Grundlagen der Arithmetik,

insbesondere der Begriff der natürlichen Zahlen, für den Unterricht in Prima

von

Paul Peters.

Beilage zum 37ten Jahresbericht
über das Königliche Wilhelms-Gymnasium zu Königsberg Pr.

Königsberg Pr. 1912.
Hartungsche Buchdruckerei.

1912. Progr.-Nr. 7.

Vorwort.

Die ministeriellen „Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen in Preufsen. 1901" schreiben für den Unterricht in Prima einen „wiederholenden Aufbau des arithmetischen Lehrganges (Erweiterung des Zahlbegriffs durch die algebraischen Operationen von der ganzen positiven bis zur komplexen Zahl)" vor. Die Vorschrift ist, auch im Sinne des an einer andern Stelle (S. 59, Abs. 10) gebrauchten Ausdrucks „zusammenfassende Rückschau", so zu verstehen, dafs nicht der bis dahin behandelte Lehrstoff noch einmal in der auf den mittleren Klassen angebrachten Weise durchgenommen, sondern dafs die elementare Arithmetik in ihren Hauptlinien dem reiferen Verständnis der Schüler entsprechend neu aufgebaut werden soll.

Die Fundamente dieses Baues sind die Begriffe der natürlichen Zahl und der Gleichheit. Während nun der obigen Vorschrift zufolge neuere mathematische Schulbücher auf der Oberstufe den Zusammenhang der sieben algebraischen Rechnungsarten und die Erweiterungen des Zahlenbegriffs durch sie eingehend besprechen, fehlt in ihnen fast durchweg eine Ableitung der genannten Begriffe selbst; sie werden entweder als unmittelbar gegebene Grundbegriffe ohne weiteres oder durch Zirkelsätze wie „Das Ergebnis des Zählens heifst Zahl" und „Zwei Zahlen heifsen gleich, wenn eine für die andere gesetzt werden kann" eingeführt. Das entspricht aber nicht der Schulung im formalen Denken, welche unsere höheren Lehranstalten pflegen wollen, und auch nicht der allgemein so wichtigen Bedeutung der beiden Begriffe. Die natürlichen Zahlen und ihre einfachsten Verknüpfungen durch Gleichungen gehören nun einmal zu denjenigen Begriffen und geistigen Operationen, welche man, auch wenn alle anderen mathematischen Kenntnisse zurücktreten, das ganze Leben hindurch anwendet, und doch dürfte die Frage: Was ist eine Zahl? recht häufig die — wohl weniger bedauernde als vorwurfsvolle — Antwort finden: Das habe ich nie gewuſst.

Ich meine hier nicht eine endgültige wissenschaftliche Definition des allgemeinen Zahlenbegriffs. Dieser ändert sich notwendig mit der Auffindung und Einführung neuer Zahlenarten, wie der einfachen und allgemeinen komplexen Zahlen durch Argand, Gauſs, Hamilton und Hankel, und so hat auch in der Tat die wissenschaftliche Forschung sich den Grundlagen der Arithmetik immer wieder und besonders seit der Mitte des vorigen Jahrhunderts von neuem zugewendet. Soweit aber die Ergebnisse solcher Studien die Begriffe der auf der Schule behandelten Zahlen und ihrer Verknüpfungen vertiefen, darf an ihnen, wie auf allen Wissensgebieten, das Lehrbuch nicht achtlos vorübergehen; ihm fällt vielmehr die Aufgabe zu, sie ohne Verletzung ihres wissenschaftlichen Charakters in eine möglichst einfache elementare Form zu kleiden. Überläſst man ihre Verwertung dem mündlichen Unterricht, so kann das bei der Subtilität, die ihre Behandlung erfordert, als Erfolg nur eine vorübergehende Anregung der Schüler ergeben; dauernde Aneignung ist für diese nur durch Festhalten des Wortlautes der Hauptsätze zu erhoffen.

Zur Ableitung des Begriffs der natürlichen Zahlen auf der Schule halte ich für am besten geeignet den Weg, den Heinrich Weber in seiner „Encyklopädie der elementaren Algebra und Analysis“ einschlägt,[1]) und auf ihm habe ich in der vorher angedeuteten Weise mit der vorliegenden Arbeit eine Einführung in die elementare Arithmetik zu geben versucht: sie ist zunächst für die Primaner unsrer Anstalt und zur Ergänzung des Lehrbuchs[2]) bestimmt. Es erschien mir dabei als zweckmäſsig, auch andere Erörterungen, welche meines Erachtens auſser der des Zahlenbegriffs auf dieser Stufe und zum Teil auch schon früher der eigentlichen Buchstabenrechnung vorausgehen müssen oder doch ihrem Gegenstande nach hierher gehören, kurz zusammenzustellen.

---

1) H. Grassmann, dessen klassische Arbeiten die oben angegebene letzte Periode kennzeichnen, gibt in seinem „Lehrbuch der Arithmetik für höhere Lehranstalten“ (Berlin 1861 und Werke 2. Bd. 1. T.) hauptsächlich nur die rein formalen Verknüpfungsgesetze für gleichartige Gröſsen.

2) Mehler, Hauptsätze der Elementar-Mathematik, bearbeitet von Schulte-Tigges.

Einleitung.

1. Der Mensch ist fähig, jeden Gegenstand seines Denkens (diese Tanne, dieses Grün) als etwas besonderes, für sich seiendes, als ein Ding, zu begreifen. Er ist ferner fähig, Dinge im Geiste mit einander zu verknüpfen, sei es, daſs er sie selbst als schlechthin verbunden (diese beiden Bäume) oder getrennt (der eine und der andere von ihnen) denkt, oder sei es, daſs er ihre Begriffe auf einander bezieht (diese grüne Tanne). Die Betätigung der beiden Fähigkeiten lehrt ihn bald, jedes der gedachten Dinge zunächst als eine Einheit in der Mehrheit oder Vielheit aller auffassen, dann aber auch als mehr oder weniger mit den andern übereinstimmend oder von ihnen verschieden erkennen. Dinge, die in gewissen Merkmalen übereinstimmen oder sich unterscheiden, nennt man in Hinsicht auf diese Merkmale gleichartig und ungleichartig. Eine dritte geistige Tätigkeit, welcher wir fähig sind, ist die, eine Mehrheit von Dingen, die wir als gleichartig in Betracht ziehen, auch als ein Ding, als eine höhere Einheit, zu denken und zwar wiederum in zweifacher Weise: Entweder wir fassen mehrere solche als schlechthin verbunden gedachte Dinge in ihrer Gesamtheit als ein Ding auf (dieser Wald) — wir nennen es eine Menge und die einzelnen Dinge einer Menge ihre Glieder oder Elemente, — oder wir vereinigen ihre Begriffe unter einem die gemeinsamen Merkmale enthaltenden Gesamtbegriff (Baum). Ebenso können wir also weiterhin auch mehrere Mengen oder Gesamtbegriffe wieder als ein Ding, als eine noch höhere Einheit, denken, indem wir die ersteren als Glieder einer gröſseren Menge in diese und die letzteren als Gattungsbegriffe unter einem neuen Gesamtbegriffe zusammenfassen.

2. Der vielfältige und im ganzen unübersehbare Zusammenhang der Dinge, wie wir ihn in unserm Denken vor-finden, nötigt uns, die Verknüpfungen, denen wir sie im Geiste unterziehen, zu ordnen.

Dies führt uns bei begrifflichen Verknüpfungen dazu, Begriffe zu definieren, d. h. gegen einander abzugrenzen, und in Aussagen darüber, wie wir Begriffe auf einander beziehen, Urteile zu gewinnen. Soweit wir dabei Begriffe und Urteile nur durch Deduktion, d. h. Ableitung mittels reinen Denkens, bilden, sind ihre Grundlagen gewisse Grundbegriffe und Grundsätze (Prinzipien, Axiome), d. h. solche Begriffe und Urteile, aus welchen eben alle übrigen abgeleitet werden. In schärferer Erfassung der notwendigen und hinreichenden Grundlagen (gerade Linie, Parallelensatz) und andrerseits in einfacherer Ableitung und ökonomischer Zusammenfassung bekannter sowie in zweckmäfsiger Herstellung neuer abgeleiteter Begriffe und Urteile (Energie, Gravitationsgesetz) besteht der Fortschritt aller durch Deduktion gewonnenen Erkenntnis; er ist nach beiden Seiten hin unbegrenzt.

3. Die Ordnung der anderen, vom besondern Begriffsinhalt absehenden Verknüpfungen von Dingen ist Gegenstand der reinen Mathematik. Die eine dieser Verknüpfungen, die als schlechthin äufsere gedachte Verbindung eines Dinges mit einem andern, nennen wir Zuordnung, die andere, seine Trennung von ihm, Abordnung; solche Zuordnungen und Abordnungen ausführen heifst rechnen und der folgerichtige kunstvolle Aufbau der sich dabei ergebenden Rechnungsarten mit ihren Begriffen, Lehrsätzen, Methoden und Regeln Arithmetik.

Zur Mathematik gehört noch als zweiter Gegenstand die Geometrie, d. h. die Lehre von den Begriffen und Urteilen, welche sich aus den Grundbegriffen und Axiomen des Punktes, der Geraden und der Ebene ableiten lassen.

Die beiden Teile der Mathematik unterscheiden sich in ihren Grundlagen wesentlich von einander. Die Geometrie geht von konkreten, d. h. sinnlich wahrnehmbaren, Dingen aus, und zwar von solchen, welche man in gewöhnlichem Sinne Punkt (Ort, Stelle), gerade Linie und Ebene nennt. An diesen stellt sie gewisse Grundeigenschaften fest, welche ihnen, soweit Anschauung und Erfahrung reichen und innerhalb dieser Grenzen auch nur mit gröfserer oder geringerer Genauigkeit, zukommen; schliefslich setzt sie an deren Stelle die Begriffe entsprechender abstrakter, sinnlicher Wahrnehmung entzogener, idealer Dinge und uneingeschränkt gültige Urteile als geometrische Grundbegriffe und Axiome. Die Arithmetik dagegen entnimmt sämtlichen Gegenständen des Denkens nur die ganz allgemeinen, besonderer Merkmale baren Begriffe der Einheit und Mehrheit als ihre Grundbegriffe, und den ersten Eigenschaften dieser Begriffe, welche sich bei ihrer Verknüpfung ergeben, ihre Axiome. Auf diesen von einander verschiedenen Grundlagen bauen dann beide Disziplinen ihre Wahrheiten in gleicher Weise, nämlich nur durch logische, d. h. die Denkgesetze befolgende, Schlüsse (Beweise), auf. Sie fördern dabei einander in ergiebigster Wechselwirkung, aber doch wieder in verschiedener Weise: während die Geometrie der Arithmetik nur zur Veranschaulichung ihrer Begriffe und Sätze dient, ist sie selbst bei der Ableitung der Maſsbeziehungen ihrer Gebilde auf die Arithmetik notwendig angewiesen und insofern angewandte Arithmetik.

Die angewandte Mathematik überhaupt umfaſst die Benutzung der Arithmetik und der Geometrie auf allen anderen Gebieten wissenschaftlicher Forschung, insbesondere Physik und Astronomie, sowie bei jeder praktischen Tätigkeit.

Die natürlichen Zahlen.

4. Die ersten Sätze, von denen wir bei der Zuordnung von Dingen — Einzeldingen oder Mengen — zu einander ausgehen, sind folgende zwei:

1. Zwei Einheiten können als solche nur auf eine Art einander zugeordnet werden.
2. Es gibt Paare von Mengen und es lassen sich beliebig viele denken, deren Glieder so einander zugeordnet werden können, daſs zu jedem von ihnen ein und nur ein Glied der andern Menge gehört; es gibt auſserdem Paare von Mengen und es lassen sich auch beliebig viele denken, welche nicht diese Eigenschaft haben.

Von zwei Einheiten und von zwei Mengen der ersten Art sagt man: sie können eindeutig einander zugeordnet werden.

Denkt man also zunächst ein Einzelding oder eine Menge noch einmal und ordnet jenes oder im letzteren Falle jedes Glied sich selbst zu, so folgt aus 1. der Satz: Jedes Ding kann — noch einmal gedacht — sich selbst eindeutig zugeordnet werden.

Denkt man ferner ein Glied einer Menge mit einem Gliede einer zweiten und mit einem Gliede einer dritten Menge verbunden, so sind dadurch auch die beiden letzteren Glieder mit einander verbunden; hieraus und aus 1. folgt der Satz: Können eine Menge und eine zweite und auch die erste und eine dritte eindeutig einander zugeordnet werden, so gilt dasselbe von der zweiten und dritten.

Man sagt daher wie von zwei Mengen so auch von diesen dreien und demnach von allen, welche die gleiche Voraussetzung erfüllen, und ebenso, nicht nur von zwei Einheiten sondern auch von allen: sie können eindeutig einander zugeordnet werden.

Derartige Mengen sind z. B. die Finger einer Hand, die Kelchblätter der Rose oder Apfelblüte, die Linien der Musiknoten, unsere einfachen Vokale, unsere Sinne usw.

Es liegt nun sehr nahe und ist zugleich eine der zweckmäſsigsten Begriffsbildungen, eine jede solche Gattung von Dingen unter einem Begriff zu vereinigen, welcher eben durch jene eine ihnen gemeinsame Eigenschaft definiert ist, wie z. B. die obigen Mengen unter dem Begriff der Fünf und alle Einzeldinge unter dem der Eins. Das unter einem solchen Gattungsbegriff verstandene Ding ist zwar von den Dingen, die es umfaſst, verschieden, teilt aber mit ihnen allen die Fähigkeit der gegenseitigen eindeutigen Zuordnung und ist, da diese Fähigkeit seine einzige besondere Eigenschaft ist, durch jedes von ihnen vollständig bestimmt. Alle unter solchen Gattungsbegriffen verstandenen Dinge haben wiederum das eine Merkmal gemein, daſs sie und andere Dinge sich überhaupt eindeutig einander zuordnen lassen, und führen so auf ihren durch dieses Merkmal gekennzeichneten Gesamtbegriff.

Der Gesamtbegriff aller Dinge, die eindeutig einander zugeordnet werden können, heiſst eine Zahl.

Jedes Ding in seiner Eigenschaft, daſs es selbst und andere Dinge eindeutig einander zugeordnet werden können, ist also eine Zahl; es heiſst als solches, mit Ausnahme des Gattungsbegriffs dieser Dinge, benannte Zahl, und demnach der letztere, soweit es zur Unterscheidung von ihnen notwendig ist, unbenannte Zahl. Da eine unbenannte Zahl durch jede der benannten Zahlen, deren Gattungsbegriff sie ist, bestimmt ist, so wird sie auch kurz die Zahl oder Anzahl des Einzeldinges oder der Glieder einer Menge, durch das oder durch die sie bestimmt ist, genannt.

5. Der hier abgeleitete Begriff der Zahl hat sich schlieſslich als ein sehr einfacher erwiesen; seine Einfachheit beruht darauf, daſs er durch einen einzigen besonderen Begriff, den der eindeutigen Zuordnung, definiert ist. Er läſst sich aber, so definiert, auch in erweitertem Sinne auffassen: Wir haben bisher unter einer Menge die Gesamtheit von Einzeldingen verstanden, die wir nur als gleichartig, d. h. als in gewissen Merkmalen übereinstimmend, in Betracht ziehen. Hierdurch wird nicht ausgeschlossen, daſs wir zugleich die Bestandteile einer Menge als einzeln oder gruppenweise in anderen Merkmalen verschieden, also in Hinsicht auf die letzteren als ungleichartig, denken. Ebenso kann man nun auch bei allen Mengen, deren Bestandteile sich einzeln oder gruppenweise eindeutig einander zuordnen lassen, nicht nur wie bisher diese Bestandteile für sich unter den Gattungsbegriffen je einer Zahl vereinigen, sondern zugleich auch die Mengen selbst unter einem allgemeinern, eben durch die obige Zuordnungsfähigkeit ihrer Bestandteile definierten Gattungsbegriff zusammenfassen, und daher in erweitertem Sinne auch einen solchen Zahlenkomplex eine Zahl und seine ungleichartigen Bestandteile deren Glieder nennen (vgl. **1**, letzter Satz). Es geschieht das in der Mathematik tatsächlich, aber wie erklärlich nur soweit die Merkmale der ungleichartigen Bestandteile rein arithmetische sind und diese das Gesetz der Permanenz, d. h. der beständigen Gültigkeit der Verknüpfungssätze gleichartiger Einheiten befolgen.[1])

Im folgenden ziehen wir die Glieder einer Menge wieder nur als gleichartig in Betracht.

6. Greift man aus einer Menge ein Glied heraus, ordnet ihm ein anderes Glied der Menge zu, ihrer Verbindung noch eines, dieser Verbindung wieder eines und so weiter bis die Menge erschöpft ist, nimmt dann ebenso die Glieder einer andern gleichartigen Menge hinzu und setzt dieses Verfahren beliebig weit fort, so entsteht mit der Reihe der einzelnen Glieder zugleich auch, mit Einschlufs des ersten Gliedes, eine Reihe von Mengen, welche sich mit jedem hinzugefügten Gliede in gleicher Weise und so ändern, dafs sich nicht zwei von ihnen eindeutig einander zuordnen lassen. Wiederholt man das Verfahren — wir nennen es Reihung — mit anderen Mengen, so lassen sich wiederum, soweit die erste Reihe reicht, nach einander je ein neues Glied und das ihm der Stellung nach entsprechende alte, also auch die mit ihnen abschliefsende neue und alte Menge eindeutig einander zuordnen. Hieraus folgt, dafs die durch die Mengen der ersten Reihe bestimmten Zahlen einerseits auch alle von einander verschieden und andererseits von der Wahl der ursprünglichen Mengen unabhängig sind; sie bilden selbst eine geordnete Menge von folgender Beschaffenheit: ihr erstes Glied ist die Einheit, jedes andere Glied entsteht aus dem vorhergehenden durch Hinzufügen der Einheit und ihr letztes Glied ist zugleich die Anzahl ihrer Glieder. Man nennt diese so geordnete Menge die Reihe der natürlichen Zahlen.

---

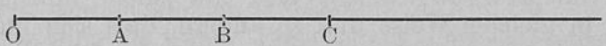
1) Summen positiver und negativer Zahlen mit Einschlufs der Null, ganzer und gebrochener, rationaler und irrationaler, reeller und imaginärer Zahlen; Quaternionen.

Wie weit man diese Reihe gebildet zu denken hat, bleibt unbestimmt; denn welche Zahl man auch als letzte annehmen wollte, man kann stets zu ihr durch weitere Reihung ebensoviele und mehr neue Zahlen hinzugefügt denken. Wie sehr aber auch hierbei die Reihe der Zahlen anwächst, so ist doch jede dieser Zahlen von allen anderen verschieden und entsteht, mit Ausnahme der ersten, aus der vorhergehenden Zahl durch Hinzufügen der Einheit.

Eine Menge heifst endlich oder unendlich (zahllos), je nachdem sie und eine natürliche Zahl sich eindeutig einander zuordnen lassen oder nicht. Beispiele unendlicher Mengen sind das Weltall als Gesamtheit der Himmelskörper, Masse als Gesamtheit ihrer kleinsten Teile, Weltraum und Ewigkeit als Gesamtheiten der in ihnen enthaltenen Volumen- und Zeiteinheiten.

Eine endliche Menge aus ihren Gliedern durch Reihung zusammensetzen und ihre Zahl bestimmen, heifst die Menge zählen. Ändert man die Reihenfolge der Glieder einer gezählten Menge, so haben diese und die neue die Eigenschaft, dafs sich jedes Glied der einen sich selbst in der andern zuordnen läfst und daher nach **4**, 2 beide sich eindeutig einander zuordnen lassen; folglich ist eine endliche Menge als Zahl von der Reihenfolge ihrer Glieder unabhängig.

7. Trägt man eine als Einheit gewählte Strecke auf einer Geraden vom Anfangspunkte aus mehrmals hinter einander ab,



von O bis A, von A bis B, von B bis C usw. und denkt dann noch diese Abtragung weiter und weiter fortgesetzt, so lassen sich die Punkte A, B, C, . . ., die Strecken OA, OB, OC, ..., die Strecken OA, AB, BC, ..., die natürlichen Zahlen und die letzten Einheiten ihrer Mengen mit Einschlufs der ersten eindeutig einander zuordnen. Die Strecken OA, OB, OC, ... stellen die natürlichen Zahlen und die Strecken OA, AB, BC, ..., ihre letzten Einheiten mit Einschlufs der ersten graphisch am einfachsten dar.

Je kleiner man die die Einheit darstellende Strecke wählt, um so näher rücken die Punkte A, B, C, . . . an den Anfangspunkt O heran, ohne doch je zusammenzufallen; teilt man andererseits die ursprünglichen Strecken OA, AB, BC, . . . wiederholt in immer kleinere Teile, so nähern sich die Teilpunkte mehr und mehr einer stetigen, d. h. die Gerade ausfüllenden, Punktreihe, ohne sie je zu erreichen.

Zahlwörter und Ziffern.

8. Der Name und das Zeichen, derer man sich für eine Zahl in Sprache und Schrift bedient, heifsen Zahlwort und Ziffer. Die eigentlichen Zahlwörter sind die der natürlichen Zahlen (Kardinalzahlen); man nennt aber Zahlwörter auch die aus jenen abgeleiteten Namen der letzten Einheiten ihrer Mengen mit Einschlufs der ersten (Ordinalzahlen), ferner die Nomina numeralia distributiva und multiplicativa der lateinischen Sprache für je eins, je zwei, . . . und einmal, zweimal (doppelt, zwier) . . . . . ., die Namen der Brüche (halbe, drittel . . .) u. a. m. Als unmittelbar verständliche Ziffern können die in den römischen Ziffern der ersten Zahlen enthaltenen Zeichen I II III . . . gelten; sie werden aber wie andere solcher Zahlbilder bald unübersichtlich und müfsten dann durch andere Zeichen ersetzt werden.

Um ein fortgesetztes Zählen ohne Einführung immer neuer Zahlwörter und Ziffern zu ermöglichen, hat man von jeher gewisse Zahlen in neue höhere Einheiten zusammengefafst und zwischen diesen eben wieder die früheren benutzt; zum Unterschiede von höheren Einheiten heifsen die Zahlen einer in lauter gleichen ersten Einheiten gezählten Menge Einer. Die nach einer bestimmten Regel in Gruppen verschiedener Einheiten eingeteilte Gesamtheit der natürlichen Zahlen heifst ein Zahlensystem. Das bei den Kulturvölkern üblichste Zahlensystem ist das dem Gebrauch der Finger, als des natürlichsten Hilfsmittels beim Zählen, angepafste indische Zehner- (dekadische) System mit den Ziffern der ersten neun Zahlen, 1 2 3 4 5 6 7 8 9; je zehn Einer werden in die zweite Einheit der Zehner, je zehn Zehner in die dritte der Hunderte usw. zusammengefafst. Die Ziffern der neuen Einheiten werden links neben die der nächst niederen gestellt und leer bleibende niedrigere Stellen durch ein besonderes Zeichen, 0, die Null, arabisch sifr (Ziffer), d. h. leer, ausgefüllt. Die Zahlwörter sind, wie erklärlich, nicht so durchweg gleichmäfsig gebildet worden; statt Tausend, Million, Milliarde, Billion, . . wären besondere Namen notwendig nur für 10000 (Myriade, *μύριοι*), für 100 000 000 und so weiter mit fortgesetzter Verdoppelung der Nullen, und Zahlen wie 11, 13, 20, 1234 wären einzehneins, einzehndrei, zweizehn, einzehnzweihundertdreizehnvier auszusprechen.

Buchstabenrechnung. Rechnungszeichen.

9. Bei allgemein gültigen Aussagen über Zahlen, sowie zur Bezeichnung unbekannter und auch gewisser bestimmter Zahlen gebraucht man als Zahlwort und zugleich auch als

Zahlzeichen einen Buchstaben. Zwei durch verschiedene Buchstaben bezeichnete Zahlen können zwar einunddieselbe Zahl sein, aber zwei Zahlen, die ihrem Begriffe nach verschieden sind oder verschieden sein können, dürfen nicht zugleich durch einunddenselben Buchstaben bezeichnet werden. Statt verschiedener Buchstaben wendet man häufig auch einen Buchstaben mit verschiedenen Jndices, wie a_2 a_b a'', an.

Die Verknüpfung zweier Zahlen durch eine Rechnungsart, sowie besondere Eigenschaften einer Zahl, drückt man schriftlich durch Rechnungszeichen oder durch die Schreibweise der Zahlen aus; wird ein solcher Ausdruck noch weiter verknüpft, so schließt man ihn, soweit es zur Angabe des Rechnungsganges erforderlich ist, in eine Klammer — ( ) oder [ ] oder { } — ein.

Der mathematische Ausdruck einer Verknüpfung von Zahlen durch eine oder mehrere Rechnungsarten heißt eine Formel und die Zahl, die das Ergebnis (Resultat) der Verknüpfung ist, der Wert der Formel; ihn bestimmen, nennt man: die Formel auswerten (ausrechnen). Als Hilfsmittel zur Auswertung von Formeln dienen bei den einfachsten Rechnungsarten im Kreise der ersten Zahlen ihr Auswendiglernen und im übrigen Tafeln und Rechenmaschinen.

Vergleichung von Zahlen.

10. Zwei Zahlen, deren Einheiten durchweg oder gruppenweise identisch, d. h. ihrem Begriffe nach einunddieselben sind, heißen gleich oder ungleich, je nachdem sie im ganzen oder in ihren gleichartigen Gruppen eindeutig einander zugeordnet werden können oder nicht.

Es gelten also nach **4**, 2 ohne weiteres die beiden Sätze: Jede Zahl ist — noch einmal gedacht — sich selbst gleich, und: Sind eine Zahl und eine zweite und auch die erste und eine dritte gleich, so sind auch die zweite und dritte gleich.

Eine Aussage über die Gleichheit oder Ungleichheit zweier Zahlen heißt allgemein Vergleichung und im besondern Gleichung und Ungleichung; die Zahlen selbst heißen deren Seiten.

In der Reihe der natürlichen Zahlen heißt jede, wie die sie darstellende Strecke, kleiner als die folgenden und, mit Ausnahme der Eins, größer als die vorhergehenden; von einer Zahl, die größer als eine zweite und kleiner als eine dritte ist, sagt man auch, wie von den Endpunkten der sie darstellenden Strecken: sie liegt zwischen beiden. Bei benannten Zahlen drückt man die beiden ersten Beziehungen durch weniger und mehr aus.

Die Aussagen, welche bei der Vergleichung einer natürlichen Zahl mit einer zweiten möglich sind, und ihre mathematischen Ausdrücke sind folgende sieben:

a ist gleich b,	a ist gröſser als b,	a ist kleiner als b,
$a = b$,	$a > b$,	$a < b$,
a ist nicht gleich b,	a ist nicht gröſser als b,	a ist nicht kleiner als b,
$a \gtrless b$,	$a \leqq b$,	$a \geqq b$,

a ist durch b nicht begrenzt,

$$a \gtreqless b;$$

aus ihnen folgen einzeln durch Umkehrung die Aussagen: $b = a$, $b < a$ usw. Ist auſserdem noch eine dritte Zahl $c = a$, also in der für die Verbindung zweier vergleichender Aussagen üblichen Schreibweise $b = a = c$, $b < a = c$, . . ., so ist auch $b = c$, $b < c$ . . . . Bei den übrigen Vergleichungen einer Zahl a mit zwei Zahlen b und c ergeben sich noch die folgenden Sätze:

Ist $b < a < c$ oder $b < a \leqq c$ oder $b \leqq a < c$, so ist $b < c$, und ist $b \leqq a \leqq c$, so ist $b \leqq c$.

Ebenso erhellt unmittelbar der bei der Umformung von Gleichungen sehr wichtige und viel gebrauchte Satz: Bedeutet $a \circ b$ das Ergebnis der Verknüpfung einer Zahl a mit einer zweiten Zahl b durch irgend eine eindeutige Rechnungsart und ist $a = c$, so ist auch $a \circ b = c \circ b$ und $b \circ a = b \circ c$; ist auſserdem noch $c = d$, so ist auch $a \circ b = c \circ d$.

nannten Zahlen drückt man die beid
durch weniger und mehr aus.

Die Aussagen, welche bei der Ve
lichen Zahl mit einer zweiten möglich
matischen Ausdrücke sind folgende si

a ist gleich b, a ist gröfser als
$a = b$, $a > b$,

a ist nicht gleich b, a ist nicht gröfs
als b,
$a \gtrless b$, $a \leqq b$,

a ist durch b nicht b
$a \substack{\geq \\ = \\ <} b$;

aus ihnen folgen einzeln durch Um
$b = a$, $b < a$ usw. Ist aufserdem
$c = a$, also in der für die Verbindun
Aussagen üblichen Schreibweise b =
. . ., so ist auch $b = c$, $b < c$ . . .
gleichungen einer Zahl a mit zwei Z
sich noch die folgenden Sätze:

Ist $b < a < c$ oder $b < a \leqq c$ c
$b < c$, und ist $b \leqq a \leqq c$, so ist b

Ebenso erhellt unmittelbar der b
Gleichungen sehr wichtige und viel ge
$a \circ b$ das Ergebnis der Verknüpfung
zweiten Zahl b durch irgend eine e
und ist $a = c$, so ist auch $a \circ b = c$
ist aufserdem noch $c = d$, so ist auc