotient von zwei aufeinander folgenden Gliedern ist $\frac{a^{k-1}}{a^k}\left(\frac{x}{a^{k-1}}-1\right) = \frac{x}{a^k} - \frac{1}{a}$. Je größer **k** wird, desto mehr nähert sich dieser Quotient der Größe $\frac{1}{a}$, wird also, da a die Basis des Systems ist, < 1 sein, so daß die angegebene Reihe immer convergirt, wenn sie sich auch grade zur Berechnung eines Logarithmensystems nicht besonders empfehlen möchte.

Die Auffindung des Beweises darf ich wohl dem freundlichen Leser überlassen.

C. Die Kreisfunctionen.

a. Sinus und Cosinus.

Die Grundeigenschaften der beiden Functionen Sinus und Cosinus sind in den beiden Formeln

$$\left.\begin{aligned} \sin(x+m) &= \sin x \cos m + \cos x \sin m \\ \text{und} \quad \cos(x+m) &= \cos x \cos m - \sin x \sin m \end{aligned}\right\} \quad \text{I.}$$

vollständig enthalten. Wenn $\sin x = y$ und $\cos x = z$, so ist:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\cos m - 1}{m}\sin x + \frac{\sin m}{m}\cos x \\ \frac{\Delta z}{\Delta x} &= \frac{\cos m - 1}{m}\cos x - \frac{\sin m}{m}\sin x \end{aligned}\right\} \quad \text{II.}$$

Nehme ich nun an, daß

$$\sin x = A + Bx + Cx(x-m) + Dx(x-m)(x-2m)\ldots.$$
$$\cos x = a + bx + cx(x-m) + dx(x-m)(x-2m)\ldots.,$$

so erhalte ich durch Substitution des in der Einleitung erhaltenen allgemeinen Ausdrucks für den Differenzenquotienten:

$$B + 2Cx + 3Dx(x-m) + 4Ex(x-m)(x-2m) + \ldots$$
$$= \frac{1-\cos m}{m}[A + Bx + Cx(x-m) + Dx(x-m)(x-2m) + \ldots]$$
$$+ \frac{\sin m}{m}[a + bx + cx(x-m) + dx(x-m)(x-2m) + \ldots]$$
und $$b + 2cx + 3dx(x-m) + 4ex(x-m)(x-2m) + \ldots$$
$$= \frac{1-\cos m}{m}[a + bx + cx(x-m) + dx(x-m)(x-2m) + \ldots]$$
$$- \frac{\sin m}{m}[A + Bx + Cx(x-m) + Dx(x-m)(x-2m) + \ldots]. \qquad \text{III.}$$

Durch Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Facultäten erhalte ich eine hinreichende Anzahl von Gleichungen, um daraus die Größen A, B, C ... a, b, c .... zu bestimmen. Da nun m beliebig ist, so eröffnet sich uns die Aussicht auf eine unendlich große Anzahl verschiedener Reihen. Ob die erhaltenen Reihen convergiren, d. h. ob sie wahr sind, das ist freilich eine andere Frage. Setzen wir z. B. $m = \pi$, so ist:

$$B = -\frac{2}{\pi}A$$

$$2C = -\frac{2}{\pi}B \quad \text{daher} \quad C = \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 A}{1.2}$$

$$3D = -\frac{2}{\pi}C \quad \text{"} \quad D = \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 A}{1.2.3}$$

$$4E = -\frac{2}{\pi}D \quad \text{"} \quad E = \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^4 A}{1.2.3.4} \quad \text{u. s. w.}$$

und ganz ebenso

$$2b = -\frac{2}{\pi}a$$

$$3c = -\frac{2}{\pi}b \quad \text{daher} \quad c = \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 a}{1.2}$$

$$4d = -\frac{2}{\pi}c \quad \text{"} \quad d = \frac{\left(\frac{2}{\pi}\right)^3 a}{1.2.3} \quad \text{u. s. w.}$$

$$\sin x = A\left[1 - \frac{x}{\pi}2 + \frac{\frac{x}{\pi}\left(\frac{x}{\pi}-1\right)}{1.2}2^2 - \frac{\frac{x}{\pi}\left(\frac{x}{\pi}-1\right)\left(\frac{x}{\pi}-2\right)}{1.2.3}2^3 + \ldots\right] \qquad \text{IV.}$$

Nach dem binomischen Lehrsatze ist aber die erhaltene Reihe nichts Anderes als $(1-2)^{\frac{x}{\pi}}$, daher

$$\sin x = A(-1)^{\frac{x}{\pi}} \quad \text{oder für} \quad \frac{x}{\pi} = y.$$

$\sin y\pi = A(-1)^y$ und ganz ebenso:

$\cos y\pi = a(-1)^y$.

Da nun offenbar $A = o$ und $a = 1$ sein muß, so ist

$$\sin y\pi = o$$
$$\cos y\pi = (-1)^y.$$

Die Reihe IV. ist also nur zu gebrauchen, wenn y eine ganze Zahl ist.

Wenn es noch eines weiteren Beweises bedürfte, so würde es sich hier von neuem bestätigen, daß die Summe der Reihe:

$$1 - yb + \frac{y(y-1)}{1.2} b^2 - \frac{y(y-1)(y-2)}{1.2.3} b^3 + \ldots$$

keineswegs $= (1-b)^y$ ist, sobald $b > 1$ und y keine ganze positive Zahl ist. Wir kommen sonst leicht zu solchen abenteuerlichen Resultaten, daß jeder Sinus $= o$ und jeder Cosinus $= 1$ sein muß.

Aehnliche Substitutionen, z. B. $m = \frac{1}{2}\pi$, $m = \frac{1}{3}\pi$ und dergl. will ich übergehen. Unter allen Umständen brauchbare Reihen erhält man nur dann, wenn man in II. $m = o$ setzt, d. h. also $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ in den Differentialquotienten übergehen läßt. Will man sich hierbei der bereits abgeleiteten Differentialformeln bedienen, so ist um so weniger dagegen einzuwenden, als grade in diesem Falle der Mac Laurin'sche Satz sich sehr gefügig zeigt. Indessen ist zur Herleitung der Reihen für den Sinus und den Cosinus die Differentialrechnung nichts weniger als unentbehrlich. Wir wissen bereits, daß für $m = o$, $\frac{\sin m}{m} = 1$ und $\frac{1 - \cos m}{m} = o$ ist. Für $m = o$ werden aber die Reihen nach den einfachen Potenzen von x fortschreiten und die Gleichungen III. gehen über in:

$$B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 \ldots = a + bx + cx^2 + dx^3 \ldots$$
$$b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3 \ldots = -A - Bx - Cx^2 - Dx^3 \ldots$$

Da ferner leicht bewiesen werden kann, weil $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$, daß in der Sinusreihe nur ungrade, in der Cosinusreihe dagegen nur grade Potenzen von x vorkommen können, so erhält man durch Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Potenzen:

$$\begin{array}{lll} B = a \text{ und da } a = 1, & B = & 1 \\ 2c = -B & c = & \frac{-1}{1.2} \\ 3D = c & D = & \frac{-1}{1.2.3} \\ 4e = -D & e = & \frac{-1}{1.2.3.4} \\ 5F = e & F = & \frac{1}{1.2.3.4.5} \\ 6g = -F & g = & \frac{-1}{1.2.3.4.5.6} \quad \text{u. s. w.,} \end{array}$$

daher:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

und $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \ldots$$

b. Tangente und Cotangente.

Bei den Reihen für Tangente und Cotangente lassen uns alle Künste der Differentialrechnung vollständig im Stiche und wir müssen versuchen, ob wir mit den gewöhnlichen Hülfsmitteln ausreichen. Unternimmt man es $\frac{\sin x}{\cos x}$ in eine Reihe von der Form

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \ldots.$$

zu verwandeln, so lassen sich zwar die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma \ldots.$ alle einer nach dem anderen einzeln bestimmen, indessen mit dem Erkennen des Gesetzes, nach welchem diese Reihe verläuft, sieht es schlimm aus, da wohl Niemand im Ernste behaupten darf, daß die Bernouillischen Zahlen, das Problem lösen. Aus den für Sinus und Cosinus gefundenen Reihen überzeugt man sich zunächst, daß, wenn es überhaupt für die Tangente und Cotangente nach den Potenzen des Bogens geordnete Reihen giebt, dieselben nur ungrade Potenzen von x enthalten und daß außerdem die Cotangente mit $\frac{1}{x}$ anfängt. Es ist also:

$$\left.\begin{array}{l} \cot x = \frac{1}{x} + A x + B x^2 + C x^3 + \ldots \\ \mathrm{tg.}\ x = \qquad a x + b x^2 + c x^3 + \ldots \end{array}\right\} \quad \mathrm{I.}$$

Anstatt jede dieser beiden Reihen einzeln aufzusuchen, möchte es wohl zweckmäßiger sein, beide in ihrem nothwendigen Zusammenhange zu betrachten, wozu sich z. B. die Gleichungen eignen:

$$\mathrm{tg.}\ x = \cot x - 2 \cot 2x. \qquad \mathrm{II.}$$

und

$$\mathrm{tg.}\ x \cot x = 1. \qquad \mathrm{III.}$$

Aus II. folgt:

$$a x + b x^3 + c x^5 \ldots. = \frac{1}{x} + A x + B x^3 + C x^5 \ldots.$$
$$- 2\left[\frac{1}{2x} + 2 A x + 2^3 B x^3 + 2^5 C x^5 \ldots\right]$$

Aus III. folgt:

$$\begin{array}{l} 1 = a + b x^2 + c x^4 + d x^6 \\ \qquad + a A x^2 + b A x^4 + c A x^6 + \ldots. \\ \qquad\qquad + a B x^4 + b B x^6 \\ \qquad\qquad\qquad + a C x^6 \end{array}$$

daher:

$$\begin{array}{lll} a = - A (2^2 - 1) & \text{und} & a = 1 \\ b = - B (2^4 - 1) & & b + aA = o \qquad \mathrm{IV.} \\ c = - C (2^6 - 1) & & c + bA + aB = o \\ d = - D (2^8 - 1) \ldots. & & d + cA + bB + aC = o \ldots. \end{array}$$

Die Gleichungen reichen offenbar hin, um sämmtliche Coefficienten zu berechnen; leider aber bedürfen wir zur Berechnung irgend eines derselben alle vorhergehenden und sind nicht im Stande das allgemeine Gesetz herauszufühlen. Wir finden:

$$a = 1 \qquad \text{und} \qquad A = - \frac{1}{1 . 2}$$

$$b = \frac{1}{1 . 3} \qquad\qquad B = - \frac{1}{3 . 1 . 3 . 5}$$

$$c = \frac{2}{1.3.5} \qquad \text{und} \qquad C = -\frac{2}{9.1.3.5.7}$$
$$d = \frac{17}{3.1.3.5.7} \qquad\qquad D = -\frac{1}{5.1.3.5.7.9}$$
$$e = \frac{62}{3.1.3.5.7.9} \qquad\qquad E = -\frac{2}{9.1.3.5.7.9.11}$$
$$f = \frac{1382}{15.1.3.5.7.9.11} \qquad\qquad F = -\frac{1382}{5.1.3.5.7.9.1.3.5.7.9.11.13} \text{ u. s. w.}$$

Will man lieber die Differentialformel zum Grunde legen:

$$d \operatorname{tg.} x = (1 + \operatorname{tg.} x^2)\, dx,$$

so hat man:

$$\begin{aligned} a + 3bx^2 + 5cx^4 + 7dx^6 \ldots = 1 + a^2x^2 &+ abx^4 + acx^6 + adx^8 \\ &+ bax^4 + b^2x^6 + bcx^8 \\ &\qquad\quad + cax^6 + cbx^8 \ldots, \\ &\qquad\qquad\qquad + dax^8 \end{aligned}$$

woraus sich ebenfalls eine genügende Anzahl von Gleichungen zur Berechnung der Größen a, b, c, d ... ergiebt. Allein auch hier sind wir nicht im Stande das allgemeine Glied anzugeben und somit fehlen uns auch die Mittel, die Convergenz der Reihe zu prüfen.

Ich meine, man hat auch eben nicht Ursache, sich über das Mißlingen derartiger Versuche zu wundern. Man sollte vielmehr eine Function nicht gewaltsam in eine Form hinein zwängen wollen, in die sie nicht paßt und nicht vergessen, daß die Reihe

$$ax + bx^3 + cx^5 + \ldots$$

nicht für einen bestimmten Werth der Variabeln $\pm\infty$ werden, für größere und kleinere Werthe dagegen eine endliche Summe geben kann.

Nach den in der Einleitung aufgestellten Formeln ist das allgemeine Glied der Reihe für die Tangente

$$\frac{\operatorname{tg.} km - B^1_k . \operatorname{tg.} (k-1)m + B^2_{(k-2)} \operatorname{tg.} (k-2)m \ldots (-1)^k B^k_k . \operatorname{tg.} o}{m^k} \cdot \frac{x^k}{1.2.3.\ldots k}$$

für $m = o$. Ob sich aus dieser Formel etwas machen läßt, muß ich des beschränkten Raumes wegen einer späteren Untersuchung vorbehalten.

Wollen wir es weiter versuchen, die Tangente in eine nach den Facultäten geordnete Reihe aufzulösen, so will ich der Kürze halber dem m oder Δx gleich von vorn herein einen passenden Werth geben, und $\frac{1}{4}\pi = \alpha$ gesetzt, folgende Reihe annehmen:

$$\operatorname{tg.} x = 1 + a(x-\alpha) + b(x-\alpha)(x-3\alpha) + c(x-\alpha)(x-3\alpha)(x-5\alpha) + \ldots$$

Durch Anwendung der in der Einleitung gegebenen Formeln folgt leicht:

$$a = -\frac{1}{\alpha}$$

$$b = +\frac{1}{2\alpha^2}$$

$$c = -\frac{1}{2.3\alpha^3}$$

$$d = +\frac{1}{2.3.4\alpha^4} \text{ u. s. w.,}$$

daher: $$\text{tg.}\, x = 1 - \frac{(x-\alpha)}{\alpha} + \frac{(x-\alpha)(x-3\alpha)}{2\,.\,\alpha^2} - \frac{(x-\alpha)(x-3\alpha)(x-5\alpha)}{2\,.\,3\alpha^3} + \ldots.$$

oder $\frac{x}{\alpha} = z$ gesetzt:

$$\text{tg.}\, \alpha z = 1 - (z-1) + \frac{(z-1)(z-3)}{1\,.\,2} - \frac{(z-1)(z-3)(z-5)}{1\,.\,2\,.\,3} + \ldots. \qquad \text{VI.}$$

Das sieht allerdings recht hübsch aus, kann uns aber zur Berechnung der Tangente ebenso wenig nützen, als die gewöhnliche Reihe. Setzt man nämlich $z = 2u + 1$, so wird:

$$\text{tg.}\, (2u+1)\,\alpha = 1 - 2u + \frac{2^2 u (u-1)}{1\,.\,2} - \frac{2^3 u (u-1)(u-2)}{1\,.\,2\,.\,3} \ldots. \qquad \text{VII.}$$

$$= (-1)^u,$$

also ist die Reihe nur richtig für $u = 0, 1, 2, 3 \ldots$ Die in **VII.** dargestellte Reihe convergirt nämlich nicht und ihre Summe, sobald u keine ganze Zahl bedeutet, ist daher weder $(-1)^u$, noch $\text{tg.}\,(2u+1)\alpha$.

c. Die Logarithmen des Sinus und Cosinus.

Es ist leicht zu übersehen, daß sich $\log \sin x$ gar nicht in eine nach Potenzen von x fortlaufende Reihe entwickeln läßt, daß es dagegen für $\log \frac{\sin x}{x}$ möglicher Weise eine Reihe von der Form giebt:

$$\alpha x^2 + \beta x^4 + \gamma x^6 + \ldots.$$

Der Mac Laurin'sche Satz ist auch hier nicht zu gebrauchen, da er sämmtliche Coefficienten $= \frac{0}{0}$ giebt:

Es ist $$d \log \frac{\sin x}{x} = \cot x - \frac{1}{x},$$ oder die Reihe für $\cot x$ substituirt:

$$2\alpha x + 4\beta x^3 + 6\gamma x^5 \ldots. = Ax + Bx^3 + Cx^5 \ldots.$$

Die Größen $\alpha, \beta, \gamma \ldots.$ lassen sich also ganz leicht finden, wenn man $A, B, C \ldots.$ kennt. Da man aber für die Cotangente keine brauchbare Reihe besitzt, so ist es nicht der Mühe werth, sich dabei aufzuhalten.

Um uns gewissermaßen für das Fehlschlagen ihrer Bemühungen bei dieser Reihe zu entschädigen, tischen uns die Differentialkünstler andere wunderbare Productionen auf, von denen ich des Raumes wegen nur ein paar Proben geben kann.

$\sin x$ wird bekanntlich o für $x = o$, $x = \pm\pi$, $x = \pm 2\pi$ u. s. w. Der Ausdruck für $\sin x$ muß also nach einem bekannten algebraischen Satze die Factoren x, $x - \pi$, $x + \pi$, $x - 2\pi \ldots.$ enthalten, so daß:

$$\sin x = A\,x\,(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi) \ldots.$$

Da nun für $x = o$, $\frac{\sin x}{x} = 1$, so ist $A = \frac{1}{(-\pi)(+\pi)(-2\pi)(+2\pi)\ldots.}$,

daher: $$\sin x = x\left[1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right]\left[1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right] \ldots. \qquad \text{I.}$$

Für $x = \frac{1}{2}\pi$ leitet man daraus ab:

$$\tfrac{1}{2}\pi = \frac{2\,.\,2\,.\,4\,.\,4\,.\,6\,.\,6\ldots.}{3\,.\,3\,.\,5\,.\,5\,.\,7\,.\,7\ldots.} \qquad \text{II.}$$

Nimmt man von I. den Logarithmus, so ist:

$$\log \sin x = \log x + \log\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) + \log\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \;\ldots.$$

$$= \log x - \frac{x^2}{\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{x^6}{\pi^6} - \tfrac{1}{5}\frac{x^8}{\pi^8} - \ldots.$$

$$- \frac{x^2}{4\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{x^4}{4^2\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{x^6}{4^3\pi^6} - \tfrac{1}{5}\frac{x^8}{4^4\pi^8} - \ldots.$$

$$- \frac{x^2}{9\pi^2} - \tfrac{1}{2}\frac{x^4}{9^2\pi^4} - \tfrac{1}{3}\frac{x^6}{9^3\pi^6} - \tfrac{1}{5}\frac{x^8}{9^4\pi^8} - \ldots.$$

$$- \ldots.$$

$$= \log x - \frac{x^2}{\pi^2}\left[1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots\right] - \tfrac{1}{2}\frac{x^4}{\pi^4}\left[1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots\right] \ldots.$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem vorhin für **log sin x** gefundenen, so ergiebt sich:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots. = \frac{1}{6}\pi^2$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots. = \frac{1}{90}\pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \ldots. = \frac{1}{945}\pi^6 \qquad \text{u. s. w.}$$

Das sind nun zwar mehr interessante Curiositäten, als brauchbare Resultate, aber es mag drum sein. Wenn dagegen gleich hinterher auch die Summe der natürlichen Zahlen u. s. w. **in inf.** angegeben wird, so weiß ich nicht, ob ich mehr die Geschicklichkeit oder die Naivetät der gelehrten Herren bewundern soll. Man schließt:

$$\frac{1}{1+e^u} = 1 - e^u + e^{2u} - e^{3u} + \ldots.,$$

also von vorn herein falsch, da die Reihe nur richtig ist für $e^u < 1$.

Weiter: $$\frac{1}{1+e^u} = 1 - \left[1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} \ldots.\right]$$

$$+ \left[1 + 2u + \frac{2^2 u^2}{2!} + \frac{2^3 u^3}{3!} \ldots.\right]$$

$$- \left[1 + 3u + \frac{3^2 u^2}{2!} + \frac{3^3 u^3}{3!} \ldots.\right] \ldots.$$

$$= (1 - 1 + 1 - 1 \ldots) - u(1 - 2 + 3 - 4 \ldots) + \frac{u^2}{2}(1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots)$$

$$- \frac{u^3}{3!}(1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 + \ldots) \ldots.$$

Setzt man $-u$ statt u, so ist $\dfrac{1}{1+e^{-u}} = \dfrac{e^u}{e^u+1} = 1 - \dfrac{1}{1+e^u}$

$$= (1 - 1 + 1 - 1 \ldots) + u(1 - 2 + 3 - 4 \ldots) + \frac{u^2}{2}(1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 \ldots.)$$

$$+ \frac{u^3}{3!}(1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 \ldots.) \ldots.$$

Addirt man beide Gleichungen, so ergiebt sich nach dem bekannten Satze:

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \tfrac{1}{2}$$
$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots = 0$$
$$1 - 2^4 + 3^4 - 4^4 + \ldots = 0.$$

Subtrahirt man dagegen, so ist:

$$u\,[1 - 2 + 3 - 4 \ldots] + \frac{u^3}{3!}\,[1 - 2^2 + 3^3 - 4^3 \ldots] \ldots = \tfrac{1}{2}\,\frac{e^u - 1}{e^u + 1}$$

Setzt man ferner $u = 2x\sqrt{(-1)}$, also $\dfrac{e^u - 1}{e^u + 1} = \dfrac{e^{x\sqrt{(-1)}} - e^{x\sqrt{(-1)}}}{e^{x\sqrt{(-1)}} - e^{x\sqrt{(-1)}}} = \text{tg.}\,x\sqrt{(-1)}$

und dann für tg.x die Reihenentwickelung, so kommt heraus

$$1 - 2 + 3 - 4 \ldots = \tfrac{1}{4}$$
$$1 - 2^3 + 3^3 - 4^3 = -\tfrac{1}{8} \quad \text{u. s. w.}$$

Es ist gar nicht zu begreifen, wie sonst grundgescheute Leute so barocke Sätze hinstellen können. Offenbar ist doch

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 \ldots = 1 + (3-2) + (5-4) \ldots = 1 + 1 + 1 \ldots = \infty$$
$$1 - 2^2 + 3^2 - 4^5 + 5^2 \ldots = (4-1) + (16-9) + (36-25) \ldots = 3 + 7 + 11 \ldots$$

Die Summe von n Gliedern ist $= n\,(2n+1)$, also die Summe der Reihe in inf. $= \infty$.

d. Arcus Sinus x und Arcus Tangens x.

Die Aufgabe, den Bogen aus dem Sinus oder aus der Tangente zu berechnen, läßt sich auf mehrfache Weise lösen, am schlechtesten durch den Mac Laurin'schen Satz.

Für $y = \sin x$ haben wir oben bei der Reihenentwickelung ohne Schwierigkeit $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ und daraus für $m = o$, $\dfrac{dy}{dx} = \cos x$ gefunden. Ist aber $\sin x = y$, so muß $\cos x = \sqrt{(1-y^2)}$ sein; und daher

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{(1-y^2)} \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

oder, wenn die Bezeichnung $x = \text{arc } y$ eingeführt wird,

$$\frac{d\,\text{arc } y}{dy} = \frac{1}{\sqrt{(1-y^2)}},$$

also nach dem binomischen Lehrsatze

$$= 1 + \tfrac{1}{2}y^2 + \tfrac{1}{4}\,\frac{1\,.\,3}{1\,.\,2}\,y^4 + \tfrac{1}{8}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}\,y^8 + \ldots$$

Nehme ich nun für arc y die Reihe an

$$\text{arc } y = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + \ldots,$$

mithin

$$\frac{d\,\text{arc } y}{dy} = a + 3by^2 + 5cy^4 + 7dy^6 + \ldots,$$

so lassen sich durch Gleichsetzung der Coefficienten gleicher Potenzen die Größen a, b, c .... leicht bestimmen und es ist

$$\text{arc } y = y + \frac{1}{3\,.\,2}\,y^3 + \frac{1}{5\,.\,4}\,\frac{1\,.\,3}{1\,.\,2}\,y^5 + \frac{1}{8\,.\,7}\,\frac{1\,.\,3\,.\,5}{1\,.\,2\,.\,3}\,y^7 + \ldots$$

Ebenso, wenn $z = \text{tg. } x$, war $\frac{dz}{dx} = 1 + \text{tg } x^2 = 1 + z^2$. Also

$$\frac{dx}{dz} = (1 + z^2)^{-1}, \text{ und so lange } z^2 < 1$$
$$= 1 - z^2 + z^4 - z^6 + \ldots.$$

Nehmen wir nun wieder

$$\text{arc } z = Az + Bz^3 + Cz^5 + Dz^7 + \ldots,$$

so ist:
$$\frac{d \text{ arc } z}{dz} = A + 3Bz^2 + 5Cz^4 + 7Dz^6 + \ldots$$

und daher:
$$\text{arc } z = z - \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 - \tfrac{1}{7}z^7 + \ldots.$$

Diese wichtige Reihe wird meistens durch den bekannten Zusammenhang der Logarithmen und Kreisfunctionen auf eine recht sinnreiche Weise gewonnen.

Bewirkt man nämlich in der Reihe

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

die Substitution $x = \pm \alpha \sqrt{(-1)}$, so ergiebt sich das überraschende Resultat:

$$e^{\alpha\sqrt{(-1)}} = \cos\alpha + \sqrt{(-1)} \sin\alpha$$

und
$$e^{-\alpha\sqrt{(-1)}} = \cos\alpha - \sqrt{(-1)} \sin\alpha,$$

folglich durch Division:
$$e^{2\alpha\sqrt{(-1)}} = \frac{1 + \sqrt{(-1)} \text{ tg } \alpha}{1 - \sqrt{(-1)} \text{ tg } \alpha},$$

und
$$2\alpha\sqrt{(-1)} = \log \frac{1 + \sqrt{(-1)} \text{ tg } \alpha}{1 - \sqrt{(-1)} \text{ tg } \alpha}.$$

Da nun
$$\log \frac{1+u}{1-u} = 2 [u + \tfrac{1}{3}u^3 + \tfrac{1}{5}u^5 + \ldots],$$

so folgt leicht
$$\alpha = \text{tg}\alpha - \tfrac{1}{3}\text{tg}\alpha^3 + \tfrac{1}{5}\text{tg}\alpha^5 - \ldots.$$

$\alpha = \frac{1}{4}\pi$ giebt die unter dem Namen der Leibnitz'schen bekannten Reihe:

$$\tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \ldots.$$

Setzt man $\frac{1}{4}\pi = \alpha + \beta$, also $1 = \frac{\text{tg}\alpha + \text{tg}\beta}{1 - \text{tg}\alpha \text{ tg}\beta}$ und daher $\text{tg.}\alpha = \frac{1 - \text{tg}\beta}{1 + \text{tg}\beta}$ so bekömmt man zur Berechnung von π besser convergirende Reihen. Es kommt nur darauf an, tg β und tg α möglichst klein anzunehmen, also z. B. $\text{tg } \alpha = \frac{1}{3}$ und $\text{tg } \beta = \frac{1}{2}$, dann erhält man:

$$\tfrac{1}{4}\pi = \frac{1}{1.3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \ldots$$
$$+ \frac{1}{1.2} - \frac{1}{3.2^4} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \ldots.$$

II. Vieldeutige Symbole.

Wenn $y = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ für $x = a$ die Gestalt $\frac{0}{0}$ annimmt, so kommt das offenbar daher, daß $f(x)$ sowohl als $\varphi(x)$ den Factor $(x - a)$ ein oder mehreremale enthalten, so daß

$$y = \frac{(x-a)^m \; f'(x)}{(x-a)^n \; \varphi'(x)}.$$

y wird daher $= \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ sobald $m = n$; dagegen o oder ∞, jenachdem $m \gtrless n$, und es kommt nun darauf an, im Zähler und Nenner diesen gemeinschaftlichen Factoren zu heben. Dazu bietet uns die Differentialrechnung ihre Dienste an. Es sei $F(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, dann ist nach dem Taylor'schen Lehrsatze, wenn man in demselben $x = a$ und $k = x - a$ einsetzt:

$$F(a) = \frac{f(a) + \frac{df(a)}{dx}(x-a) + \frac{d^2f(a)}{dx^2}\frac{(x-a)^2}{1.2} + \frac{d^3f(a)}{dx^3}\frac{(x-a)^3}{1.2.3}\ldots.}{\varphi(a) + \frac{d\varphi(a)}{dx}(x-a) + \frac{d^2\varphi(a)}{dx^2}\frac{(x-a)^2}{1.2} + \frac{d^3\varphi(a)}{dx^3}\frac{(x-a)^3}{1.2.3}\ldots.}$$

Läßt man $f(a)$ und $\varphi(a)$ im Zähler und Nenner fort, da beide $= o$ sind, und dividirt mit $(x-a)$, so erhält man, da alle mit $(x-a)$ multiplicirten Glieder wegfallen:

$$F(a) = \frac{d\,f(a)}{dx} : \frac{d\,\varphi(a)}{dx}$$

Die einfache Regel ist also folgende: Wenn für $x = a$ eine gebrochene Function $= \frac{0}{0}$ wird, so nehme man vom Zähler und vom Nenner die Differentialquotienten und setze dann $x = a$. Sollte auch $\frac{f'a}{\varphi'a} = \frac{0}{0}$ werden, so gelangt man durch ähnliche Schlüsse zu dem Ergebniß, daß

$$F(a) = \frac{d^2f(a)}{dx^2} : \frac{d^2\varphi(a)}{dx^2} \text{ u. s. w.}$$

Allein, da der Taylor'sche Lehrsatz nicht überall paßt, so werden wir zu dieser seiner neuen Gestalt, wo $f(a)$ sogar in eine nach den Potenzen von $(x-a)$ fortschreitende Reihe verwandelt ist, auch kein unbedingtes Vertrauen haben. Glücklicher Weise können wir auch bei ganzen rationalen Functionen und bei allen denjenigen Ausdrücken, die wir in ganze rationale zu verwandeln gelernt haben, den Satz entbehren, da in diesem Falle nichts leichter ist, als mit $(x-a)$ zu dividiren.

Andere mehrdeutige Symbole als: $\infty - \infty$, oder $\frac{\infty}{\infty}$, oder $o\,.\,\infty$ lassen sich leicht auf $\frac{0}{0}$ reduciren, ersteres indem man auf gleichen Nenner bringt, die letzteren, indem man im Zähler sowohl als im Nenner die reciproken Werthe substituirt.

Ein paar Beispiele mögen die Sache erläutern:

1. $$\frac{\sqrt{(2a^3x - x^4)} - a\sqrt[3]{(a^2x)}}{a - \sqrt[4]{(ax^3)}} \text{ für } x = a.$$

Zähler und Nenner differentiirt:

$$\frac{\frac{1}{2}[2a^3x - x^4]^{-\frac{1}{2}}[2a^3 - 4x^3] - \frac{1}{3}a^3(a^2x)^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{1}{4}[ax^3]^{-\frac{3}{4}}\,3ax^2};$$

hierin $x = a$ gesetzt, giebt $f(a) = \frac{16}{9}a$.

Dieses Beispiel ist dadurch geschichtlich merkwürdig, weil Joh. Bernouilli zu seiner Zeit die französischen Algebraisten und Antidifferentialisten damit neckte. Ich kann unmöglich glauben, daß diese Aufgabe die französischen Mathematiker in Verlegenheit gesetzt hat, da sie sich ohne Differentialrechnung ganz leicht lösen läßt. $\frac{a}{x} = y$ gesetzt, giebt:

$$a\,\frac{[2y - y^4]^{\frac{1}{2}} - y^{\frac{1}{3}}}{1 - y^{\frac{3}{4}}}\text{, für } y = 1$$

und $y = 1 + z$, $\quad a \dfrac{[1 - 2z(1+mz)]^{\frac{1}{2}} - [1+z]^{\frac{1}{3}}}{1 - [1+z]^{\frac{3}{4}}}$, für $z = o$

$$= a \frac{[1 - z(1+mz) + n z^2 (1+mz)^2 \ldots.] - [1 + \frac{1}{3} z + p z^2 \ldots.]}{1 - [1 + \frac{3}{4} z + q z^3 \ldots.]}.$$

Hebt man die Einsen, dividirt Zähler und Nenner mit z und setzt $z = o$, so erhält man, wie vorhin: $\frac{16}{9}$ a.

2. $\dfrac{1 - \sin x + \cos x}{\sin x + \cos x - 1}$ für $x = 90^0$.

Differentiirt giebt: $\dfrac{-\cos x - \sin x}{\cos x - \sin x}$.

Setzt man $x = 90^0$, so erhält man 1.

Ohne Differentialrechnung ergiebt sich:

$$\frac{-2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x + 2 \cos \frac{1}{2} x^2}{2 \sin \frac{1}{2} x \cos \frac{1}{2} x - 2 \sin \frac{1}{2} x^2} = \cot \tfrac{1}{2} x,$$

also für $x = 90^0$, wie vorhin $= 1$.

3. $\dfrac{b}{x^2} - \dfrac{\sqrt{(b^2 - x^2)}}{x^2}$ ist $\infty - \infty$ für $x = o$;

$\dfrac{b - \sqrt{(b^2 - x^2)}}{x^2}$ ist $\frac{o}{o}$. Setzt man $\dfrac{x}{b} = \sin \Phi$, so daß $\Phi = o$,

so erhält man: $\dfrac{1 - \cos \Phi}{b \sin \Phi^2} = \dfrac{1}{2 b \cos \frac{1}{2} \Phi^2}$ und dies wird $\dfrac{1}{2 b}$ für $\Phi = o$.

4. $\log x \,.\, \mathrm{tg.} \frac{\pi}{2} x$, ist $o \,.\, \infty$ für $x = 1$,

aber $\dfrac{\log x}{\cot \frac{\pi}{2} x}$ ist $\frac{o}{o}$ für $x = 1$

und dies giebt: $\dfrac{2}{\pi}$.

5. $\dfrac{\log x}{\mathrm{tg}\, \frac{1}{2} \pi \,.\, x}$ für $x = o$ giebt $\frac{\infty}{\infty}$, folglich

$\dfrac{\cot \frac{1}{2} \pi \,.\, x}{(\log x)^{-1}}$ für $x = o$ giebt $\frac{o}{o}$.

An diesem Beispiele scheitern alle Künste der Differentialrechnung. Die erste Ableitung giebt $-\dfrac{x \,.\, (\log x)^2}{(\sin \frac{1}{2} \pi \,.\, x)^2}$, also $o \,.\, \infty$ und die fortgesetzte Differentiation führt uns nur noch tiefer hinein. Es fragt sich, was ist:

$$x^m \,.\, \log x^n \text{ oder } [x^{\frac{m}{n}} \log x]^n, \text{ also } x^p \log x \text{ für } x = o.$$

Man setze $x^p = u$, also $\log x = \dfrac{1}{p} \log u$, dann ist:

$$y = \frac{1}{p} u \,.\, \log u = \frac{1}{p} \log e^{u \log u} = \frac{1}{p} \log (e^u)^{\log u}, \text{ also für } u = o,$$

$$y = \frac{1}{p} \log 1^{-\infty} = o.$$

III. Bestimmung der Maxima und Minima.

Wir haben bereits oben davon gesprochen, daß jede Gleichung von der Form $y = f(x)$, wenn sie sonst nicht etwas an sich Unmögliches enthält, immer durch eine Curve bildlich dargestellt werden kann. Ferner haben wir bereits gesehen, wenn $y = f(x)$ als analytischer Ausdruck einer Curve gedacht wird, so ist $\frac{dy}{dx}$ die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Berührende des Punktes (x, y) mit der Abscissenaxe bildet. Wird nun $\frac{dy}{dx}$ oder $\mathrm{tg.}\,\alpha = o$, so läuft die Berührende mit der Abscissenaxe parallel. Dieses ist aber bei den höchsten und tiefsten Punkten der Curve, also da der Fall, wo $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum wird, und wir haben daher zur Bestimmung dieser Punkte ein sehr einfaches Mittel, indem wir $\frac{dy}{dx} = o$ setzen und aus dieser Gleichung x bestimmen.

Zu demselben Resultate führt der Taylor'sche Lehrsatz, dessen Zulassung hier weniger bedenklich erscheint, weil in diesem Falle k sehr klein angenommen werden muß. Für ein hinreichend kleines k muß nämlich sowohl $f(x + k)$ als auch $f(x - k)$ bei einem Maximum $< f(x)$, und bei einem Minimum $> f(x)$ sein, oder $f(x + k) - f(x)$ sowohl als $f(x - k) - f(x)$ ist für das Maximum negativ, für das Minimum positiv.

Nun ist:
$$f(x + k) - fx = \frac{dy}{dx}k + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{k^2}{2} \ldots,$$
$$f(x - k) - f(x) = -\frac{dy}{dx}k + \frac{d^2y}{dx^2}\frac{k^2}{2} \ldots.$$

Für ein hinreichend kleines k ist aber das erste Glied der Reihe $\frac{dy}{dx}k$ größer als die Summe aller folgenden; mithin kann die Bedingung, daß $f(x + k) - f(x)$ so wohl, als $f(x - k) - f(x)$ zugleich positiv, oder zugleich negativ sein sollen, nur dann erfüllt werden, wenn $\frac{dy}{dx} = o$ ist, so daß also die Auflösung dieser Gleichung uns diejenigen Werthe von x geben muß, für welche y am größten oder kleinsten wird.

Ist nun aber $\frac{dy}{dx} = o$, so ist die Summe der übrig bleibenden Reihe für hinreichend kleine Werthe von k positiv oder negativ, jenachdem $\frac{d^2y}{dx^2}$ positiv oder negativ wird, und wir haben es also im ersten Falle mit einem Minimum im anderen mit einem Maximum zu thun.

Ist $y = f(x, u)$ also eine Function mit zwei veränderlichen Größen, so gelangt man durch ganz ähnliche Schlüsse zu der Regel: man setze die partiellen Differentialquotienten, also sowohl $\frac{dy}{dx}$, als auch $\frac{dy}{du} = o$, und bestimme aus diesen beiden Gleichungen x und u. Ob man ein Maximum oder ein Minimum erhält, geht zwar auch aus den folgenden partiellen Differentialquotienten hervor, aber das Verfahren dürfte sich seiner Weitläufigkeit wegen nicht sehr empfehlen.

Glücklicher Weise lassen sich fast alle Aufgaben über diesen höchst interessanten Theil der Mathematik lösen, ohne allen Differential-Apparat — und sogar mit Leichtigkeit, sobald $f(x)$ eine ganze Function ist, oder sich in eine solche verwandeln läßt, so daß

$$f(x) = A + Bx + Cx^2 \ldots$$

In diesem Falle ist nämlich ganz gewiß:

$$\begin{aligned} f(x+k) &= f(x) + ak + bk^2 + ck^3 \ldots \\ f(x-h) &= f(x) - ah + bh^2 - ch^3 \ldots \end{aligned} \qquad \text{I.}$$

Soll nun $f(x)$ ein Maximum oder Minimum sein, so ist für hinreichend kleine h und k,

$$f(x+k) = f(x-h) \text{ oder } f(x+k) - f(x-h) = 0. \qquad \text{II.}$$

Zieht man die beiden Gleichungen I. von einander ab, so ist:

$$f(x+k) - f(x-h) = a(k+h) + b(k^2-h^2) + c(k^3+h^3) \ldots$$

$f(x+k) - f(x-h)$ ist also immer durch $k+h$ theilbar; oder $x-h = u$ und $k+h = m$, $f(u+m) - f(u)$ durch m theilbar.

Wenn man also $f(u+m) - f(u)$ durch m dividirt und dann $= 0$ setzt, so ergiebt sich aus dieser Gleichung derjenige Werth von u, für welchen $f(u)$ ein Größtes oder Kleinstes wird.

Oder man setze in der gegebenen Gleichung für x die beiden Werthe x' und x'', so zwar, daß $x' < x$ und $x'' > x$, so ist:

$$f(x') - f(x'') = B(x' - x'') + C(x'^2 - x''^2) + \ldots,$$

so daß also $f(x') - f(x'')$ immer durch $x' - x''$ theilbar sein wird.

Soll nun $f(x)$ ein Maximum oder ein Minimum werden, so kann man x' und x'' jedenfalls dem x nahe genug nehmen, so daß $f(x') = f(x'')$ oder $f(x') - f(x'') = 0$. Man bilde also diese Differenz und hebe den gemeinschaftlichen Factor $x' - x''$ fort, so erhält man die Gleichung

$$\frac{f(x') - f(x'')}{x' - x''} = 0.$$

Rücken nun beide Punkte x' und x'' dem Punkte x immer näher und näher, d. h. setze ich $x' = x'' = x$, so erhalte ich eine Gleichung, aus welcher dasjenige x, welches $f(x)$ zu einem Maximum oder Minimum macht, gefunden werden kann.

Ein paar Beispiele sollen auch hier das Gesagte deutlich machen. Bei dem lebhaften Interesse, welches auch schon die Anfänger an dergleichen Aufgaben zu nehmen pflegen, bedauere ich, daß ich mich auf nur wenige beschränken muß.

1. In einen graden Kegel, dessen Höhe $= b$, Radius $= a$ ist, soll ein grader Cylinder hinein gezeichnet werden, dessen Volumen ein Maximum ist.

Der Radius des Cylinders sei x, seine Höhe y, so erhält man leicht $y = \frac{b}{a}(a-x)$. Das Volumen $v = x^2 y \pi$, daher:

$$v = \frac{b}{a}\pi x^2 (a-x),$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{b}{a}\pi(2ax - 3x^2) = 0; \text{ also } x = \frac{3}{2}a.$$

Oder: $ax'^2 - x'^3 = ax''^2 - x''^3$, d. h. $a(x'^2 - x''^2) = x'^3 - x''^3$,

durch $x' - x''$ getheilt: $a(x' + x'') = x'^2 + x'x'' + x''^2$

und $x' = x'' = x$ gesetzt, giebt, wie vorhin $x = \frac{3}{2}a$.

2. Welche von den Kugeln, die um einen der Brennpunkte eines durch Rotation um die große Achse entstandenen Ellipsoids beschrieben werden können, hat innerhalb des Ellipsoids die größte Calotte?

Die Gleichung der Ellipse durch Polar-Coordinaten ist:

$$r = \frac{a\,[1 - e^2]}{1 - e \cos\varphi} = \frac{m}{1 - e \cos\varphi}.$$

r ist zugleich Radius der Kugel. Die Calotte $= 2r\pi h$ und da h offenbar $= r(1 - \cos\varphi) = 2r\sin\frac{1}{2}\varphi^2$, so wird: $v = 4r^2\pi \sin\frac{1}{2}\varphi^2$, oder der Werth von r substituirt:

$$v = \frac{4m^2\pi \sin\frac{1}{2}\varphi^2}{(1 - e\cos\varphi)^2} = 4m^2\pi \left[\frac{\sin\frac{1}{2}\varphi}{1 - e + 2e\sin\frac{1}{2}\varphi^2}\right]^2.$$

Es soll, also $\sin\frac{1}{2}\varphi = u$ gesetzt, $z = \frac{u}{1 - e + 2eu^2}$ ein Maximum werden. Durch Differentiation erhalten wir:

$$\frac{1 - e + 2eu^2 - 4eu^2}{N^2} = o, \text{ also } u = \sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-e}{2e}}$$

$$\cos\varphi = \frac{2e - 1}{e} \text{ und } r = \frac{a(1 - e^2)}{1 - (2e - 1)} = \tfrac{1}{2}a(1 + e).$$

Ohne Differentialrechnung:

$$\frac{u'}{1 - e + 2eu'^2} = \frac{u''}{1 - e + 2eu''^2} \text{ oder geordnet:}$$

$$(u' - u'')(1 - e) = 2eu'u''(u' - u'').$$

Mit $u' - u''$ gehoben und dann $u' = u'' = u$, giebt wie vorhin:

$$u = \sin\tfrac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1-e}{2e}}.$$

Die Aufgabe ist nur dann möglich, wenn $e > \frac{1}{3}$, oder $2a\sqrt{2} > 3b$.

3. $y = \frac{\log x}{x}$. Für welches x wird y ein Maximum?

Differentiirt giebt: $\frac{1 - \log x}{x^2} = o$, also $x = e$,

und da $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{-1 - 2(1 - \log x)}{x^3}$ für $x = o$ negativ wird, so haben wir hier ein Maximum.

Ohne Differentialrechnung ist nach der ersten Methode:

$$\left[\frac{\log(x + m)}{x + m} - \frac{\log x}{x}\right] : m = \frac{x\log(x + m) - (x + m)\log x}{m} = o$$

$$= \frac{x\log x + x\log\left(1 + \frac{m}{x}\right) - x\log x - m\log x}{m} = o$$

und hierin $m = o$ gesetzt, giebt wie vorhin $1 - \log x = o$, $x = e$.

4. In einem rechtwinkligen Parallelepipedum, dessen Inhalt $= a^3$, soll man die 3 Seiten x, y, z so annehmen, daß die Oberfläche ein Minimum wird.

Die halbe Oberfläche ist $xy + xz + yz$ und da $z = \frac{a^3}{xy}$, so ist die Function, welche ein Minimum werden soll: $v = xy + \frac{(x + y)a^3}{xy}$

$$\frac{dv}{dx} = y - \frac{a^3}{x^2} = o \text{ und } \frac{dv}{dy} = x - \frac{a^3}{y^2} = o,$$

woraus sich ohne Weiteres $x = y = z$, also der aus den Elementen bekannte Satz ergiebt.

Dasselbe Resultat erhalte ich auch ohne Differentialquotienten, indem ich in der Gleichung

$$v = xy + \frac{a^3}{x} + \frac{a^3}{y}$$

zuerst bloß x und dann bloß y als veränderlich betrachte.

Ich erhalte $(x' - x'')y - \frac{a^3(x' - x'')}{x' x''} = o$; also gehoben und $x' = x'' = x$,

$$y - \frac{a^3}{x^2} = o \text{ und natürlich ebenso } x - \frac{a^3}{y} = o.$$

IV. Anwendung auf die Theorie der Curven.

Ihre glänzendsten Erfolge hat die Analysis des Unendlichen, welche sich dann freilich nicht auf Differentialrechnung beschränken darf, sondern erst in der Integralrechnung zum Abschlusse kommen muß, bei ihrer Anwendung auf Geometrie und Mechanik gehabt. Hier gehört sie aber auch wesentlich hin, und die ersten Begründer der Theorie hatten ganz Recht, wenn sie ihre Erfindung entweder vom geometrischen Standpunkte aus Methode der Tangenten, oder von der Idee der Bewegung ausgehend **methodus fluxionum** nannten.

Wir haben bereits oben gesehen, daß $\frac{dy}{dx}$ nichts Anderes ist als die Tangente des Winkels, den die Berührende mit der Abscissenachse bildet, also $\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}$, woraus dann weiter folgt (fig. 2)

die Normale $PN = y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$,

„ Tangente $PT = y\sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}}$,

„ Subnormale $ON = y\frac{dy}{dx}$

„ Subtangente $OT = y\frac{dx}{dy}$.

Beispiele.

1. Ellipse. Gleichung $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2)$

$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$. Daher die Gleichung der Berührenden an den Punkt $\xi \eta$,

$$\frac{y\eta}{b^2} + \frac{x\xi}{a^2} = 1,$$

Normale $= \sqrt{(1 - e^2)} \cdot \sqrt{(a^2 - e^2 x^2)}$, Subnormale $= x\ (1 - e^2)$,

Tangente $= \sqrt{(a^2 - x^2)} . \sqrt{(a^2 - e^2 x^2)}$, Subtangente $= \frac{1}{x}(a^2 - x^2)$.

Die Resultate für die Hyperbel folgen hieraus von selbst.

2. Parabel. Gleichung $y^2 = 2px$

$\frac{dy}{dx} = \text{tg.}\,\alpha = \frac{p}{y}$. Daher die Gleichung der Berührenden an den Punkt $\xi\,\eta$

$$y\eta = p(x + \xi).$$

$$\text{Normale} = \sqrt{(2px + p^2)}, \quad \text{Subnormale} = p,$$
$$\text{Tangente} = \sqrt{(2px + 4x^2)} \quad \text{Subtangente} = 2x.$$

3. Die logarithmische Linie. Gleichung $y = a^x$ oder $x = k \log y$,

$$\frac{dx}{dy} = \frac{k}{y}, \quad \text{Subtangente} = k.$$

Bei der einfachsten algebraischen Linie, der Parabel, ist also die Subnormale, — bei der einfachsten transscendenten Curve, dagegen ist die Subtangente constant.

4. Die Cycloide. Gleichung $y = a - a\cos\varphi$ und $x = a\varphi - a\sin\varphi$

$$\frac{dy}{d\varphi} = a\sin\varphi, \quad \frac{dx}{d\varphi} = a(1 - \cos\varphi), \text{ also}$$

$$\frac{dy}{dx} = \text{tg.}\,\alpha = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = \cot\tfrac{1}{2}\varphi.$$

Die Subnormale $= y\frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi} = a\sin\varphi = MP''$ (Fig. 3.), woraus sich eine einfache Construction der Berührenden ergiebt.

Daß man bei den Kegelschnitten alle diese Resultate auch ohne Differentialrechnung ableiten kann, wissen die Schüler, oder können es wenigstens in jedem guten Lehrbuche der analytischen Geometrie nachlesen. Man kann es aber auch fast bei jeder andern Curve. Die Tangente des Winkels den eine Secante mit der Abscissenachse bildet ist $\frac{y - y'}{x - x'}$. Soll die Secante in die Berührende übergehen, so hat man $x - x'$ fortzuheben und dann $x' = x''$ zu setzen, grade wie wir es bei anderen Gelegenheiten auch gemacht haben. Z. B. bei der Cycloide ist:

$$\frac{y - y'}{x - x'} = \frac{-a(\cos\varphi - \cos\varphi')}{a(\varphi - \varphi') - a(\sin\varphi - \sin\varphi')} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}{\frac{1}{2}(\varphi - \varphi') - \cos\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')\sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}$$

Dividirt man Zähler und Nenner durch $\sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')$ und setzt dann $\varphi = \varphi'$, so ist bekanntlich $\frac{\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')}{\sin\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')} = 1$ und folglich $\text{tg.}\,\alpha = \frac{\sin\varphi}{1 - \cos\varphi}$, wie vorhin.

Nun bleibt aber die Differentialrechnung nicht dabei stehen, uns durch den ersten Differentialquotienten die Richtung anzugeben, welche die Curve in jedem einzelnen Punkte gegen die Hauptachse nimmt, sondern sie lehrt uns auch die größere oder geringere Krümmung derselben für diesen oder jenen Punkt kennen. Diese Krümmung wird offenbar am zweckmäßigsten durch einen Kreis gemessen, da dieser überall gleichmäßig gekrümmt ist, so daß die größere oder geringere Krümmung nur von dem Halbmesser abhängt. Die Aufgabe besteht also darin, einen Kreis anzugeben, der sich im Punkte P so nahe als möglich an die Curve anlegt. Dieser Kreis heißt Krümmungskreis, sein Radius der Krümmungshalbmesser. Kreis und Curve haben natürlich eine gemeinschaftliche gradlinige Tangente und der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der Normale des Punktes P.

Die Gleichung des Kreises ist $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r^2$.

Soll derselbe durch drei Punkte der Curve gehen, so hat man die drei Gleichungen:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r^2$$
$$(x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2 = r^2$$
$$(x'' - \xi)^2 + (y'' - \eta)^2 = r^2$$

Aus diesen drei Gleichungen kann man unter allen Umständen die Coordinaten des Mittelpunktes und den Radius finden. Rückt man nun die Punkte $x'y'$ und $x''y''$ dem Punkte xy immer näher und näher, so erhält man zuletzt einen durch drei unendlich nahe bei einander liegende Punkte gehenden Kreis, und dieses ist eben der Krümmungskreis. Man hat also nach geschehener Elimination $x = x' = x''$ zu setzen.

Bei der Ellipse ist z. B. $\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$, oder kürzer:

$$x = a\cos\varphi \text{ und } y = b\sin\varphi,$$

daher:

$$(a\cos\varphi - \xi)^2 + (b\sin\varphi - \eta)^2 = r^2, \qquad \text{I.}$$
$$(a\cos\varphi' - \xi)^2 + (b\sin\varphi' - \eta)^2 = r^2, \qquad \text{II.}$$
$$(a\cos\varphi'' - \xi)^2 + (b\sin\varphi'' - \eta)^2 = r^2, \qquad \text{III.}$$

I. — II. giebt: $(a^2 - b^2)(\cos\varphi^2 - \cos\varphi'^2) - 2a\xi(\cos\varphi - \cos\varphi') - 2b\eta(\sin\varphi - \sin\varphi') = 0$,

oder:

$$0 = (a^2 - b^2)\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}$$
$$- a\xi\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2} + b\eta\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\sin\frac{\varphi-\varphi}{2},$$

und nachdem mit $\sin\frac{\varphi-\varphi'}{2}$ gehoben;

$$\eta - \xi\frac{a}{b}\,\text{tg.}\frac{\varphi+\varphi'}{2} + \frac{a^2-b^2}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} = 0. \qquad \text{IV.}$$

Ebenso erhalte ich durch Combination der I. und III. Gleichung:

$$\eta - \xi\frac{a}{b}\,\text{tg.}\frac{\varphi+\varphi''}{2} + \frac{a^2-b^2}{b}\sin\frac{\varphi+\varphi''}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi''}{2} = 0. \qquad \text{V.}$$

Aus IV. und V.:

$$0 = -\xi\frac{a}{b}\left[\text{tg.}\frac{\varphi+\varphi'}{2} - \text{tg.}\frac{\varphi+\varphi''}{2}\right] + \frac{a^2-b^2}{b}\left[\sin\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi'}{2} - \sin\frac{\varphi+\varphi''}{2}\cos\frac{\varphi-\varphi''}{2}\right].$$

Die erste Klammer wird $\dfrac{\sin\frac{\varphi'-\varphi''}{2}}{\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi+\varphi''}{2}}$; die zweite Klammer ist

$$= \tfrac{1}{2}(\sin\varphi + \sin\varphi') - \tfrac{1}{2}(\sin\varphi - \sin\varphi'') = \tfrac{1}{2}(\sin\varphi' - \sin\varphi'') = \sin\frac{\varphi'-\varphi''}{2}\cos\frac{\varphi'+\varphi''}{2},$$

also nachdem der gemeinschaftliche Factor $\sin\frac{\varphi'-\varphi''}{2}$ gehoben ist,

$$\xi = \frac{a^2-b^2}{a}\cos\frac{\varphi+\varphi'}{2}\cos\frac{\varphi+\varphi''}{2}\cos\frac{\varphi'+\varphi''}{2},$$

und wenn $\varphi = \varphi' = \varphi''$

$$(\xi) = \frac{a^2-b^2}{a}\cos\varphi^3.$$

Durch Vertauschung der Buchstaben:

$$\eta = -\frac{a^2 - b^2}{b} \sin \varphi^3.$$

Endlich $$r^2 = \left[a \cos \varphi - \frac{a^2 - b^2}{a} \cos \varphi^3\right]^2 + \left[b \sin \varphi + \frac{a^2 - b^2}{b} \sin \varphi^3\right]^2$$

und nach einer leichten Reduction

$$r^2 = \frac{[a^2 \sin \varphi^2 + b^2 \cos \varphi^2]^3}{a^2\, b^2} = \frac{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}{a^8\, b^8}$$

$$= \frac{(a^2 - e^2 x^2)^3}{a^2\, b^2} = \frac{(\varrho\, \varrho')^3}{a^2\, b^2}.$$

In gleicher Weise für die Hyperbel

$$r^2 = \frac{(e^2 x^2 - a^2)^3}{a^2\, b^2} = \frac{(\varrho\, \varrho')^3}{a^2\, b^2},$$

und für die Parabel

$$r^2 = \frac{8\,(x + \frac{1}{2} p)^3}{p} = \frac{8\, \varrho^3}{p},$$

wo ϱ den Radiusrector bedeutet. Man sieht, daß bei sämmtlichen Kegelschnitten der Cubus der Normale zum Krümmungshalbmesser in einem constanten Verhältnisse steht.

Das hier erläuterte Verfahren wird nicht allein bei den Kegelschnitten, sondern auch bei den Curven höherer Ordnung zum Ziele führen, allein in den meisten Fällen ist die Rechnung so wenig übersichtlich und so unbequem, daß wir den von der Differentialrechnung gewiesenen Richtweg wählen. Es muß zugegeben werden, daß hier die Grenze ist, über welche wir ohne einen von der hohen Differentialbehörde ausgestellten Paß nicht hinüber gelangen dürften.

Wenn in dem sogenannten charakteristischen Dreiecke **ABC**, der Bogen **AB** unendlich klein wird $= ds$, so kann ich ds als grade Linie betrachten und es ist offenbar

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Sei (Fig. 4.) MM' ein sehr kleiner Bogen, ds, welchen Curve und Kreis miteinander gemeinschaftlich haben, O Mittelpunkt des Krümmungskreises. Kreis und Curve haben also in M und in M' gemeinschaftliche Tangenten, welche mit der Hauptachse die Winkel α und α', oder da hier von zwei möglichst nahe beieinander liegenden Punkten die Rede ist, die Winkel α und $\alpha + d\alpha$ bilden. Der Unterschied dieser beiden Winkel, also $d\alpha$ ist nun aber, wie aus der Figur leicht hervorgeht = dem von den beiden Radien OM und OM' gebildeten Winkel und daher ist arc MM' oder $ds = r \,.\, d\alpha$, d. h.

$$r \,.\, d\alpha = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Nun ist $d\, tg\, \alpha = (1 + tg\, \alpha^2)\, d\alpha$, also

$$r \,.\, d\, tg\, \alpha = (1 + tg\, \alpha^2) \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

ferner $$tg\, \alpha = \frac{dy}{dx},\quad d\, tg\, \alpha = \frac{d^2 y}{dx},$$ folglich

$$r \frac{d^2 y}{dx} = \left[1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right] \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

oder: $$r = \sqrt{\left(1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right)^3} : \frac{d^2 y}{dx^2} = \left(\frac{ds}{dx}\right)^3 : \frac{d^2 y}{dx^2}$$

und wenn N die Normale des Punktes x y bedeutet:

$$r = \frac{N^3}{y^3} : \frac{d^2 y}{d x^2}.$$

Die Gleichung des Kreises ist:

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 = r^2.$$

Differentiirt:

$$(x - \xi) + (y - \eta) \frac{d y}{d x} = 0$$

$$1 + \frac{d y^2}{d x^2} + (y - \eta) \frac{d^2 y}{d x^2} = 0.$$

Also

$$\eta - y = \frac{d x^2 + d y^2}{d^2 y} \quad \text{und} \quad \xi - x = - \frac{d x^2 + d y^2}{d^2 y} \frac{d y}{d x}.$$

Die meisten Lehrbücher gehen bei Herleitung dieser Formeln vom Taylor'schen Lehrsatze aus. So elegant das auch zu sein scheint, möchte ich doch nicht dazu rathen. Ich ziehe es vor, mir die Entstehung der Formel geometrisch möglichst klar zu machen, anstatt eine geheimnißvolle Maschine durch einen Druck in Bewegung zu setzen, um am Ende doch nicht zu wissen, ob da im Inneren nicht irgend ein kleines Rad seine Dienste versagt hat?

Als Beispiel diene die Cycloide.

Gleichung:

$$y = a(1 - \cos\varphi) \quad \text{und} \quad x = a(\varphi - \sin\varphi),$$

$$d y = a \sin\varphi \, d\varphi \quad \text{"} \quad d x = a(1 - \cos\varphi) \, d\varphi, \quad \frac{d y}{d x} = \cot \tfrac{1}{2}\varphi,$$

$$d^2 y = a \cos\varphi \, d\varphi^2 + a \sin\varphi \, d^2\varphi,$$

$$d^2 x = 0 = a(1 - \cos\varphi) d^2\varphi + a \sin\varphi \, d\varphi^2, \quad \text{also} \quad \frac{d^2\varphi}{d\varphi^2} = - \cot \tfrac{1}{2}\varphi,$$

daher

$$d^2 y = a \, d\varphi^2 \, [\cos\varphi - 2 \cos \tfrac{1}{2}\varphi^2] = - a \, d\varphi^2,$$

ferner

$$d\varphi = \frac{d x}{a(1 - \cos\varphi)},$$

folglich:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = - \frac{1}{a(1 - \cos\varphi)^2} = - \frac{1}{4 a \sin_{\frac{1}{2}} \varphi^4}$$

und

$$r = - 4 a \sin \tfrac{1}{2}\varphi^4 (1 + \cot \tfrac{1}{2}\varphi^2)^{\frac{3}{2}} = - 4 a \sin \tfrac{1}{2}\varphi = - 2\sqrt{2 a y}.$$

Die Mittelpunkte aller Krümmungskreise für die stetig aufeinander folgenden Punkte der Curve bilden zusammen einen geometrischen Ort, die sogenannte Evolute der Curve, die dann in dieser Beziehung die Evolvente heißt. Um die Gleichung dieser Evolute zu bestimmen, hat man einfach aus obigen Gleichungen für $\eta - y$ und $\xi - x$ die Größen y und x zu eliminiren.

Bei obiger Differentiation der Gleichung des Kreises war bloß x und y veränderlich; d. h. wir betrachteten nur verschiedene Punkte desselben Kreises. Will man dagegen von einem Krümmungskreise zum anderen übergehen, so sind auch ξ und η variabel.

Setzt man zur Abkürzung $\eta - y = t$ und $\xi - x = - t \dfrac{d y}{d x}$,

so ist

$$d\eta - d y = d t \quad \text{und} \quad d\xi - d x = - d t \frac{d y}{d x} - t \frac{d^2 y}{d x},$$

also: $$d\xi - dx = -[d\eta - dy]\frac{dy}{dx} - \left[1 + \frac{dy^2}{dx^2}\right]dx,$$

d. h. $$\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{dy}{dx} \quad \text{oder} \quad -\frac{dx}{dy} = \frac{d\eta}{d\xi}.$$

Da nun $\frac{dy}{dx}$ die Tangente des Winkels φ ist, den die Berührende mit der Hauptachse macht, so ist $-\frac{dx}{dy}$ die Tangente des Winkels $\varphi + 90^0$, den die Normale mit der Hauptachse bildet. Normale und Krümmungshalbmesser fallen aber zusammen.

Aber $\frac{d\eta}{d\xi}$ ist die Tangente des Winkels φ', den die Berührende an den Punkt $\xi\eta$ der Evolute macht, also ist $\varphi + 90 = \varphi'$ d. h. der Krümmungshalbmesser an den Punkt xy ist immer eine Berührende für den Punkt $\xi\eta$ der Evolute.

Denkt man sich also um die Evolute einen biegsamen Faden gelegt und wickelt diesen gleichmäßig ab, so nämlich, daß der abgewickelte Faden fortwährend die Evolute berührt, so ist leicht zu sehen, daß der Endpunkt des Fadens die Evolvente beschreibt; — wovon eben der Name hergenommen ist.

Beispiel 1. Parabel:

$$\xi - x = \frac{y^2 + p^2}{p} \qquad \text{also} \quad \xi = 3x + p$$

$$\eta - y = -\frac{2x + p}{p}\sqrt{2px} \qquad \text{„} \quad \eta = -\frac{2x}{p}\sqrt{2px},$$

woraus leicht folgt:

$$\eta^2 = \frac{8(\xi - p)^3}{27p} = m\,\xi'^3$$

also eine Parabel höherer Ordnung.

Beispiel 2. Cycloide:

$$\eta - y = -(1 + \cot\tfrac{1}{2}\varphi^2)\,4a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^4 = -4a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2$$

$$\eta = -2a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 \quad \text{also} \quad \eta = -y$$

$$\xi - x = 4a\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2\cot\tfrac{1}{2}\varphi = 2a\sin\varphi, \quad \text{also} \quad \xi = a(\varphi + \sin\varphi).$$

Aus beiden Gleichungen für η und ξ müßte φ eliminirt werden. Man sieht aber leicht, daß dieselben eine auffallende Aehnlichkeit mit den Gleichungen der Cycloide haben. Durch eine einfache Coordinaten-Verwandlung, indem $\xi' = \xi + a\pi$, $\eta' = \eta + 2a$ und $\varphi' = \varphi + \pi$ gesetzt wird, erhält man

$$\eta' = a(1 - \cos\varphi') \quad \text{und} \quad \xi' = a(\varphi' - \sin\varphi').$$

Die Evolute der Cycloide ist also ebenfalls eine Cycloide. Die Coordinaten ihres Anfangspunktes sind $-2a$ und $-a\pi$.

Es ist zwar schwer, sich von einem interessanten Gegenstande loszureißen, allein aus nahe liegenden Gründen muß ich mich schon mit diesen kurzen Andeutungen begnügen, um so mehr, da diese letzten Untersuchungen jedenfalls jenseit der Grenzen liegen, welche im 19. Jahrhundert die Lehrer der Mathematik dem Unterrichte auf unseren Realschulen angewiesen sehen möchten.

Kommen wir nun zum Schlusse, nachdem wir uns die hauptsächlichsten Anwendungen der Differentialrechnung näher darauf angesehen haben, auf die Frage zurück, ob dieser erste Theil der höheren Analysis bei der täglich mächtiger anwachsenden Strömung des Lebens und bei den dadurch mehr und mehr gesteigerten Anforderungen in der Mathematik für unsere Schulzwecke nothwendig ist?

Bei dem allgemeinen Beweise des binomischen Lehrsatzes, bei der Herleitung der Reihen für Logarithmen und Kreisfunctionen, überhaupt bei der Darstellung transscendenter Functionen durch unendliche Reihen, ist, wie wir uns überzeugt haben, die Differentialrechnung nicht allein entbehrlich, sondern sie versagt sogar mitunter ihre Dienste, während wir durch die allergewöhnlichsten Hülfsmittel der bescheidenen niederen Analysis leicht und sicher zum Ziele gelangen.

Namentlich aber haben wir zu dem Taylor'schen resp. Mac Laurin'schen Satze kein unbedingtes Vertrauen gewinnen können und gesehen, daß man mit diesen stolzgezäumten Paradepferden der Infinitesimalrechnung nicht selten leichtsinniges Spiel treibt, überhaupt mit divergirenden Reihen Sachen an den Tag bringt, die einem — Witze ähnlicher sehen, als einem ehrlichen Lehrsatze.

Bei der Bestimmung des wahren Werthes eines mehrdeutigen Symbols und bei dem Auffinden der Maxima und Minima reichten ebenfalls die einfachsten algebraischen Operationen aus, so lange $f(x)$ eine ganze rationale Function ist, oder in eine solche verwandelt werden kann. Diese Verwandlung ist aber bei allen algebraischen Functionen ausführbar und auch bei den transscendenten, so weit sie das Bürgerrecht in der Mathematik erhalten haben, möglich. Die Differentialrechnung, die auch hier mitunter versagt, bietet uns also bloß ein Verfahren, das durch seine knappe Bezeichnung in vielen Fällen etwas kürzer und bequemer, jedenfalls aber nicht so viel werth ist, um seinetwegen durch eine neue Theorie dem Schüler den Fortschritt zu erschweren.

Nicht viel anders liegt die Sache bei den Anwendungen auf geometrische Sätze. Die eigentliche Methode der Tangenten ist nicht allein bei den Kegelschnitten sondern auch bei den Curven höherer Ordnung ganz bequem ausführbar ohne Differentialrechnung und wird durch sie wegen der Allgemeinheit der Zeichensprache nur übersichtlicher. Außerdem kommt nur noch die Bestimmung des Krümmungshalbmessers und der Evolute in Frage, während alle übrigen sich hier anreihenden Untersuchungen der Integralrechnung anheimfallen. Bei den Kegelschnitten läßt sich der Krümmungsradius ohne Herbeiziehung jener Sublimitäten leicht angeben, erst darüber hinaus wird die Rechnung zwar nicht unmöglich, aber ermüdend und weitläufig. Wenn nun auch der am sausenden Webestuhle der Zeit schaffende Weltgeist unaufhaltsam vorwärts schreitet und seine Anforderungen an die Bildungsanstalten immer mehr steigert, so muß doch zugestanden werden, daß unsere Realschüler gewiß nicht hinter diesen Anforderungen zurückbleiben, auch wenn sie nicht über die angedeutete Grenze befördert werden, hinter welcher wir ja ohnehin mehr geistreichen Zeitvertreib, als wirklich nützliche und brauchbare Dinge finden; — und so scheint denn auch für die Aufgaben der analytischen Geometrie die Hülfe der Differentialrechnung entbehrlich.

Nun kann es wohl keine Frage sein, daß von zwei Wegen, die in der Mathematik zu demselben Ziele führen, unter allen Umständen, ganz besonders aber für den Lernenden, derjenige welcher von der Sonne beleuchtet einen freien Umblick gestattet, den Vorzug vor einem anderen verdient, der durch das nächtliche Dunkel eines künstlichen Tunnels führt, selbst wenn die Meisterhand eines Newton die glatten Schienen zusammen gefügt hätte! Kömmt hinzu, daß wir auf der künstlichen plutonischen Schienenstraße Eulen nach Athen befördern, daß wir durch sie sogar Zeit verlieren und dafür an Einsicht und Verständniß nichts gewinnen, so wird uns die Wahl wohl nicht schwer werden.

Es ist wahr, die Differentialformeln helfen uns oft, über im Wege liegende Hindernisse hinweg, ohne daß wir wissen, wie? Allein der bewußtlose Nachtwandler klettert auch auf schwindelndem Stege sicher über die gefährlichsten Abgründe und doch wird es wohl Niemandem einfallen, diese Nachtseite der Natur dem selbstbewußten Tagleben vorzuziehen.

Ausnahmen will ich allenfalls gelten lassen. Wenn ein besonders strebsamer und befähigter Schüler des Herzens Gelüste nicht zähmen kann, wenn er in das fabelhafte Jenseit einen prüfenden Blick werfen und das geheimnißvolle Walten jener kleinen Wichtelmännchen beobachten will, so mag er nur getrost an die Arbeit gehen. Es wird ihm nicht schwer werden, den rührig schaffenden Zwergen die Tarnkappe abzugewinnen, wenn er weiß, daß er nicht nöthig hat, sich an den Dornen der Taylor'schen Erfindung die Finger zu verwunden.

Sind aber einmal die ersten Schritte gethan, so wird der Wissensdurstige nicht auf halbem Wege stehen bleiben, sondern sich auch ein klein wenig in dem Gebiete der Integralrechnung umsehen wollen. Freilich sieht es in diesen Regionen zum Theil noch wunderlicher aus, als in denen, welche wir bisher durchwandert haben, und es würde mir daher recht angenehm sein, wenn ich bald Gelegenheit fände, meinen Spaziergang fortzusetzen und meinen lieben jungen Freunden die herrlichen Wunderwerke auch dieses neuen Feenlandes zu zeigen, — seine erhabenen, zum Theil auf den Wüstensand gebaueten Pyramiden, das unendlich verschlungene Gewirr seiner Labyrinthe, seine vieldeutige Hieroglyphenschrift, auf welche man troß ihrer Unerweislichkeit doch sehr weit reichende wichtige Schlüsse zu gründen weiß, — vor allen seine in den Himmel wachsenden Bäume, die man, um ihre Himmelfahrt nicht aufzuhalten, mit Wurzeln an die irdische Heimath zu ketten, unterlassen hat.

Fig. 1.

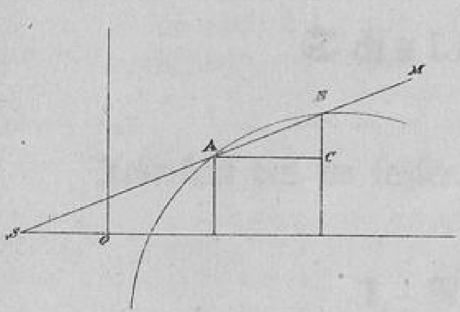

Fig. 2.

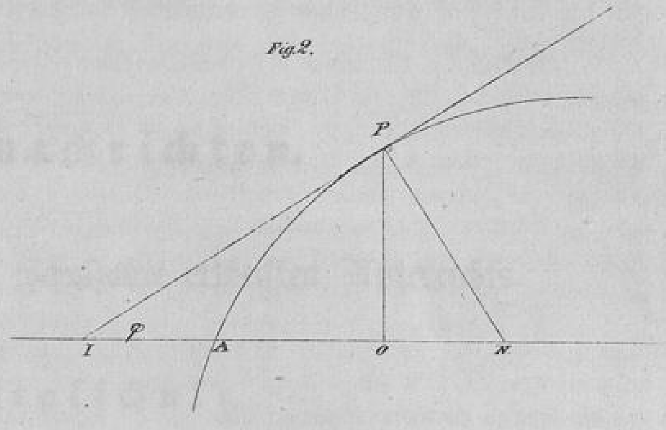

Fig. 3.

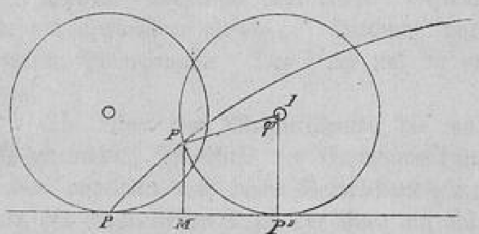

Fig. 4.