Über ein Pendel, bei welchem aufser der Schwerkraft noch eine dem umgekehrten Quadrat der Entfernung proportionale abstofsende Kraft wirksam ist.

I.

Zwei gleich schwere materielle Punkte P_1 und P_2 von der Masse m mögen sich bewegen können auf einem senkrecht stehenden Kreise vom Radius l. Sie mögen gleichstark mit gleichartiger Elektricität geladen sein, so dafs in der Einheit der Entfernung die abstofsende Kraft $= e$ sei. Der Mittelpunkt des Kreises sei dann der Anfangspunkt eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen positive x Axe senkrecht nach unten gerichtet sei, und die Koordinaten des einen Punktes zur Zeit t seien x_1, y_1, die des anderen x_2, y_2. Bedeutet g die Erdbeschleunigung und ist

$$r = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

die Entfernung der Punkte zur Zeit t, so wird die Bewegung des Systems gegeben durch folgende Differentialgleichungen:

$$1. \qquad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = g + \frac{e}{r^2} \frac{x_1 - x_2}{r} + \Lambda x_1,$$

$$2. \qquad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{e}{r^2} \frac{y_1 - y_2}{r} + \Lambda y_1,$$

$$3. \qquad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = g - \frac{e}{r^2} \frac{x_1 - x_2}{r} + \Lambda x_2,$$

$$4. \qquad \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -\frac{e}{r^2} \frac{y_1 - y_2}{r} + \Lambda y_2 .$$

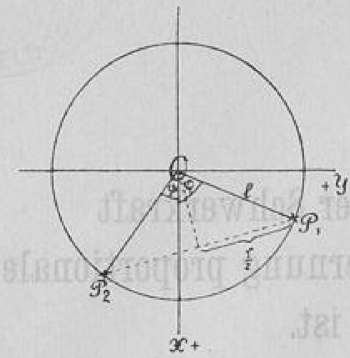
Multipliziert man Gleichung 1. mit y_1, Gleichung 2. mit x_1 und subtrahiert 1. von 2., so erhält man

$$5. \qquad x_1 \frac{d^2 y_1}{dt^2} - y_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -g y_1 + \frac{e}{r^3} (x_2 y_1 - y_2 x_1),$$

und ebenso aus 3. und 4.

$$6. \qquad x_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} - y_2 \frac{d^2 y_2}{dt^2} = -g y_2 - \frac{e}{r^3} (x_2 y_1 - y_2 x_1).$$

Führt man jetzt Polarkoordinaten ein durch



$$x_1 = l\cos\varphi\,, \qquad x_2 = l\cos\psi\,,$$

$$y_1 = l\sin\varphi\,, \qquad y_2 = l\sin\psi\,,$$

so ist
$$\frac{dx_1}{dt} = -\,l\sin\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}\,, \qquad \frac{dy_1}{dt} = l\cos\varphi\,\frac{d\varphi}{dt}\,,$$

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\,l\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 - l\sin\varphi\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,,$$

$$\frac{d^2y_1}{dt^2} = -\,l\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + l\cos\varphi\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,.$$

Dann ist aber
$$x_1\frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1\frac{d^2x_1}{dt^2} = l^2\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,,$$

$$x_2y_1 - y_2x_1 = l^2\sin(\varphi - \psi)\,,$$

und da ferner $r = 2l\sin\dfrac{\varphi-\psi}{2}$ ist, so erhält man

$$5\text{a.}\qquad l^2\,\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\,g\,l\sin\varphi + \frac{e}{8\,l}\,\frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin^3\dfrac{\varphi-\psi}{2}}\,,$$

und entsprechend
$$6\text{a.}\qquad l^2\,\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\,g\,l\sin\psi - \frac{e}{8\,l}\,\frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin^3\dfrac{\varphi-\psi}{2}}\,.$$

Dividiert man noch durch l^2, ersetzt $\sin(\varphi-\psi)$ durch $2\sin\dfrac{\varphi-\psi}{2}\cos\dfrac{\varphi-\psi}{2}$ und setzt zur Abkürzung

$$\frac{g}{l} = f\,, \qquad \frac{e}{4\,l^3} = h\,,$$

so nehmen endlich die Gleichungen folgende Gestalt an:

$$7.\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\,f\sin\varphi + h\,\frac{\cos\dfrac{\varphi-\psi}{2}}{\sin^2\dfrac{\varphi-\psi}{2}}\,,$$

$$8.\qquad \frac{d^2\psi}{dt^2} = -\,f\sin\psi - h\,\frac{\cos\dfrac{\varphi-\psi}{2}}{\sin^2\dfrac{\varphi-\psi}{2}}\,.$$

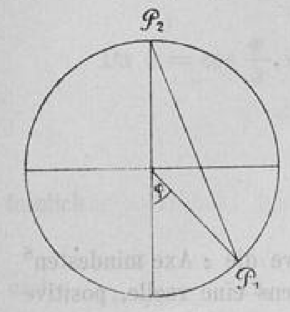
II.

Die Bewegung soll nun zuerst für den Fall untersucht werden, dafs der Punkt P_2 festgehalten wird, und zwar soll er im höchsten Punkte des Kreises sich befinden. Führt man P_2 in der negativen Drehungsrichtung an diese Stelle, so ist $\psi = -\pi$ zu setzen. Dann wird

$$\cos\frac{\varphi-\psi}{2}=\cos\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\frac{\varphi}{2}\,,$$

$$\sin\frac{\varphi-\psi}{2}=\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\frac{\varphi}{2}\,,$$

und die Bewegung des Punktes P_1 wird gegeben durch



$$9.\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2}=-f\sin\varphi-h\,\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}$$

oder

$$2\,\frac{d^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{dt^2}=-f\,2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}-h\,\frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,.$$

Multipliziert man mit $d\frac{\varphi}{2}$ und integriert, so ergiebt sich

$$10.\qquad \left(\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{dt}\right)^2=f\cos^2\frac{\varphi}{2}-\frac{h}{\cos\frac{\varphi}{2}}+C\,,$$

wo C eine willkürliche Konstante bedeutet. Um derselben eine mechanische Bedeutung zu geben, soll die halbe Winkelgeschwindigkeit, welche das Pendel an seiner tiefsten Stelle, also für $\frac{\varphi}{2}=0$ hat, eingeführt werden. Ist dieselbe $=v$, so wird für $\cos\frac{\varphi}{2}=1$ die Gleichung 10. zu

$$v^2=f-h+C\,,$$

woraus

$$C=v^2+h-f \quad\text{folgt.}$$

Setzt man diesen Wert ein, so ist

$$\left(\frac{d\frac{\varphi}{2}}{dt}\right)^2=f\cos^2\frac{\varphi}{2}-\frac{h}{\cos\frac{\varphi}{2}}+v^2+h-f$$

oder

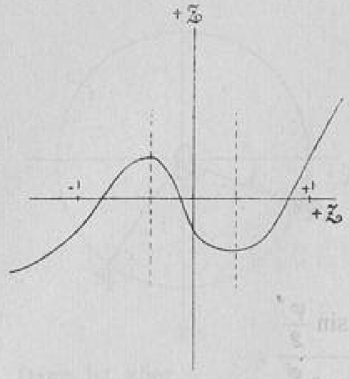
$$11.\qquad \left(\frac{d\frac{\varphi}{2}}{dt}\right)^2=\frac{f}{\cos\frac{\varphi}{2}}\left(\cos^3\frac{\varphi}{2}+\left(\frac{v^2+h}{f}-1\right)\cos\frac{\varphi}{2}-\frac{h}{f}\right).$$

Zur weiteren Beurteilung der Bewegung wird es nötig sein, den Ausdruck in der Klammer zu untersuchen und die Werte zu bestimmen, für welche derselbe $=0$ wird. Zur Abkürzung werde $\cos\frac{\varphi}{2}=z$ gesetzt, dann lautet die zu untersuchende Gleichung

$$z^3+\left(\frac{v^2+h}{f}-1\right)z-\frac{h}{f}=0\,.$$

Um ihre Wurzeln zu bestimmen, setzen wir

$$Z = z^3 + \left(\frac{v^2 + h}{f} - 1\right) z - \frac{h}{f}$$



und untersuchen die durch diese Gleichung bestimmte Kurve. Dabei ergeben sich folgende zusammengehörige Werte:

Für $z = -\infty$ ist $Z = -\infty$,

» $z = -1$ » $Z = -\dfrac{v^2 + 2h}{f}$,

» $z = 0$ » $Z = -\dfrac{h}{f}$,

» $z = +1$ » $Z = \dfrac{v^2}{f}$.

Da v^2, f und h positive Gröfsen sind, so folgt daraus, dafs die Kurve die z Axe mindestens einmal zwischen 0 und 1 schneidet, dafs also die Gleichung $Z = 0$ mindestens eine reelle, positive Wurzel zwischen 0 und 1 besitzt. Um die anderen Wurzeln zu bestimmen, berücksichtige man, dafs das Produkt der drei Wurzeln $= \dfrac{h}{f}$, also positiv ist. Daraus folgt, dafs die beiden anderen Wurzeln gleiche Vorzeichen haben, und da ferner die Summe der drei Wurzeln $= 0$ ist, so folgt weiter, dafs die zweite und dritte Wurzel negativ oder komplex sind, in letzterem Falle aber mit negativem reellen Teile. Es ergiebt sich ferner, dafs die Werte der negativen Wurzeln, bezw. die reellen Teile der komplexen Wurzeln zwischen 0 und -1 liegen müssen, da die Summe der drei Wurzeln $= 0$ ist, und da

$$\frac{dZ}{dz} = 3z^2 + \frac{v^2 + h}{f} - 1 = 0 \text{ wird für } z = \pm\sqrt{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{v^2 + h}{f}\right)},$$

so liegt ein Maximum und ein Minimum der Kurve in gleicher Entfernung zu beiden Seiten der z Axe. Danach hat die Kurve folgende Gestalt. Sie steigt an von $-\infty$ bis zwischen -1 und 0, hat dort ein Maximum, durchschneidet herabsteigend die Z Axe in $Z = -\dfrac{h}{f}$, senkt sich herab zum Minimum und steigt nun wieder an, indem sie die z Axe zwischen 0 und $+1$ schneidet.

Von den drei Wurzeln hat nur die positive eine mechanische Bedeutung; denn da φ die Werte von $-\pi$ bis $+\pi$ durchlaufen kann, so liegt $\dfrac{\varphi}{2}$ immer zwischen $-\dfrac{\pi}{2}$ und $+\dfrac{\pi}{2}$, also $\cos\dfrac{\varphi}{2}$ stets zwischen 1 und 0. Die positive Wurzel giebt alsdann den kleinsten Wert an, den $\cos\dfrac{\varphi}{2}$ erreichen kann, und wenn dieser $= \cos\dfrac{\alpha}{2}$ ist, so bedeutet α die gröfste Ablenkung des Pendels von dem tiefsten Punkte oder der Gleichgewichtslage. Es sei nun $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \lambda$ und die beiden anderen Wurzeln $= -\mu$ und $-\nu$, so ist

$$Z = (z - \lambda)(z + \mu)(z + \nu)$$

und

$$\left(\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{dt}\right)^2 = \frac{f}{z}(z - \lambda)(z + \mu)(z + \nu),$$

also $$\frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{dt} = \frac{\sqrt{f}}{z}\sqrt{z(z-\lambda)(z+\mu)(z+\nu)}\,,$$

oder $$dt\sqrt{f} = \frac{d\left(\frac{\varphi}{2}\right)z}{\sqrt{z(z-\lambda)(z+\mu)(z+\nu)}}\,.$$

Da $z = \cos\frac{\varphi}{2}$ ist, so ist ferner

$$dz = -\sin\frac{\varphi}{2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right) = -\sqrt{1-z^2}\,d\left(\frac{\varphi}{2}\right),$$

folglich $$d\frac{\varphi}{2} = -\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

und $$12.\quad dt\sqrt{f} = -\frac{zdz}{\sqrt{z(1-z^2)(z-\lambda)(z+\mu)(z+\nu)}}\,.$$

Die Zeit wird also, da der Radikandus im Nenner in bezug auf z vom sechsten Grade ist, im allgemeinen durch ein ultraelliptisches Integral und zwar erster Gattung angegeben.

III.

Unter gewissen Bedingungen reduziert sich nun dieses Integral auf ein elliptisches. Dazu wäre ausreichend, wenn das Produkt unter dem Wurzelzeichen zwei gleiche Faktoren enthielte, wenn also z. B. $z+\mu = z+\nu$ oder $\mu = \nu$ wäre. Unter dieser Bedingung wollen wir die Bewegung untersuchen.

Aus $\lambda - \mu - \nu = 0$ folgt für $\mu = \nu$, $\lambda = 2\mu$, $\mu = \frac{\lambda}{2}$,

und da $\lambda\mu\nu = \frac{h}{f}$, so ist auch $\frac{\lambda^3}{4} = \frac{h}{f}$, $\lambda = \cos\frac{\varphi}{2} = \sqrt[3]{\frac{4h}{f}}$.

Cos $\frac{\alpha}{2}$ ist stets $\overline{<}\, 1$, also mufs auch $\sqrt[3]{\frac{4h}{f}} \overline{<}\, 1$ sein oder $4h \overline{<}\, f$. Für $4h = f$ wäre aber $\cos\frac{\alpha}{2} = 1$, also $\frac{\alpha}{2}$ und $\alpha = 0$, d. h. der Punkt würde sich überhaupt nicht bewegen. Demnach kann die in Rede stehende Bewegung nur vor sich gehen für $4h < f$ und zwar wächst die gröfste Ablenkung des Pendels um so mehr, je kleiner h im Verhältnis zu f wird. Nun war $f = \frac{g}{l}$, $h = \frac{e}{4l^3}$. Dann geht die Bedingung $4h < f$ über in $\frac{e}{l^2} < g$.

Um diese Bewegung zu ermöglichen, muss aber auch v^2 in bestimmtem Verhältnis zu h und f stehen. Es ist nämlich

$$\mu\nu - \lambda\mu - \lambda\nu = \frac{v^2+h}{f} - 1$$

oder für
$$\mu = \nu = \frac{\lambda}{2}$$
$$\frac{3}{4}\lambda^2 = 1 - \frac{v^2 + h}{f}.$$

Da nun $\lambda = \sqrt[3]{\frac{4h}{f}}$ ist, so mufs auch
$$\frac{v^2 + h}{f} = 1 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{\left(\frac{4h}{f}\right)^2} \quad \text{sein}$$
oder
$$v^2 = f - h - \frac{3}{4} f \sqrt[3]{\left(\frac{4h}{f}\right)^2}.$$

Demnach hat v^2 seinen kleinsten Wert für $\frac{4h}{f} = 1$, nämlich 0, und nimmt zu mit abnehmendem Werte des Verhältnisses $\frac{4h}{f}$.

Ersetzt man in der Bedingungsgleichung für v^2 f durch $\frac{g}{l}$, h durch $\frac{e}{4l^3}$, so geht sie über in
$$v^2 = \frac{g}{l} - \frac{e}{4l^3} - \frac{3}{4}\frac{g}{l}\sqrt[3]{\frac{e^2}{l^4 g^2}}.$$

Die ganze Winkelgeschwindigkeit ist aber $2v$. Man erhält so
$$(2v)^2 = \frac{4g}{l} - \frac{e}{l^3} - \frac{3}{l}\sqrt[3]{\left(\frac{e}{l^2}\right)^2 g}$$
oder
$$l \cdot (2v)^2 = 4g - \frac{e}{l^2} - 3\sqrt[3]{\left(\frac{e}{l^2}\right)^2 \cdot g}$$

$l \cdot (2v)^2$ giebt aber die Centrifugalkraft an. Diese mufs also beim Durchgang des Pendels durch den tiefsten Punkt den rechts stehenden Wert haben, wenn die Bewegung in der angedeuteten Weise erfolgen soll.

Unter der angegebenen Voraussetzung geht der Quotient
$$\frac{zdz}{\sqrt{z(1-z^2)(z-\lambda)(z+\mu)(z+\nu)}}$$
über in
$$\frac{zdz}{(z+\mu)\sqrt{-(z-1)(z-\lambda)z(z+1)}},$$
so dafs
$$t\sqrt{f} = -\int \frac{zdz}{(z+\mu)\sqrt{-(z-1)(z-\lambda)z(z+1)}} + C_1$$
wird, wo C_1 wieder eine willkürliche Konstante bedeutet. Die Zeit wird also jetzt durch ein elliptisches Integral dritter Gattung gegeben. Wird zur Abkürzung
$$-(z-1)(z-\lambda)z(z+1) = R$$
gesetzt, so zerlegt sich dasselbe in
$$\int \frac{dz}{\sqrt{R}} - \mu \int \frac{dz}{(z+\mu)\sqrt{R}},$$

Demnach 13. $$t\sqrt{f} = -\left(\int \frac{dz}{\sqrt{R}} - \mu \int \frac{dz}{(z+\mu)\sqrt{R}}\right) + C_1 \cdot$$

Um die Integrale auf die Normalform zu bringen, bedienen wir uns einer Substitution zweiter Ordnung. Bezeichnen p, q, r, s die Wurzeln der Gleichung $R = 0$, so ist zu setzen[1])

$$z = \frac{p(q-s) + s(p-q)\sin^2\sigma}{q - s + (p-q)\sin^2\sigma},$$

$$\frac{dz^2}{R} = \frac{4}{-(p-r)(p-s)} \left(\frac{d\sigma}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\sigma}}\right)^2,$$

worin $$k^2 = \frac{(p-q)(r-s)}{(p-r)(q-s)},$$

$$\sin^2\sigma = -\frac{(q-s)(z-p)}{(p-q)(z-s)} \qquad \text{ist.}$$

Die Substitution soll ferner so gewählt werden, daſs $\sin^2\sigma$ wächst, während z abnimmt; es wächst dann gleichzeitig σ mit dem Winkel φ, da $z = \cos\frac{\varphi}{2}$ ist. Da z zwischen 1 und λ liegt, so treten an Stelle von p, q, r, s der Reihe nach die Werte 1, λ, 0, -1, und man erhält:

$$z = \frac{1 + \lambda - (1-\lambda)\sin^2\sigma}{1 + \lambda + (1-\lambda)\sin^2\sigma},$$

$$\frac{dz^2}{R} = \frac{4}{1+\lambda}\left(\frac{d\sigma}{\varDelta\sigma}\right)^2,$$

und, da z abnehmen soll, während σ wächst,

$$\frac{dz}{\sqrt{R}} = -\frac{2}{\sqrt{1+\lambda}}\,\frac{d\sigma}{\varDelta\sigma},$$

worin $$k^2 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda} \qquad \text{ist.}$$

Ferner ergiebt sich nach einigen Umformungen

$$\frac{1}{z+\mu} = \frac{1}{1+\mu}\cdot\frac{1 + k^2\sin^2\sigma}{1 + n\sin^2\sigma},$$

wobei $$n = -\frac{(1-\lambda)(1-\mu)}{(1+\lambda)(1+\mu)} = -k^2\frac{1-\mu}{1+\mu}$$

ist. Dann wird

$$\frac{dz}{(z+\mu)\sqrt{R}} = -\frac{1}{1+\mu}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+\lambda}}\left\{\frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\,\varDelta\sigma} + \frac{k^2\sin^2\sigma\,d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\,\varDelta\sigma}\right\},$$

und $$t\sqrt{f} = \frac{2}{\sqrt{1+\lambda}}\left[\int\frac{d\sigma}{\varDelta\sigma} - \frac{\mu}{1+\mu}\left\{\int\frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\,\varDelta\sigma} + \int\frac{k^2\sin^2\sigma\,d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\,\varDelta\sigma}\right\}\right] + C_1 \cdot$$

---

[1]) Durège, Theorie der elliptischen Funktionen.

Ersetzt man $\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{\Delta\sigma}$ durch u und führt in den beiden anderen Integralen statt der Amplitude σ das Argument u ein, so erhält man:

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma} = u + \frac{\operatorname{tang}\operatorname{am} a}{\Delta \operatorname{am} a}\,\Pi(u,\ a),$$

$$\int_0^\sigma \frac{k^2\sin^2\sigma\, d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma} = \frac{1}{\sin\operatorname{am} a\cos\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a}\,\Pi(u,\ a)\cdot$$

Man erhält dann weiter

$$\int_0^\sigma \frac{d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma} + \int_0^\sigma \frac{k^2\sin^2\sigma\, d\sigma}{(1+n\sin^2\sigma)\,\Delta\sigma} = u + \frac{1}{\cos\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a}\left(\sin\operatorname{am} a + \frac{1}{\sin\operatorname{am} a}\right)\Pi(u,\ a)$$

$$= u + \frac{1+\sin^2\operatorname{am} a}{\sin\operatorname{am} a\cos\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a}\,\Pi(u,\ a)$$

Durch die Einführung der bestimmten Integrale ist die Konstante $C_1 = 0$ festgesetzt worden. und die Zeit wird gezählt von dem Augenblick an, wo das Pendel durch den tiefsten Punkt hindurchgeht. In diesem Augenblick ist nämlich

$$z = 1,$$

$\sin^2\sigma = -\frac{1+\lambda}{1-\lambda}\cdot\frac{z-1}{z+1} = 0$, also $\sigma = 0$, ferner $u = 0$ und ebenso $\Pi(u,\ a) = 0$. Dann wird aber auch $C_1 = 0$.

Es sind nun noch die elliptischen Funktionen $\sin\operatorname{am} a$, $\cos\operatorname{am} a$, $\Delta\operatorname{am} a$ durch die Wurzeln der Gleichung $R = 0$ auszudrücken. Der Legendre'sche Parameter n hatte sich ergeben $= -k^2\frac{1-\mu}{1+\mu}$ · Da $\mu < 1$, so liegt diese Gröfse stets zwischen 0 und $-k^2$, das Integral gehört also zu den von Legendre als Intégrales à paramètre logarithmique bezeichneten. Zur Einführung des Jacobi'schen Parameters a ist dann zu setzen:

$$n = -k^2\sin^2\operatorname{am} a,$$

woraus $\sin^2\operatorname{am} a = -\frac{n}{k^2} = \frac{1-\mu}{1+\mu}$, $\qquad \Delta\operatorname{am} a = \sqrt{1-k^2\sin^2\operatorname{am} a}$

$$\sin\operatorname{am} a = \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}}, \qquad = \sqrt{1-\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\cdot\frac{1-\mu}{1+\mu}}$$

$$\cos\operatorname{am} a = \sqrt{1-\frac{1-\mu}{1+\mu}} = \sqrt{\frac{2\mu}{1+\mu}}, \qquad = \sqrt{\frac{2(\lambda+\mu)}{(1+\lambda)(1+\mu)}},$$

und es ergiebt sich

$$1+\sin^2\operatorname{am} a = 1+\frac{1-\mu}{1+\mu} = \frac{2}{1+\mu},$$

$$\sin \operatorname{am} a \,\cos \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} a = \sqrt{\frac{1-\mu}{1+\mu}\cdot\frac{2\mu}{1+\mu}\cdot\frac{2(\lambda+\mu)}{(1+\lambda)(1+\mu)}} = \frac{2}{1+\mu}\sqrt{\frac{\mu(1-\mu)(\lambda+\mu)}{(1+\lambda)(1+\mu)}},$$

folglich $$\frac{1+\sin^2 \operatorname{am} a}{\sin \operatorname{am} a \,\cos \operatorname{am} a \,\Delta \operatorname{am} a} = \sqrt{\frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\mu(1-\mu)(\lambda+\mu)}}.$$

Durch Einführung dieser Werte erhält man:

$$t\sqrt{f} = \frac{2}{\sqrt{1+\lambda}}\left[u - \frac{\mu}{1+\mu}u - \frac{\mu}{1+\mu}\sqrt{\frac{(1+\lambda)(1+\mu)}{\mu(1-\mu)(\lambda+\mu)}}\,\Pi(u,\,a)\right]$$

14. $$t\sqrt{f} = \frac{2}{\sqrt{1+\lambda}\,(1+\mu)}\left[u - \sqrt{\frac{\mu(1+\lambda)(1+\mu)}{(1-\mu)(\lambda+\mu)}}\,\Pi(u,\,a)\right].$$

Nun war $\mu = \frac{\lambda}{2}$, folglich ist

$$1+\mu = \frac{2+\lambda}{2},\quad 1-\mu = \frac{2-\lambda}{2},\quad \lambda+\mu = \frac{3}{2}\lambda,$$

also $$\sqrt{\frac{\mu(1+\lambda)(1+\mu)}{(1-\mu)(\lambda+\mu)}} = \sqrt{\frac{(1+\lambda)(2+\lambda)}{3(2-\lambda)}},$$

und da ferner $\lambda = \cos\frac{a}{2}$ ist, so ergiebt sich weiter:

$$t\sqrt{f} = \frac{4}{\left(2+\cos\frac{a}{2}\right)\sqrt{1+\cos\frac{a}{2}}}\left[u - \sqrt{\frac{\left(1+\cos\frac{a}{2}\right)\left(2+\cos\frac{a}{2}\right)}{3\left(2-\cos\frac{a}{2}\right)}}\,\Pi(u,\,a)\right].$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\frac{1}{\left(2+\cos\frac{a}{2}\right)\sqrt{1+\cos\frac{a}{2}}} = A,$$

$$\sqrt{\frac{\left(1+\cos\frac{a}{2}\right)\left(2+\cos\frac{a}{2}\right)}{3\left(2-\cos\frac{a}{2}\right)}} = B,$$

so ergiebt sich endlich

$$t = \frac{4}{\sqrt{f}}A\left[u - B\;\Pi(u,\,a)\right],$$

15. $$= \frac{4}{\sqrt{f}}A\left[u - B\left\{u\,Z(a) + \frac{1}{2}\log\frac{\theta(u-a)}{\theta(u+a)}\right\}\right].$$

Zur Berechnung der halben Schwingungsdauer T wäre für u das vollständige Integral erster Gattung, K, zu setzen. Da aber

$$\Pi(K,\ a) = K E(a) - a E \qquad \text{ist,}$$

so ergiebt sich

$$T = \frac{4}{\sqrt{f}} A \left[K - B \{ K E(a) - a E \} \right],$$

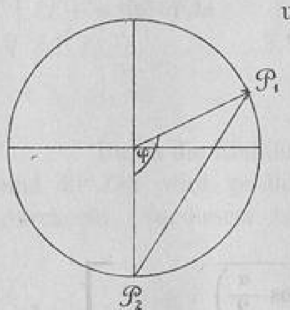
worin E das vollständige Integral zweiter Gattung bedeutet.

IV.

Zweitens soll die Bewegung untersucht werden für den Fall, daſs der Punkt P_2 im tiefsten Punkte des Kreises eine feste Lage einnimmt. Dann ist $\psi = 0$ zu setzen, und es wird

$$\cos \frac{\varphi - \psi}{2} = \cos \frac{\varphi}{2},\ \sin \frac{\varphi - \psi}{2} = \sin \frac{\varphi}{2}$$

und die Bewegungsgleichung für P_1 wird zu



$$17. \qquad \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - f \sin \varphi + h \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$\text{oder} \quad 2 \frac{d^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{dt^2} = - f\, 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} + h \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Durch Integration erhält man

$$18. \qquad \left(\frac{d \left(\frac{\varphi}{2} \right)}{dt} \right)^2 = - f \sin^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{h}{\sin \frac{\varphi}{2}} + C.$$

Um die Konstante C zu bestimmen, sei für $\varphi = \varepsilon$ die halbe Winkelgeschwindigkeit $= v$; dann ist

$$v^2 = - f \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} - \frac{h}{\sin \frac{\varepsilon}{2}} + C,$$

also

$$C = v^2 + f \sin^2 \frac{\varepsilon}{2} + \frac{h}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}.$$

Der Winkel ε sei nun derjenige, für welchen der Punkt P_1 sich im Gleichgewicht befindet; zu seiner Bestimmung dient die Gleichung

$$0 = - 2 f \sin \frac{\varepsilon}{2} \cos \frac{\varepsilon}{2} + h \frac{\cos \frac{\varepsilon}{2}}{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2}},$$

oder
$$0=\cos\frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{h}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}-2f\sin\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Hieraus ergiebt sich

$$1.\qquad \cos\frac{\varepsilon}{2}=0\,,\ \frac{\varepsilon}{2}=\pm\frac{\pi}{2}\,,\ \varepsilon=\pm\pi\,,$$

d. h. der Punkt P_1 wird im höchsten Punkte des Kreises in Ruhe sein können; er befindet sich dabei im labilen Gleichgewicht. Ein zweiter Winkel ε ist bestimmt durch die Gleichung

$$2.\qquad \frac{h}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}-2f\sin\frac{\varepsilon}{2}=0\,,\ \sin^3\frac{\varepsilon}{2}=\frac{h}{2f}.$$

In dieser Lage befindet sich der Punkt im stabilen Gleichgewicht.

v bedeute nun die halbe Winkelgeschwindigkeit beim Durchgang durch den letzteren Punkt. Aus

$$\frac{h}{\sin^2\frac{\varepsilon}{2}}=2f\sin\frac{\varepsilon}{2}$$

folgt dann
$$\frac{h}{\sin\frac{\varepsilon}{2}}=2f\sin^2\frac{\varepsilon}{2}\,,$$

und wenn man dies in die Gleichung für C einführt und gleichzeitig $\sin^2\frac{\varepsilon}{2}$ durch $\sqrt[3]{\left(\frac{h}{2f}\right)^2}$ ersetzt, so erhält man:

$$C=v^2+3f\sqrt[3]{\left(\frac{h}{2f}\right)^2}$$

und es wird

$$19.\qquad \left(\frac{d\frac{\varphi}{2}}{dt}\right)^2=-\frac{f}{\sin\frac{\varphi}{2}}\left(\sin^3\frac{\varphi}{2}-\left(\frac{v^2}{f}+3\sqrt[3]{\left(\frac{h}{2f}\right)^2}\right)\sin\frac{\varphi}{2}+\frac{h}{f}\right).$$

Nun liefert die Gleichung $\sin^3\frac{\varepsilon}{2}=\frac{h}{2f}$ einen reellen Winkel nur unter der Bedingung, daſs $h\leq 2f$ ist. Für den speziellen Fall, daſs $h=2f$ ist, wird $\varepsilon=\pi$, d. h. das Pendel wird durch die abstoſsende Kraft im obersten Punkte des Kreises im stabilen Gleichgewichte gehalten. Dasselbe gilt, wenn $h>2f$ ist. In beiden Fällen macht das Pendel Schwingungen um den höchsten Punkt des Kreises. Setzt man

$$\varphi_1=\pi-\varphi\,,\qquad \text{also}\qquad \frac{\varphi_1}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{\varphi}{2}\,,$$

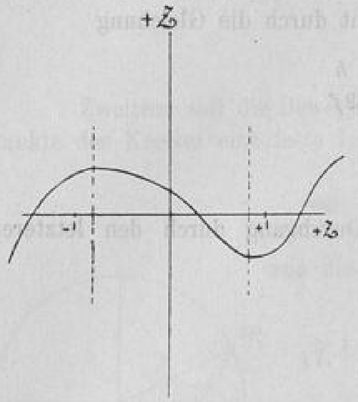
$$d\frac{\varphi}{2}=-d\frac{\varphi_1}{2}\,,\qquad \sin\frac{\varphi}{2}=\cos\frac{\varphi_1}{2}\,,$$

so stellt φ_1 die Ablenkung des Pendels von der Gleichgewichtslage dar, und die weiteren Betrachtungen werden sich ähnlich gestalten wie im erst behandelten Falle. Es mag deshalb von diesen Erörterungen abgesehen werden; dagegen soll die Bewegung verfolgt werden für $h < 2f$, welche Bedingung sich auch schreiben läſst

$$\frac{e}{4l^3} < 2\frac{g}{l} \qquad \text{oder} \qquad \frac{e}{(2l)^2} < 2g\,.$$

Zu dem Zwecke wäre entsprechend dem ersten Falle die Funktion

$$Z = z^3 - \left(\frac{v^2}{f} + 3\sqrt[3]{\left(\frac{h}{2f}\right)^2}\right)z + \frac{h}{f}$$



zu untersuchen. Man hat für

$$z = -\infty \quad . \quad . \quad . \quad Z = -\infty,$$

$$z = -1 \quad . \quad . \quad . \quad Z = \frac{v^2}{f} + 3\sqrt[3]{\left(\frac{h}{2f}\right)^2} + \frac{h}{f} - 1,$$

$$z = 0 \quad . \quad . \quad . \quad Z = \frac{h}{f},$$

$$z = +1 \quad . \quad . \quad . \quad Z = 1 + \frac{h}{f} - \left(\frac{v^2}{f} + 3\sqrt[3]{\left(\frac{h}{2f}\right)^2}\right),$$

$$z = +\infty \quad . \quad . \quad Z = +\infty\,.$$

Man erkennt zunächst, daſs die Gleichung $Z = 0$ eine negative Wurzel hat, da die Kurve die Abscissenaxe zwischen $-\infty$ und 0 schneidet. Die beiden andern Wurzeln haben gleiche Vorzeichen, da das Produkt aller drei Wurzeln $= -\frac{h}{f}$, also negativ ist. Die Kurve hat ferner zu beiden Seiten der Z Axe in gleicher Entfernung ein Maximum und ein Minimum, woraus folgt, daſs die beiden andern Wurzeln positiv sind. Reell sind sie, weil

$$\left(\frac{v^2 + 3\sqrt[3]{\left(\frac{h}{2f}\right)^2}}{3}\right)^3 \text{ stets gröſser als } \left(\frac{h}{2f}\right)^2$$

ist. Ferner ist eine von den beiden positiven Wurzeln immer kleiner als 1. Sind nämlich λ und μ die beiden positiven, $-\nu$ die negative Wurzel, so folgt aus

$$\lambda + \mu - \nu = 0 \qquad \lambda + \mu = \nu\,.$$

$\lambda\mu\nu$ ist aber $= \frac{h}{f}$, also auch $(\lambda + \mu)\lambda\mu = \frac{h}{f}$ oder $\lambda + \mu = \frac{h}{f} : \lambda\mu$.

Da $\frac{h}{2f} < 1$, so ist $\frac{h}{f} < 2$. Nähme man nun an, daſs sowohl λ wie $\mu > 1$ wäre, so müſste ihre Summe kleiner als 2 dividiert durch das Produkt zweier unechten Brüche sein, was unmöglich ist.

Die gröſsere der positiven Wurzeln wird nun $\lesseqgtr 1$ sein, je nachdem

$$1 + \frac{h}{f} - \left(\frac{v^2}{f} + 3\sqrt[3]{\left(\frac{h}{2f}\right)^2}\right) \gtreqless 0$$

ist. Da aber $\frac{d\frac{\varphi}{2}}{dt}$ nur reell wird für negative Werte von Z, so ergeben sich daraus drei verschiedene Arten der Bewegung. Ist erstens

$$1 + \frac{h}{f} - \left(\frac{v^2}{f} + 3\sqrt[3]{\left(\frac{h}{2f}\right)^2}\right) > 0$$

oder

$$v^2 < h + f\left(1 - 3\sqrt[3]{\left(\frac{h}{2f}\right)^2}\right),$$

so wird die Geschwindigkeit zweimal $= 0$ und zwar für $z = \lambda$ und $z = \mu$. Ist $\lambda = \sin\frac{\alpha}{2}$ und $\mu = \sin\frac{\beta}{2}$, so sind α und β die Winkel der gröfsten und kleinsten Ablenkung vom tiefsten Punkte des Kreises an. Das Pendel schwingt dann auf einer Seite des senkrechten Kreisdurchmessers auf und ab.

Ist zweitens

$$v^2 = h + f\left(1 - 3\sqrt[3]{\left(\frac{h}{2f}\right)^2}\right),$$

so ist $\lambda = 1$, also $\sin\frac{\alpha}{2} = 1$, $\alpha = \pi$.

Das Pendel erreicht, vom Punkte $\varphi = \beta$ aufsteigend, gerade den höchsten Punkt des Kreises und bleibt dann in Ruhe.

Ist drittens

$$v^2 > h + f\left(1 - 3\sqrt[3]{\left(\frac{h}{2f}\right)^2}\right),$$

so hat die gröfsere der beiden Wurzeln keine mechanische Bedeutung mehr. Das Pendel schwingt, vom Punkte $\varphi = \beta$ aufsteigend durch den höchsten Punkt herüber auf die andere Seite des Kreises bis zum Punkte $\varphi = 2\pi - \beta$ und dann wieder zurück, und so fort.

In allen drei Fällen wird die halbe Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{d\frac{\varphi}{2}}{dt} = \frac{\sqrt{f}}{z}\sqrt{-(z-\lambda)(z-\mu)z(z+\nu)}$$

und

$$dt\sqrt{f} = \frac{d\frac{\varphi}{2}\cdot z}{\sqrt{-(z-\lambda)(z-\mu)z(z+\nu)}}$$

und da $\sin\frac{\varphi}{2} = z$, $d\frac{\varphi}{2} = \frac{dz}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ ist, so ergiebt sich

$$20.\quad dt\sqrt{f} = \frac{zdz}{\sqrt{-(1-z^2)(z-\lambda)(z-\mu)z(z+\nu)}}.$$

V.

Auch hier wird sich unter gewissen Bedingungen die Schwingungsdauer durch elliptische Funktionen ausdrücken lassen. Im Falle des auf einer Seite auf und ab schwingenden Pendels könnte z. B. die negative Wurzel $= -1$, also $\nu = +1$ sein. Dann erhält man für $t\sqrt{f}$ das elliptische Integral

$$\int \frac{z\,dz}{(z+1)\sqrt{(z-1)(z-\lambda)(z-\mu)z}}$$

Kommt das Pendel gerade bis zum höchsten Punkte empor, so ist $\lambda = 1$, also

$$dt\sqrt{f} = \frac{z\,dz}{(1-z)\sqrt{(z-\mu)z(z+1)(z+\nu)}}.$$

Im dritten Falle wird sich die Schwingungsdauer nicht auf ein elliptisches Integral zurückführen lassen, da dann das Produkt unter dem Wurzelzeichen zwei gleiche Faktoren nicht enthalten kann.

Im Falle, daſs das Pendel gerade bis zum höchsten Punkte des Kreises emporschwingt, ist das Integral

$$\int \frac{z\,dz}{(1-z)\sqrt{(z-\mu)z(z+1)(z+\nu)}}$$

zu berechnen, worin $\mu = \sin\frac{\beta}{2}$ die kleinste Ablenkung des Pendels bestimmt. Das Integral zerlegt sich, wenn wieder zur Abkürzung

$$\sqrt{(z-\mu)z(z+1)(z+\nu)} = \sqrt{R}$$

gesetzt wird, in

$$21.\qquad \int \frac{dz}{(1-z)\sqrt{R}} - \int \frac{dz}{\sqrt{R}}.$$

Um diese Integrale auf die Normalform zu bringen, soll wieder eine Substitution zweiten Grades angewandt werden, doch so, daſs z und die neu einzuführende Variable τ gleichzeitig wachsen. An Stelle von p, q, r, s treten dann, da $z > \mu$ ist, der Reihe nach die Werte $\mu, -\nu, -1, 0$ und man erhält:

$$z = \frac{\mu\nu}{\nu - (\mu+\nu)\sin^2\tau},$$

$$\sin^2\tau = \frac{\nu}{\mu+\nu}\,\frac{z-\mu}{z}$$

$$\frac{dz}{\sqrt{R}} = \frac{2}{\sqrt{(1+\mu)\nu}}\,\frac{d\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}} \text{ oder},$$

da vermöge $\lambda + \mu - \nu = 0$ $1 + \mu = \nu$ ist,

$$\frac{dz}{\sqrt{R}} = \frac{2}{\nu}\,\frac{d\tau}{\Delta\tau}, \qquad \text{worin} \qquad k^2 = \frac{\mu+\nu}{\nu(1+\mu)} = \frac{\mu+\nu}{\nu^2}.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-\mu}\,\frac{1-\dfrac{\mu+\nu}{\nu}\sin^2\tau}{1-\dfrac{\mu+\nu}{\nu(1-\mu)}\sin^2\tau} = \frac{1}{1-\mu}\,\frac{1-\nu k^2\sin^2\tau}{1-n\sin^2\tau},$$

worin $\qquad n = -\dfrac{\mu+\nu}{\nu(1-\mu)} = -k^2\dfrac{\nu}{1-\mu}$ ist.

Dann wird

$$t\sqrt{f} = \frac{2}{\nu(1-\mu)}\left(\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau}{(1+n\sin^2\tau)\,\Delta\tau} - \nu\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{k^2\sin^2\tau\,d\tau}{(1+n\sin^2\tau)\,\Delta\tau}\right) - \frac{2}{\nu}\int_{\tau_0}^{\tau}\frac{d\tau}{\Delta\tau}$$

Die in den Integralen enthaltene willkürliche Konstante mag so bestimmt werden, dafs die Zeit von dem Augenblick an gerechnet wird, in welchem das Pendel sich in der tiefsten Lage befindet. Für diesen Punkt ist $z=\mu$, also $\sin^2\tau = 0$, mithin auch $\tau_0 = 0$. Die obere Grenze τ ist $= \arc\sin\sqrt{\dfrac{\nu}{\mu+\nu}\,\dfrac{z-\mu}{z}}$.

Zur Bestimmung der Integrale ist ferner der Parameter n zu untersuchen. Die zusammengehörigen Werte von z und $\sin^2\tau$ sind in aufsteigender Reihe folgende:

$$\begin{array}{ccccc} \mu, & +1, & -\nu, & -1, & 0 \\ 0, & -\dfrac{1}{n}, & 1, & \dfrac{1}{k^2} & \pm\infty \end{array}$$

Daraus sieht man, dafs $-\dfrac{1}{n}$ zwischen 0 und 1, n selber also zwischen -1 und $-\infty$ liegt. Demnach gehören auch diese Integrale zu den Intégrales à paramètre logarithmique. Um die Integrale durch die Transcendente Π auszudrücken, hat man hier zu setzen

$$n = -k^2\sin^2\operatorname{am}(a+iK'),$$

und man findet:

$$\int_0^{\tau}\frac{d\tau}{(1+n\sin^2\tau)\,\Delta\tau} = M = u + \frac{\operatorname{tang}\operatorname{am}(a+iK')}{\Delta\operatorname{am}(a+iK')}\,\Pi(u,\ a+iK'),$$

$$\int_0^{\tau}\frac{k^2\sin^2\tau\,d\tau}{(1+n\sin^2\tau)\,\Delta\tau} = N = \frac{1}{\sin\operatorname{am}(a+iK')\cos\operatorname{am}(a+iK')\,\Delta\operatorname{am}(a+iK')}\,\Pi(u,\ a+iK'),$$

worin wieder $\qquad u = \displaystyle\int_0^{\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}}$

und K' das vollständige Integral erster Gattung mit komplementärem Modul bedeutet. Es ist ferner

$$M - \nu N = u + \frac{\sin^2 \operatorname{am}(a + iK') - \nu}{\sin \operatorname{am}(a + iK') \cos \operatorname{am}(a + iK') \varDelta \operatorname{am}(a + iK')} \Pi(u,\ a + iK').$$

Nun ist $$\sin^2 \operatorname{am}(a + iK') = -\frac{n}{k^2} = \frac{\nu}{1 - \mu},$$

folglich $$\sin^2 \operatorname{am}(a + iK') - \nu = \frac{\nu}{1 - \mu} - \nu = \frac{\mu\nu}{1 - \mu}.$$

Um den Nenner durch die Wurzeln der Gleichung $R = 0$ auszudrücken, mögen die elliptischen Funktionen mit den konplexen Argumenten $a + iK'$ durch solche mit reellen Argumenten ausgedrückt werden. Dazu dienen die Formeln:

$$\sin \operatorname{am}(a + iK') = \frac{1}{k \sin \operatorname{am} a},$$

$$\cos \operatorname{am}(a + iK') = -i \frac{\varDelta \operatorname{am} a}{k \sin \operatorname{am} a},$$

$$\varDelta \operatorname{am}(a + iK') = -i \cot \operatorname{am} a,$$

woraus sich ergiebt

$$\sin \operatorname{am}(a + iK') \cos \operatorname{am}(a + iK') \varDelta \operatorname{am}(a + iK') = -\frac{\cot \operatorname{am} a \ \varDelta \operatorname{am} a}{k^2 \sin^2 \operatorname{am} a};$$

Aus $$k^2 \sin^2 \operatorname{am}(a + iK') = \frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} a} = -n = \frac{\mu + \nu}{\nu(1 - \mu)}$$

folgt aber $$\sin^2 \operatorname{am} a = \frac{\nu(1 - \mu)}{\mu + \nu},$$

$$\cos^2 \operatorname{am} a = 1 - \frac{\nu(1 - \mu)}{\mu + \nu} = \frac{\mu(1 + \nu)}{\mu + \nu},$$

$$\varDelta^2 \operatorname{am} a = 1 - \frac{\mu + \nu}{\nu(1 + \mu)} \cdot \frac{\nu(1 - \mu)}{\mu + \nu} = \frac{2\mu}{1 + \mu} = \frac{2\mu}{\nu},$$

$$\cot^2 \operatorname{am} a = \frac{\mu(1 + \nu)}{\nu(1 - \mu)}.$$

Hiermit sind die Quadrate der elliptischen Funktionen gegeben; giebt man den Quadratwurzeln, welche die Funktionen selber darstellen, positive Zeichen, so wird die Amplitude zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$, a also zwischen 0 und K liegen. Dann erhält man

$$\frac{\cot \operatorname{am} a \ \varDelta \operatorname{am} a}{k^2 \sin^2 \operatorname{am} a} = \frac{\nu}{1 - \mu} \sqrt{\frac{\mu(1 + \nu)}{\nu(1 - \mu)} \cdot \frac{2\mu}{\nu}} = \frac{\mu}{1 - \mu} \sqrt{\frac{2(1 + \nu)}{1 - \mu}}.$$

Demnach ist

$$\frac{\sin^2 \operatorname{am}(a + iK') - \nu}{\sin \operatorname{am}(a + iK') \cos \operatorname{am}(a + iK') \varDelta \operatorname{am}(a + iK')} = -\frac{\mu\nu}{1 - \mu} \cdot \frac{1 - \mu}{\mu} \sqrt{\frac{(1 - \mu)}{2(1 + \nu)}} = -\nu \sqrt{\frac{1 - \mu}{2(1 + \nu)}},$$

und $$M - \nu N = u - \nu \sqrt{\frac{1 - \mu}{2(1 + \mu)}} \Pi(u,\ a + iK')$$

und weiter $t\sqrt{f} = \frac{2}{\nu(1-\mu)}\,u - \frac{2}{\nu(1-\mu)}\cdot\nu\sqrt{\frac{1-\mu}{2(1+\mu)}}\,\Pi(u,\ a+iK') - \frac{2}{\nu}\,u,$

$$22.\qquad t\sqrt{f} = \frac{2\mu}{\nu(1-\mu)}\,u - \sqrt{\frac{2}{(1-\mu)(1+\nu)}}\,\Pi(u,\ a+iK')\cdot$$

Man kann nun noch der Transcendenten $\Pi(u,\ a+iK')$ eine reelle Form geben. Es ist

$$\Pi(u,\ a+iK') = \Pi(u,\ a) + u\cot\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a + \frac{1}{2}\log\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)}{\sin\operatorname{am}(a+u)},$$

ferner
$$\cot\operatorname{am} a\,\Delta\operatorname{am} a = \frac{\mu}{\nu}\sqrt{\frac{2(1+\nu)}{1-\mu}},$$

demnach

$$\sqrt{\frac{2}{(1-\mu)(1+\nu)}}\,\Pi(u,\ a+iK') = \sqrt{\frac{2}{(1-\mu)(1+\nu)}}\left\{\Pi(u,\ a) + \frac{1}{2}\log\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)}{\sin\operatorname{am}(a+u)}\right\} + \frac{2\mu}{\nu(1-\mu)}\,u,$$

und
$$23.\qquad t\sqrt{f} = -\sqrt{\frac{2}{(1-\mu)(1+\nu)}}\left\{\Pi(u,\ a) + \frac{1}{2}\log\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)}{\sin\operatorname{am}(a+u)}\right\}.$$

Ersetzt man endlich noch

$$\Pi(u,\ a)\ \text{ durch }\ u\,Z(a) + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)},$$

so ergiebt sich

$$t = -\sqrt{\frac{2}{f(1-\mu)(1+\nu)}}\left\{u\,Z(a) + \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)} + \frac{1}{2}\log\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)}{\sin\operatorname{am}(a+u)}\right\}.$$

Um hieraus die Zeit T zu erhalten, welche das Pendel gebraucht, um vom tiefsten zum höchsten Punkte zu gelangen, ist

$$u = \int_0^{\arcsin\sqrt{\frac{\nu(1-\mu)}{\mu+\nu}}} \frac{d\tau}{\sqrt{1-k^2\sin^2\tau}}$$

zu setzen. Dann wird aber $u = a$, folglich

$$\sin\operatorname{am}(a-u) = 0 \text{ und } \frac{1}{2}\log\frac{\sin\operatorname{am}(a-u)}{\sin\operatorname{am}(a+u)} = -\infty\cdot$$

Gleichung 23 zeigt dann, dafs T, ebenso wie beim gewöhnlichen Pendel, $=\infty$ wird.

VI.

An die im Vorstehenden abgehandelten beiden Fälle, in denen die Zeit sich durch elliptische Funktionen ausdrücken läfst, mögen noch einige Bemerkungen geknüpft werden. Wird nämlich die Konstante $e = 0$ gesetzt, so wird auch $h = 0$ und die Bewegung geht in beiden Fällen in die Bewegung des gewöhnlichen Pendels über. Dies soll an den Resultaten verificiert werden.

Im ersten Falle wird dann

$$v^2 = f = \frac{g}{l} \cdot$$

v giebt aber die halbe Winkelgeschwindigkeit beim Durchgang durch den tiefsten Punkt an; demnach ist das Quadrat der ganzen Winkelgeschwindigkeit $= \frac{4g}{l}$, welches die Bedingung für das gerade bis zum höchsten Punkte aufsteigende gewöhnliche Pendel ist. Es ist weiter, da $\frac{\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$, also $\lambda = \cos\frac{\alpha}{2} = 0$ wird,

$$\sin \operatorname{am} a = 1, \quad \operatorname{am} a = \frac{\pi}{2}, \quad a = K,$$

und der Wert für die Schwingungsdauer

$$T = \frac{4}{\sqrt{f}} A \left[K - B \left\{ KE(a) - aE \right\} \right]$$

geht über in

$$T = \frac{2}{\sqrt{f}} K \cdot$$

Das Integral K hört aber dann auf ein elliptisches zu sein, da auch $k^2 = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ zu 1 wird; es wird zu

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\sqrt{1 - \sin^2\sigma}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\sigma}{\cos\sigma} = \log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \infty \cdot$$

Im zweiten Falle wird für $h = 0$ auch

$$\sin^2\frac{\varepsilon}{2} = \frac{h}{2f} = 0,$$

also der Winkel, welcher die Gleichgewichtslage bestimmt, $= 0$. Dann ist auch $\mu = 0$. Dadurch kommt aber in die Bedingungen des Problems ein Widerspruch hinein. Denn einmal soll im Punkte $\mu = 0$ oder $\varphi = \beta = 0$, d. h. im tiefsten Punkte des Kreises die Geschwindigkeit $= 0$ sein, zweitens aber, da $\varphi = \varepsilon = 0$ auch die Gleichgewichtslage bestimmt, auch

$$v^2 = h + f\left(1 - 3\sqrt[3]{\left(\frac{h}{2f}\right)^2}\right), \text{ d. i. } = f$$

sein. Diese Zweideutigkeit, die bereits bei der Bestimmung der Konstante C hervortritt, insofern

dieselbe $$= v^2 + f\sin^2\frac{\varepsilon}{2} + \frac{h}{\sin\frac{\varepsilon}{2}} = v^2 + \frac{0}{0},$$

also unbestimmt wird, macht sich auch am Resultat bemerkbar. Es ist nämlich für

$$\mu = 0 \qquad \nu = 1, \qquad \text{ebenso } k^2 = 1, \quad \text{also}$$

$$\int_0^{\arcsin\sqrt{\frac{\nu(1-\mu)}{(\mu+\nu)}}} \frac{d\tau}{\Delta\tau} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\tau}{\cos\tau} = \infty,$$

ferner $$\sin^2 \operatorname{am} a = 1, \quad \operatorname{am} a = \frac{\pi}{2}, \quad a = K,$$

demnach, da $\Pi(u, K + iK') = 0$ ist, $T\sqrt{f} = 0 \cdot \infty =$ unbestimmt.

In der zweiten Form des Ausdrucks für t, (23.), tritt die Unbestimmtheit in folgender Form hervor:

Es ist $\Pi(u, K) = 0$, dagegen

$$\frac{1}{2}\log\frac{\sin \operatorname{am}(a-u)}{\sin \operatorname{am}(a+u)} = \frac{1}{2}\log\frac{\sin \operatorname{am}(K-K)}{\sin \operatorname{am}(K+K)} = \frac{1}{2}\log\frac{\sin 0}{\sin \pi} = \frac{1}{2}\log\frac{0}{0}.$$

Die Bewegung geht also hier nicht stetig, wie im ersten Falle, indem sich h immer mehr der Null nähert, in die einfache Pendelbewegung über, sondern für $h = 0$ tritt sprungweise eine Änderung in der Bewegungsart ein, indem das Pendel, welches im Falle 2 infolge der abstossenden Kraft des festen Punktes mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 vom Punkte $\varphi = \beta$ aus emporschwingt, nach Beseitigung des Hindernisses nunmehr mit der durch $v^2 = f$ bestimmten Geschwindigkeit durch den tiefsten Punkt hindurchschwingt.

VII.

Es mag endlich noch der Fall behandelt werden, daſs die Punkte sehr kleine Schwingungen um die Gleichgewichtslage vollführen. Zur Bestimmung dieser Lage gelten die beiden Gleichungen

$$25. \quad 0 = -f\sin\varphi + h\frac{\cos\frac{\varphi-\psi}{2}}{\sin^2\frac{\varphi-\psi}{2}},$$

$$26. \quad 0 = -f \sin \psi - h \frac{\cos \frac{\varphi - \psi}{2}}{\sin^2 \frac{\varphi - \psi}{2}} \cdot$$

Hieraus durch Addition

$$\sin \varphi + \sin \psi = 0 \,, \; 2 \sin \frac{\varphi + \psi}{2} \cos \frac{\varphi - \psi}{2} = 0 \cdot$$

oder
$$\text{I.} \quad \frac{\varphi + \psi}{2} = 0 \,, \text{ also } \varphi = -\psi$$

$$\text{II.} \quad \frac{\varphi - \psi}{2} = \pm \frac{\pi}{2} \,, \; \varphi = \psi \pm \pi \cdot$$

Der zweite Wert liefert

$$f \sin \varphi - \frac{h \cos \left(\pm \frac{\pi}{2} \right)}{\sin^2 \left(\pm \frac{\pi}{2} \right)} = 0 \text{ oder } \sin \varphi = 0 \,,$$

also
$$\varphi = 0 \,, \; \psi = \pm \pi \,,$$

resp.
$$\varphi = \pi \,, \; \psi = \begin{cases} 0 \\ 2\pi \end{cases} \cdot$$

Die beiden Punkte befinden sich dann senkrecht übereinander und zwar im labilen Gleichgewicht.

Der erste Wert ergiebt

$$f \sin \varphi - h \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} = 0 \,,$$

$$\text{oder } \frac{\sin^3 \varphi_0}{\cos \varphi_0} = \frac{h}{f} \,,$$

wenn φ_0 den Wert von φ in der stabilen Gleichgewichtslage bedeutet.

Wir führen nun neue Variable ein durch die Gleichungen

$$\varphi = \varphi_0 + u \,, \qquad \psi = \psi_0 + v \cdot$$

Dann ist

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{d^2 u}{dt^2} \,, \qquad \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \frac{d^2 v}{dt^2}$$

und die Bewegungsgleichungen werden zu

$$27. \quad \frac{d^2 u}{dt^2} = -f \sin (\varphi_0 + u) + h \frac{\cos \left(\varphi_0 + \frac{u - v}{2} \right)}{\sin^2 \left(\varphi_0 + \frac{u - v}{2} \right)} \,,$$

$$28. \quad \frac{d^2 v}{dt^2} = -f \sin(\psi_0 + v) - h \frac{\cos\left(\varphi_0 + \frac{u-v}{2}\right)}{\sin^2\left(\varphi_0 + \frac{u-v}{2}\right)}.$$

Das System möge nun um die Gleichgewichtslage so kleine Schwingungen machen, daſs höhere Potenzen als die erste der Gröſsen u und v sowohl als auch ihrer Ableitungen und ebenso alle Produkte derselben vernachlässigt werden können. Entwickelt man dann die in den Bewegungsgleichungen auftretenden Funktionen von u und v in Reihen, so läſst sich setzen

$$\sin u = u, \quad \cos u = 1, \quad \sin v = v, \quad \cos v = 1,$$

ferner
$$\sin(\varphi_0 + u) = \sin\varphi_0 + u\cos\varphi_0,$$

$$\cos\left(\varphi_0 + \frac{u-v}{2}\right) = \cos\varphi_0 - \frac{u-v}{2}\sin\varphi_0,$$

$$\sin^2\left(\varphi_0 + \frac{u-v}{2}\right) = \sin^2\varphi_0 + 2\cdot\frac{u-v}{2}\sin\varphi_0\cos\varphi_0.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{u+v}{2} = \xi, \qquad \frac{u-v}{2} = \eta,$$

so folgt durch Addition der Gleichungen 27. und 28.

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\frac{f}{2}(\sin\varphi_0 + \sin\psi_0 + u\cos\varphi_0 + v\cos\psi_0)$$

und mit Rücksicht auf $\psi_0 = -\varphi_0$

$$29. \quad \frac{d^2\xi}{dt^2} = -f\cos\varphi_0\cdot\xi = -A\,\xi.$$

Durch Subtraktion ergiebt sich

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = -f(\sin\varphi_0 + \eta\cos\varphi_0) + h\frac{\cos\varphi_0 - \eta\sin\varphi_0}{\sin^2\varphi_0 + 2\eta\sin\varphi_0\cos\varphi_0}.$$

Nach Beseitigung des Nenners erhält man ferner mit Rücksicht auf die einschränkenden Bedingungen

$$\sin^2\varphi_0\frac{d^2\eta}{dt^2} = -f\sin^3\varphi_0 - 3f\sin^2\varphi_0\cos\varphi_0\cdot\eta + h\cos\varphi_0 - h\,\eta\sin\varphi_0$$

und da $f\sin^3\varphi_0 = h\cos\varphi_0$ ist,

$$30. \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\frac{h + 3f\sin\varphi_0\cos\varphi_0}{\sin\varphi_0}\eta = -B\eta.$$

Die Gleichungen 29. und 30. lassen sich jetzt gesondert integrieren. Man erhält aus 29. durch Multiplikation mit $2d\xi$ und Integration

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 = A\,(C_1^2 - \xi^2)\,.$$

Die Geschwindigkeit wird dann $= 0$ für $\xi = \pm C_1$, die Konstante C_1 giebt also den grölsten und kleinsten Wert an, welchen ξ bei den Schwingungen um die Gleichgewichtslage erreicht. Die Geschwindigkeit mag nun mit wachsendem ξ positiv gerechnet werden, dann ist

$$\frac{d\xi}{dt} = \sqrt{A}\,C_1\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\xi}{C_1}\right)^2\right)},$$

$$dt\sqrt{A} = \frac{d\left(\frac{\xi}{C_1}\right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{\xi}{C_1}\right)^2}},$$

woraus

$$31. \qquad t\sqrt{A} = \arcsin\frac{\xi}{C_1} + C_1'\,.$$

Entsprechend findet man

$$32. \qquad t\sqrt{B} = \arcsin\frac{\eta}{C_2} + C_2'\,.$$

Die Werte

$$\xi = \frac{u+v}{2} = \pm C_1\,,$$

$$\eta = \frac{u-v}{2} = \pm C_2\,,$$

für welche $\frac{d\xi}{dt}$ und $\frac{d\eta}{dt} = 0$ werden, liefern nun vier zusammengehörige Wertepaare von u und v, für welche die wirkliche Geschwindigkeit der Punkte P_1 und $P_2 = 0$ wird. Denn aus

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt} + \frac{dv}{dt}\right) = 0 \text{ und}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dt} - \frac{dv}{dt}\right) = 0$$

folgt $\frac{du}{dt} = 0$, $\frac{dv}{dt} = 0$. Dies wird z. B. eintreten für $u = C_1 + C_2$, $v = C_1 - C_2$, wenn man die Werte $\xi = + C_1$, $\eta = + C_2$ benutzt. Um nun die Konstanten C_1', und C_2' zu bestimmen, wollen wir die Zeit von diesem Augenblick an rechnen. Dann erhält man aus 31. und 32.

$$0 = \arcsin\frac{C_1}{C_1} + C_1',$$

$$0 = \text{arc}\sin\frac{C_2}{C_2} + C_2',$$

woraus
$$C_1' = C_2' = -\frac{\pi}{2},$$

und es ist
$$\frac{\xi}{C_1} = \sin\left(t\sqrt{A} + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(t\sqrt{A}\right)$$

oder
$$\xi = C_1\cos\left(t\sqrt{A}\right),$$
$$\eta = C_2\cos\left(t\sqrt{B}\right).$$

Nun war
$$\varphi = \varphi_0 + u = \varphi_0 + \xi + \eta,$$
$$\psi = \psi_0 + v = \psi_0 + \xi - \eta,$$

demnach
$$33. \quad \varphi = \varphi_0 + C_1\cos\left(t\sqrt{A}\right) + C_2\cos\left(t\sqrt{B}\right),$$
$$34. \quad \psi = \psi_0 + C_1\cos\left(t\sqrt{A}\right) - C_2\cos\left(t\sqrt{B}\right).$$

Die Schwingungen um φ_0 bez. ψ_0 sind also aus zwei sich übereinanderlagernden Perioden zusammengesetzt.

Unter zwei Umständen kann die Bewegung eine einfach periodische werden, nämlich

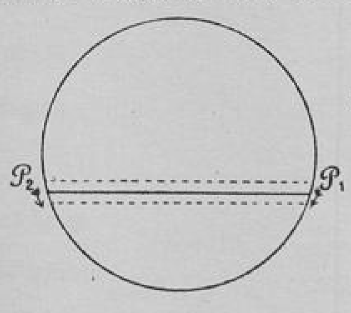
I. wenn $C_1 = 0$,
II. wenn $C_2 = 0$ ist.

I. $C_1 = 0$.

Die Bewegung wird dargestellt durch
$$\varphi = \varphi_0 + C_2\cos\left(t\sqrt{B}\right),$$
$$\psi = \psi_0 - C_2\cos\left(t\sqrt{B}\right).$$

Aus $C_1 = 0$ folgt für die Anfangswerte
$$u = C_2, \qquad v = -C_2.$$

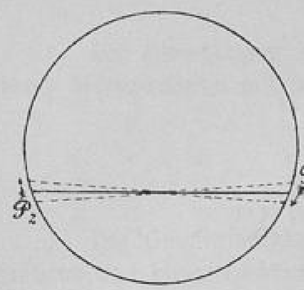
Beide Punkte befinden sich gleichweit über der Gleichgewichtslage und vollführen um dieselbe, immer in gleicher Höhe bleibend, Schwingungen, deren halbe Dauer durch
$$T = \frac{\pi}{2\sqrt{B}}$$
gegeben ist.



II. $C_2 = 0$.

Die Bewegung wird dargestellt durch
$$\varphi = \varphi_0 + C_1\cos\left(t\sqrt{A}\right),$$
$$\psi = \psi_0 + C_1\cos\left(t\sqrt{A}\right).$$

Nun ist $C_2 = 0$, die Anfangswerte also
$$u = C_1, \qquad v = C_1.$$



Die Bewegung erfolgt so, daſs der eine Punkt sich stets ebenso tief unter, wie der andere sich über der Gleichgewichtslage befindet. Die Punkte vollführen Schwingungen um dieselbe, indem immer beide gleichzeitig sich in derselben Drehungsrichtung bewegen. Die halbe Dauer der Schwingungsperiode wird angegeben durch

$$T = \frac{\pi}{2\sqrt{A}}$$

Zum Schluſs mag noch kurz der Fall berührt werden, daſs e und damit h einen unendlich groſsen Wert hat. Die Bedingungen für die Gleichgewichtslage reduzieren sich dann auf

$$\cos\frac{\varphi-\psi}{2} = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi - \psi = \pm\pi.$$

d. h. die Punkte sind im Gleichgewicht in jeder Lage, in der sie einander diametral gegenüberstehen.

Auf Seite 16 letzte Formel lies:

und
$$M - \nu N = u - \nu\sqrt{\frac{1-\mu}{2(1+\nu)}}\,\Pi(u,\ a + iK')$$

Maass.