Ueber die im Pensum höherer Lehranstalten vorkommenden sogenannten imaginären Werte.

Einleitung.

Beachten wir an mehreren Gegenständen nur diejenigen Kennzeichen, welche ihnen allen gemeinschaftlich sind, während wir andererseits alle nicht gleichartigen Merkmale unberücksichtigt lassen, dann erhalten wir durch gleichzeitige Verstellung dieser Wahrnehmungen den Begriff der Zahlengröſse in ihrer ursprünglichen Bedeutung.

Jedes der in dieser Weise betrachteten Dinge bildet die Einheit oder das Element. Eine Zahlengröſse besteht demnach aus Elementen mit gemeinsamen Kennzeichen und kann durch Hinzufügung von Einheiten vergröſsert und durch Hinwegnahme von solchen verkleinert werden, ohne daſs sich das gemeinsame Merkmal ändert.

Man zählte ursprünglich Dinge, die man als gleichartig ansah, indem man ihnen andere gleichartige Gröſsen, wie Finger, Zehen, Striche, Kugeln und dergleichen, zuordnete und auf diese Weise für die zusammengesetzte Vorstellung derselben ein leicht erkennbares Bild, die Zahl, schaffte. Da nun die Zahlen von der Beschaffenheit der gezählten Dinge unabhängig waren, so konnte man sie auch für sich allein betrachten und erhielt so die unbenannten Zahlen im Gegensatze zu den benannten, die die gezählten Dinge erkennen lassen. Statt der genannten Zahlbilder hat man später Zahlzeichen, die Ziffern, eingeführt, durch die man im stande ist, jede Zahl zu schreiben, und statt der Ziffern hat man noch später, der Abkürzung des Ausdrucks wegen, Buchstaben gesetzt. Man erhielt auf diese Weise die unbestimmten oder allgemeinen Zahlen.

Die Verknüpfung der Zahlen führte zu dem Geschäfte des Rechnens, dessen drei Grundgesetze das Kommitations-, Associations- und Distributionsgesetz bilden.

Diese drei Gesetze sind in den Formeln $a + b = b + a$ oder $(a + b) + c = (a + c) + b$, $ab = ba$ oder $(ab)c = (ac)b$ und $(a + b)c = ac + bc$ enthalten und gelten für alle Operationen der Addition und Multiplikation und ihrer Umkehrungen und Ableitungen.

Der Umstand, daſs die Subtraktion für ganze Zahlen unmöglich wird, sobald der Minuend kleiner als der Subtrahend ist, und daſs die Division nicht auszuführen ist, wenn der Divisor nicht im Dividend aufgeht, nötigte zur Erweiterung des Zahlenbegriffs, zur

Aufnahme der negativen und der gebrochenen Zahlensymbole. Diese stellen zwar nicht mehr eine Zahl im ursprünglichen Sinne dar, da sie kein Ergebnis des Zählens sind, haben aber wie diese die Eigenschaft, sich nach oben genannten Grundgesetzen umbilden zu lassen, so dafs sich mit ihnen rechnen läfst. Den positiven ganzen Zahlen schliessen sich die negativen an, ebenso den positiven gebrochenen die negativen gebrochenen.

Mit der Einführung der gebrochenen Zahl ergab sich die Notwendigkeit, auch den Begriff der Gleichheit auf den der Gleichwertigkeit auszudehnen.

Zwei Zahlen heifsen im ursprünglichen Sinne gleich und sind daher auch gleichwertig, wenn sie beide eine gleiche Anzahl ein und derselben Einheit haben. Man kann aber zwei Zahlengröfsen auch dann noch als gleichwertig bezeichnen, wenn man sie mit Hilfe der bisher als richtig erkannten Operationsgesetze so umwandeln kann, dafs ihre neuen Formen genau dieselben Elemente und jedes Element in gleicher Zahl enthalten. Ist zum Beispiel b genau der n^{te} Teil von a, dann können n Elemente b die Gröfse a vertreten, a ist gleichwertig mit n b. Bringt man zwei gebrochene Zahlen auf gleiche Benennung und sind dann ihre Zähler gleich, dann sind sie gleichwertig.

Als spezielle Fälle der gebrochenen Zahlen erscheinen die unendlichen rein periodischen und unrein periodischen Dezimalbrüche, die wie die endlichen in gemeine Brüche verwandelt werden können.

Gleichwertig können endlich auch solche Zahlengröfsen sein, die aus einer unendlich grofsen Anzahl unter einander verschiedener Elemente bestehen. Dahin gehören alle diejenigen, welche sich in unendliche Dezimalbrüche verwandeln lassen, die weder rein noch unrein periodisch sind.

Verstehen wir unter einem Dezimalbruch im weiteren Sinne eine geordnete Summe von Gliedern der verschiedenen decadischen Einheiten, dann kann ein solcher allen erwähnten Zahlen des Zahlengebietes und auch noch allen unendlichen Zahlen gleichwertig werden. Wir können nicht nur gewöhnliche Brüche, welche, wenn sie in den kleinsten Zahlen geschrieben sind und im Nenner die Faktoren 2 und 5 gar nicht oder nicht allein enthalten, durch periodische unendliche Dezimalbrüche ersetzen, sondern auch jede ganze Zahl und jeden beliebigen Bruch. Es ist z. B.

$$5 = 4{,}99999\ldots, \quad \tfrac{3}{4} = 0{,}74999\ldots$$

Umgekehrt ist auch jeder periodische unendliche Dezimalbruch mit einer ganzen Zahl oder mit einem Bruche gleichwertig. Ein solcher unendlicher Dezimalbruch hat also einen bestimmten endlichen Wert. Die Bestimmtheit ergiebt sich schon allein aus dem Umstande, dafs wir wissen, wie oft jede seiner decadischen Einheiten zu nehmen ist. Diese Bestimmtheit kommt aber nicht blofs den unendlichen periodischen Dezimalbrüchen zu, sondern auch den unendlichen unperiodischen; denn wir können in denselben den Wert einer jeden Ziffer genau angeben, wie z. B. in der Zahl π. Da man solche unendliche nicht periodische Dezimalbrüche weder aus ganzen Zahlen noch aus gewöhnlichen Brüchen erhielt, so war man genötigt, sie wiederum als neue Zahlen den bisherigen anzureihen. Man stellte ihnen Symbole gegenüber, aus denen sich ihr Bildungsgesetz erkennen läfst, und nannte sie „irrationelle“ im Gegensatz zu den früheren, „rationalen“ Zahlen.

Eine vierte Erweiterung des Zahlengebietes mufste erfolgen, als man konsequenter Weise auch diejenigen Werte als Zahlen betrachtete, welche sich aus der Erklärung des Radizierens beim Ausziehen einer Quadratwurzel aus einer negativen Zahl ergaben. Man erhielt die imaginären Zahlwerte. Diese unterscheiden sich von allen früheren, den reellen Zahlen schon dadurch, dafs sie sich nicht mehr, wie diese, durch Punkte einer einzigen Graden, der sogenannten Zahlenlinie, versinnlichen lassen, sondern nur durch Punkte, die einer Ebene oder gar dem Raume angehören.

Von den genannten vier Zahlengruppen sind die gebrochenen und irrationalen Zahlen unmöglich, wenn Dinge gezählt werden sollen. Die negativen und imaginären sind überhaupt dann nicht zu gebrauchen, wenn es sich um wirklich vorhandene oder gedachte Dinge handelt. Es bleibt aber trotzdem noch ein weites Gebiet übrig, auf dem sowohl diese als auch die imaginären Zahlen zur Verwendung kommen können. Dafs insbesondere das Imaginäre ein fruchtbares Hilfsmittel ist, von dem man sowohl bei rein algebraischen Aufgaben als auch bei deren Anwendungen auf Geometrie, mathematische Geographie u. s. w. mit Vorteil Gebrauch macht, will ich in der folgenden Abhandlung an einfachen Beispielen zu erläutern versuchen.

Um den Gang der Rechnung und die Lösung der angeführten Konstruktionsaufgaben verstehen zu können, ist es nötig, sich mit den Sätzen in Kap. I, II und IV bekannt zu machen, welche namentlich der Lehre von den Richtungszahlen und der neueren Geometrie entnommen sind. Die Sätze über harmonische Punkte und Strahlen sowie über Pol und Polare am Kreise habe ich als bekannt vorausgesetzt.

Bei den geometrischen Aufgaben, die im V. Kapitel behandelt sind, ist mit Rücksicht auf den beschränkten Raum von einer strengen Durchführung von Analysis, Konstruktion, Beweis und Determination abgesehen worden. Die Lösung ist meist nur kurz angedeutet, dagegen fast stets an einer Figur hinreichend erläutert.

Kapitel I.

Rechnung mit Richtungszahlen.

§ 1.

Mit dem Namen Richtungszahlen bezeichnet man grade Linien, die durch ihre Länge und Richtung die absoluten und relativen Werte von reellen und imaginären Zahlen angeben können. Nehmen wir z. B. eine Grade L (Fig. 1) als Grundrichtung, einen Punkt A als Nullpunkt der Rechnung und eine Strecke AD als Einheit, dann können wir beliebige andere Strecken auf diese Grade, diesen Punkt und diese Einheit beziehen. Die Grade AB z. B. stellt eine Zahl dar, die soviel Einheiten hat, als die absolute Länge von AD in der von AB enthalten ist, und die Richtung, in welcher diese Zahl zu zählen ist, weicht ebensoviel von der Graden L, in welcher die reellen Zahlen gezählt werden sollen, ab, als die Grade AB von der Graden AD. Zieht man in der durch L und AB bestimmten Ebene, welche als Zahlebene dienen soll, eine zweite Grade A_1B_1, welche gleiche Länge mit der Graden AB hat und ihr parallel und gleich gerichtet ist, dann wird diese dieselbe Zahl wie AB selbst bezeichnen.

Gleiche und gleich gerichtete Strecken sind in der Rechnung mit Richtungszahlen als gleichwertig zu betrachten.

Die Lage der Graden AB gegen L kann aber nicht nur durch den Winkel $BAL = \varphi$, sondern durch jeden der Winkel bestimmt werden, der sich ergiebt, wenn man in dem Ausdruck $2\,m\pi + \varphi$ für m beliebige positive oder negative ganze Zahlen setzt; denn der Summand $2\,m\pi$ bedeutet nur eine Umdrehung von 360^0 um den Punkt A.

Eine Umdrehung wird als positiv angenommen, wenn sie der Bewegung des Uhrzeigers entgegengesetzt erfolgt.

Wenn bei der nachstehenden Rechnung mit Richtungszahlen eine Grade mit grofsen Buchstaben geschrieben wird, dann soll die ihr entsprechende Zahl nur ihrer absoluten Gröfse nach, also als reelle in Betracht kommen; wenn dagegen die Endpunkte derselben Graden mit kleinen Buchstaben bezeichnet sind, dann soll sie durch ihre Lage und die alphabetische Ordnung der Buchstaben zugleich auch die Richtung angeben, in welcher die Zahl genommen werden soll.

Ist z. B. in der Figur 1 AB fünf mal so lang als AD, und ist der Winkel $BAL = 30^0$, dann ist $AB = 5$; dagegen $ab = 5 . AD_{30^0} = 5 . 1_{30^0}$. ab bedeutet also eine Länge von 5 Einheiten, die um den Punkt A um 30^0 gedreht ist. ba würde anzeigen, dafs die Zahl 5 um den Winkel $180^0 + 30^0$ oder 210^0 von dem positiven Teil der Grundrichtung abweicht.

§ 2.

Addition und Subtraktion von Richtungszahlen.

Bei der Addition und Subtraktion von Richtungszahlen kann man ohne Angabe einer bestimmten Einheit auskommen, und es genügt, eine Zahl etwa als ab zu bezeichnen.

Richtungszahlen werden addiert, indem man sie ohne Änderung der Richtung so aneinander reiht, dafs der Anfangspunkt der folgenden mit dem Endpunkte der vorangehenden zusammenfällt, und dann den Anfangspunkt der ersten mit dem Endpunkt der letzten verbindet.

In Figur 2 ist $ab + fg = bc = ac$, wenn bc parallel und gleich fg genommen wird; ac ist die Summe von ab und bc. Stellen z. B. die Zahlen ab und bc Kräfte dar, dann ist ac die Resultierende im Parallelogramm der Kräfte, ab und bc sind die Komponenten.

Die Subtraktion als Umkehrung der Addition erfordert, dafs die zweite Zahl ohne Änderung der Richtung mit ihrem Endpunkt an den Endpunkt der ersteren gelegt wird. Die Verbindungslinie der Anfangspunkte giebt die Differenz der beiden Zahlen an.

In Fig. 2 ist $ac - bc = ac + cb = ab$.

§ 3.

Multiplikation und Division.

Nach der für gewöhnliche Zahlen aufgestellten Erklärung der Multiplikation entsteht das Produkt aus dem Multiplikand wie der Multiplikator aus der Einheit. Diese Erklärung pafst auch für Richtungszahlen, wenn man berücksichtigt, dafs der Multiplikator als Richtungszahl nicht nur durch Verlängerung oder Verkürzung, sondern auch durch eine Drehung um einen bestimmten Winkel aus der Einheit entstanden ist. Bei der Multiplikation und Division müssen also Einheit und Grundrichtung angegeben werden.

Zwei Richtungszahlen werden multipliziert, indem man ihre absoluten Werte multipliziert und zugleich ihre Richtungswinkel addiert.

$$a_\alpha \cdot b_\beta = (ab)_{\alpha+\beta} \quad \text{(Fig. 3)}$$

$$\text{z. B. } 3_{30^\circ} \cdot 2_{15^\circ} = 6_{45^\circ}$$

Das Produkt zweier Richtungszahlen bedeutet also wieder eine Linie als Zahl und nicht etwa eine Fläche.

Aus der Erklärung der Multiplikation ergiebt sich die Regel für die entgegengesetzte Operation, nämlich für die Division, wie folgt:

Zwei Richtungszahlen werden dividiert, indem man die absoluten Werte der Zahlen dividiert und die zugehörigen Winkel subtrahiert.

$$\frac{a_\alpha}{b_\beta} = \left(\frac{a}{b}\right)_{\alpha-\beta}$$

In Fig. 3 ist $\frac{6_{45^\circ}}{2_{15^\circ}} = 3_{30^\circ}$ oder $AE_{45^\circ} : AB_{15^\circ} = AC_{30^\circ}$, wenn $AD = 1$.
oder $ae : ab = ac$.

§ 4.

Potenzierung und Radizierung von Richtungszahlen mit ganzen reellen Zahlen.

Die Potenzierung ist eine wiederholte Multiplikation, daher die Regel:

Soll eine Richtungszahl mit einer ganzen reellen Zahl potenziert werden, dann hat man den absoluten Wert derselben mit der gegebenen reellen Zahl zu potenzieren und zugleich den Richtungswinkel mit derselben Zahl zu multiplizieren.

$$(a_\alpha)^m = a^m_{m\alpha}$$

Die Radizierung als umgekehrte Operation sucht die Zahl, welche mit dem Wurzelexponenten m potenziert den Radikanden a_α giebt:

Eine Richtungszahl wird durch eine ganze reelle Zahl radiziert, indem man den absoluten Wert des Radikanden durch die reelle Zahl radiziert und zugleich den Richtungswinkel durch sie dividiert.

$$\sqrt[m]{a_\alpha} = \left(\sqrt[m]{a}\right)_{\frac{\alpha}{m}}.$$

Aus obigen Angaben und aus einer leicht darzustellenden Figur ergiebt sich, daſs die fünf Hauptgesetze für das Rechnen mit reellen Zahlen, welche in den Formeln

$$a_\alpha + b_\beta = b_\beta + a_\alpha;\ (a_\alpha + b_\beta) + c_\gamma = a_\alpha + b_\beta + c_\gamma;\ a_\alpha \,.\, b_\beta = b_\beta \,.\, a_\alpha;$$
$$(a_\alpha \,.\, b_\beta)\, c_\gamma = (a_\alpha \cdot c_\gamma)\, b_\beta;\ (a_\alpha + b_\beta)\, c_\gamma = a_\alpha \cdot c_\gamma + b_\beta \,.\, c_\gamma$$

enthalten sind, auch für die Operationen mit Richtungszahlen ihre Giltigkeit behalten.

§ 5.

Ehe wir dieses Kapitel abschlieſsen, wollen wir noch ein paar andere Symbole für eine Richtungszahl betrachten, da die Kenntnis derselben später von Wichtigkeit ist.

Es bedarf keiner weiteren Erläuterung, daſs man für eine Richtungszahl a_α auch den Ausdruck $a \,.\, 1_\alpha$ schreiben kann, worin a die absolute Gröſse und 1_α einen Faktor bezeichnet, der die Drehung der Einheit und damit auch die Drehung der Zahl a aus der Grundrichtung angiebt. Der Faktor 1_α bildet also das wesentliche Merkmal, wodurch sich eine Richtungszahl von einer reellen Zahl unterscheidet; denn bei der reellen Zahl ist $1_\alpha = 1_{0^\circ} = 1$.

Als spezieller Fall von 1_α ist der Faktor 1_{90° zu betrachten, den man kurz mit i zu bezeichnen pflegt. Der einem absoluten Wert a beigefügte Faktor i bezeichnet also eine Drehung der Zahl a um einen Winkel von 90^0 aus der Grundrichtung; z. B. bedeutet $i^2 = (1_{90^\circ})^2 = 1^2_{2.90^\circ} = 1_{180^\circ}$ eine Drehung um 180^0; $i^{\frac{1}{2}} = 1_{45^\circ}$ eine solche um einen halben Rechten. Allgemein bedeutet also der Faktor i^n eine Drehung des absoluten Wertes um n Rechte, wobei n eine beliebige ganze oder gebrochene Zahl sein kann. Eine mit dem Faktor i verbundene Zahl heiſst „imaginär". Drehen wir die Einheit um den Winkel α aus der Grundrichtung und fällen von dem Endpunkte derselben das Lot q auf diese, dann erhalten wir die Projektion p und $1_\alpha = p + q \,.\, 1_{90} = p + q\,i$ oder, trigonometrisch ausgedrückt: $1\alpha = \cos\alpha + i \sin\alpha$. Daher ist auch $a\ 1\alpha = a_\alpha = a \cos\alpha + a \sin\alpha = p + q\,i$.

Eine Richtungszahl kann also durch ein Binom ausgedrückt werden, indem der eine Summand reell, der andere imaginär ist, und wird in diesem Falle complexe Zahl genannt.

Eine andere Form für die Richtungszahl a_α erhalten wir, wenn wir, wie in Figur 4 geschehen ist, mit der Einheit AD einen Kreis um A schlagen, den Winkel $BAD = \alpha$ und den Bogen $DC = \frac{1}{n} DB = \frac{1}{n}\alpha$ machen. Ist nun das Bogenstück DC sehr klein, dann läfst es sich als eine im Endpunkt D auf der Graden AD stehende Senkrechte betrachten. Man erhält $ac = AD + iDC = 1 + i\frac{\alpha}{n}$.

Da nun $i\frac{\alpha}{n}$ sehr klein ist, so ist, wie im folgenden Kapitel nachgewiesen werden wird, log. nat. $\left(1 + i\frac{\alpha}{n}\right) = i\frac{\alpha}{n}$ (siehe Kapitel II § 1) oder log. nat. $ac = i\frac{\alpha}{n}$, oder log. nat. $1_{\frac{\alpha}{n}} = i\frac{\alpha}{n}$; mithin n log. nat. $1_{\frac{\alpha}{n}} = i\alpha$, log. nat. $\left(1_{\frac{\alpha}{n}}\right)^n = i\alpha$, log. nat. $1_\alpha = i\alpha$, folglich $1_\alpha = e^{i\alpha}$, worin e die Basis des natürlichen Logarithmensystems bezeichnet. Daher auch $a . 1_\alpha = a . e^{i\alpha}$.

α bedeutet hierin die Länge des dem Centrumwinkel α entsprechenden Bogens in einem Kreise vom Radius $r = 1$.

Eine jede Zahl der Zahlenebene, sie mag reell, rein imaginär oder komplex sein, läfst sich also durch jedes der folgenden Symbole unzweideutig darstellen:

$$\underline{a_\alpha \text{ oder } a . 1_\alpha,\ a i^n,\ a e^{i\alpha},\ a (\cos\alpha + i \sin\alpha),\ p + q i.}$$

In Fig. 1 ist $AD = 1, \alpha = \varphi = 30^0$ und $ab = 5_{30^0} = 5 . 1_{30^0} = 5 . i^{\frac{\pi}{3}} = AE^{i\frac{11}{21}}$, wenn wir $\pi = \frac{22}{7}$ annehmen, $= 5(\cos 30^0 + i \sin 30^0) = \frac{5}{2}\sqrt{3} + \frac{5}{2} i$.

Kapitel II.

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, dafs für einen sehr grofsen Wert von n log. nat. $\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ und dafs der Inhalt des Sektors einer Hyperbel von der Gleichung: $x^2 - y^2 = 1$, gleich $\frac{1}{2}$ log. nat. $(x + y)$ ist.

§ 1.

Nach der Erklärung des Logarithmus ist $g^x = y$, wenn $\overset{g}{\text{log.}}\ y = x$.

Setzt man in diese Gleichung für x der Reihe nach die Glieder einer arithmetischen Progression mit der Differenz $\frac{1}{n}$, dann bilden die zugehörigen Werte von y eine geometrische Reihe mit dem Exponenten $\sqrt[n]{g}$.

$$\text{Für } x = 0,\ \frac{1}{n},\ \frac{2}{n} \dots \frac{m}{n} \text{ erhält man } y = 1,\ \sqrt[n]{g},\ \left(\sqrt[n]{g}\right)^2 \dots \left(\sqrt[n]{g}\right)^m;$$

$$\text{wenn also } x_m = \frac{m}{n} \text{ wird, wird } y_m = \left(\sqrt[n]{g}\right)^m,$$

$$\text{und wenn } x_{m+1} = \frac{m+1}{n} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad y_{m+1} = \left(\sqrt[n]{g}\right)^{m+1},$$

$$\text{"} \quad \text{"} \quad x_{p+1} = \frac{p+1}{n} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad y_{p+1} = \left(\sqrt[n]{g}\right)^{p+1}.$$

Setzen wir nun voraus, x und y seien die rechtwinklichen Koordinaten einer Kurve, dann erhalten wir diese um so genauer, in je mehr Teile wir die als Einheit angenommene Länge teilen, und ganz genau für $n = \infty$.

Die durch $g^x = y$ dargestellte Kurve nennt man die „logarithmische Linie“. Sie besitzt die Eigenschaft, daſs für alle Punkte derselben die Subtangenten, d. h. diejenigen Abschnitte der Abscissenaxe, welche zwischen Tangente und Ordinate liegen, von gleicher Länge sind. Sind z. B. in Figur 5 x_m, y_m und x_p, y_p zwei beliebige und x_{m+1}, y_{m+1} beziehungsweise x_{p+1}, y_{p+1} zwei den ersteren sehr nahe liegende Punkte der logarithmischen Linie LL_1, dann ist $y_m = \left(\sqrt[n]{g}\right)^m$; $y_{m+1} = \left(\sqrt[n]{g}\right)^{m+1}$;

$$\text{daher ist } y_{m+1} : y_m = \sqrt[n]{g} \text{ und entsprechend } y_{p+1} : y_p = \sqrt[n]{g}$$

$$\text{folglich } y_{m+1} : y_m = y_{p+1} : y_p \text{ und } \frac{y_m}{y_{m+1} - y_m} = \frac{y_p}{y_{p+1} - y_p}.$$

Da nun die Ordinaten y_{m+1} und y_m ebenso wie y_{p+1} und y_p sehr nahe zusammen liegen sollen, so werden die zwischen den beiden genannten Ordinatenpaaren liegenden Kurvenstückchen als grade Linie, die den in A und A_1 die Abscissenaxen schneidenden Tangenten angehören, betrachtet werden können, und es gelten die Proportionen:

$$y_{m+1} : y_m = AC : BC,$$

$$y_{p+1} : y_p = A_1C_1 : B_1C_1,$$

$$\frac{y_m}{y_{m+1} - y_m} = \frac{BC}{AC - BC} = \frac{BC}{AB},$$

$$\frac{y_p}{y_{p+1} - y_p} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1 - B_1C_1} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}.$$

Die Quotienten auf der linken Seite von den Gleichheitszeichen und auſserdem die Dividenden auf der rechten Seite sind gleich, mithin auch die Divisoren AB und A_1B_1, das heiſst: zwei beliebige Subtangenten der logarithmischen Kurve haben gleiche Länge.

Mit dem Werte der Basis g in der logarithmischen Kurve ändert sich die Gestalt der Kurve und die Länge der Subtangente.

Wir können nun aus obigen Gleichungen einen Wert bestimmen, für welchen die Subtangenten $AB = A_1B_1$ etc. $= 1$ werden.

Aus $\frac{AC}{AB} = \frac{y_{m+1}}{y_m}$ folgt $\frac{1+\frac{1}{n}}{1} = \frac{(\sqrt{g})^{m+1}}{(\sqrt[n]{g})^m} = \frac{\sqrt[n]{g}}{1}$,

$$\sqrt[n]{g} = 1 + \frac{1}{n},$$

$$g = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \text{ (für } n = \infty).$$

Entwickeln wir daher $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ nach dem binomischen Lehrsatz und setzen, wegen $n = \infty$, auch $n-1$, $n-2$ etc. $= n$, dann wird $g = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots\ldots =$ $2{,}7182818 = e$.

Die Logarithmen, für welche die Subtangenten gleich Eins werden, sind also die natürlichen.

Durch diesen Wert von g wird die Subtangente für jeden Punkt der Kurve gleich Eins, folglich auch für die Punkte $x_0\, y_0$ und $x_1\, y_1$. Für ein sehr kleines $\frac{1}{n}$ verhält sich aber wieder $y_1 : y_0 = Mx_1 : Mx_0$. Da nun Mx_1 als Subtangente gleich 1 und $x_0\, x_1 = x_1 = \frac{1}{n}$ sein soll, so muſs $Mx_1 = 1 + \frac{1}{n}$ werden, und da y_0 dem Wert $x_0 = o$ entspricht und $= 1$ ist, so erhält man $y_1 = 1 + \frac{1}{n}$. Nun ist $x_1 = \log. \text{ nat. } y_1 = \log. \text{ nat. } \left(1+\frac{1}{n}\right)$ und $x_1 = \frac{1}{n}$, daher $\log. \text{ nat. } \left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$ (für einen sehr groſsen Wert von n).

Aus dieser Formel ergiebt sich auch die Richtigkeit der im vorigen Kapitel benutzten Gleichung:

$$\log. \text{ nat. } \left(1 + i\frac{\alpha}{n}\right) = i\frac{\alpha}{n}.$$

§ 2.

Die Gleichung der gleichseitigen Hyperbel, auf ihren Hauptdurchmesser bezogen, lautet: $x^2 - y^2 = 1$.

Formen wir diese Gleichung für die beiden Asymptoten OL und OL_1 um, indem wir das Koordinatensystem um den Winkel (-45^0) drehen, dann haben wir $x = \xi\,\frac{1}{2}\sqrt{2} + \eta\,\frac{1}{2}\sqrt{2}$ und $y = -\xi\,\frac{1}{2}\sqrt{2} + \eta\,\frac{1}{2}\sqrt{2}$ zu setzen. Da auſserdem $x + y = \eta\sqrt{2}$ und $x - y = \xi\sqrt{2}$ wird, so erhalten wir: $x^2 - y^2 = 2\,\xi\,\eta = 1$. $\xi\,\eta = \frac{1}{2}$ ist also die auf ihre Asymptoten bezogene Gleichung der gleichseitigen Hyperbel.

Nun ist aus der höheren Mathematik bekannt, daſs die natürlichen Logarithmen die asymptotischen Räume der gleichseitigen Hyperbel darstellen. Schneiden wir mit Rücksicht hierauf von O aus auf der Asymptote OL Strecken ab, deren Längen eine geometrische Progression bilden, dann werden die zugehörigen Asymptotenräume die Logarithmen dieser Strecken bilden.

Es sei in Fig. 6 $OE = 1$, $OE_1 = w^1$, $OE_2 = w^2 \ldots$ $OF = w^n$ und $O\mathfrak{E}_1 = \bar{w}^1$, $O\mathfrak{E}_2 = \bar{w}^2 \ldots$ $OG = \bar{w}^r$, dann ist $EE_1 = w - 1$, $E_1E_2 = w^2 - w = w(w-1)$; $E_2E_3 = w^3 - w^2 = w^2(w-1)$, $E\mathfrak{E}_1 = \frac{w-1}{w}$, $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2 = \frac{w-1}{w^2}$, $\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3 = \frac{w-1}{w^3} \ldots\ldots$

Betrachten wir das Flächenstück EDD_1E_1 als Rechteck mit der Grundlinie EE_1 und der Höhe ED, dann nehmen wir seinen Inhalt etwas zu grofs an; betrachten wir es dagegen als Rechteck mit derselben Grundlinie und der Höhe E_1D_1, dann erhalten wir seinen Inhalt zu klein. Allgemein werden wir die Inhalte der Flächenstücke $EDCF$ und $DAGE$ zu grofs angeben, wenn wir dieselben als Summe der kleinen Rechtecke mit den bezüglichen Grundlinien EE_1, E_1E_2, $E_2E_3 - E\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{E}_2\mathfrak{E}_3 \ldots$ und den zu OE, OE_1, $OE_2 \ldots$ $O\mathfrak{E}_1$, $O\mathfrak{E}_2$, d. h. zu 1, w, $w^2 \ldots$ und $\bar{w}^1$, $\bar{w}^2 \ldots$ gehörigen Abscissen als Höhen betrachten. Dagegen werden die Inhalte der erwähnten Flächenstücke zu klein angegeben, wenn wir als Höhen der Grundlinien EE_1, $E_1E_2 \ldots$ $E\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_1\mathfrak{E}_2 \ldots$ die Abscissen zu OE_1, OE_2, $\ldots O\mathfrak{E}_1$, $O\mathfrak{E}_2 \ldots$, d. h. zu w^1, $w^2 \ldots\ldots$ und zu 1, $\bar{w}^1$, $\bar{w}^2 \ldots$ ansehen. Was den ersten Fall betrifft, so werden die zu OE, $OE_1 OE_2 \ldots$, $O\mathfrak{E}_1$, $O\mathfrak{E}_2 \ldots$ gehörigen Abscissen der Reihe nach durch die Gleichung $\xi\eta = \frac{1}{2}$ bestimmt als $\frac{1}{2}, \frac{1}{2w}, \frac{1}{2w^2} \ldots \frac{1}{2w^n}$ und $\frac{w}{2}, \frac{w^2}{2}, \frac{w^3}{2} \ldots$, und die zugehörigen kleinen Rechtecke sind sämtlich $\frac{1}{2}(w-1)$, wobei das obere oder untere Vorzeichen zu setzen ist, je nachdem die Strecken OE_x und $O\mathfrak{E}_x$ gröfser oder kleiner als der Radius 1 des Kreises OB sind; nämlich $EE_1 . ED = (w-1)\frac{1}{2}$, $E_1E_2 . E_1D_1 = \frac{w(w-1)}{2w} = (w-1)\frac{1}{2}$ etc. …; auch ist $E\mathfrak{E}_1 \cdot ED_1 = (1 - \bar{w}^1)\frac{1}{2\bar{w}^1} = \left(1 - \frac{1}{w}\right) \cdot \frac{w}{2} = (w-1)\frac{1}{2}$.

Das Stück $CDEF$ des Hyperbelsektors, welches zur Ordinate $\eta = w^n$ gehört, ist zwar kleiner als $n \cdot \frac{1}{2}(w-1)$, kommt diesem Wert aber um so näher, je gröfser n angenommen wird.

Die Ordinaten w, w^2, $w^3 \ldots w^n$ nehmen in geometrischer Progression zu, während die zugehörigen Rechtecke $\frac{1}{2}(w-1)$, $2 . \frac{1}{2}(w-1)$, $3 . \frac{1}{2}(w-1)$ … $n . \frac{1}{2}(w-1)$ in arithmetischer Progression wachsen. Die Ordinaten verhalten sich zu den zugehörigen kleinen Rechtecken wie die Logarithmanden zu den Logarithmen in Bezug auf eine noch zu bestimmende Basis g.

Setzen wir $\overset{g}{\log}.\, w = \frac{1}{2}(w-1)$, dann ist $\overset{g}{\log}.\, w^n = n \cdot \frac{1}{2}(w-1)$ und $g^{n \cdot \frac{1}{2}(w-1)} = w^n$ oder für $q^2 = g$, $q^{n(w-1)} = OF$.

$$q^{n\left(\sqrt[n]{\eta_1} - 1\right)} = \eta^1.$$

Diese Formel soll jedem Werte von η entsprechen; sie mufs daher auch für denjenigen giltig sein, welcher den Exponenten von q gleich dem von η macht, das heifst für denjenigen, bei welchem $n\left(\sqrt[n]{\eta_1} - 1\right) = 1$ und $\sqrt[n]{\eta_1} = 1 + \frac{1}{n}$, $\eta_1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ist.

Die Basis q ist also die des natürlichen Logarithmensystems.

Kehren wir jetzt zu der ursprünglichen Formel zurück und setzen für g den gefundenen Wert e^2 ein, dann erhalten wir $e^{n(w-1)} = w^n$, $n(w-1) = \log.\ \text{nat.}\ w^n$, $\frac{n}{2}(w-1) = \frac{1}{2}\log.\ w^n = \frac{1}{2}\log.\ \text{nat.}\ \eta$ und Fläche $CDEF = \frac{1}{2}\log.\ \text{nat.}\ \eta$.

Im zweiten der oben erwähnten beiden Fälle werden die kleinen Rechtecke ebenfalls einander gleich und zwar:

$$EE_1 \,.\, E_1D_1 = \tfrac{1}{2}\frac{(w-1)}{w},\ E_1E_2 \,.\, E_2D_2 = w(w-1)\frac{1}{2w^2} = \tfrac{1}{2}\frac{w-1}{w}\ldots;$$

$$\text{daher } \overset{g}{\log}.\ w^n = \frac{n(w-1)}{2w},\ g^{\frac{n(w-1)}{2w}} = w^n,$$

$$q^{\frac{n(w-1)}{w}} = w^n,\quad q^{\frac{n\left(\sqrt[n]{\eta_1}-1\right)}{\sqrt[n]{\eta_1}}} = \eta_1,\quad n\frac{\left(\sqrt[n]{\eta_1}-1\right)}{\sqrt[n]{\eta_1}} = 1,$$

$$\sqrt[n]{\eta_1} = \frac{n}{n-1} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots.$$

oder, mit Rücksicht auf den grofsen Wert von n: $\sqrt[n]{\eta_1} = 1 + \frac{1}{n}$; daher auch hier $\eta_1 = e$ und Flächenstück $CDEF = \frac{1}{2}\log.\ \text{nat.}\ \eta$.

Zu dem Hyperbelsektor OAC gehört noch das Flächenstück EDAG, dessen kleinen Rechtecke sich in entgegengesetzter Richtung als die oben betrachteten aneinander reihen. Ihre Werte müssen daher negativ erscheinen. Es ist nämlich

$$\log.\ ED = \log.\ 1 = 0,$$

$$\log.\ O\mathfrak{E}_1 = -\frac{w-1}{2} = -\log.\ w \text{ u. s. w.};$$

daher ist die Fläche $EDAG = -\frac{1}{2}\log.\ \text{nat.}\ OG$ und, weil $\triangle OGA$ rechtwinklig und gleichschenklig ist, $EDAG = \frac{1}{2}\log.\ \text{nat.}\ \frac{1}{2}\sqrt{2}$, und endlich Sektor $OAC = OAG + CAGF - FCO = CAGF = \frac{1}{2}\log.\ \text{nat.}\ \eta - \frac{1}{2}\log.\ \text{nat.}\ \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{2}\log.\ \text{nat.}\ \frac{\eta}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\log.\ \text{nat.}\ \eta\sqrt{2}$.

Führen wir schliefslich das ursprüngliche Coordinatensystem wieder ein, dann erhalten wir: Sektor $OAC = \frac{1}{2}\log.\ \text{nat.}\ (x+y)$.

Kapitel III.

Anwendung der Rechnung mit Richtungszahlen.

§ 1.

Anzahl der reellen und imaginären Wurzeln eines Wurzelausdrucks.

Sämtliche Wurzelwerte von $\sqrt[m]{a}$ sind in dem Symbol $\sqrt[m]{a_\alpha}$ enthalten, denn dieses geht für den speziellen Wert: $\alpha = o$, in den ersten Ausdruck über. Nun ist aber $\sqrt[m]{a_\alpha} = \sqrt[m]{a_{\alpha+2n\pi}} = \sqrt[m]{a} \cdot 1_{\frac{\alpha+2n\pi}{m}}$.

$\sqrt[m]{a}$ giebt nur den absoluten Wert des Ausdrucks an und ist deshalb constant. Die Anzahl der Wurzeln hängt demnach nur von dem Drehungsfaktor $1^{\frac{\alpha + 2n\pi}{m}}$ und dieser wieder von dem Winkel $\frac{\alpha + 2n\pi}{m} = \frac{2n\pi}{m} + \frac{2n\pi}{m}$ ab, worin $\frac{2n\pi}{m}$ veränderlich ist, da n jede ganze positive oder negative reelle Zahl bedeuten kann.

Lassen wir n von Null bis + m zunehmen, dann erhalten wir m verschiedene Werte für den Richtungsfaktor, also auch für $\sqrt[m]{a_\alpha}$.

Wird n gröſser als m, z. B. = m + 1, dann wird $\frac{2n\pi}{m} = \frac{2m\pi + 2\pi}{m} = 2\pi + \frac{2\pi}{m}$. Die Lage der Zahl gegen die Grundrichtung ist also dieselbe wie für die Drehung $\frac{2\pi}{m}$. Für $n = m + 2$ erhalten wir dieselbe Lage wie für $n = 2$ u. s. w.

Die speziellen Werte von n, welche über m hinausgehen, liefern also keine neuen Wurzelwerte.

Nehmen wir n negativ an, dann erfolgt die Drehung aus der Grundrichtung in der entgegengesetzten Ordnung und $-\frac{2n\pi}{m}$ ist $2\pi - \frac{2n\pi}{m} = \frac{2(m-n)\pi}{m}$, ein oben schon angeführter Wert.

Die Anzahl der Wurzeln von $\sqrt[m]{a}$ wird also durch den Exponenten m angegeben.

Soll $\sqrt[m]{a}\ 1^{\frac{\alpha + 2n\pi}{m}}$ reell werden, dann muſs die zugehörige Zahl auf der Grundrichtung liegen, und $\frac{\alpha + 2n\pi}{m}$ muſs gleich Null oder gleich π sein. Dies ist aber nur möglich, wenn $\frac{\alpha + 2n\pi}{m}$ ein Vielfaches von π, etwa $p\pi$ ist. Dieser Fall tritt ein, wenn α gleich Null oder ebenfalls ein Vielfaches von π wird.

Soll also eine Wurzel einen reellen Wert haben, dann muſs der Radicand a_α selbst eine reelle Zahl, entweder gleich + a oder gleich — a sein.

Nehmen wir an, a sei positiv und n eine ungrade Zahl, dann ist $\alpha = o$ und $\sqrt[m]{a_{o + 2n\pi}} = \sqrt[m]{a} \cdot 1^{\frac{o + 2n\pi}{m}} = \sqrt[m]{a} \cdot 1^{\frac{2n\pi}{m}}$.

Der die Zahl der Wurzeln bestimmende Quotient $\frac{2n}{m}$ wird nur dann eine ganze Zahl, wenn $n = o$, $n = \frac{1}{2}m$ oder $n = m$ ist. Sowohl für $n = o$ als für $n = m$ wird $\sqrt[m]{a}$ auf den positiven Arm der Grundrichtung fallen und ein und denselben Wert liefern; dagegen wird für $n = \frac{1}{2}m$ der Quotient $\frac{2n\pi}{m} = \pi$, und die zugehörige Wurzel liefert einen zweiten, negativen Wert.

Ist a positiv, also $\alpha = 2n\pi$, und ist m ungrad, dann kann $\frac{2n}{m}$ nur dann eine ganze Zahl werden, wenn $n = o$ oder gleich m wird. In beiden Fällen erhält man nur ein und dieselbe auf dem positiven Teil der Grundrichtung liegende Wurzel.

Ist a_α negativ, also $\alpha = (1 + 2n)\pi$, dann wird man für ein ungerades m nur dann einen reellen Wurzelwert erhalten, wenn $\frac{1+2n}{m}$ gleich Null oder gleich Eins wird.

Der Null kann der Quotient für keinen ganzzahligen Wert von n gleichkommen, er kann also nur nach der Einheit gleich sein.

Dieser Fall tritt ein für $n = \frac{m-1}{2}$.

Man erhält $\sqrt[m]{a\,\frac{(1+2n)\pi}{m}} = \sqrt[m]{a\,1\pi} = -\sqrt[m]{a}$.

Ist a_α negativ und m grad, dann kann $\frac{1+2n}{m}$ keine ganze Zahl mehr darstellen, da der Zähler des Quotienten für jeden ganzzahligen Wert von n ungrad wird, während der Nenner grad ist. Es giebt also in diesem Falle überhaupt keinen reellen Wert für den Wurzelausdruck.

Fassen wir die in diesem Paragraphen gewonnenen Resultate zusammen, dann können wir sagen:

Ein in der einfachsten Form geschriebener Wurzelausdruck enthält immer genau so viel Wurzelwerte als der Exponent Einheiten hat.

Unter diesen sind zwei Werte reell, wenn der Radicand eine positive und der Exponent eine grade reelle Zahl ist. Nur ein Wert ist reell, wenn der Radicand eine positive oder negative und der Exponent eine ungrade reelle Zahl ist. Kein Wurzelwert ist reell, wenn der Radicand imaginär ist, oder wenn der Radicand eine negative und der Exponent eine grade Zahl ist.

Beispiele: $\sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8.1_{(0+2n\pi)}} = 2.1_{\frac{2n\pi}{3}}$.

Setzt man in dieser Formel für n der Reihe nach O, 1, 2... und nimmt man in Figur 7 OC_4 als Einheit an, dann ist

$$\sqrt[3]{8} = 2 = OA_1,\ \sqrt[3]{8} = 2.1_{\frac{2}{3}\pi} = oa_2;\ \sqrt[3]{8} = 2.1_{\frac{4}{3}\pi} = oa_3.$$

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8.1_{(1+2n)\pi}} = 2.1^{\frac{1+2n}{3}}\pi \text{ und für } n = 0,\ 1,\ 2.$$

$$\sqrt[3]{-8} = 2.1_{\frac{\pi}{3}} = o\mathfrak{a}_1,\ \sqrt[3]{-8} = -2 = O\mathfrak{A}_2,\qquad \sqrt[3]{-8} = 2.1_{\frac{5}{3}\pi} = o\mathfrak{a}_3.$$

$$\sqrt{-9} = \sqrt{9.1_{(1+2n)\pi}} = 3\ 1^{\frac{(1+2n)\pi}{2}} \text{ und für } n = 0,\ 1,\ 2\ldots:$$

$$\sqrt{-9} = 3.1_{\frac{\pi}{2}} = 3.1_{90^0} = ob_1;\qquad \sqrt{-9} = 3.1_{\frac{3}{2}\pi} = 3.1_{270^0} = ob_2;$$

$$\sqrt{-9} = 3.1_{\frac{5}{2}\pi} = 3.1_{90^0} \text{ u. s. w.}$$

§ 2.

Die Potenzen von i mit ganzzahligen Exponenten.

In Kap. I § 5 haben wir den Wert 1_{90^0} mit i bezeichnet. Daraus ergiebt sich sogleich

$$i^2 = (1_{90^0})^2 = (1_{\frac{\pi}{2}})^2 = 1_{\frac{2\pi}{2}} = 1_{\pi} = 1_{180^0} = -1.$$

Nun ist aber auch $(\sqrt{-1})^2 = -1$, mithin mufs $i^2 = (\sqrt{-1})^2$ und $i = \sqrt{-1}$ sein. Das Quadrat von i kann demnach nur als gleichwertig mit -1 und nicht mit ± 1 angenommen werden, wie es bei nachstehender Umformung zu sein scheint:

$$\sqrt{-1}^2 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = \pm 1.$$

$\sqrt{-1}$ bedeutet die Zahl der Zahlenebene, zu der man kommt, wenn man die Einheit um $\pm 90^0$ aus der Grundrichtung dreht.

$\sqrt{-1}^2$ bedeutet weiterhin die Zahl, zu der man durch eine weitere gleiche Drehung in demselben Sinne gelangt. Dies ist aber nur die Zahl -1.

Ferner ist $i^3 = (1_{\frac{\pi}{2}})^3 = 1_{\frac{3}{2}\pi} = -i = -\sqrt{-1}$.

$$i^4 = (1_{\frac{\pi}{2}})^4 = 1_{2\pi} = +1.$$

$$i^{4n} = [(1_{\frac{\pi}{2}})^4]^n = (+1)^n = +1.$$

$$i^{4n+1} = i^{4n} \cdot i = +i.$$

$$i^{4n+2} = i^{4n} \cdot i^2 = i^2 = -1.$$

$$i^{4n+3} = i^{4n} \cdot i^3 = -\sqrt{-1}.$$

Alle folgenden Potenzen von i liefern wieder dieselben Werte wie die angeführten.

Die ganzzahligen Potenzen von i können also nur vier verschiedene Werte erhalten, nämlich $oc_1 = +i$, $oc_2 = i^2$, $oc_3 = -i$, $OC_4 = +1$ (Fig. 7).

§ 3.

Complexe Zahlen.

Sollen zwei complexe Zahlen $p + qi = ob$ und $p_1 + q_1 i = o_1 b_1$ gleich sein, dann müssen ob und $o_1 b_1$, mithin auch ihre Projectionen p und p_1 auf die Grundrichtung gleich sein. Dann sind aber auch die aus ob, p, q und $o_1 b_1$, p_1, q_1 gebildeten rechtwinkligen Dreiecke congruent. Es ist also auch $q = q_1$.

Zwei complexe Zahlen sind nur dann gleich, wenn sowohl ihre reellen Bestandteile p und p_1, als auch ihre imaginären q und q_1 übereinstimmen.

Daraus ergiebt sich die Regel für die Addition und Subtraction von complexen Zahlen.

Zwei complexe Zahlen werden addiert oder subtrahiert, indem man sowohl die reellen als auch die imaginären Bestandteile addiert oder subtrahiert:

$$p + qi \pm (p_1 + q_1 i) = p \pm p_1 + i(q \pm q_1).$$

Zwei complexe Zahlen von der Form $p + qi$ und $p - qi$ werden als „conjugierte" bezeichnet.

Ist in Fig. 8: $ab = p + qi$ und $ab_1 = p - qi$, dann ist

$$ab + ab_1 = p + qi + p - qi = 2p = ac,$$
$$ab - ab_1 = p + qi - (p - qi) = 2qi = ac_1,$$
$$ab . a_1 b_1 = (p + qi)(p - qi) = p^2 - i^2 q^2 = p^2 + q^2 = \overline{AB}^2 \text{ oder } \overline{AB_1}^2.$$

Das heifst: Sowohl die Summe als das Produkt zweier conjugierter Zahlen sind reell; dagegen ist ihre Differenz imaginär.

Die Wurzel aus einer complexen Zahl zerlegt man auf algebraischem Wege in eine Summe mit einem reellen und einem imaginären Summanden, indem man $\sqrt{p + qi} = x + i\sqrt{y}$ setzt, beide Seiten der Gleichung quadriert und die reellen und imaginären Bestandteile der neuen Gleichung einzeln einander gleich setzt. Man erhält $x^2 + y^2 = p$ und $2xy = q$ und daraus die Wurzeln

$$x = \sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + q^2} + p}{2}}; \quad y = \sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + q^2} - p}{2}};$$

$$\text{daher } \sqrt{p + qi} = \sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + q^2} + p}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + q^2} - p}{2}}.$$

Mit Hilfe der Richtungszahlen gelangt man zu demselben Resultate.

Stellt in Fig. 9 AD die Einheit dar und ist $AB = p$, $BC = q$ und $AC = r = \sqrt{p^2 + q^2}$, $CAB = \alpha$, dann ist $\sqrt{p + qi} = \sqrt{r\alpha} = \sqrt{AC_1}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{AD \cdot AC_1}\,\frac{\alpha}{2} = AE_1 \frac{\alpha}{2} = ae = AF + iFE$. Wenn wir daher $AF = p_1$ und $FE = q_1$ setzen, wird $\sqrt{p + qi} = p_1 + q_1 i$. Nun ist $p_1 = AE \cos.\frac{\alpha}{2} = \sqrt{r}\cos.\frac{\alpha}{2}$

$$\text{und } q_1 = AE \sin.\frac{\alpha}{2} = \sqrt{r}\sin.\frac{\alpha}{2},$$

$$p_1^2 - p_1^2 = r(\cos.^2\frac{\alpha}{2} - \sin.^2\frac{\alpha}{2}) = r(2\cos.^2\frac{\alpha}{2} - 1) = r\cos.\alpha = p,$$

$$p_1^2 + q_1^2 = r(\cos.^2\frac{\alpha}{2} + \sin.^2\frac{\alpha}{2}) = r,$$

$$p_1 = \sqrt{\frac{r + p}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + q^2} + p}{2}},$$

$$q_1 = \frac{\sqrt{r - p}}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + q^2} - p}{2}}.$$

$$\text{Mithin } \sqrt{p + qi} = p_1 + q_1 i = \sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + q^2} + p}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{p^2 + q^2} - p}{2}}.$$

Die Figur 9 entspricht dem beigefügten Zahlenbeispiel:

$$\sqrt{0{,}7 + i.2{,}2} = 1{,}22 + i.0{,}89.$$

$$AC = \sqrt{0{,}7 + i2{,}2} \text{ cm}, \; AF = 1{,}22 \text{ cm}, \; FE = 0{,}89 \text{ cm}.$$

§ 4.

Lösung einer Bewegungsaufgabe mit Hülfe der Richtungszahlen.

A geht von M nach N, B und C gehen gleichzeitig von den Punkten M und N nach P. Die drei Wanderer erreichen zu gleicher Zeit ihr Ziel, wenn sich der Weg des A zu dem des B wie der Weg des B zu dem des C verhält. Wie grofs sind die Entfernungen MP und NP, wenn $MN = a$ ist?

Auflösung: Bezeichnen wir die Entfernung MP mit x und NP mit y, dann kann der Punkt P nicht auf der Verlängerung von MN liegen; denn wenn $x > a$ ist, mufs auch $y > x$ sein, was nicht möglich ist. Der Punkt P kann aber auch nicht zwischen M und N liegen; denn in diesem Falle würde y und folglich auch $\frac{x}{y}$ negativ, während $\frac{a}{x}$ positiv ist. P kann sich daher nur seitwärts von MN befinden, und wir müssen die Wege von A, B und C durch Richtungszahlen ausdrücken, etwa als x_α und y_β; wobei wir die Strecke $MN = a_0$ als Grundrichtung annehmen. Nach Voraussetzung ist nun

$$\frac{a_0}{x_\alpha} = \frac{x_\alpha}{y_\beta} \text{ oder } \left(\frac{a}{x}\right)_{0-\alpha} = \left(\frac{x}{y}\right)_{\alpha-\beta}.$$

Die durch beide Seiten dieser Gleichung angegebenen Richtungszahlen können aber nur gleich sein, wenn sie parallel sind, d. h. wenn $0 - \alpha = \alpha - \beta$ oder $2\alpha = \beta$, $\alpha = \frac{\beta}{2}$ ist.

β ist Aufsenwinkel des Dreiecks MPN und doppelt so grofs, als der von ihm getrennte Innenwinkel; folglich ist Dreieck MNP gleichschenklig und $MN = NP$.

Aus $\frac{MN}{MP} = \frac{MP}{NP}$ folgt aber $MP^2 = MN^2$ oder $MP = MN$; mithin mufs das $\triangle$ MPO gleichseitig sein. Da α und β auch negativ genommen werden können, so entspricht dem auf der einen Seite von MN liegenden Punkte P noch ein solcher auf der andern Seite. Als Winkel des gleichseitigen Dreiecks ist $\alpha = 60^0$, daher $mp = \frac{a}{2}(1 + i\sqrt{3})$ und $np = \frac{a}{2}(-1 + i\sqrt{3})$, $mp_1 = \frac{a}{2}(1 - i\sqrt{3})$ und $np_1 = \frac{a}{2}(-1 - i\sqrt{3})$.

Fassen wir blofs die absoluten Längen der Wege der Wanderer ins Auge, dann kann P zwischen M und N fallen, und $x + y$ wird gleich a oder $y = a - x$. Daher erhalten wir die Gleichung

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{a - x} \text{ oder } x = \frac{a}{2}(-1 \pm \sqrt{5}),$$

worin nur das obere Zeichen brauchbar ist, da nur für diesen Wert P zwischen M und N fällt. Der Punkt P teilt die Linie MN nach dem goldenen Schnitte.

Nimmt man an, dafs P auf der Verlängerung von NM über M hinaus liegt, dann mufs man den Ansatz der letzten Gleichung umformen in $\frac{a}{x} = \frac{x}{x-a}$ und erhält $x = \frac{a}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$ zum Zeichen, dass es in dieser Richtung keinen Punkt P giebt.

§ 5.

Quadratische Gleichung mit imaginären Wurzeln.

Aus der Gleichung $x^2 + px + q = o$ erhält man $x = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Die Werte von x_1 und x_2 werden reell, wenn $p^2 \geqq 4q$ ist; ist dagegen $p^2 < 4q$, dann werden sie imaginär, und man erhält $x = \frac{-p \pm i\sqrt{4q - p^2}}{2}$.

Diese Werte lassen sich als complexe Zahlen durch Richtungszahlen graphisch darstellen, wie aus der Behandlung des folgenden Beispiels ersichtlich wird.

$$x^2 - 4x + 7 = o;\ x = 2 \pm i\sqrt{3}.$$

Nehmen wir in Figur 44: $AB = 2$ cm und $BC = AL = 1$ cm, $BD = 3$ cm, $BE_1 \perp AB$ und $= BE$, dann ist $BE = \sqrt{3}$ und $ae_1 = 2 + i\sqrt{3}$, $ae_2 = 2 - i\sqrt{3}$.

Zur Probe für die Richtigkeit der Darstellung machen wir $AG = AE_1$ und $GF \parallel LE_1$ und drehen AF um den Winkel α bis es in die Lage AF_1 kommt, dann ist $\frac{AF}{AG} = \frac{AE_1}{AL}$ oder $\frac{AF}{AE_1} = \frac{AE_1}{1}$; mithin $AF_1 = AF = AE_1^2$ und $AF_{1\ 2\alpha} = (AE_{1\ \alpha})^2 = x_1^2$.

Machen wir F_1K parallel und gleich $4AE_1$, dann ist $F_1K = 4x_1$ und $AK = x_1^2 - 4x_1 = -7$; folgl. $x_1^2 - 4x_1 + 7 = o$.

Verfährt man mit x_2 in derselben Weise, wie mit x_1, dann kommt man zu demselben Resultate.

§ 6.

Der Moivre'sche Lehrsatz.

Nach Kap. I § 5 ist $1_\alpha = \cos.\alpha + i\sin.\alpha$,

daher $\left(1_\alpha\right)^n = (\cos.\alpha + i\sin.\alpha)^n$,

$\left(1_\alpha\right)^n = 1_{n\alpha}$ (nach Kap. I § 4)

und $1_{n\alpha} = \cos.n\alpha + i\sin.n\alpha$ (wieder nach § 5),

folglich ist $(\cos.\alpha + i\sin.\alpha)^n = \cos.n\alpha + i\sin.n\alpha$.

§ 7.

Die Exponentialfunktion des sinus und cosinus.

Stellt in Fig. 8 $ad = AD = AB$ die Längeneinheit dar, und ist $OB = OB_1$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle B_1AD = -\alpha$, $bc \parallel ab_1$, dann ist auch $bc = ab_1$ und:

$$ab + bc = ab + ab_1 = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} \text{ (nach Kap. I § 5)};$$

$$\text{mithin } 2ao = e^{i\alpha} + e_1^{-i\alpha},$$

$$2ao = \frac{2AO}{AB} = 2\cos.\alpha = e^{i\alpha} + e^{-i\alpha},$$

$$\cos.\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}.$$

Ferner ist $ab + bo = ao$

$$ab - ao = -bo = ob,$$

$$ab_1 - ao = -b_1o = ob_1;$$

folglich $ab - ab_1 = ob - ob_1 = ob + b_1o = 2ob = 2iOB = 2i\frac{OB}{AB} = 2i\sin.\alpha$,

$$e^{i\alpha} - e^{-i\alpha} = 2i\sin.\alpha$$

$$\sin.\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

§ 8.

Die Gleichung des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel auf imaginäre Coordinaten bezogen.

Die Lage eines beliebigen Punktes M der Ebene (Fig. 10) läſst sich durch zwei complexe Zahlen angeben, die durch ihre absolute Länge r und ϱ und ihren Richtungswinkel α und β gegen 2 rechtwinklige Coordinaten OX und OY bekannt sind.

Es ist nämlich $om = op + pm = op + oq$,

$$op = r(\cos.\alpha + i\sin.\alpha)$$

und $oq = \varrho(\cos.\beta + i\sin.\beta)$.

Nehmen wir in den Gleichungen des Kreises und der gleichseitigen Hyperbel: $x^2 + y^2 = 1$ und $x^2 - y^2 = 1$, statt der reellen Coordinaten x und y die complexen Coordinaten $r(\cos.\alpha + i\sin.\alpha)$ und $\varrho(\cos.\beta + i\sin.\beta)$ an, dann schlieſsen diese neuen Gleichungen die obigen als specielle Fälle in sich ein.

Wir erhalten mit Benutzung der Moivre'schen Formel in § 6:

$$x^2 \pm y^2 = r^2(\cos.2\alpha + i\sin.2\alpha) \pm \varrho^2(\cos.2\beta + i\sin.2\beta) = 1$$

oder nach Trennung der reellen und imaginären Bestandteile der Gleichung:

$$\text{I. } r^2\cos.2\alpha \pm \varrho^2\cos.2\beta = 1,$$

$$\text{II. } r^2\sin.2\alpha \pm \varrho^2\sin.2\beta = 0.$$

Aus I. folgt für den Kreis: $-\varrho^2+\varrho^2\cos.^2\beta=1-r^2\cos.2\alpha-\varrho^2$,
$$-\varrho^2(1-\cos.2\beta)=1-r^2\cos.2\alpha-\varrho^2,$$
$$-2\varrho^2\sin.^2\beta=1-r^2\cos.2\alpha-\varrho^2.$$

Aus II. folgt: $-2\varrho^2\sin.\beta\cos.\beta=r^2\sin.2\alpha$;

daher durch Division für den Kreis: $\tang.\beta=\frac{1-r^2\cos.2\alpha-\varrho^2}{r^2\sin.2\alpha}$.

In entsprechender Weise erhält man für die Hyperbel:
$$\tang.\beta=\frac{1-r^2\cos.2\alpha+\varrho^2}{r^2\sin.2\alpha}.$$

Für beide Curven ergiebt sich aus
$$\text{I. } \varrho^4\cos.^2 2\beta=1-2r^2\cos.2\alpha+r^4\cos.^2 2\alpha.$$
$$\text{II. } \varrho^4\sin.^2 2\beta=r^4\sin.^2 2\alpha.$$
$$\varrho^4=1-2r^2\cos.2\alpha+r^4,$$
$$\varrho^2=\sqrt{(1+r^2+2r\cos.\alpha)(1+r^2-2r\cos.\alpha)}.$$

Nun ist in Figur 11, in welcher die Einheit durch OA angegeben wird, und in der P einen beliebigen Punkt in der Entfernung r von O bedeutet,
$$OA_1=-1 \text{ und } \sqrt{1+r^2+2r\cos.\alpha}=PA_1,$$
$$\sqrt{1+r^2-2r\cos.\alpha}=PA;$$
$$\text{folglich } \varrho^2=PA.PA_1;$$
ϱ ist also das geometrische Mittel zwischen PA und PA_1.

Bezeichnet C den Schnittpunkt von ϱ mit der x-Achse, dann ist
$$OC=OP_1-CP_1=OP_1-PP_1\tang.\beta=r\cos.\alpha-r\sin.\alpha\tang.\beta.$$
$$=r\cos.\alpha+\frac{1-r^2\cos.2\alpha-\varrho^2}{2r\cos.\alpha}=\frac{1+r^2-\varrho^2}{2\cos.\alpha}$$
$$A_1C=1+\frac{1+r^2-\varrho^2}{2r\cos.\alpha}=\frac{1+r^2+2r\cos.\alpha-\varrho^2}{2r\cos.\alpha}$$
$$=\frac{\overline{PA_1}^2-\varrho^2}{2r\cos.\alpha}=\frac{PA_1^2-PA_1\cdot PA}{2r\cos.\alpha}=\frac{PA_1(PA_1-PA)}{2r\cos.\alpha}$$

und entsprechend $AC=1-\frac{1+r^2-\varrho^2}{2r\cos.\alpha}=\frac{PA(PA_1-PA)}{2r\cos.\alpha}$;

folglich $\frac{A_1C}{AC}=\frac{PA_1}{PA}$; der Winkel AP_1A wird also durch ϱ halbiert.

Bezeichnen wir den Schnittpunkt von ϱ der Hyperbel mit der Abscissenachse durch C_1, dann erhalten wir $OC_1=OP_1+P_1C_1=r\cos.\alpha+r\sin.\alpha\tang.\beta=\frac{1+r^2+\varrho^2}{2r\cos.\alpha}$,

$$A_1C_1=\frac{1+r^2+\varrho^2}{2r\cos.\alpha}+1=\frac{1+2r\cos.\alpha+r^2+\varrho^2}{2r\cos.\alpha}=\frac{PA_1+PA.PA_1}{2r\cos.\alpha}=\frac{PA_1(PA_1+PA)}{2r\cos.\alpha}$$

und $AC_1=\frac{1+r^2+\varrho^2}{2r\cos.\alpha}-1=\frac{PA(PA_1+PA)}{2r\cos.\alpha}$; folglich $\frac{A_1C_1}{AC_1}=\frac{PA_1}{PA}$,

PC_1 halbiert also den Nebenwinkel von A_1PA, und PC und PC_1 stehen aufeinander senkrecht. PC_1 ist also iPC.

OP ist die complexe Abscisse des Kreises und der Hyperbel. PC ist die zugehörige complexe Ordinate des Kreises und PC_1 die entsprechende Ordinate der Hyperbel.

Die Ordinate der gleichseitigen Hyperbel ist die imaginär genommene Ordinate des Kreises, welche zu derselben Abscisse gehört, und umgekehrt.

Für $\alpha = o$ und $\beta = o$ gehen die imaginären Coordinaten in die reellen der analytischen Geometrie über.

Wird in der Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 = 1$, $x < 1$, dann fällt der Punkt P, welcher Endpunkt der Abscisse und Anfangspunkt der Ordinaten ist, zwischen A_1 und A. Die Endpunkte M_1 und M_2 der Ordinaten liegen auf der Peripherie des Kreises; die Ordinaten PM_1 und PM_2 stehen senkrecht auf dem Durchmesser AA_1, halbieren also in dieser Weise den Winkel APA_1 und sind ihrer absoluten Länge nach die mittleren Proportionalen zwischen AP und A_1P. Wird aber $x > 1$, dann fällt P in die Verlängerung von A_1A und der Punkt M_1 liegt zwischen A und A_1, der Punkt M_2 aufserhalb A_1A. Auch hier wird der Winkel A_1PA_1, welcher $= o$ ist, durch die Graden PM_1 und PM_2, welche mit den Schenkeln zusammenfallen, halbiert.

Bei der Gleichung der Hyperbel $x^2 - y^2 = 1$ verhält es sich gerade umgekehrt. So lange $x < 1$ ist, liegen M_3 und M_4 auf der x Achse, für $x > 1$ steht die Ordinate $\perp$ auf derselben und giebt die Punkte der Curve an. Für $x > 1$ erhalten wir also Punkte der Hyberbel, wenn wir die Kreisordinate imaginär nehmen, d. h. senkrecht zur x Achse stellen, und für $x < 1$ erhalten wir Kreispunkte, wenn wir die Hyperbelordinaten mit dem imaginären Faktor i versehen.

Für Abscissen > 1 geben die zughörigen Kreisordinaten, wenn sie imaginär genommen werden, reelle Punkte der gleichs. Hyperbel an, und für Abscissen < 1 geben die Ordinaten einer gleichs. Hyperbel, wenn sie imaginär genommen werden, reelle Kreispunkte an. Wir können daher sagen:

Die gleichseitige Hyperbel ist die imaginäre Curve des Kreises und der Kreis ist die imaginäre Curve der gleichseitigen Hyperbel für ein bestimmtes rechtwinkliges Coordinatensystem.

$x^2 + y^2 = 1$; $x^2 - (iy)^2 = 1$, Kreis und imaginäre gleichseitige Hyperbel,
$x^2 - y^2 = 1$; $x^2 + (iy)^2 = 1$, gleichseitige Hyperbel und imaginärer Kreis.

§ 9.

Unter einem Winkel versteht man die von zwei sich schneidenden graden Linien unvollständig begrenzte Ebene. Die Fläche wächst mit der Abweichung der Schenkel des Winkels und zwar beim Kreis proportional der Gröfse des Bogens der Peripherie. Die Gröfse des Winkels kann aber nur beim Kreis durch den dem Centriwinkel zugehörigen Bogen angegeben werden, dagegen nicht bei der Hyperbel.

Um eine Beziehung zwischen trigonometrischen Funktionen des Kreises und denen der Hyperbel zu erhalten, nehmen wir als „Argument“ der Funktionen nicht den unbegrenzten Winkel, sondern die begrenzte Fläche desselben, den Sektor an.

Für den Kreis gilt die Proportion:

$$\text{Sektor} : \text{Kreis} = \text{Bogen} : \text{Peripherie}.$$

$$\frac{\text{Sektor}}{r^2 \pi} = \frac{\alpha}{2 r \pi}$$

oder, wenn man den Radius des Kreises der Einheit gleich setzt: 2 Sektor $= \alpha$.

Die trigonometrischen Funktionen des Kreises lassen sich demnach auch als Funktionen seines Sektors auffassen. Versteht man unter u den doppelten zum Bogen oder Centriwinkel α gehörigen Sektor des Einheitskreises, dann sind der sinus und cosinus und daher auch alle übrigen Funktionen desselben gleichbedeutend mit den gewöhnlichen sogenannten cyclometrischen Funktionen. Beträgt z. B. der Bogen 45°, dann ist der doppelte Sektor $\frac{r^2 \pi}{4} = \frac{1}{4} \pi$ und sinus $\frac{1}{4} \pi = \sin. 45^0 = \frac{1}{2} \sqrt{2}$.

Die trigonometrischen Funktionen sinus und cosinus lassen sich, wie schon gesagt, nur beim Kreise als Funktionen des halben Bogens des Sektors angeben; bei der Hyperbel mufs man die Funktionen durch den doppelt genommenen Sektor ausdrücken, der dem Winkel angehört, welcher von dem Radiusvektor und dem als x Achse angenommenen Hauptdurchmesser gebildet wird.

Wie man den Inhalt eines solchen Sektors angiebt, ist schon in Kapitel II § 2 gezeigt worden.

Der Radius des Einheitskreises entspricht dem Radiusvektor der gleichseitigen Hyperbel und der Endpunkt B des Nebendurchmessers am Kreise dem Endpunkte der Halbachse der Hyperbel. Man erhält für die Kreis- und Hyperbelfunktion die nachstehenden, aus der Figur 12 ersichtlichen Bezeichnungen, wobei jedoch das sogenannte Argument u des Kreises dem Argument w der Hyperbel nicht gleich zu setzen ist; denn unter u ist der doppelte Sektor M A O und unter w der doppelte Sektor M_1 A O zu verstehen.

Kreis und Kreiscoordinaten:	Hyperbel und Hyperbelcoordinaten:
$\sin. u = MP = y$,	$\text{Sin. } w = M_1 P_1 = y$,
$\cos. u = OP = x$,	$\text{Cosin. } w = OP_1 = y$,
$\text{tang. } u = AT$,	$\text{Tang. } w = AT$,
$\text{cotang. } u = BK$.	$\text{Cotang. } w = BK$.

§ 10.

Beziehungen zwischen den trigonometrischen Kreisfunktionen und den entsprechenden Hyperbelfunktionen.

Für den Kreis — Für die Hyperbel

gelten nachstehende Gleichungen:

Für den Kreis	Für die Hyperbel
$y^2 + y^2 = 1.$	$x^2 - y^2 = 1.$
$\cos. u^2 + \sin. u^2 = 1.$	$\text{Cos. } w^2 - \text{Sin.}^2 w = 1.$
$\text{tang. } u = \frac{\sin. u}{\cos. u}.$	$\text{Tang. } w - \frac{AT}{OA} = \frac{P_1 M_1}{OP_1} = \frac{\text{Sin.} w}{\text{Cos.} w}.$
$\text{tang. } u = \frac{1}{\text{cotang. } u}.$	$\text{Tang. } w = \frac{1}{\text{Cotang. } w}.$

Wie wir oben in Kapitel II § 2 gesehen haben, ist hier $w = \log. \text{nat.} (x + y)$; daher $w = \log. \text{not.} (\text{Cos. } w + \text{Sin. } w)$, oder in Potenzform geschrieben:

$\text{I} \cdot e^{w} = \text{Cos. } w + \text{Sin. } w$. Da nun aber $x^2 - y^2 = 1$ oder $x + y = \frac{1}{x - y}$,

so ist $\log. \text{nat.} (x + y) = - \log. \text{nat.} (x - y)$, mithin auch $w = - \log \text{ nat.} (x - y)$ und $- w = \log. \text{nat.} (x - y)$, folglich auch $\text{II}\, e^{-w} = x - y = \text{Cos. } w - \text{Sin. } w$.

Durch Addition von I und II erhalten wir:

$$\text{Cosinus } w = \frac{e^{w} + e^{-w}}{2}; \text{ mithin auch Cosinus } (i\, w) = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}.$$

$$\text{Sinus } w = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2}; \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{Sinus } (i\, w) = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2}.$$

Nach Kapitel III § 7 ist aber

$$\text{cosinus } w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2}; \text{ mithin auch cosinus } (i\, w) = \frac{e^{w} + e^{-w}}{2}.$$

$$\text{sinus } w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i}; \quad \text{„} \quad \text{„} \quad \text{sinus } (i\, w) = \frac{e^{w} - e^{-w}}{2i}.$$

Daher ist $\text{cosinus } (i\, w) = \text{Cosinus } w$.

$$\text{sinus } (i\, w) = - \frac{1}{i} \text{ Sinus } w = i \text{ Sinus } w$$

und umgekehrt $\text{Cosinus } (i\, w) = \text{cosinus } w$.

$\text{Sinus } (i\, w) = i \text{ sinus } w$.

Dem reellen Kreissektor entspricht also ein imaginärer Hyperbelsektor und einem reellen Hyperbelsektor ein imaginärer Kreissektor.

Nehmen wir z. B. in der Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ für x den Wert $\frac{1}{2}$ an, dann erhalten wir, wenn wir nur das Pluszeichen berücksichtigen,

$$y = \tfrac{1}{2} \sqrt{3} = \sin. 60^0 = \sin \tfrac{\pi}{3} (\text{Sektor});$$

setzen wir dagegen in die Gleichung $x^2 - y^2 = 1$ den Wert $x = \frac{1}{2}$ ein, dann wird $y = \frac{1}{2} i \sqrt{3}$, $i\,w = \log. \text{nat.} (x + y) = \log. \text{nat.} \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{3}\right)$; $e^{iw} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \sqrt{3}$; $- i\,w = \log. \text{nat.} (x - y) = \log. \text{nat.} \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{3}\right)$; $e^{-iw} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \sqrt{3}$;

$$\text{Sinus } (i\, w) = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2} = i \tfrac{1}{2} \sqrt{3} = i \sin. \tfrac{\pi}{3} = i \sin. w.$$

Setzen wir $\alpha = \log. \text{nat.} (x + y)$ und $\beta = \log. \text{nat.} (\xi + \eta)$, dann ist

$\alpha + \beta = \log. \text{nat.} (x \xi + \eta \xi + x \eta + y \eta)$; daher $e^{\alpha + \beta} = x \xi + \eta \xi + x \eta + y \eta$,

$\alpha - \beta = \log. \text{nat.} \frac{x + y}{x - y}$; „ $e^{\alpha - \beta} = \frac{x + y}{x - y}$.

Da nun für die Hyperbel $x = \text{Cosin. } \alpha$, $y = \text{Sin. } \alpha$,

$\xi = \text{Cosin. } \beta$, $\eta = \text{Sin. } \beta$ ist,

so hat man 1) $\text{Cos. } \alpha \cdot \text{Cos. } \beta + \text{Sin. } \alpha \cdot \text{Cos. } \beta + \text{Cos. } \alpha \cdot \text{Sin. } \beta + \text{Sin. } \alpha \cdot \text{Sin. } \beta = e^{\alpha + \beta} = \text{Cos. } (\alpha + \beta) + \text{Sin. } (\alpha + \beta)$ (nach Formel I) und 2) $\frac{\text{Cos. }\alpha + \text{Sin. }\alpha}{\text{Cos. }\beta + \text{Sin. }\beta} = \frac{(\text{Cos. }\alpha + \text{Sin. }\alpha)\ (\text{Cos. }\beta - \text{Sin. }\beta)}{(\text{Cos. }\beta + \text{Sin. }\beta)\ (\text{Cos. }\beta - \text{Sin. }\beta)} =$

$$\frac{\text{Cos. }\alpha \cdot \text{Cos. }\beta + \text{Sin. }\alpha \cdot \text{Cos. }\beta - \text{Cos. }\alpha \cdot \text{Sin. }\beta - \text{Sin. }\alpha \cdot \text{Sin. }\beta}{1} = e^{\alpha - \beta}$$

$= \text{Cos. }(\alpha - \beta) + \text{Sin. }(\alpha - \beta)$.

Nehmen wir statt α und β die negativen Werte, dann bleibt Cos. $(-\alpha) = + \text{Cos. }\alpha$; dagegen wird Sin. $(-\alpha) = - \text{Sin. }\alpha$.

Daher 3) $\text{Cos. }\alpha \cdot \text{Cos. }\beta - \text{Sin. }\alpha \cdot \text{Cos. }\beta - \text{Cos. }\alpha \cdot \text{Sin. }\beta + \text{Sin. }\alpha \cdot \text{Sin. }\beta =$
$\text{Cos. }(\alpha + \beta) - \text{Sin. }(\alpha + \beta)$.

4) $\text{Cos. }\alpha \cdot \text{Cos. }\beta - \text{Sin. }\alpha \cdot \text{Cos. }\beta + \text{Cos. }\alpha \cdot \text{Cos. }\beta - \text{Sin. }\alpha \cdot \text{Sin. }\beta =$
$\text{Cos. }(\alpha - \beta) - \text{Sin. }(\alpha - \beta)$.

Durch Addition und Subtraktion von 1) und 3) erhält man

5) $\text{Cos. }(\alpha + \beta) = \text{Cos. }\alpha \cdot \text{Cos. }\beta + \text{Sin. }\alpha \cdot \text{Sin. }\beta$ und
6) $\text{Sin. }(\alpha + \beta) = \text{Sin. }\alpha \cdot \text{Cos. }\beta + \text{Cos. }\alpha \cdot \text{Sin. }\beta$.

Durch Addition und Subtraktion von 2) und 4):

7) $\text{Sin. }(\alpha - \beta) = \text{Sin. }\alpha \cdot \text{Cos. }\beta - \text{Cos. }\alpha \cdot \text{Sin. }\beta$.
8) $\text{Cos. }(\alpha - \beta) = \text{Cos. }\alpha \cdot \text{Cos. }\beta - \text{Sin. }\alpha \cdot \text{Sin. }\beta$.

Aus den Formeln 5) bis 8) ergiebt sich nach der bekannten Umformung:

$$\text{Sin. }\alpha + \text{Sin. }\beta = 2\ \text{Sin. }\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \text{Cos. }\frac{\alpha - \beta}{2} \text{ u. s. w.}$$

Wie man dem Argument α einer cyclometrischen Funktion ohne Änderung des Wertes den Zusatz $\pm 2\,n\,\pi$ machen darf, so ist es bei dem hyperbolischen Argument erlaubt, einen Zusatz zu machen, der eine ganze Umdrehung auf dem zugehörigen imaginären Kreise bedeutet, nämlich den Zusatz $\pm i\,2\,n\,\pi$ oder $\pm 2\,n\,\pi\,i$.

Setzt man in den Formeln 5) und 6) $\beta = \alpha$, dann erhält man

$$\text{Cos. }2\,\alpha = \text{Cos.}^2\,\alpha + \text{Sin.}^2\,\alpha.$$
$$\text{Sin }2\,\alpha = 2\ \text{Sin. }\alpha \cdot \text{Cos. }\alpha$$

und hieraus weiterhin:

$$\text{Cos. }3\,\alpha = -3\ \text{Cos. }\alpha + 4\ \text{Cos.}^3\,\alpha.$$
$$\text{Sin. }3\,\alpha = 3\ \text{Sin. }\alpha + 4\ \text{Sin.}^3\,\alpha.$$

Ersetzt man in der Gleichung $e = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ die Gröſse n durch $\frac{n}{\alpha}$, dann erhält man nach Anwendung des binomischen Lehrsatzes für $n = \infty$:

$e^\alpha = \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = 1 + \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^3}{3!} + \cdots$ und entsprechend $e^{-\alpha} = 1 - \frac{\alpha}{1!} + \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{\alpha^3}{3!} + \ldots$, und man kann, indem man $\alpha = 0, 1, 2, 3 \ldots$ setzt, alle Werte für Cos. α, Sin. α, Tang. α und Cotang. α nebst den zugehörigen Logarithmen berechnen.

Eine Tafel mit hyperbolischen Funktionen nebst zugehörigen Logarithmen enthält z. B. das Taschenbuch der Mathematik von Dr. W. Ligowski.

Während die cyclometrischen Funktionen sinus und cosinus nur innerhalb der Grenzen $+1$ und -1 zu- und abnehmen können, kann, wie leicht aus Figur 12 zu ersehen ist, der hyperbolische Sinus alle Werte von $+\infty$ bis $-\infty$ und der hyperbolische Cosinus alle solchen von ± 1 bis $\pm\infty$ durchlaufen.

Ist daher der Gebrauch eines cyclometrischen sinus oder cosinus als Substitut eines Wertes, der größer als $+1$ und kleiner als -1 werden kann, nicht gestattet, so darf man dafür stets den hyperbolischen Sinus und für den Fall, daß der zu ersetzende Wert größer als 1 oder kleiner als -1 ist, auch den hyperbolischen Cosinus anwenden.

Die hyperbolischen Funktionen kommen also gerade da zur Verwendung, wo die cyclometrischen den Dienst versagen, und bilden demnach eine wesentliche Ergänzung derselben.

§ 11.

Auflösung der reduzierten cubischen Gleichung:

$$\text{I.}\quad x^3 + 3Px + 2Q = o.$$

Benutzt man bei dieser Gleichung die Formel des Scipio Ferreo, welche auch die Cardanische genannt wird, dann erhält man als Lösung:

$$x = \sqrt[3]{-Q + \sqrt{Q^2 + P^3}} + \sqrt[3]{-Q - \sqrt{Q^2 + P^3}}.$$

Ist P negativ und ist absolut genommen $P^3 > Q^2$, dann erscheinen die drei Wurzelwerte, welche man aus genannter Formel erhält, in imaginärer Form, obwohl sie alle drei reell sind.

Wir wollen jetzt zur Lösung einer gegebenen cubischen Gleichung die gegebene Formel benutzen, wollen aber statt mit gewöhnlichen Zahlen mit Richtungszahlen rechnen. Die gegebene Gleichung sei $x^3 - 3px - 2q = o$.

Machen wir, wie in Fig. 13 geschehen ist, $OB = 1$ und $OA = p$, schlagen über OA einen Halbkreis, stellen $BC \perp OA$, dann ist $OC = \sqrt{p}$.

Machen wir ferner $AD \perp OA$ (also $\parallel BC$), dann ist $\frac{OD}{OC} = \frac{OA}{OB}$; daher $OD = \sqrt{p} \cdot p = \sqrt{p^3}$.

Konstruieren wir einen Halbkreis über OD und schlagen um O mit $OE = q$ einen Kreis, dann ist $ED = \sqrt{p^3 - q^2}$, $OD\varphi = od = q + i\sqrt{p^3 - q^2}$.

$$\sqrt[3]{od} = \sqrt[3]{OD}.1_{\frac{\varphi}{3}} = \sqrt[3]{\sqrt{p^3}\,1_{\frac{\varphi}{3}}} = \sqrt{p}.1_{\frac{\varphi}{3}}$$

Machen wir also $EOL = \frac{1}{3}\varphi$ und $OC_1 = OC = \sqrt{p}$, dann ist $oc_1 = \sqrt{p}\,1 \cdot \frac{\varphi}{3} = \sqrt[3]{od}$,

$$oc_1 = \sqrt[3]{q + i\sqrt{p^3 - q^2}}\ .$$

In gleicher Weise erhält man $oc_2 = \sqrt[3]{q - i\sqrt{p^3 - q^2}}$,

daher $oc_1 + oc_2 = oc_1 + c_1 f_1 = OF_1 = x_1$ und daraus $x_1 = 2\,OG = 2\,OC_1 \cos.\frac{\varphi}{3} = \sqrt{p}\cos.\frac{\varphi}{3}$.

Nehmen wir statt des Winkels φ die Winkel $\varphi + 2\pi$ und $\varphi - 2\pi$, dann kommen wir zu den Punkten C_3, C_4 und F_2, oder zu C_5, C_6 und F_3 und erhalten

$$x_2 = OF_2 = 2\sqrt{p}\cos.\frac{\varphi + 2\pi}{3},$$
$$x_3 = OF_2 = 2\sqrt{p}\cos.\frac{\varphi - 2\pi}{3}.$$

Die Wurzeln x_1, x_2 und x_3 liegen sämtlich auf der Grundrichtung, sind also reell, die Gleichung I liefert demnach für ein negatives P und für $P^3 > Q^2$ drei reelle Wurzeln.

Berechnung eines Zahlenbeispiels:

$$x^3 - 21x - 20 = 0.$$
$$p = 7,\ q = 10.$$
$$\sqrt{p^3 - q^2} = 243$$
$$\text{tang.}\,\varphi = \frac{DE}{OE} = \frac{\sqrt{p^3 - q^2}}{q} = \frac{\sqrt{243}}{10} = \sqrt{2{,}43}.$$
$$\log.\ \text{tang.}\ \varphi = \tfrac{1}{2}\log.\ \text{tang}\ 2{,}43 = 0{,}19281.$$
$$\varphi = 57^0\ 19'\ 13''.$$
$$x = \sqrt{p}\,.\cos.\frac{\varphi}{3},$$

$$\begin{aligned}
\log.\ 2 &= 0{,}30103\\
\tfrac{1}{2}\log.\ 7 &= 0{,}42255\\
\log\ \cos.\ 19^0\ 6'\ 24'' &= 9{,}97539 - 10\\
\hline
\log.\ x &= 0{,}69897\\
x &= 5.
\end{aligned}$$

Für $\frac{\varphi + 2\pi}{3} = 139^0\ 6'\ 24''$ erhält man $x_2 = -4$ und für $\frac{\varphi - 2\pi}{3} = -100^0\ 53'\ 36''$, $x_3 = -1$. Die Zeichnung in Fig. 13, bei der als Einheit 2 mm angenommen sind, entspricht diesem Beispiel.

Aus der obigen Erörterung geht hervor, dafs man eine jede reduzierte cubische Gleichung mit alleiniger Benutzung der Cardanischen Formel lösen kann, wenn man sich zum Rechnen der Richtungszahlen bedient.

Will man die Gleichung I: $x^3 + 3Px + 2Q = 0$ mit Benutzung der Trigonometrie aufschliefsen, dann kann man sich entweder der cyclometrischen Funktionen $\sin. 3\alpha = 3 \sin. \alpha - 4 \sin.^3 \alpha$ oder $\cos. 3\alpha = 4 \cos.^3 \alpha - 3 \cos. \alpha$ oder der im vorigen Paragraphen besprochenen hyperbolischen Funktionen $\mathrm{Sin.}\, 3\alpha = 3\, \mathrm{Sin.}\, \alpha + 4\, \mathrm{Sin.}\, \alpha^3$ oder $\mathrm{Cos.}\, 3\alpha = -3\, \mathrm{Cos}\, \alpha + 4\, \mathrm{Cos.}\, \alpha^3$ bedienen.

Vergleicht man die gegebene Gleichung I. mit der nachstehenden:

$$(r \sin. \alpha)^3 - \tfrac{3}{4} r^2 (r \sin. \alpha) + \tfrac{r^3}{4} \sin. 3\alpha = 0,$$

dann sieht man, dafs sich für $3P = -\frac{3}{4} r^2$ die Werte: $r = 2\sqrt{-P}$, $\sin. 3\alpha = \sqrt{\frac{Q^2}{-P^3}}$

und $x = r \sin \alpha$ ergeben.

Reelle Werte können demnach nur dann entstehen, wenn P negativ und zugleich $Q^2 < P^3$ ist, weil andernfalls r imaginär und $\sin. 3\alpha > 1$ werden würde.

Aus der Vergleichung von I mit nachstehender Formel:

$$(r \cos. \alpha)^3 - \tfrac{3}{4} r^2 (r \cos. \alpha) - \tfrac{r^3}{4} \cos. 3\alpha = 0 \text{ ergiebt sich,}$$

dafs für $r = 2\sqrt{-P}$ und $\cos. 3\alpha = \sqrt{\frac{Q^2}{-P^3}}$,

$$x = r \cos. \alpha \text{ wird.}$$

Es mufs also auch hier P negativ und $P^3 > Q^2$ sein.

Bringt man dagegen die Gleichung I. mit der Formel:

$$(r\, \mathrm{Sin.}\, \alpha)^3 + \tfrac{3}{4} r^2 (r\, \mathrm{Sin.}\, \alpha) - \tfrac{r^3}{4} \mathrm{Sin.}\, 3\alpha = 0$$

in Verbindung, dann folgt hier $r = 2\sqrt{P}$, $\mathrm{Sin}\, 3\alpha = \sqrt{\frac{Q^2}{P^3}}$, $x = r\, \mathrm{Sin}\, \alpha$.

Hier mufs also im Gegensatz zu oben P positiv sein; dagegen kann $Q^2 \gtreqless P^3$ werden, da der hyperbolische Sinus alle Werte von 0 bis $\pm \infty$ annehmen kann.

Bezieht man endlich die Gleichung I. auf die Formel:

$$(r\, \mathrm{Cos.}\, \alpha)^3 - \tfrac{3}{4} r^2 (r\, \mathrm{Cos.}\, \alpha) - \tfrac{r^3}{4} \mathrm{Cos.}\, 3\alpha = 0,$$

dann erhält man hier $r = 2\sqrt{-P}$,

$$\mathrm{Cos.}\, 3\alpha = \sqrt{\frac{Q^2}{-P^3}},$$

$$x = r\, \mathrm{Cos.}\, \alpha.$$

P mufs also wieder negativ werden und zugleich $Q^2 > P^3$, da der hyperbolische Cosinus nur einen Wert zwischen ± 1 und $\pm \infty$ annehmen kann.

Daraus ergiebt sich, dafs man jede reduzierte Gleichung dritten Grades auch ohne die Cardanische Formel rein trigonometrisch lösen kann, wenn man sich aufser der cyclometrischen Funktionen auch der hyperbolischer bedient.

Die beiden nachstehenden Zahlenbeispiele sollen mit Benutzung hyperbolischer Funktionen gelöst werden. Die zur Verwendung kommenden hyperbolischen Logarithmen sind dem Taschenbuch der Mathematik von Ligowsky entnommen.

1. Zahlenbeispiel

$$x^3 + 15x + 200 = 0;\ (r\,\text{Sin.}\,\alpha)^3 + \tfrac{3}{4} r^2 (r\,\text{Sin.}\,\alpha) - \tfrac{r^3}{4}\,\text{Sin.}\,3\alpha = 0.$$

$$\tfrac{3}{4} r^2 = 15;\ r = \pm 2\sqrt{5}.$$

Hier soll r negativ, also $-2\sqrt{5}$ genommen werden.

Aus $-\frac{3}{4} r^3\,\text{Sin.}\,3\alpha = 200$ folgt Sin. 3α oder allgemein $\text{Sin.}\,(3\alpha + i\,2n\pi) = 4\sqrt{5}$.

Für $n = 0$ erhalten wir $\text{Sin.}\,3\alpha = 4\sqrt{5}$

$$x_1 = -r\,\text{Sin.}\,\alpha$$

$$\log.\,4 = 0{,}60206$$
$$\tfrac{1}{2}\log.\,5 = 0{,}34948$$
$$\log.\,\text{Sin.}\,3\alpha = 0{,}95154$$
$$3\alpha = 2{,}887265$$
$$\alpha = 0{,}96242.$$

$$\log.\,2 = 0{,}30103$$
$$\tfrac{1}{2}\log.\,5 = 0{,}34949$$
$$\log.\,\text{Sin.}\,\alpha = \log.\,0{,}96242 = 0{,}04845$$
$$\log.\,x_1 = 0{,}69897$$
$$x_1 = -5.$$

Für $n = 1$ erhalten wir $x_2 = -r\,\text{Sin.}\,(\alpha + i\,\tfrac{2}{3}\pi)$

und für $n = 2$ $x_3 = -r\,\text{Sin.}\,(\alpha + i\,\tfrac{4}{3}\pi) = -r\,\text{Sin.}\,(\alpha - i\,\tfrac{2}{3}\pi)$.

Nun ist $\text{Sin.}\,(\alpha \pm i\,\tfrac{2}{3}\pi) = \text{Sin.}\,\alpha\,\text{Cos.}\,\dfrac{2\pi i}{3} \pm \text{Cos.}\,\alpha \cdot \text{Sin.}\,\dfrac{2\pi i}{3}$

$= \text{Sin.}\,\alpha\,\cos.\,\tfrac{2}{3}\pi \pm i\,\sin.\,\tfrac{2}{3}\pi\,\text{Cos.}\,\alpha.$

Daher $x_{2,3} = -r\,(\text{Sin.}\,\alpha\,\cos.\,\tfrac{2}{3}\pi \pm i\,\sin.\,\tfrac{2}{3}\pi\,\text{Cos.}\,\alpha) = \tfrac{1}{2} x_1 \pm i\,\dfrac{\sqrt{15}}{2}\,\text{Cos.}\,\alpha.$

$$\log.\,\text{Cos.}\,0{,}96242 = 0{,}17609 = \log.\,1{,}5,$$
$$\text{Cos.}\,0{,}96242 = 1{,}5 = \tfrac{3}{2},$$
$$\text{mithin } x_{2,3} = \frac{-5 \pm i\,3\sqrt{15}}{2}.$$

Die gesuchten Wurzeln der Gleichung sind also:

$$-5,\ \frac{-5 + i\,3\sqrt{15}}{2},\ \frac{-5 - i\,3\sqrt{15}}{2}.$$

2. Zahlenbeispiel:

$$x^3 - 15x - 50 = 0$$
$$(r\,\text{Cos.}\,\alpha)^3 - \tfrac{3}{4} r^2 (r\,\text{Cos.}\,\alpha) - \tfrac{r^3}{4}\,\text{Cos.}\,3\alpha = 0$$
$$r = 2\sqrt{5},\ \text{Cos.}\,3\alpha = \sqrt{5};\ x_1 = r\,\text{Cos.}\,\alpha;\ x_{23} = -\tfrac{1}{2} x_1 \pm i\sqrt{15}\,\text{Sin.}\,\alpha.$$

$$\log.\ \mathrm{Cos.}\ 3\,\alpha = 0{,}34949$$
$$3\,\alpha = 1{,}44365$$
$$\alpha = 0{,}48122$$

$$\log.\ 2 = 0{,}30103$$
$$\log.\ \sqrt{5} = 0{,}34948$$
$$\log.\ \mathrm{Cos.}\ \alpha = 0{,}04846$$

$$\log.\ x_1 = 0{,}69897$$
$$x_1 = 5.$$
$$x_{2,3} = -\tfrac{1}{2}\,x_1 \pm i\sqrt{15}\ \mathrm{Sin.}\ \alpha$$
$$\log.\ \mathrm{Sin.}\ 0{,}49122 = 9{,}69898 - 10 = -0{,}30102 = \log.\ \tfrac{1}{2}.$$

Daher $\mathrm{Sin.}\ \alpha = \frac{1}{2}$ und $x_{2,3} = \dfrac{-5 \pm i\sqrt{15}}{2}$.

Die 3 Wurzeln der Gleichung 2 sind also: $5,\ \dfrac{-5 + i\sqrt{15}}{2},\ \dfrac{-5 - i\sqrt{15}}{2}$.

§ 12.

Behandlung einer einfachen astronomischen Aufgabe.

Die Höhe h eines Sternes über dem Horizont soll durch die Deklination desselben δ und den Stundenwinkel σ für einen Beobachtungsort angegeben werden, dessen geographische Breite φ ist.

Auflösung. In Figur 14 sei Z das Zenit des Beobachters, HH_1 der Horizont desselben, AA_1 der Aequator und N der Nordpol, dann sei S der Stern, SL die gesuchte Höhe h, SM die Deklination δ, also $SM = 90 - h$ die Poldistanz des Sternes, AM oder $\sphericalangle ZNS$ sein Stundenwinkel σ, NH_1 die Polhöhe des Beobachters, also gleich der geographischen Breite φ.

Wie aus der sphärischen Trigonometrie bekannt ist, findet zwischen den Stücken SN, ZN und $\sphericalangle ZNS$ des sphärischen Dreiecks ZNS die Beziehung: $\mathrm{cosin.}\ ZS = \mathrm{cosin.}\ ZN \cdot \mathrm{cosin.}\ SN + \mathrm{sin.}\ ZN \cdot \mathrm{sin.}\ SN \cdot \mathrm{cosin.}\ \sigma$ statt; daher auch $\mathrm{sin.}\ h = \mathrm{sin.}\ \varphi \cdot \mathrm{sin.}\ \delta + \mathrm{cosin.}\ \varphi \cdot \mathrm{cosin.}\ \delta \cdot \mathrm{cosin.}\ \sigma$. Geben wir der Gleichung die Form: $\mathrm{sin.}\ h = \mathrm{cosin.}\ \varphi \cdot \mathrm{cosin.}\ \delta\ (\mathrm{tang.}\ \varphi \cdot \mathrm{tang.}\ \delta \cdot + \cos.\ \sigma)$ und setzen, je nachdem $\mathrm{tang.}\ \varphi \cdot \mathrm{tang.}\ \delta \lesseqgtr 1$ ist, $\mathrm{tang.}\ \varphi \cdot \mathrm{tang.}\ \delta = \mathrm{sin.}\ \beta$ oder $=$ Sinus β und $\cos.\ \sigma = \mathrm{sin.}\ \alpha$ oder $=$ Sinus α, dann erhalten wir eine zur praktischen Berechnung bequeme Form, wie aus dem am Ende des Paragraphen angeführten Beispiel zu ersehen ist.

Ist $\delta = S_1M_1 = CA = C_1A_1 < A_1H_1 < AH < ZN < 90 - \varphi$, d. h. ist der Stern ein auf- und untergehender, dann ist $\mathrm{tang.}\ \delta < \mathrm{cotang.}\ \varphi$ und $\mathrm{tang.}\ \varphi \cdot \mathrm{tang.}\ \delta < \mathrm{tang.}\ \varphi\ \mathrm{cotg.}\ \varphi < 1$.

Ist dagegen $\delta = SM = B_1A_1 > A_1H_1 > ZN > 90 - \varphi$, d. h. ist der Stern ein Circumpolarstern, dann ist $\mathrm{tang.}\ \delta > \mathrm{cotang.}\ \varphi$ und $\mathrm{tang.}\ \varphi \cdot \mathrm{tang.}\ \delta > \mathrm{tang.}\ \varphi \cdot \mathrm{cotang.}\ \varphi > 1$.

Im ersten Falle kann man sich daher bei der Rechnung der cyclometrischen Funktionen und Logarithmen bedienen, im zweiten wendet man mit Vorteil hyperbolische Funktionen und Logarithmen an.

Hat z. B. der Stern S eine Deklination von $85^0\ 10'$, dann erhält man für den Stundenwinkel $58^0\ 30'$ und die geographische Breite des Beobachtungsortes $51^0\ 20'$ die Höhe durch folgende Rechnung: $\sin. h = \sin. \varphi \cdot \sin. \delta + \cos. \varphi \cdot \cos. \delta \cdot \cos. \sigma = \cos. \varphi \cdot \cos. \delta.$ $(\text{tang.}\ \varphi \cdot \text{tang.}\ \delta + \cos. \sigma)$ und für $\text{tang.}\ \varphi \cdot \text{tang.}\ \delta = \text{Sin.}\ \beta$ und $\cos. \sigma = \text{Sin.}\ \alpha$; $\sin. h = \cos. \varphi \cdot \cos. \delta\, (\text{Sin.}\ \beta + \text{Sin.}\ \alpha) = 2\ \cos. \varphi \cdot \cos. \delta \cdot \text{Sin.}\ \frac{\beta + \alpha}{2} \cdot \text{Cos.} \frac{\beta - \alpha}{2}.$

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{tang.}\ 51^0\ 20' &= 10{,}09680 \\
-\ \log.\ \text{tang.}\ 85^0\ 10' &= 1{,}07284 \\
\hline
\log.\ \text{Sin.}\ \beta &= 1{,}16964 \\
\beta &= 3{,}38750 \\
\log.\ \text{Sin.}\ \alpha = \log.\ \cos.\ 58^0\ 30' &= 9{,}71809 \\
\alpha &= 0{,}50125
\end{aligned}$$

$$\frac{\beta + \alpha}{2} = \frac{3{,}88876}{2} = 1{,}94438$$

$$\frac{\beta - \alpha}{2} = \frac{2{,}88625}{2} = 1{,}44313$$

$$\begin{aligned}
\log.\ \text{Sin.}\ \frac{\beta + \alpha}{2} = \log.\ \text{Sin.}\ 1{,}94438 &= 0{,}53442 \\
\log.\ \text{Cos.}\ \frac{\beta - \alpha}{2} = \log.\ \text{Cos.}\ 1{,}44312 &= 0{,}34929 \\
\log.\ \cos.\ 51^0\ 20' &= 9{,}79773 - 10 \\
\log.\ \cos.\ 85^0\ 10' &= 8{,}92561 - 10 \\
\log.\ 2 &= 0{,}30103 \\
\hline
\log.\ \sin.\ h &= 9{,}90608 - 10 \\
h &= 53^0\ 39'\ 40''.
\end{aligned}$$

§ 13.

In der analyt. Geometrie wird eine grade Linie G durch eine Gleichung ersten Grades, ein Kegelschnit K dagegen durch eine Gleichung vom zweiten Grade zwischen den Coordinaten x und y dargestellt.

Die Durchschnittspunkte der Graden G und des Kegelschnittes K werden durch die Wurzeln x_1 und x_2 und y_1 und y_2 der beiden Gleichungen für G und K bestimmt. Diese Wurzeln erhalten reelle Werte, wenn die Grade den Kegelschnitt wirklich schneidet. Wenn dies nicht der Fall ist, erscheinen sie in der Form:

$$x_1 = p + qi,\ y_1 = p_1 + q_1 i,$$
$$x_2 = p - qi,\ y_2 = p_1 - q_1 i,$$

sind also imaginär.

Es mufs demnach auffallen, dafs trotzdem die Gleichung der durch diese imaginären Schnittpunkte gehenden Grade: $qy - q_1x + pq_1 - p_1q = o$ und die Coordinaten des Halbierungspunktes der Verbindungslinie der imaginären Punkte, nämlich $\frac{x_1 + y_2}{2} = p$ und $\frac{y_1 + y_2}{2} = p_1$ reell werden.

Ähnliches gilt von den Durchschnittspunkten zweier Kegelschnitte, die im günstigsten Falle sämtlich reell sein können. Zwei dieser Durchschnittspunkte oder gar sämtliche vier können aber auch imaginär werden.

Um die Eigenschaften solcher imaginären Durchschnittspunkte eines Kegelschnittes mit einer Graden oder mit einem anderen Kegelschnitte näher kennen zu lernen, wollen wir uns der Hilfsmittel der neueren Geometrie bedienen.

Kapitel IV.

Dieses Kapitel enthält diejenigen Sätze der neueren Geometrie, auf welche sich die Lösung der im V. Kapitel enthaltenen Aufgaben stützt.

§ 1.

Satz I. Schneiden sich die Verbindungslinien der drei Eckpunkte zweier in einer Ebene liegender Dreiecke in einem Punkte, dann liegen die Durchschnittspunkte je zweier entsprechender Seiten auf einer Graden.

Voraussetzung: Figur 15. AA_1, BB_1, CC_1 schneiden sich in S, AB und A_1B_1 in γ, AC und A_1C_1 in β, BC und B_1C_1 in γ.

Behauptung: α, β und γ liegen in einer Graden.

Konstruktion zum Beweis: Man lege durch AS, BS, CS drei Ebenen, welche auf der Ebene MN der Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ senkrecht stehen, verbinde einen beliebigen Punkt S_1 der Durchschnittsgraden dieser Ebenen mit A, B und C, errichte in $A_1B_1C_1$ die Lote A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 und erweitere die durch die Schnittpunkte $A_2B_2C_2$ dieser Senkrechten mit den Graden S_1A, S_1B, S_1C bestimmte Ebene MP bis zum Durchschnitt MQ mit der Ebene MN.

Beweis: Die durch $A_1C_1C_2A_2$ gelegte Ebene schneidet die Ebene MN in der Graden C_1A_1 und die Ebene MP in der Graden C_2A_2. Diese beiden Graden müssen sich demnach in einem Punkte β der Durchschnittslinie MQ treffen. In gleicher Weise müssen sich C_1B_1 und C_2B_2 in α und A_1B_1 und A_2B_2 in γ schneiden. Ganz entsprechend ergiebt sich, dafs sich die durch die Ebene ACC_2A_2 bestimmten Durchschnittslinien C_2A_2 und CA in einem Punkte von MQ treffen, der notwendig β sein mufs, da er den Graden C_2A_2 und MQ angehört. C_1A_1 und CA schneiden sich also in dem Punkte β der Graden MQ; ebenso treffen sich C_1B_1 und CB im Punkte α und A_1B_1 und AB im Punkte γ der der Graden MQ. Die Schnittpunkte der entsprechenden Seiten der beiden Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ liegen also auf einer Graden.

Nähert sich der Punkt S_1 dem Punkte S, dann dreht sich die Ebene MP um die Grade MQ und fällt mit der Ebene MN zusammen, sobald S_1 in S ankommt; dann mufs auch der Punkt S_{11}, da er immer auf der Senkrechten SS_1 liegen soll, mit S zusammenfallen, ebenso müssen sich die Punkte A_2, B_2, C_2 und A_1, B_1, C_1 und die Graden $C_2\beta$, $C_2\alpha$ $A_2\gamma$ und $C_1\beta$, $C_1\alpha$, $A_1\gamma$ in entsprechender Weise decken.

Man kann demnach sagen, dafs das Dreieck ABC das Bild von $A_1B_1C_1$ und umgekehrt, dafs das Dreieck $A_1B_1C_1$ das Bild von ABC sei, für den Augen- oder Strahlpunkt S und die Bildaxe MN.

Aus der Umkehrung des oben bewiesenen Satzes ergiebt sich: Wenn sich die drei Seiten zweier in einer Ebene gelegenen Dreiecke in einer Graden, der Bildaxe, schneiden, dann liegen die Dreiecke perspektivisch, d. h. die Verbindungslinien der drei entsprechenden Eckpunkte schneiden sich in einem Punkte, dem Augen- oder Strahlpunkte der Zeichnung.

§ 2.

Erklärung: Liegen drei Punkte ABC auf einer Graden, dann wird das Verhältnis AC:BC positiv oder negativ genommen, je nachdem C aufserhalb oder innerhalb AB liegt. Das Doppelverhältnis von vier auf einer Graden liegenden Punkten, nämlich $\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}$ nennt man anharmonisch und bezeichnet es kurz mit: (ABCD). Schneiden sich drei Grade a, b und c in einem Punkte, dann wird das Verhältnis sin. ac : sin bc positiv oder negativ genommen, je nachdem c aufserhalb oder zwischen a und b liegt. Vier von einem Punkte P ausgehende Graden, Strahlen, bilden einen anharmonischen Strahlenbüschel, und man bezeichnet kurz das Doppelverhältnis $\frac{\sin. ac}{\sin. bc}:\frac{\sin. ad}{\sin. bd}$ mit: (abcd).

Satz I. In dem symbolischen Ausdruck eines anharmonischen Verhältnisses können die beiden letzten Buchstaben mit den beiden ersten vertauscht werden, ohne dafs sich der Wert des Doppelverhältnisses ändert.

Beweis: $(ABCD)=\frac{AC}{BC}:\frac{AD}{BD}=\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BC}$ und $(CDAB)=\frac{CA}{DA}:\frac{CB}{DB}=\frac{AC}{AD}:\frac{BC}{BD}$, folglich (ABCD) = (CDAB).

Satz II. In dem symbolischen Ausdruck eines anharmonischen Verhältnisses darf man die beiden ersten Buchstaben vertauschen, wenn man auch die beiden letzten vertauscht.

Beweis: $(ABCD)=\frac{AC}{BC}\cdot\frac{AD}{BD}=\frac{AC\cdot BD}{BC\cdot AD}$ und $(BADC)=\frac{BD}{AD}\cdot\frac{BC}{AC}=\frac{BD\cdot AC}{AD\cdot BC}$, folglich (ABCD) = (BACD).

Satz III. Vertauscht man in dem symbolischen Ausdruck eines anharmonischen Verhältnisses die beiden letzten Buchstaben, dann erhält man den reciproken Wert desselben.

Beweis: $(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{AC \cdot BD}{BC \cdot AD}$ und $(ABDC) = \frac{AD}{BD} : \frac{AC}{BC} = \frac{AD \cdot BC}{BD \cdot AC}$; folglich $(ABDC) = \frac{1}{ABCD}$.

Satz IV. Vertauscht man in einem anharmonischen Verhältnis die beiden mittleren Buchstaben, dann erhält man das complementäre Doppelverhältnis.

Beweis: $(ABCD) = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD} = -\frac{AC \cdot BD}{CB \cdot AD}$ und $(ACBD) = \frac{AB}{CB} \cdot \frac{AD}{CD} = \frac{AB \cdot CD}{CB \cdot AD}$;

folglich $(ABCD) + (ACBD) = \frac{AB \cdot CD - AC \cdot BD}{CB \cdot AD} = \frac{(AC + CB)(CB + BD) - AC \cdot BD}{CB \cdot AD}$

$= \frac{AC \cdot CB + CB^2 + AC \cdot BD + CB \cdot BD - AC \cdot BD}{CB \cdot AD} = \frac{AC \cdot CB + CB(CB + BD)}{CB \cdot AD} =$

$\frac{AC \cdot CB + CB \cdot CD}{CB \cdot AD} = \frac{CB(AC + CD)}{CB \cdot AD} = \frac{CB \cdot AD}{CB \cdot AD} = 1$; daher $(ACBD) = 1 - (ABCD)$.

Satz V. Stimmen zwei anharmonische Verhältnisse in den beiden ersten Buchstaben überein, dann bleibt der Wert des Produktes aus denselben unverändert, wenn man die dritten Buchstaben der Doppelverhältnisse vertauscht.

Beweis: $(ABCD)\,(ABEF) = \left(\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}\right)\left(\frac{AE}{BE} : \frac{AF}{BF}\right) = \frac{AC \cdot BD \cdot AE \cdot BF}{BC \cdot AD \cdot BE \cdot AF}$ und $(ABED)\,(ABCF) = \frac{AE \cdot BD \cdot AC \cdot BF}{BE \cdot AD \cdot BC \cdot AF}$; folglich $(ABCD)\,(ABEF) = (ABED)\,(ABCF)$.

Satz VI. Das anharmonische Verhältnis zwischen vier Graden a, b, c und d, die einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt P haben, ist gleich dem anharmonischen Verhältnis der vier Punkte A, B, C und D, in welchen eine beliebige Transversale von denselben geschnitten wird.

Beweis: Die vier Strahlen bilden mit der Transversalen Dreiecke, die sich ihrem Inhalte nach einmal wie die zugehörigen Grundlinien, das andere Mal wie die Produkte aus je zwei Seiten in den sinus des eingeschlossenen Winkels verhalten; daher $\frac{\triangle PAC}{\triangle PBC} = \frac{AC}{BC} = \frac{ac \sin ac}{bc \sin bc}$ und $\frac{\triangle PAD}{\triangle PBD} = \frac{AD}{BD} = \frac{ad \sin ad}{bd \sin bd}$, folglich $\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} = \frac{\sin ac}{\sin bc} : \frac{\sin ad}{\sin bd}$ oder symbolisch geschrieben: $(ABCD) = (abcd)$.

Erklärung: Die Übereinstimmung der Doppelverhältnisse von Punkten und Punkten oder von Strahlen und Strahlen oder von Punkten und Strahlen nennt man Projektivität, weil sich das eine Gebilde aus dem andern durch eine endliche Anzahl von Projektionen ableiten läſst.

Zwei projektivische Punktreihen heifsen perspektivisch, wenn die eine als ein Bild der andern betrachtet werden kann, d. h. wenn sich die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte in einem Punkte schneiden.

Satz VII. Zwei projektivische Punktreihen liegen perspektivisch, wenn die Verbindungslinien von drei Paaren entsprechender Punkte sich in einem Punkte schneiden oder wenn die Graden (Träger) der beiden Punktreihen einen entsprechenden Punkt gemeinsam haben.

Beweis: Verbindet man den Durchschnittspunkt der drei Strahlen mit einem vierten Punkt der einen Punktreihe, dann mufs diese Verbindungslinie, wie sich mit Hilfe der gleichen Doppelverhältnisse beider projektivischen Reihen leicht indirekt nachweisen läfst, auch durch den entsprechenden vierten Punkt der anderen Reihe gehen.

Fällt der Durchschnittspunkt der Träger der beiden Punktreihen mit zwei entsprechenden Punkten zusammen, dann kann man diesen Punkt mit dem Durchschnitt der Verbindungslinien von zwei Paaren anderer entsprechender Punkte verbinden und hat dann wieder drei sich in einem Punkte schneidende Grade.

Erklärung: Eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel heifsen perspektivisch, wenn die Strahlen des Büschels durch entsprechende Punkte der Punktreihe gehen, wenn der Büschel ein Schein der Punktreihe ist.

Zwei projektivische Strahlenbüschel heifsen perspektivisch, wenn sich entsprechende Strahlen in Punkten einer Graden schneiden, wenn sie Scheine derselben Punktreihe sind.

Satz VIII. Zwei projektivische Strahlenbüschel liegen perspektivisch, wenn sich drei Paare entsprechender Strahlen in Punkten einer Graden schneiden oder wenn ein Paar entsprechender Strahlen zusammenfallen.

Der Beweis ergiebt sich leicht aus den beiden vorigen Sätzen.

§ 3.

Involutorische Punktreihe.

Erklärung: Von drei und mehreren Paaren von Punkten AA_1, BB_1, CC_1 einer Graden sagt man, dafs sie eine „Involution“ bilden, wenn für jedes Paar das Produkt der Abstände seiner Punkte von ein und demselben Punkte O mit Berücksichtigung der Vorzeichen einen unveränderlichen Wert hat, also wenn $AO \cdot A_1O = BO \cdot B_1O = CO \cdot C_1O \ldots \overline{M_1O}^2 = \overline{M_2O}^2$ ist. O heifst der Centralpunkt und die beiden Punkte M_1 und M_2, deren gegenseitige Entfernung durch O halbiert wird, führen den Namen Doppelpunkte.

Die Punktreihen sind entweder gleichlaufend, wobei der eine von zwei zugeordneten Punkten AA_1 (Fig. 17) in die von zwei anderen zugeordneten Punkten BB_1 gebildete Strecke eingreift, und heifsen dann elliptisch, oder sie sind ungleichlaufend und heifsen hyperbolisch. (Fig. 16.)

Im ersten Falle liegt der Centralpunkt auf den Verbindungslinien zweier entsprechender Punkte selbst; im anderen Falle auf deren Verlängerung.

In der elliptischen Punktreihe liegt O in der Mitte zwischen M_1 und M_2, aber auch zugleich zwischen A und A_1, B und B_1 etc.; daher ist $AO \cdot A_1O = BO \cdot B_1O = -\overline{MO}^2 = (iOM)^2$. In der elliptischen Punktreihe sind also die Doppelpunkte imaginär.

Eine andere Bedingung für die involutorische Lage von Punkten einer Punktreihe läfst sich aus der Bedingung $AO \cdot A_1O = BO \cdot B_1O$ etc. in nachstehender Weise ableiten:

$$AO \cdot AO = BO \cdot BO \cdot$$
$$AO\,(BO - BA_1) = BO \cdot B_1O \cdot$$
$$AO \cdot BO - BO \cdot B_1O = AO \cdot BA_1 \cdot$$
$$BO\,(AO - B_1O) = AO \cdot BA_1 \cdot$$
$$1)\ \frac{AO}{BO} = \frac{AB_1}{BA_1}.$$

In gleicher Weise oder durch cyklische Vertauschung der Buchstaben erhalten wir 2) $\frac{BO}{CO} = \frac{BC_1}{CB_1}$ und 3) $\frac{CO}{AO} = \frac{CA_1}{AC_1}$ und aus den Gleichungen 1, 2 und 3 durch Multiplikation 4) $\frac{AB_1 \cdot BC_1 \cdot CA_1}{BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1} = 1$.

Aus 4) erhalten wir ferner, wenn wir die Quotienten links vom Gleichheitszeichen noch mit $AA_1 = -A_1A$ erweitern und berücksichtigen, dafs $B_1A = -AB_1$ ist, $B_1A \cdot BC_1 \cdot CA_1 \cdot AA_1 = BA_1 \cdot CB_1 \cdot AC_1 \cdot A_1A$, $\frac{AA_1}{BA_1} : \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{A_1A}{B_1A} : \frac{A_1C}{B_1C}$ oder 5) $(ABA_1C_1) = (A_1B_1AC)$.

Da nun nach Kap. IV, § 2, IV

$$(ABA_1C_1) = 1 - (AA_1BC_1)$$
$$\text{und } (A_1B_1AC) = 1 - (A_1AB_1C) \text{ ist, so folgt}$$
$$6)\quad (AA_1BC_1) = (A_1AB_1C).$$

Nun ist $(AA_1BC_1) = \frac{1}{(AA_1C_1B)}$ (nach § 2 Kap. IV Satz III) und $(A_1AB_1C) = (AA_1CB_1)$ (nach § 2 Satz II); folglich $(AA_1C_1B) \cdot (AA_1CB_1) = 1$ oder $(AA_1CB) \cdot (AA_1C_1B_1) = 1$ (nach § 2 Satz V) und 7) I $(AA_1BC) = (A_1AB_1C_1)$ (nach § 2 Satz III und II).

Aus diesen Gleichungen ersieht man, dafs der Wert der Doppelverhältnisse aus je 4 von 6 involutorischen Punkten nicht geändert wird, wenn man sämtliche Punkte mit ihren zugeordneten Punkten vertauscht. Wir wollen diese Eigenschaft durch das Symbol: $(ABCA_1B_1C_1) = (A_1B_1C_1ABC)$ andeuten.

III. Lehrsatz: Die beiden Doppelpunkte teilen die Entfernungen zweier zugeordneter involutorischen Punkte harmonisch.

Beweis: $AO \cdot A_1O = M_1O \cdot M_1O = M_2O \cdot M_2O$, folglich $\frac{AO}{M^1O} = \frac{AM_1}{M_1A_1}$ (nach 1) und $\frac{AO}{M^2O} = \frac{AM_2}{M_2A_1}$. Dividieren wir die letzte Gleichung in voriger Reihe durch die erste in dieser, dann erhalten wir: $-1 = \frac{AM_1}{M_1A_1} : \frac{AM_2}{M_2A_1}$ oder $\frac{AM_1}{M_1A_1} = \frac{AM_2}{A_1M_2}$, d. h. A, A_1, M_1, M_2 sind 4 harmonische Punkte.

Umkehrung. Eine Punktreihe $AA_1BB_1CC_1$ ist involutorisch, wenn jedes Punktpaar durch zwei feste Punkte (Doppelpunkte) M_1 und M_2 harmonisch getrennt wird.

§ 4.

Sind zwei zusammengehörige Paare von involutorischen Punkten gegeben, dann kann man durch eine einfache Konstruktion leicht den Centralpunkt O der Involution finden und mittelst dieses dann auch sowohl zu einem beliebigen fünften Punkt den sechsten, siebenten und sofort, als auch die beiden reellen oder imaginären Doppelpunkte.

Es seien in Figur 16 ABC und A_1B_1 fünf gegebene Punkte einer hyperbolischen Involution. Legt man durch A und A_1 und durch B und B_1 zwei beliebige Kreise, welche sich in S_1 und S_2 schneiden, und verlängert man S_1S_2 bis zum Durchschnitt O mit dem Träger der gegebenen Punktreihe, zieht von O aus eine beliebige Tangente OT an einen der beiden Kreise und macht OM_1 und $OM_2 = OT$, dann ist O der Centralpunkt und M_1 und M_2 sind die beiden Doppelpunkte der Involution. Legt man ferner durch den Punkt C und die beiden Schnittpunkte S_1 und S_2 einen neuen Kreis, dann erzeugt dieser auf dem Träger der Punktreihe einen Punkt C_1, der dem Punkte C der Involution entspricht.

Beweis: $AO \cdot A_1O = BO \cdot B_1O = \overline{OT}^2$ (absolut genommen) $= \overline{OM}_1^2 = \overline{OM}_2^2$.

Sind ferner in Figur 17 A, B, C, A_1, B_1 fünf Punkte einer elliptischen Involution und beschreibt man über AA_1 und BB_1 als Durchmesser zwei Kreise, welche sich in J_1 und J_2 schneiden, verbindet diese beiden Punkte durch eine Grade, welche den Träger der gegebenen Punkte in O schneidet, legt auch durch C, J_1 und J_2 einen dritten Kreis, welcher den Träger von $ABCA_1B_1$ in C_1 schneidet, dann ist O das Centrum der Involution, J_1 und J_2 sind die imaginären Doppelpunkte derselben und C_1 ist der dem Punkte C zugeordnete Punkt.

Beweis: $AO \cdot A_1O = BO \cdot B_1O = CO \cdot C_1O = iJ_1O \cdot iJ_2O = (iOJ)^2 = -\overline{OJ}^2$.

§ 5.

Involutorische Strahlenbüschel.

Verbindet man einen beliebigen Punkt S außerhalb des Trägers einer involutorischen Punktreihe $ABC\,..\,A_1B_1C_1\,..$ mit diesen Punkten, dann erhält man einen Strahlenbüschel, welcher nach § 2, Satz VI ebenfalls involutorisch sein muſs.

Wie die involutorischen Punktreihen Doppelpunkte, so haben die Strahlenbüschel Doppelstrahlen, die bei hyperbolischen Büscheln reell, bei elliptischen imaginär sind. Bei der involutorischen Punktreihe halbiert der Centralpunkt O und der unendlich ferne Punkt O_1, der ihm harmonisch zugeordnet ist, die Strecken zwischen den beiden Doppelpunkten; bei dem involutorischen Strahlenbüschel halbieren (wie in § 8 nachgewiesen wird) zwei aufeinander senkrecht stehende Strahlen den Winkel und Nebenwinkel der beiden Hauptstrahlen. Ein Normalstrahl geht im allgemeinen nicht durch den Centralpunkt O der Punktreihe.

Erklärung: Legen wir durch den Scheitel P eines involutorischen Strahlenbüschels P $(a\,b\,c\,a_1\,b_1\,c_1)$ in Figur 18 einen Kreis, dann wird dieser die Graden a, b, c ... in den Punkten A, B, C, C_1, B_1, A_1 schneiden. Verbinden wir mit diesen Punkten der Peripherie einen beliebigen anderen Punkt derselben, z. B. $\mathfrak{P}$, dann entsteht ein neuer Büschel $\mathfrak{P}$ $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_1\,\mathfrak{b}_1\,\mathfrak{a}_1)$, welcher dem ersten P $\cong$ ist, da sämtliche Winkel des einen, denen des anderen als Peripheriewinkel gleich sind. Die Punkte A, B, C, C_1, B_1, A_1, welche die Durchschnittspunkte eines involutorischen Strahlenbüschels sind, dessen Scheitel auf der Kreisperipherie liegt, heifsen involutorische Kreispunkte.

Satz I. Die Strahlen zweier involutorischen Büschel eines Kreises, welche einen entsprechenden Strahl gemeinschaftlich haben, schneiden sich auf einer Graden.

Beweis (Figur 18): Legen wir an A und A_1 die Tangenten $A\alpha$ und $A_1\alpha$, dann ist αAB oder $\alpha A\beta = APB$, $\alpha A\gamma = APC$, $\alpha AC_1 = APC_1$ etc., und der Büschel $A(\alpha BCA_1B_1C_1) = P(ABCA_1B_1C_1)$, und zwar entspricht der Strahl $A\alpha$ dem Strahl PA, der Strahl $A\beta$ dem Strahl PB etc. Nun soll $P(ABCA_1B_1C_1)$ involutorisch sein, folglich ist $P(ABCA_1B_1C_1) = P(A_1B_1C_1ABC)$ (nach § 3); ferner ist $P(ABCA_1B_1C_1) = A(\alpha BCA_1B_1C_1)$ und ebenso $P(A_1B_1C_1ABC) = A_1(\alpha B_1C_1ABC)$, folglich auch $A(\alpha BCA_1B_1C_1) = A_1(\alpha B_1C_1ABC)$.

Die letztgenannten Büschel sind also involutorisch und zugleich perspectivisch, da sie den Strahl AA_1 und A_1A entsprechend gemein haben. Die Strahlen dieser beiden Büschel schneiden sich also auf einer Graden LL_1, z. B. in β und β_1 (§ 2 VIII Umkehrung). Nimmt man statt A und A_1 zwei andere entsprechende Punkte der Kreisinvolution, z. B. B und B_1 zu Scheiteln des involutorischen Büschels, dann erhält man wiederum zwei perspectivische involutorische Büschel mit dem gemeinschaftlichen Strahlen BB_1 und B_1B. Die beiden anderen entsprechenden Linien-Paare AB und A_1B_1 und AB_1 und A_1B schneiden sich dann in zwei Punkten β und β_1, welche auf derselben Graden LL_1 liegen wie oben.

Satz II. Die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte einer Kreisinvolution gehen durch einen Punkt.

Beweis (Fig. 18): Die Seiten der beiden Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ schneiden sich auf einer Graden LL_1, folglich treffen sich die Verbindungslinien A_1A, B_1B, C_1C in einem Punkte S (nach § 1).

Satz III. Durch zwei zusammengehörige Punktepaare der Kreisinvolution sind alle übrigen Punkte derselben bestimmt.

Beweis: Verbinden wir (Fig. 18) AA_1, BB_1 entsprechend und nicht entsprechend, dann erhalten wir den Punkt S und die Punkte β und β_1 der Graden LL_1. Zu einem beliebigen fünften Punkte C des Kreises erhält man den zugehörigen sechsten C_1 durch Verlängerung von SC bis C_1.

Satz IV. Verbindet man zwei Paare zusammengehöriger Punkte einer Kreisinvolution entsprechend und nicht entsprechend, dann treffen die durch die sich entsprechenden Punkte gehenden Graden in einem Pol und die durch die sich nicht entsprechenden Punkte gehenden Graden in einem Punkte der zugehörigen Polaren des Kreises zusammen.

Beweis (Figur 18 und 19): Sind AA_1 und BB_1 zwei entsprechende Punktepaare einer Kreisinvolution, dann schneiden sich AA_1 und BB_1 in S und AB, A_1B_1 und AB_1 und B_1A auf der Graden LL_1, wie in den Sätzen II und III bewiesen ist. Ziehen wir von S aus Tangenten an den Kreis, dann fallen in jedem der beiden Berührungspunkte M und N zwei Punkte der Kreisinvolution zusammen. M und N sind Doppelpunkte der Kreisinvolution. Die Punkte M und N liegen auf LL_1, da sich BM und B_1M auf LL_1 schneiden müssen (nach Satz I). Weil aber nun die Grade LL_1 durch die Berührungspunkte der von S an den Kreis gezogenen Tangenten geht, so ist LL_1 Polare zu S (Spitz § 174).

Satz V. Zieht man von einem Punkte S außerhalb oder innerhalb eines Kreises zwei beliebige Sekanten SAA_1 und SBB_1 nach demselben, dann bestimmen die Schnittpunkte der Graden Verbindungslinien AB und A_1B_1 und AB_1 und A_1B auf der Polaren LL_1 zwei zugeordnete Punkte einer Involution, deren Doppelpunkte die Berührungspunkte der Tangenten oder, was dasselbe sagt, die Schnittpunkte der Polaren mit dem Kreise sind. (Figur 18 und 19.)

Beweis: Daß AA_1BB_1 zwei Paar zugeordnete Punkte einer Kreisinvolution mit den Doppelpunkten M und N sind, ergiebt sich aus der Umkehrung des Satzes II und aus den Sätzen III und IV. Ferner entspricht $A\beta$ dem Strahl PB und AB_1 oder $A\beta_1$ dem Strahl PB_1 des involutorischen Büschels P, welchem der Büschel A gleich ist. Da nun PB und PB_1 entsprechende Strahlen des Büschels P sind, so sind auch $A\beta$ und $A\beta_1$ zu geordnete Strahlen vom Büschel A. Der Büschel A schneidet also die Polare LL_1 in einer involutorischen Punktreihe. Je mehr sich nun der Strahl SBB_1 der Tangente nähert, um so näher rücken β und β_1 aneinander, bis sie schließlich ganz zusammenfallen. Alsdann bilden sie aber einen Doppelpunkt, welcher der Berührungspunkt der Tangente ist.

Legen wir unserer Betrachtung statt des hyperbolischen involutorischen Strahlenbüschels, in welchem die Strahlen a, b, c, den Strahlen a_1, b_1, c_1 in umgekehrter Reihenfolge entsprechen, einen elliptischen Büschel zu Grunde, dann kommen wir zu demselben

Resultate; nur fällt hier der Pol S innerhalb des Kreises und seine Polare LL_1 aufserhalb (Fig. 19). Die involutorische Punktreihe $\alpha, \beta, \gamma \ldots \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \ldots$ wird gleichlaufend oder elliptisch und hat demnach keine reellen Doppelpunkte. Die Polare wird ideale Sehne oder Sekante mit imaginären Schnittpunkten, und die von S an den Kreis gezogenen Tangenten oder die von S nach den imaginären Schnittpunkten oder Doppelpunkten der Polaren gerichteten Graden sind ebenfalls imaginär.

§ 6.

Normalstrahlen.

In jedem involutorischen Strahlenbüschel giebt es mindestens zwei aufeinander senkrecht stehende zugeordnete Strahlen, welche man **Normalstrahlen** nennt. Man erhält dieselben leicht mit Hülfe der Kreisinvolution.

Ist nämlich in Fig. 20a und 20b $P(a\,b\,a_1\,b_1)$ ein involutorischer Büschel, und wir legen durch den Scheitelpunkt P einen beliebigen Kreis, der die Strahlen a, b, a_1, b_1 in den Punkten A, B, A_1, B_1 schneidet, und ziehen vom Schnittpunkt S der Verbindungslinien AA_1 und BB_1 die Grade SO durch den Mittelpunkt des Kreises, dann sind, wie sich aus der Umkehrung von II ergiebt, die Durchschnittspunkte C und C_1 dieser Sekante zugeordnete Punkte der Kreisinvolution. Daher sind auch PC und PC_1 zugeordnete Strahlen des Büschels $P(a\,b\,c\,a_1\,b_1\,c_1)$, die aber aufeinander senkrecht stehen, da sie einen Peripheriewinkel im Halbkreis einschliefsen.

Lehrsatz I. Die Normalstrahlen eines involutorischen Büschels halbieren den Winkel und Nebenwinkel der beiden reellen oder imaginären Doppelstrahlen.

Beweis: Ziehen wir in Figur 20a von S aus die Tangenten SM und SN an den Kreis O, dann werden die Berührungspunkte M und N derselben die Doppelpunkte der Involution $P\,(ABCA_1B_1C_1)$ (nach § 5 V). Daher werden auch PM und PN die Doppelstrahlen der Involution $P\,(a\,b\,c\,a_1\,b_1\,c_1)$. Nun ist aber Bogen MC = Bogen NC, folglich MPC = NPC. Der Normalstrahl PC halbiert also den Winkel der beiden Doppelstrahlen. Ebenso halbiert der Normalstrahl PC_1 den Nebenwinkel derselben. In einem elliptischen involutorischen Büschel sind die Doppelstrahlen imaginär. Der eine der beiden stets reellen Normalstrahlen halbiert hier den aufserhalb der Ebene liegenden imaginären Winkel derselben.

Lehrsatz II. Das Produkt der Tangenten der beiden Winkel, welche ein Normalstrahl n mit zwei beliebigen zugeordneten involutorischen Strahlen a_1 und a_2 bildet, hat einen constanten Wert und ist gleich dem Quadrat der Tangenten des Winkels, den der Normalstrahl mit einem Hauptstrahl bildet.

Beweis: Bezeichnen wir den zweiten Normalstrahl mit n_1 und die beiden Hauptstrahlen mit h und h_1, dann ist nach Formel 7 § 3 und § 2 S. VI $(n\,n_1\,h\,a) = (n_1\,n\,h_1\,a_1)$

oder $\frac{\sin. nh}{\sin. n_1h} : \frac{\sin. na}{\sin. n_1a} = \frac{\sin. n_1h_1}{\sin. nh_1} : \frac{\sin. n_1a_1}{\sin. na_1}$ oder, da Winkel n_1h_1 und nh, n_1a und na, ferner Winkel n_1h_1 und nh_1, n_1a und na_1 zur Summe oder Differenz einen Rechten haben, und da tang. $nh = -$tang. nh_1 ist, so ist tang. $na \cdot$ tang. $na_1 =$ (tang. $nh)^2$.

Sind die Hauptstrahlen imaginär, dann ist tang. $na \cdot$ tang. $na_1 = (i$ tg. $nh)^2 = -$(tang. $nh)^2$.

§ 7.

Projektivische Gebilde am Kreis.

Satz I. Der geometrische Ort für die Durchschnittspunkte von zwei gleichen und gleichgerichteten Strahlenbüscheln $P(bcde)$ und $P_1(b_1c_1d_1e_1)$ ist ein Kreis, der durch die Scheitel P und P_1 der beiden Büschel geht. Der Strahl a im ersten Büschel, den die Tangente im Punkte P an den Kreis bildet, entspricht dem Strahl a_1 des anderen Büschels, welcher die beiden Scheitelpunkte P und P_1 der Büschel verbindet. Umgekehrt entspricht e_1 dem Strahl e.

Beweis: Fig. 21. Da die Büschel gleich und gleichgerichtet sein sollen, sind die Winkel bc, cd etc. den Winkeln b_1c_1, c_1d_1 etc. gleich; folglich muſs der durch PBC gelegte Kreis auch durch P_1 gehen; ebenso muſs der durch PBD gelegte Kreis durch P_1 gehen Da nun ein Kreis durch 3 Punkte der Peripherie PBP_1 unzweideutig bestimmt ist, müssen die Punkte C und D auf demselben Kreise liegen.

Sind a und e_1 Tangenten an diesen Kreis, dann ist Winkel $ab = a_1b_1$; daher entspricht der Strahl a des Büschels P dem Strahl a_1 des Büschels P_1 und ebenso e_1 des Büschels P_1 dem Strahl e des Büschels P.

Anmerkung. Sind die gleichen, daher auch projektivischen Strahlenbüschel P und P_1 entgegengesetzt gerichtet, dann ist der geometrische Ort der Durchschnittspunkte entsprechender Strahlen eine gleichseitige Hyperbel.

Satz II. Eine um einen Kreis sich drehende Tangente schneidet auf zwei festen Tangenten desselben zwei projektivische Punktreihen ein. In diesen entsprechen die im Schnittpunkte der festen Tangenten vereinigten Teilpunkte den Berührungspunkten der Tangenten.

Beweis: Ist in Figur 22 $A\mathfrak{A}$ eine beliebige Tangente, welche den Kreis in P berührt, und sind $\mathfrak{B}B_1$ und $B\mathfrak{B}_1$ die festen Tangenten, dann ist $AOP = \frac{1}{2}PAB_1$ und $\mathfrak{A}OP = \frac{1}{2}PO\mathfrak{B}_1$; folglich $AO\mathfrak{A} = \frac{1}{2}B_1O\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{2}(2R - \alpha) = R - \frac{\alpha}{2}$, also constant. Dreht sich aber ein Winkel um seinen Scheitel, dann durchlaufen seine Schenkel zwei gleiche, folglich projektivische Strahlenbüschel, die jede Transversale, also auch jede der beiden festen Tangenten in zwei projektivischen Punktreihen schneiden. Da nun $B_1O\mathfrak{B} = \frac{1}{2}B_1O\mathfrak{B}_1 = AO\mathfrak{A}$ ist, so wird der Punkt $\mathfrak{A}$ sich in $\mathfrak{B}$ befinden, wenn A in B_1 ist. Der Punkt B_1 der einen Punktreihe entspricht also dem Punkte $\mathfrak{B}$ der anderen; ebenso ist B_1 dem Punkt B homolog.

Satz III. Die auf der Polaren eines Kreises liegenden Punkte bilden eine Reihe, welche dem Büschel ihrer Polaren projektivisch ist. (Figur 23.)

Beweis: Sind ABC die in der Polaren von S liegenden Punkte und a, b, c mit dem Scheitel S ihre zugehörigen Polaren, dann ist Winkel ab gleich AOB, da ihre Schenkel aufeinander senkrecht stehen; ebenso ist Winkel bc = BOC etc.; folglich Strahlenbüschel O (ABC) = S (abc). Nun ist ABC.... projektivisch O (ABC...) (§ 2 Satz VI), daher auch (ABC....) projektivisch S (abc...).

Umkehrung des Satzes: Die Pole der Strahlen eines Büschels in Bezug auf einen Kreis liegen auf der Polaren des Scheitels und bilden eine dem Strahlenbüschel projektivische Punktreihe.

Satz IV. Satz von Carnot. Schneiden die Seiten eines Dreiecks oder deren Verlängerungen eine Kreislinie, dann ist das Produkt der sechs durch den Kreis erzeugten Eckabschnitte in dem einem Sinne um die Figur herum gleich dem Produkt der sechs anderen Abschnitte in dem entgegengesetzten Sinne.

Figur 24. Behauptung: $AD \cdot AD_1 \cdot BE \cdot BE_1 \cdot CF \cdot CF_1 = AF \cdot AF_1 \cdot CE \cdot CE_1 \cdot BD \cdot BD_1$.

Beweis:
$$\left.\begin{aligned} AD \cdot AD_1 &= AF \cdot AF_1 \\ BE \cdot BE_1 &= BD \cdot BD_1 \\ CF \cdot CF_1 &= CE \cdot CE_1 \end{aligned}\right\}.$$

$$AD \cdot AD_1 \cdot BE \cdot BE_1 \cdot CF \cdot CF_1 = AF \cdot AF_1 \cdot CE \cdot CE_1 \cdot BD \cdot BD_1.$$

Der Satz gilt auch für die imaginären Durchschnittspunkte, z. B. für J und J_1 der idealen Sekante AC; denn $AD \cdot AD_1 = AJ \cdot AJ_1$ (wie später in Kap. V, Aufgabe
$BE \cdot BE_1 = BD \cdot BD_1$ 1 u. 4 bewiesen werden wird),
$C_1J \cdot C_1J_1 = C_1E \cdot C_1E_1$

$$AD \cdot AD_1 \cdot BE \cdot BE_1 \cdot C_1J \cdot C_1J_1 = AJ \cdot AJ_1 \cdot C_1E \cdot C_1E_1 \cdot BD \cdot BD_1.$$

Satz V. Legt man durch die Eckpunkte EFGH eines Kreisvierecks (Fig. 41) die Tangenten AB, BC, CD, AD, dann liegen erstens die Durchschnittspunkte je zweier gegenüberliegenden Seiten beider Vierecke in einer Graden KL_1 und bilden durch ihre Ecken und Diagonalen 3 Paar entsprechender Punkte einer Involution; zweitens schneiden sich zwei Diagonalen beider Vierecke in ein und demselben Punkt O, welcher Pol der Graden KL_1 ist.

Beweis: Nach dem Satze von Pascal (vergl. Uth, Uebungss. 242) liegen die Durchschnittspunkte je zweier gegenüberliegender Seiten eines Sehnensechsecks in einer Graden. Läßt man zwei Paare von Eckpunkten des Sechsecks in einen Punkt zusammenfallen, z. B. in den Punkten E und G der Figur, dann geht das eingeschriebene Sechseck in ein Viereck EFGH über, und als Verbindungslinien der in den Punkten E und G zusammengefallenen Punkte müßen die Tangenten AB und CD gelten. Nimmt man an, es seien in F und H je zwei Sechseckspunkte aufeinandergefallen, dann sind die Tangenten BC und AD als ihre Verbindungsgraden zu betrachten. Daher liegen die Durchschnittspunkte K und K_1 des eingeschriebenen Vierecks und die Durchschnittspunkte R und L_1 der Tangenten, welche den Kreis in den gegenüberliegenden Ecken dieses Vierecks berühren, in ein und derselben Graden.

Da im Pascal'schen Sechseck die Reihenfolge der Eckpunkte beliebig gewählt werden kann, so darf man auch in dem Viereck EFGH die Eckpunkte verschieden annehmen. Nimmt man das eingeschriebene Viereck in der Form EFHG, dann sind als Seiten die Graden EF, HG, EG, FH und die Tangenten in G und H oder in E und F und als Diagonalen die Graden EH und FG zu betrachten. Die Schnittpunkte dieser Graden liegen auf der Verbindungslinie KO der Ecken des Vierecks. Wird EHFG als eingeschriebenes Viereck betrachtet und werden die Tangenten in F und G oder in E und H als Seiten des Sechsecks angesehen, dann liegen die Schnittpunkte A und C derselben auf der Verbindungslinie K_1O. Die Diagonalen des unbeschriebenen Vierecks gehen also durch den Durchschnittspunkt O der Diagonalen des eingeschriebenen Vierecks.

Da die Punkte K, K_1, L, R_1 sowie die Punkte K, K_1, R, L_1 harmonische sind (Uth, Übungssatz 236 und 232) und da sowohl LR_1 als auch RL_1 durch K und K_1 harmonisch geteilt werden, so ergiebt sich aus der Umkehrung des Satzes III in § 3, daſs K, K_1, R, R_1, L, L_1 eine Involution bilden. Die von den Punkten R und L_1 an den Kreis gezogenen Tangenten haben Berührungssehnen, welche durch O gehen, daher ist O der Pol der Graden RL_1.

§ 8.

Jeder Kegelschnitt kann als das durch Projektion entstandene Bild eines Kreises betrachtet werden und nimmt deshalb auch an allen projektivischen Eigenschaften, sofern auf einer Graden bestimmte Punkte oder von bestimmten Graden die Schnittpunkte in Betracht kommen, teil. Projektivische Strahlenbüschel, welche im Kreise gleich sind, sind im Kegelschnitte mindestens noch projektivisch. Es gelten demnach die in § 7 für den Kreis aufgestellten Sätze auch für Kegelschnitte.

Legen wir in Figur 36 durch den Kegel mit kreisförmiger Basis $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{A}$ und dem Scheitel P eine beliebige Ebene, welche die Ebene des Grundkreises in LL_1 schneidet, dann erzeugt diese einen Kegelschnitt xBCA. Legen wir ferner durch drei beliebige Punkte $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ des Grundkreises und durch den Scheitel P des Kegels drei Ebenen, dann entsteht eine dreiseitige Pyramide, deren Schnitt mit der Ebene $xBCALL_1$ das Dreieck ACB ist. Die Seiten dieses Dreiecks und des Dreiecks $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ schneiden sich verlängert auf LL_1. Projicieren wir jetzt den Scheitel P und den Kegelschnitt mit dem Dreieck ACB auf die Ebene des Kreises, dann erhalten wir in derselben das Dreieck $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ als Vorlage, den Punkt P als Strahlpunkt, die Grade KL_1 auf welcher sich die entsprechenden Seiten der Dreiecke schneiden, als Bildaxe und das Dreieck ACB als Bild. Nehmen wir drei beliebige andere Punkte des Kreises und verfahren mit denselben wie oben mit $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$, dann erhalten wir zwar ein anderes Dreieck ACB des Kegelschnittes, aber der Strahlpunkt P und die Bildaxe LL_1 bleiben dieselben.

Man kann daher sagen, dafs der Kegelschnitt, welcher in der Figur 36 eine Ellipse ist, ein Bild des Kreises sei, für den Punkt P als Strahlpunkt und die Grade LL_1 als Bildaxe.

§ 9.

Von den auf die Kegelschnitte bezüglichen Sätzen werden namentlich die folgenden zur Anwendung kommen:

Satz I. Zieht man von einem Punkte S aufserhalb oder innerhalb eines Kegelschnittes zwei Sekanten (Sehnen), dann bestimmen diese auf demselben vier Punkte einer Involution (Umkehrung von § 5, Satz II). Die vier graden Verbindungslinien der nicht zugeordneten Punkte derselben schneiden sich in zwei Punkten der Polaren (§ 5, Satz IV). Zieht man eine dritte Sekante durch S, dann liefert diese zwei neue involutorische Punkte des Kegelschnittes, und die Verbindungslinien dieser beiden Punkte mit je zwei anderen zugeordneten Punkten geben zwei neue homologe involutorische Punkte auf der Polaren an. Die Berührungspunkte der von S an den Kegelschnitt gezogenen Tangenten sind Punkte der Polaren und die reellen (imaginären) Doppelpunkte der involutorischen Punktreihe auf derselben (§ 5 Satz V). Die von S aus nach den involutorischen Punkten der Polaren gezogenen Strahlen bilden einen involutorischen Büschel, dessen reelle (imaginären) Doppelstrahlen die reellen (imaginären) Tangenten sind. (§ 5.)

Satz II. Zwei projektivische und daher auch zwei involutorische nicht perspektivische Strahlenbüschel schneiden sich in Punkten eines Kegelschnittes, der durch die Scheitel der beiden Büschel geht. Der geraden Verbindungslinie der beiden Scheitel als einem Strahl des einen Büschels entspricht die Tangente im Scheitel des andern, und der Schnittpunkt der Tangenten in beiden Scheiteln ist Pol zur graden Verbindungslinie ihrer Scheitel (§ 7, Satz I und Uth, Übungssatz 238.)

Satz III. Die Pole der Tangenten an einem Kegelschnitt in Bezug auf einen Kreis bilden einen zweiten Kegelschnitt, der dem ersten reciprok polar ist, d. h. der die Eigenschaft besitzt, dafs der Pol jeder an ihn gezogenen Tangente in Bezug auf genannten Kreis wiederum auf dem ersten Kegelschnitt liegt.

Beweis: Sind t_1 und t_2 zwei feste Tangenten des Kegelschnittes H, dann können wir sie nach Kapitel IV, § 7, Satz II als Träger zweier projektivischen Punktreihen betrachten, die durch eine sich um H drehende dritte Tangente erzeugt sind. Die Pole der beweglichen Tangente müssen, wie leicht einzusehen ist, eine zusammenhängende Kurve E bilden. Bezeichnen wir die auf einander folgenden Lagen der beweglichen Tangente mit t_3, $t_4 \ldots$, dann enthält die Kurve E die Pole P_1, P_2, P_3, $P_4 \ldots$ der Tangenten t_1, t_2,

t_3, t_4.... Mithin sind umgekehrt die Graden $P_1 P_2$, $P_1 P_3$, $P_1 P_4$.... die Polaren der Durchschnittspunkte von $t_1 t_2$, $t_1 t_3$, $t_1 t_4$....; denn der Durchschnitt zweier Polaren ist Pol für die Verbindungslinie der zugehörigen Punkte (Uth, Übungssatz 241). Das Strahlenbüschel $P_1 (P_2 P_3 P_4 \ldots)$ ist nun projektivisch der Punktreihe auf t_1. In gleicher Weise ist das Strahlenbüschel $P_2 (P_1 P_3 P_4 \ldots)$ projektivisch der Punktreihe, welche durch die bewegliche Tangente auf t_2 angegeben wird. Da nun die Punktreihen auf t_1 und t_2 einander projektivisch sind, so müssen auch die Strahlenbüschel $P_1 (P_2 P_3 \ldots)$ und $P_2 (P_1 P_3 \ldots)$ projektivisch sein, und die Punkte $P_1 P_2 P_3 \ldots$ müssen als Schnittpunkte homologer Strahlen auf einem Kegelschnitt liegen (§ 7, Satz I). Die Kurve E ist demnach ein Kegelschnitt. Fassen wir jetzt zwei beliebige Punkte P_x und P_y auf dem Kegelschnitt E ins Auge, dann sehen wir, daſs ihre Polaren t_x und t_y Tangenten an dem Kegelschnitt H sind. Legen wir durch P_x und P_y Tangenten an den Kegelschnitt E, dann liegen ihre Pole in Bezug auf den Kreis O auf den Tangenten t_x und t_y des Kegelschnittes H und der Pol der Verbindungsgraden $P_x P_y$ ist der Schnittpunkt von t_x und t_y.

Jemehr sich der Punkt P_x dem Punkte P_y nähert, umsomehr kommt die Tangente in P_x in die Lage der Tangente in P_y, und umsomehr nähert sich ihr Schnittpunkt der Kurve H. Fallen endlich die beiden Punkte P_x und P_y in einen zusammen, dann fallen auch ihre Tangenten zusammen, und zwar in die nunmehr durch einen Punkt bezeichnete Verbindungslinie $P_x P_y$. Der Durchschnittspunkt der Tangenten t_x und t_y, welcher der Pol der Tangente in P_x oder P_y ist, fällt auf die Kurve H. Die in einem beliebigen Punkte $P_{x(y)}$ des Kegelschnittes E berührende Tangente hat also ihren auf den Hilfskreis O bezogenen Pol auf dem Kegelschnitt H. Daraus läſst sich schlieſsen, daſs alle Tangenten an die Kurve E ihre Pole auf H haben. Da nun E der geometrische Ort der Pole der Tangenten an H und H der geometrische Ort der Pole der Tangenten an E ist, so sind beide Kurven in Bezug auf den Hilfskreis O reciprok polar.

Satz IV. Die Schnittpunkte der Seiten eines Dreiecks mit einem Kegelschnitt liegen so, daſs das Produkt der sechs Eckabschnitte des Dreiecks in dem einen Sinne um die Figur herum gleich dem Produkt der sechs Abschnitte in dem anderen Sinne ist (§ 7, Satz IV).

Satz V. Die Seiten eines einem Kegelschnitte einbeschriebenen Vierecks schneiden sich in einer Graden, die Polare zum Durchschnitt der Diagonalen ist (§ 7, Satz V).

Umkehrung: Zieht man von zwei zugeordneten Punkten der Polaren eines Kegelschnittes je zwei Sekanten, welche sich in 3 Punkten der Kurve treffen, dann liegt auch ihr vierter gemeinschaftlicher Punkt auf derselben, und die Verbindungslinien je zweier gegenüberliegender Schnittpunkte gehen durch den Pol der gegebenen Polaren.

Satz VI. Zieht man von zwei zugeordneten Punkten einer graden involutorischen Punktreihe Tangenten an einen Kegelschnitt, dann bilden diese ein demselben umbeschriebenes Vierseit, von dem zwei Diagonalen sich im Pol der Graden, dem Träger der Punktreihe, schneiden (§ 7, Satz V).

Satz VII. Eine um einen Kegelschnitt sich drehende Tangente schneidet zwei feste Tangenten in zwei projektivischen Punktreihen. In diesen entsprechen die im Schnittpunkte der festen Tangenten vereinigten Teilpunkte den Berührungspunkten der Tangenten (§ 7, Satz II).

Umkehrung: Liegen auf zwei Graden zwei projektivische, aber nicht perspektivische Punktreihen, dann sind die Verbindungslinien je zweier entsprechender Punkte Tangenten eines Kegelschnittes, der die beiden Graden in denjenigen Punkten berührt, welche ihrem Schnittpunkte entsprechen.

Satz VIII. Die auf der Polaren eines Kegelschnittes liegenden Punkte bilden eine Reihe, welche dem Büschel ihrer Polaren projektivisch ist (Kap. IV, § 7, Satz III).

Umkehrung. Die Pole eines Strahlenbüschels in Bezug auf einen Kegelschnitt liegen auf der Polaren des Scheitels desselben und bilden eine dem Büschel projektivische Punktreihe.

Aufgabe I. Einen Kegelschnitt zu zeichnen, der durch fünf gegebene reelle Punkte $O O_1 A B C$ geht.

Auflösung. Die drei Strahlen $O(ABC)$ und $O_1(ABC)$ bestimmen nach der Umkehrung des Satzes II dieses Paragraphen zwei projektivische Büschel. Zu einem beliebig angenommenen vierten Strahl OD des einen Büschels kann man leicht den entsprechenden Strahl $O_1 D_1$ des anderen finden. Diese beiden Strahlen schneiden sich in einem sechsten Punkte des Kegelschnittes. Wie den sechsten kann man einen siebenten, achten Punkt u. s. w. finden.

Aufgabe II. Einen Kegelschnitt zu zeichnen, von dem fünf reelle Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4, t_5 gegeben sind.

Auflösung. Die Tangenten t_3, t_4, t_5 schneiden die beiden Tangenten t_1 und t_2 in zwei projektivischen Punktreihen $\alpha\beta\gamma$ und $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ (nach Satz VII des Paragraphen 9). Zu einem beliebigen vierten Punkt δ der einen Reihe kann man leicht den entsprechenden δ_1 der anderen finden. Hat man nun auf t_1 die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon \ldots$ und auf t_2 die entsprechenden Punkte α_1, γ_1, δ_1, ε_1 gefunden, dann sind die Verbindungslinien $\alpha\alpha_1$, $\beta\beta_1$, $\gamma\gamma_1$, $\delta\delta_1$, $\varepsilon\varepsilon_1 \ldots$ Tangenten an den gesuchten Kegelschnitt (Umkehrung von Satz VII). Dieselben umhüllen ihn um so genauer, je zahlreicher sie sind.

Aufgabe III. Die gemeinschaftlichen Tangenten an zwei Kegelschnitte I und II zu zeichnen.

Auflösung (Fig. 40). Wir nehmen einen beliebigen Hilfskreis III und suchen für denselben die Pole von fünf Tangenten, die man an jeden der beiden Kegelschnitte gelegt hat, dann erhält man zwei neue Kegelschnitte als reciprok polare Kurven zu den beiden gegebenen I und II. In Figur 40 entsprechen den Tangenten in den Punkten 1, 2, 3, 4, 5 an die Ellipse I die Pole 1, 2, 3, 4, 5 für den Kreis III und den Tangenten in a, b, c, d, e der Ellipse II die Pole a, b, c, d, e für III. Durch die fünf Pole 1 bis 5 und a bis e sind die beiden gezeichneten Kegelschnitte, welche in der Figur Hyperbeln sind, bestimmt. Sie sind den Kegelschnitten I und II in Bezug auf den Kreis III reciprok polar. Diese beiden reciprok polaren Kurven schneiden sich in vier Punkten α, β, γ, δ, welche auch imaginär werden können. Jedem dieser Durchschnittspunkte entspricht offenbar eine Kreispolare, welche eine gemeinsame Tangente an die beiden gegebenen Kegelschnitte I und II sein muſs. Den Punkten α, β, γ, δ entsprechen in der Figur die Tangenten t_1, t_2, t_3, t_4.

Kapitel V.

Aufgabe 1. Die imaginären Durchschnittspunkte einer Graden und eines Kreises sollen bestimmt werden.

Analysis: Schneidet ein Kreis eine Grade in den reellen Punkten P und P_1 und man fällt vom Mittelpunkt M desselben ein Lot MO auf die Grade, dann ist, wenn man die Sekante als Grundrichtung und den Punkt O als Anfangspunkt der Zählung annimmt, $OP = +\sqrt{r^2 - \overline{MO}^2}$ und $OP_1 = -\sqrt{r^2 - \overline{MO}^2}$.

Berührt die Grade den Kreis, wird $MO = r$, daher $OP = OP_1 = 0$.

Wenn aber wie in Figur 25 die Grade XX einen Abstand vom Mittelpunkt hat, der gröſser ist als der Radius, dann wird $r^2 - \overline{MO}^2$ negativ und $op = +i\sqrt{\overline{MO}^2 - r^2}$ und $op_1 = -i\sqrt{\overline{MO}^2 - r^2} \cdot op$ und op_1 stehen daher auf XX senkrecht und geben durch ihre Endpunkte die gesuchten imaginären Durchschnittspunkte J und J_1 an.

Konstruktion: Mache $MO \perp XX$, ziehe von O die Tangente OC an den Kreis und mache OJ und $OJ_1 = OC$.

Behauptung: J und J_1 sind die imaginären Durchschnittspunkte der Graden XX und des Kreises M oder $oi = \sqrt{r^2 - \overline{OM}^2}$ und $oi_1 = -\sqrt{r^2 - \overline{OM}^2}$.

Beweis: $OJ = OC = \sqrt{\overline{OM}^2 - r^2}$; daher $oi = iOJ = \sqrt{r^2 - \overline{OM}^2}$,

$OJ_1 = OC = \sqrt{\overline{OM}^2 - r^2}$; daher $oi_1 = iOJ_1 = -\sqrt{r^2 - \overline{OM}^2}$.

Die Punkte J und J_1 liegen zwar nicht auf der Peripherie des Kreises, genügen aber sonst jeder Forderung, die man für die reellen Durchschnittspunkte einer Graden und eines Kreises aufstellen kann. So ist z. B. $DF \cdot DF_1 = DJ \cdot DJ_1 = (DO + iOJ) \cdot (DO - iOJ) = \overline{DO}^2 + \overline{OJ}^2 = \overline{DJ}^2 = \overline{DJ}_1^2 = \overline{DE}^2$.

Aufgabe 2: Man soll mit gegebenem Radius r einen Kreis konstruieren, der durch zwei gegebene imaginäre Punkte J und J_1 geht.

Analysis (Fig. 25): Sind J uud J_1 die gegebenen imaginären Punkte, dann kennt man auch ihre reelle Verbindungslinie, als welche die Grade XX (nicht JJ_1) angenommen werden muſs. Diese Grade ist die im Centralpunkt O errichtete Senkrechte auf JJ_1. Der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises liegt nun auf der in O auf XX errichteten Senkrechten. $\overline{OJ}^2$ muſs, wie in voriger Aufgabe erläutert ist, gleich $\overline{OM}^2 - r^2$, also $OM = OG = \pm\sqrt{r^2 + \overline{OJ}^2} = \pm\sqrt{\overline{JG}^2 + \overline{OJ}^2}$ sein.

Es giebt also oberhalb und unterhalb der Graden XX einen Punkt M, um den man mit r einen Kreis beschreiben kann, der die Aufgabe erfüllt.

Anmerkung: Die neuere Geometrie giebt die imaginären Punkte J und J_1 nicht unmittelbar, sondern stellt sie durch eine elliptische Punktreihe dar, deren Doppelpunkte sie sind. (Vergl. Kap. IV § 3 Erklärung.)

In Fig. 25 z. B. sind die beiden imaginären Punkte durch die elliptische Punktreihe $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1$ auf dem Träger XX gegeben. Die beiden über $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ als Durchmesser beschriebenen Kreise bezeichnen durch ihre Durchschnittspunkte die beiden imaginären Punkte J_1 und J; denn $O\mathfrak{A} \cdot O\mathfrak{A}^1 = O\mathfrak{B} \cdot O\mathfrak{B}_1 = O\mathfrak{C} \cdot O\mathfrak{C}_1 = (iOJ)^2$.

Aufgabe 3: Zwei Kreise sind gegeben, von denen der eine ganz aufserhalb oder innerhalb des anderen liegt, man soll die gemeinschaftliche imaginäre (ideelle) Sekante zeichnen.

Analysis (Fig. 26): Ist OD die gesuchte gemeinschaftliche Sekante und sind J und J_1 die gemeinschaftlichen Schnittpunkte derselben mit den Kreisen M_1 und M_2 oder M_3, dann mufs $OJ = OJ_1$, gleich der von O an jeden der drei Kreise gezogenen Tangente sein, wie in Aufgabe 1 erläutert ist. O mufs demnach ein Punkt der Potenzlinie der beiden Kreise sein, und die gemeinschaftliche Sekante mufs in diesem Punkte auf JJ_1, also auf der Centrallinie des Kreises senkrecht stehen.

Daraus ergiebt sich, dafs die gesuchte Grade OD die Potenzlinie oder gemeinschaftliche Chardale der beiden Kreise ist, von denen der eine den anderen ausschliefst oder einschliefst.

Aufgabe 4 (Figur 26): Die gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte zweier Kreise zu bestimmen, von denen der eine ganz aufserhalb oder innerhalb des anderen liegt.

Auflösung: Die gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte der beiden Kreise sind die imaginären Schnittpunkte ihrer gemeinschaftlichen Sekante, also der Potenzlinie. Diese Schnittpunkte J und J_1 müssen, wie aus der Auflösung der Aufgabe Nr. 3 hervorgeht, auf der Centrallinie liegen, und ihr Abstand von dem Durchschnittspunkt O der Centrallinie und der Potenzlinie ist gleich der von diesem Punkte aus an einen der beiden Kreise gezogenen Tangente.

Anmerkung 1: Die Punkte J und J_1 verhalten sich wieder, abgesehen davon, dafs sie nicht auf den Peripherien der Kreise selbst liegen, wie zwei reelle Punkte der gegebenen Kreise. Zieht man z. B. von einem beliebigen Punkte D der imaginären Sekante die Tangenten $D\mathfrak{A}$, $D\mathfrak{A}_1$, $D\mathfrak{B}$, $D\mathfrak{B}_1$, $D\mathfrak{C}$, $D\mathfrak{C}_1$ an die Kreise und verbindet D mit J und J_1, dann ist $\overline{D\mathfrak{A}}^2 = D\mathfrak{B}^2 = D\mathfrak{C}^2$ etc. $= DJ \cdot DJ_1$.

Anmerkung 2: Da $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1 = OC \cdot OC_1 = OJ \cdot OJ_1 = \overline{OJ}^2 = \overline{OJ}_1^2$ ist, so bilden die Punkte $ABCA_1B_1C_1$ eine hyperbolische Involution, deren Doppelpunkte die jetzt reellen Punkte J und J_1 sind.

Aufgabe 5: Ein Kreis und zwei imaginäre Tangenten sind gegeben. Man soll die Berührungspunkte derselben bestimmen.

Auflösung: Die imaginären Tangenten sind die Doppelstrahlen des gegebenen elliptischen Strahlenbüschels $P(\alpha\beta\alpha_1\beta_1)$ (Fig. 27) (Kap. IV. § 5 letzter Absatz), welches auf der leicht zu zeichnenden Polaren MN des Scheitels P eine elliptische Punktreihe erzeugt. Die imaginären Doppelpunkte J_1 und J_2 dieser Punktreihe sind sowohl die imaginären Schnittpunkte der Polaren des Punktes P als auch die Berührungspunkte der imaginären Tangenten mit dem gegebenen Kreise (Kap. IV. § 5 S. V).

Anmerkung: Die imaginären Tangenten sind die Doppelstrahlen des elliptischen Büschels $P(\alpha\beta\alpha_1\beta_1)$ und müssen mit der Normallinie n, die hier mit OP zusammenfällt, gleiche Winkel bilden, sodafs tang. $n\alpha \cdot$ tang. $n\alpha_1 =$ tang. $n\beta \cdot$ tang. $n\beta_1 = -$ tang. $^2\varphi$ ist (Kap. IV. § 6 S. I). Drehen wir die Grade J_1J_2 um die Grade MN um 90^0, dann ist diese Bedingung erfüllt. Die um 90^0 um die Axe MN aus der Ebene des Kreises gehobenen Punkte J_1 und J_2 können also als die Berührungspunkte der durch das involutorische Büschel $P(\alpha\beta\alpha_1\beta_1)$ gegebenen Tangenten an den Kreis O betrachtet werden.

Aufgabe 6: Es sind zwei imaginäre Grade gegeben, man soll mit gegebenem Radius r einen Kreis konstruieren, der dieselben berührt.

Analysis: Die beiden imaginären Graden seien die Doppelstrahlen des involutorischen Büschels $P(\alpha\beta\alpha_1\beta_1)$, Fig. 27, dann mufs der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf einem der beiden Normalstrahlen PG oder PR liegen, die man zu den gegebenen Strahlen nach Kap. IV. § 6 konstruieren kann; denn die Normalstrahlen sind nach Kap. IV. § 6 S. I als die Halbierungslinien der von den imaginären Doppelstrahlen gebildeten Winkel $2\varphi i$ und $2R - 2\varphi i$ zu betrachten.

Der gesuchte Kreis mufs auch die imaginären Doppelstrahlen berühren. Nennen wir die Länge des vom Mittelpunkt O des gesuchten Kreises und von dem Scheitel P des gegebenen Büschels begrenzten Teiles der Normallinie: x, dann ist $\frac{r}{x} = \sin.(\varphi i)$, wenn wir unter (φi) den um 90^0 aus der Ebene gedrehten Winkel φ verstehen; daher $x = r\sqrt{1 + \text{cotang.}^2(\varphi i)}$. Bezeichnen wir die Normalstrahlen mit n und n, dann ist der Winkel φ durch die Gleichung: tang. $\alpha n \cdot$ tang. $\alpha_1 n =$ tang $\beta n \cdot$ tang. $\beta_1 n = -(\text{tang.}^2\,\varphi)^2 = \text{tang.}^2\,(\varphi i)$ oder tang. $\alpha n_1 \cdot$ tang. $\alpha_1 n_1 =$ tang. $\beta n_1 \cdot$ tang. $\beta_1 n_1 = -(\text{cotang. }\varphi)^2 = \text{cotang.}^2(\varphi i)$ bestimmt. Man erhält $x = \pm r\sqrt{1 - \text{cotang.}^2\varphi}$ oder $\pm r\sqrt{1 - \text{tang.}^2\,\varphi}$, je nachdem der Mittelpunkt des Kreises auf der Normalen n oder n_1 angenommen wird.

Konstruktion. Suche die Normalstrahlen PG und PR zu $P(\alpha\beta\alpha_1\beta_1)$, errichte im beliebigen Punkte D das Lot DS auf PG, konstruiere über AA_1 und BB_1 als Durchmesser die Halbkreise, welche sich in G schneiden, mache $DG_1 = DG$ und verbinde G_1 mit P. Ziehe LL_1 im Abstande $r \parallel OG$ und $KQ_1 \perp OG$, schlage mit r einen Kreis um Q_1, der die Grade PR in Z trifft, und mache $PO = PZ$.

Behauptung. O ist Mittelpunkt des gesuchten Kreises.

Beweis: $OP = PZ = \sqrt{\overline{Q_1Z}^2 - \overline{Q_1P}^2} = \sqrt{r^2 - \overline{KQ_1}^2\,\text{cotang.}^2\varphi} = r\sqrt{1 - \text{cotang.}^2\varphi}$ und $\text{tang}^2\,\varphi = \frac{\overline{KQ_1}^2}{\overline{PQ_1}^2} = \frac{\overline{DG_1}^2}{\overline{DP}^2} = \frac{(iDG)^2}{(DP)^2} = -\frac{AD}{DP}\cdot\frac{A_1D}{DP} = -$ tang. $\alpha n \cdot$ tang $\alpha_1 n$.

Der Kreis O mit dem Radius r berührt also die gegebenen imaginären Tangenten.

Anmerkung. Der Mittelpunkt eines zweiten Kreises, der die Aufgabe löst, liegt auf der Verlängerung von OP in gleicher Entfernung von P. Die beiden anderen

Werte von x werden imaginär, da $DG_1 > DP$, also auch tang. $\varphi > 1$ wird. Ueberhaupt giebt es immer nur zwei Kreise, welche die Aufgabe erfüllen.

Aufgabe 7. Ein Kreis soll konstruiert werden, der zwei gegebene imaginäre Tangenten in zwei gegebenen imaginären Punkten berührt.

Auflösung (Figur 28): Die imaginären Tangenten seien die Doppelstrahlen des elliptischen involutorischen Büschels P $(\alpha \beta \alpha_1 \beta_1)$ und die imaginären Berührungspunkte die Doppelpunkte der elliptischen involutorischen Punktreihe ABA_1B_1, dann mufs der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf einem der beiden Normalstrahlen PN oder PN_1 des Büschels P liegen. Die imaginären Tangenten treffen die Polare von P in den Doppelpunkten der Punktreihe ABA_1B_1. Durch diese Punktreihe ist die Lage der Polaren pp_1 zu P, und durch die Involution ABA_1B_1 sind die Doppelpunkte J und J_1 gegeben.

Nun mufs Tangente $OC = OJ$ sein, wie in Konstruktion Nr. 1 ausgeführt ist, daher ist C durch den Kreis mit OJ als Radius und durch die Polare PN des Punktes O bekannt. Der Mittelpunkt Q des gesuchten Kreises ist also Schnittpunkt der Normalen PN_1 und der in C auf OC errichteten Senkrechten.

Aufgabe 8. Man soll an zwei gegebene Kreise, von denen der eine ganz innerhalb des anderen liegt, die gemeinschaftlichen Tangenten zeichnen.

Analysis. (Figur 29): Der Scheitel der gemeinschaftlichen imaginären Tangenten ist immer reell, und jeder der beiden Kreise O_1 und O_2 mufs für denselben als Ähnlichkeitspunkt das Bild des anderen sein.

Bezeichnen wir den Abstand O_1P_1 vom Scheitel des elliptischen Büschels P_1 $(\alpha \beta \alpha_1 \beta_1)$ mit x_1, den Abstand O_2P_1 mit x_2 und den Winkel, welchen die imaginären Tangenten mit der Zentrallinie oder einer Normallinie bilden mit φi, dann mufs nach der Analysis der Aufgabe 6: $x_1^2 = r_1^2(1 - \text{cotang.}^2 \varphi)$ und $x_2^2 = r_2^2(1 - \text{cotang.}^2 \varphi)$; mithin auch $\frac{x_1}{x_2} = \pm \frac{r_1}{r_2}$ sein. Die Scheitel der gemeinschaftlichen imaginären Tangenten teilen also, grade wie die von reellen Tangenten, die Zentrallinie im Verhältnis der Radien harmonisch und fallen mit dem äufseren und inneren Ähnlichkeitspunkte zusammen. Die Punkte P_1 und P_2 sind demnach leicht zu finden.

Zwei beliebige durch P_1 gelegte Sekanten bilden nun auf jedem der beiden Kreise nach Kapitel IV, § 5, Satz 5 eine Involution, P_1 $(\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1)$ beziehungsweise P_1 $(\mathfrak{a}\mathfrak{a}_1\mathfrak{b}\mathfrak{b}_1)$, und die Verbindungslinien $\mathfrak{b}\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{a}$ etc. bezeichnen die den Kreisen zugehörigen Polaren p_1p_1 und p_2p_2 und auf jeder derselben zwei zugehörige Punkte a und a_1 oder A und A_1 einer elliptischen Involution. Die Punkte a und A, a_1 und A_1 müssen perspektivisch sein, da sie auf entsprechenden Strahlen des Ähnlichkeitspunktes liegen; zwei andere durch P_1 gelegte Sekanten bezeichnen zwei andere entsprechende Involutionspunkte, z. B. b und b_1, B und B_1. Die von P_1 nach a, a_1, b, b_1 gezogenen Strahlen bilden einen beiden Kreisen angehörigen involutorischen Büschel, dessen Hauptstrahlen die gesuchten gemeinschaftlichen Tangenten sind. Die imaginären Doppelstrahlen des Büschels P_1 sind den äufseren reellen Tangenten zweier auseinander liegender oder sich schneidender Kreise vergleichbar, da der Punkt P_1 auf derselben Seite der Polaren p_1 und p_2 liegt. Die imaginären Tangenten des Punktes P_2, welche hier nicht gezeichnet sind, müssen mit den inneren reellen Tangenten zweier auseinander liegender Kreise verglichen werden, da die Polaren auf verschiedene Seiten von P_2 fallen.

Als Berührungspunkte der Tangenten können entweder die imaginären Schnittpunkte der Polaren mit ihren Kreisen betrachtet werden, von denen zwei, nämlich J_2 und J_4 in der Figur 29 angegeben sind, oder die durch eine Drehung von 90° um die Polare in eine zur Zeichenfläche senkrecht stehende Ebene verlegten Punkte J_1, J_2, J_3, J_4.

Aufgabe 9. Man soll einen Kreis zeichnen, der durch zwei gegebene imaginäre Punkte und einen reellen Punkt geht.

Auflösung: Sind in Fig. 24 J_1 und J_2 die gegebenen imaginären Punkte und P der reelle Punkt, dann ist O als der Halbierungspunkt der imaginären Verbindungslinie JJ_1 und OX als die reelle Verbindungslinie dieser Punkte zu betrachten. Diese mufs zugleich Potenzlinie sein, da $(XO + iOJ)(XO - iOJ)$ und $XO^2 + OJ^2 = XJ^2 = XT^2$ ist, wenn T den Berührungspunkt der Tangente XT bezeichnet.

Nehmen wir also den beliebigen Punkt X auf derselben an und ziehen die Grade XP, dann mufs $XP \cdot XP_1 = XJ \cdot XJ_1$ sein, mithin auch $\frac{XP}{XJ} = \frac{XJ_1}{XP_1}$.

Die Strecke XP_1 ist also als 4. Proportionale zu drei gegebenen Strecken bekannt, daher auch der Punkt P_1 des gesuchten Kreises.

Der Mittelpunkt des letzteren ist der Durchschnittspunkt der in der Mitte von PP_1 errichteten Senkrechten mit der Graden JJ_1.

Aufgabe 10. Einen Kreis zu zeichnen, der eine reelle und zwei imaginäre Tangenten berührt.

Analysis. (Figur 30). Die gegebene reelle Tangente sei t, und die beiden imaginären Tangenten seien durch das elliptische Strahlenbüschel $P(\alpha \beta \alpha_1 \beta_1)$ gegeben, dann mufs der Mittelpunkt M_2 (M_4) des gesuchten Kreises auf einem der beiden Normalstrahlen PN oder PN_1 liegen. Konstruieren wir daher nach Nr. 6 mit einem beliebigen Radius einen Kreis M_1 (M_3), der die beiden Doppelstrahlen des gegebenen Büschels berührt, und legen an diesen eine Tangente t_1, $(t_2) \parallel t$, die den Hülfskreis in B_1 (B_3) berührt, dann ist dieser dem gesuchten Kreis für den Ähnlichkeitspunkt P perspektivisch ähnlich; daher gehen die Verbindungsgraden von P und dem Berührungspunkt B_1 (oder B_3) auch durch den Berührungspunkt B_2 (B_4). Der gesuchte Mittelpunkt M_2 (M_4) ist also der Schnittpunkt der Normalen PN mit dem in B_2 (B_4) auf t errichteten Lote.

Aufgabe 11. Ein reeller Punkt und zwei imaginäre Grade sind gegeben. Man soll einen Kreis zeichnen, der durch diesen Punkt geht und diese Graden berührt.

Auflösung: Ist in Figur 31 A der gegebene Punkt und werden die imaginären Graden durch den Büschel $P(a b a_1 b_1)$ dargestellt, dann mufs der Mittelpunkt des gesuchten Kreises auf einer der beiden Normallinien PN oder PN_1 liegen. Konstruieren wir daher mit beliebigem Radius nach Aufgabe 6 einen Kreis M_1, der die gegebenen imaginären Graden $P(a b a_1 b_1)$ berührt, dann ist dieser dem gesuchten Kreis M für P als Ähnlichkeitspunkt perspektivisch. Verbinden wir P mit A, dann mufs A_1 dem Punkte A entsprechen und $A_1 M_1 \parallel AM$ sein. Daher ist der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises gefunden.

Aufgabe 12. Einen Kreis zu zeichnen, der eine reelle Grade berührt und durch zwei imaginäre Punkte J und J_1 geht.

Auflösung (Figur 32): Konstruieren wir nach Aufgabe 2 mit beliebigem Radius einen Hilfskreis M_1, der durch die beiden imaginären Punkte geht, dann hat dieser mit dem gesuchten Kreis die reelle Verbindungslinie $A A_1 B B_1$ der beiden imaginären Punkte J und J_1 als ideelle Sehne (Potenzlinie) gemein. Diese Grade wird von der gegebenen Tangente in dem Punkte T geschnitten. Zieht man nun von T aus eine Tangente $T B_1$ an den Hilfskreis M_1, dann giebt diese auch die Länge von TB an. Der Mittelpunkt M des gesuchten Kreises ist demnach der Schnittpunkt des in B auf TB errichteten Lotes mit der Graden $J J_1$.

Aufgabe 13. Es soll ein Kegelschnitt gezeichnet werden, der durch drei reelle und zwei imaginäre Punkte geht.

Analysis. In Figur 33 seien L, M und N die gegebenen reellen Punkte, während die imaginären J und J_1 durch die elliptische involutorische Punktreihe $A A_1 B B_1$ bestimmt sein mögen.

Nehmen wir an, der Pol S des Trägers der elliptischen Punktreihe, der in der Figur nicht gezeichnet ist, wäre bekannt und mit M, L und N verbunden, dann würden wir durch die entsprechenden Punkte M_1, L_1, N_1 auf der Peripherie des Kegelschnittes eine Involution erhalten und die Verbindungen ML und ML_1 würden auf dem Träger der gegebenen Punktreihe als entsprechende Strahlen zweier involutorischen Büschel mit den Scheiteln L und L_1 die zugeordneten Punkte C und C_1 bestimmen; ebenso würden die Verbindungen NL und NL_1 die zugeordneten Punkte D und D_1 angeben (Kap. IV, § 9, Satz I und II). Der Punkt L_1 mufs also sowohl auf der Graden MC_1 als auf der Graden ND_1 liegen und ihr Durchschnittspunkt sein. Die Punkte C und D sind bekannt, und die entsprechenden Punkte C_1 und D_1 lassen sich mit Hilfe der gegebenen Punkte $AA_1 BB_1$ leicht auffinden; folglich wird auch der Punkt L_1 bestimmt. Nehmen wir nun L und L_1 als Scheitel zweier involutorischen Strahlenbüschel, dann sind von jedem derselben 3 Strahlen, nämlich LM, LN, LL_1 und L_1M, L_1N und L_1L bekannt und wir können mit Hilfe der gegebenen involutorischen Punktreihe beliebige andere Paare entsprechender Strahlen zeichnen; z. B. LX und L_1X_1. Jedes neue Strahlenpaar liefert einen neuen Punkt des Kegelschnittes. Man kann daher beliebig viel Punkte desselben auf diese Weise angeben.

Anmerkung: LL_1 ist Polare zu E.

Aufgabe 14. Vier imaginäre Punkte sind durch zwei elliptische involutorische Punktreihen AA_1BB_1 und $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$ gegeben und aufserdem ein reeller Punkt L. Man soll den zugehörigen Kegelschnitt zeichnen.

Analysis (Figur 34). Auf den Trägern I und II der gegebenen Punktreihe lassen sich zunächst die Punkte C_1 und $\mathfrak{C}_1$ angeben, welche dem Durchschnitt C oder $\mathfrak{C}$ entsprechen. Die durch $C_1 \mathfrak{C}_1$ gelegte Grade ist die Polare des Punktes C oder $\mathfrak{C}$ in Bezug auf den gesuchten Kegelschnitt. (Siehe Anmerkung zu voriger Aufgabe.)

Nehmen wir an, M und M_1 seien die auf der Polaren $\mathfrak{C}_1 C_1$ gelegenen Punkte des Kegelschnittes, dann können wir dieselben als die Scheitel der beiden involutorischen Büschel betrachten, durch deren Strahlen der Kegelschnitt erzeugt wird. Verbinden wir M und M_1 mit L, dann erhalten wir zwei entsprechende Strahlen dieser Büschel, welche sowohl auf I als auf II zwei den dort liegenden involutorischen Punktreihen entsprechende zugeordnete Punkte $D\,D_1$ und $\mathfrak{D}\,\mathfrak{D}_1$ bezeichnen. Letztere Buchstaben sind in der Zeichnung nicht angegeben. Die Punkte D und $\mathfrak{D}$ sowohl, als D_1 und $\mathfrak{D}_1$ liegen auf je einer Graden, welche durch L geht. Projicieren wir demnach die Punktreihe der Graden II von L aus auf die Grade I als $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1$, dann entstehen hier zwei involutorische Punktreihen, in denen die Punkte D und $\mathfrak{D}$, D_1 und $\mathfrak{D}_1$ zusammenfallen. Die Graden LM und LM_1 treffen also die gemeinschaftlichen Punkte der Punktreihen $A\,A_1\,B\,B_1$ und $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}_1\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{b}_1$. Verbinden wir umgekehrt die gemeinschaftlichen Punkte dieser beiden Punktreihen mit L, dann erhalten wir als Schnittpunkte derselben mit der Polaren $C_1\,\mathfrak{C}_1$ die Punkte M und M_1. Die gemeinschaftlichen Punkte D und D_1 der beiden involutorischen Punktreihen aber erhält man, wie leicht einzusehen, wenn man durch die Schnittpunkte S und S_1 der beiden Gruppen von Halbkreisen einen neuen Halbkreis DS_1SD_1 legt. Da wir nun drei reelle Punkte M, M_1 und L des gesuchten Kegelschnittes haben und aufserdem zwei imaginäre, so ist die Aufgabe auf Nr. 13 zurückgeführt.

Aufgabe 15 (Figur 35). Einen Kegelschnitt zu konstruieren, der drei reelle und zwei imaginäre Tangenten berührt, wenn letztere durch zwei elliptische involutorische Strahlenbüschel gegeben sind.

Analysis. Sind t_1, t_2, t_3 die reellen Tangenten und sind die Doppelstrahlen des Büschels $P(\alpha\,\alpha_1\,\beta\,\beta_1)$ die imaginären, dann können wir mit beliebigem Radius einen Kreis O konstruieren, auf den wir die gegebenen Graden als Polaren beziehen können. Sind dann τ_1, τ_2, τ_3 die Pole zu t_1, t_2, t_3 und a, a_1, b, b_1 die Pole der Strahlen $\alpha, \alpha_1, \beta, \beta_1$ in Bezug auf diesen Kreis O, dann liegen die letzteren vier Punkte auf einer Graden, nämlich der Polaren zu P, und enthalten, da die Punktreihe ebenfalls elliptisch wird, zwei imaginäre Doppelpunkte J_1 und J_2, welche mit den drei reellen Punkten einen Kegelschnitt bestimmen, der dem gesuchten Kegelschnitt reciprok polar ist. (Kap. IV, § 9, Satz III.) Konstruieren wir diesen Kegelschnitt nach Aufgabe 13, dann erhalten wir die in der Figur gezeichnete Hyperbel. Nehmen wir nun auf dieser Kurve einen beliebigen Punkt X an, dann entspricht ihm im Hilfskreis eine bestimmte Polare $p_x\,p_x$, die Tangente an den gesuchten Kegelschnitt sein mufs. Wir können demnach für den gesuchten Kegelschnitt fünf und mehr Tangenten finden, die ihn bestimmen (einhüllen). (Vergl. Kap. IV, § 9, Aufgabe II.)

Der gesuchte Kegelschnitt ist die in Figur 35 gezeichnete Ellipse.

Aufgabe 16. Einen Kegelschnitt zu konstruieren, wenn von demselben zwei Paare imaginärer Tangenten und eine reelle Tangente gegeben ist.

Auflösung: Die Aufgabe läfst sich mit Hilfe eines Hilfskreises, ähnlich wie in voriger Aufgabe, auf Nr. 14 zurückzuführen. Der hiernach gefundene Kegelschnitt ist reciprok polar zu dem gesuchten.

Aufgabe 17. Man soll einen Kegelschnitt zeichnen, der zwei gegebene imaginäre Tangenten berührt und durch drei reelle Punkte geht.

Auflösung: Es seien in Figur 36 durch $P(\beta\beta_1\gamma\gamma_1)$ die gegebenen imaginären Tangenten dargestellt und durch A, B, C die reellen Punkte, dann kann man (nach Aufgabe 6) einen Kreis zeichnen, der die gegebenen imaginären Tangenten berührt. Sein Mittelpunkt liegt, wie in der Figur angegeben ist, auf der Normallinie PN. Dieser Kreis ist dem gesuchten Kreis perspektivisch ähnlich für P als Strahlpunkt. Die Seiten der beiden perspektivischen Dreiecke ABC und 𝔄𝔅ℭ liefern durch ihre Durchschnittspunkte 1, 2 und 3 die Bildaxe. Nehmen wir nun einen beliebigen Punkt X auf der Peripherie des Kreises und verbinden ihn mit einem der schon bezeichneten Punkte, z. B. mit ℭ, dann erhält man einen Punkt 4 der Axe, der mit C verbunden einen Strahl liefert, auf dem der entsprechende Punkt x des Kegelschnittes liegen mufs. Dieser Punkt x mufs aber auch auf dem Strahl PX liegen und ist also bestimmt. Man kann auf diese Weise beliebig viele solcher Punkte des Kegelschnittes finden und denselben dadurch punktweise zeichnen.

Aufgabe 18. Drei reelle Tangenten und zwei imaginäre Punkte eines Kegelschnittes sind durch eine elliptische Punktreihe gegeben, man soll den Kegelschnitt konstruieren.

Auflösung: Zeichnen wir nach Aufgabe 2 mit beliebigem Radius einen Kreis, der durch die beiden imaginären Punkte geht, dann ist der Pol der reellen Verbindungslinie derselben in Bezug auf diesen Kreis der Scheitel eines involutorischen Strahlenbüschels, welcher der elliptischen Punktreihe der imaginären Punkte entspricht. Dieser Strahlenbüschel liefert zwei imaginäre Tangenten, welche mit den Polen der drei reellen Tangenten nach Aufgabe 17 die Konstruktion eines Kegelschnittes ermöglichen, der dem gesuchten reciprok polar ist.

Aufgabe 19. Einen Kegelschnitt zu konstruieren, von dem zwei reelle Tangenten, ein reeller Punkt und zwei imaginäre Punkte gegeben sind.

Analysis (Figur 37). Es seien t und t die gegebenen reellen Tangenten, P der reelle Punkt und J und J_1 die imaginären Punkte, dargestellt durch die elliptische Punktreihe AA_1BB_1. Betrachten wir den Kegelschnitt als Bild eines beliebigen Kreises O für den Träger der Punktreihe AA_1BB_1 als Bildaxe, dann kommt es zunächst darauf an, den Strahlpunkt C zu finden. Die Tangenten t und t schneiden die Bildaxe in den Punkten T und 𝔗; daher entsprechen die Tangenten t_1 und t_1, welche man von diesen Punkten aus an den Kreis ziehen kann, und ihr Durchschnittspunkt 𝔔 den Tangenten des Kegelschnittes und deren Schnittpunkt Q. Schneidet PQ die Bildaxe in U, dann mufs auch U𝔔 den Kreis in dem Punkt 𝔓 schneiden, der P entspricht. Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte Q𝔔 und P𝔓 sind aber Strahlen des Strahlpunktes C.

Da nun der Strahlpunkt C, die Bildaxe T𝔗 und aufser der Vorlage, dem Kreise O, noch ein Punkt des Bildes, nämlich P bekannt sind, so läfst sich das ganze Bild, der Kegelschnitt zeichnen. Verbinden wir zu dem Zwecke einen beliebigen Punkt X der Bildaxe mit den Punkten P und 𝔓, wodurch auf dem Kreise der Punkt $𝔛_1$ entsteht, dann ist der Durchschnitt 𝔛 von $C𝔛_1$ und XP ein Punkt des gesuchten Kegelschnittes, der in Figur 31 eine Ellipse bildet.

Aufgabe 20. Einen Kegelschnitt zu zeichnen, wenn eine reelle Tangente t, zwei reelle Punkte A und B und zwei imaginäre Tangenten P ($\alpha\alpha_1\beta\beta_1$) gegeben sind.

Auflösung: Wir zeichnen einen beliebigen Kreis und suchen die zu der gegebenen Tangente t, dem Strahlenbüschel P und den Punkten A und B gehörigen Pole und Polaren. Wir erhalten dann einen reellen Punkt, eine elliptische involutorische Punktreihe mit zwei imaginären Punkten und zwei reelle Tangenten als Bestimmungsstücke für eine dem gesuchten Kegelschnitte reciprok polare Kurve. Diese können wir nach Aufgabe 19 zeichnen. Ziehen wir an diese fünf oder mehr Tangenten, dann liefern deren Pole in Bezug auf den Hilfskreis fünf oder mehr reelle Punkte, die dem gesuchten Kegelschnitt angehören.

Aufgabe 21. Man soll einen Kegelschnitt zeichnen, von dem eine reelle Tangente und zwei Paare imaginärer Punkte gegeben sind.

Analysis. In Figur 38 sei NZ die gegebene Tangente, die Grade I der Träger der Punktreihe AA_1BB_1, welche die imaginären Punkte J_3 und J_4 bestimmen (J_4 ist nicht gezeichnet), die Grade II der Träger der Punktreihe $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, welche J_1 und J_2 bestimmen (J_2 ist nicht gezeichnet), dann bilden die beiden reellen Verbindungslinien der imaginären Punktepaare, d. h. die Träger I und II mit der Tangente ein Dreieck MLN, auf welches sich der Satz von Carnot (Kap. IV, § 9, Satz IV) anwenden läfst, und es findet zwischen den Eckpunkten und Schnittpunkten mit dem gesuchten Kegelschnitt die Beziehung statt:

$$MJ_3 \cdot MJ_4 \cdot \overline{NX}^2 \cdot LJ_1 \cdot LJ_2 = NJ_3 \cdot NJ_4 \cdot \overline{LX}^2 \cdot MJ_1 \cdot MJ_2.$$

Da aber $MJ_3 = MJ_4$, $LJ_1 = LJ_2$ und $NJ_3 = MJ_4$ ist, so vereinfacht sich die Gleichung in die folgende:

$$MJ_3^2 LJ_1^2 \cdot NX^2 = NJ_3^2 \cdot MJ_1^2 \cdot LX^2$$

oder, wenn wir die Wurzel ausziehen und hier nur das + Zeichen berücksichtigen:

$$MJ_3 \cdot LJ_1 \cdot NX = NJ_3 \cdot MJ_1 \cdot LX.$$

Setzen wir: $MJ_3 \cdot LJ_1 = a^2$ (Fig. 38 β) und $NJ_3 \cdot MJ_1 = b^2$ (Fig. 38 γ), dann ist $\frac{a^2}{b^2} = \frac{LX}{NX}$ oder $\frac{n}{m} = \frac{LX}{NX}$ (Fig. 38 δ), daher $\frac{m-n}{n} = \frac{NX-LX}{NX}$ und $NX = \frac{m}{m-n} NL$.

Damit ist der Punkt X bestimmt. X ist der Berührungspunkt der gegebenen Tangente.

Wir haben also jetzt einen reellen Punkt und zwei Paare imaginärer Punkte der gesuchten Kurve und können diese nach Nr. 14 zeichnen. Diese Konstruktion ist in der Figur ausgeführt.

Aufgabe 22. Einen Kegelschnitt zu zeichnen, von dem ein reeller Punkt und zwei Paare imaginärer Tangenten gegeben sind.

Auflösung: Man zeichnet einen Hilfskreis, sucht die Polare des gegebenen Punktes und die Pole der Strahlen der beiden gegebenen Büschel; dann erhält man eine reelle Tangente und zwei Paare imaginärer Punkte. (Kap. IV, § 7, Satz III.) Der reciprok polare Kegelschnitt kann also nach Nr. 21 und darauf der gesuchte Kegelschnitt nach Kap. IV, § 9, Aufgabe I oder II, gezeichnet werden.

Aufgabe 23. Einen Kegelschnitt zu zeichnen, von dem zwei reelle und zwei imaginäre Punkte und außerdem eine reelle Tangente gegeben ist.

Auflösung (Fig. 39): Wir suchen den Berührungspunkt X der Tangente und zeichnen dann den Kegelschnitt nach Nr. 13.

Sind in Figur 39 P_1 und P_2 die gegebenen reellen Punkte, J_1 und J_2 die imaginären und SN die Tangente, dann kann man auf das Dreieck SMN den Carnotschen Satz anwenden und erhält: $MJ_1 \cdot MJ_2 \cdot SX_1 \cdot SX_2 \cdot NP_1 \cdot NP_2 = SJ_1 \cdot SJ_2 \cdot NX_1 \cdot NX_2 \cdot MP_1 \cdot MP_2$ oder, da $MJ_1 = MJ_2$, $SJ_1 = SJ_2$ und $SX_1 = SX_2$, $NX_1 = NX_2$ (X_1 und X_2 die zwei übereinanderliegenden Berührungspunkte X der Tangente) ist: $\overline{MJ_1^2} \cdot \overline{SX^2} \cdot a^2 = \overline{SJ_1^2} \cdot \overline{NX^2} \cdot b^2$, wenn man $NP_1 \cdot NP_2 = a^2$ und $MP_1 \cdot MP_2 = b^2$ (siehe Figur) setzt, mithin auch, wenn wir wieder nur das + Zeichen der Wurzel berücksichtigen, $MJ_1 \cdot SX \cdot a = SJ_1 \cdot NX \cdot b$ oder für $MJ_1 \cdot a = n^2$ und $SJ_1 \cdot b = m^2$, $\frac{SX}{NX} = \frac{m^2}{n^2} = \frac{p}{q}$ (Figur 39 α).

Wir haben also die Grade SN nur im Verhältnis p : q zu teilen, um den gesuchten Punkt X zu erhalten. Als eine Auflösung der Aufgabe erhält man die in Figur 39 gezeichnete Ellipse.

Aufgabe 24. Einen Kegelschnitt zu zeichnen, der zwei gegebene imaginäre Tangenten in zwei gegebenen imaginären Punkten berührt und durch einen gegebenen reellen Punkt geht.

Auflösung: In Figur 41 sei der reelle Punkt G, die imaginären Tangenten seien die Doppelstrahlen des Büschels $O(KK_1LL_1)$, und die imaginären Berührungspunkte seien die Doppelpunkte der elliptischen Punktreihe KK_1LL_1, dann ist O der Pol des Trägers KL_1 derselben und umgekehrt KL_1 Polare zu O. Die grade Verbindungslinie OG schneidet die Polare im Punkte R_1 und den Kegelschnitt im Punkte E, der als vierter harmonischer Punkt zu R_1OG zu finden ist; denn im vollständigen Viereck teilen die Diagonalen einander harmonisch. (Uth, Übungssatz 236.)

Verbinden wir E und G mit zwei anderen zugeordneten Punkten K und K_1, dann erhalten wir ein dem Kegelschnitt eingeschriebenes Viereck EFGH, also zwei neue Punkte F und H der gesuchten Kurve. (Umkehrung von Satz V, § 9, Kap. IV.) Zwei beliebige andere zusammengehörige Punkte X und X_1 liefern ein neues Viereck mit zwei neuen Kegelschnittspunkten. Man kann also auf diese Weise beliebig viele Punkte der gesuchten Kurve festlegen. In Figur 41 stellt der gezeichnete Kreis den gesuchten Kegelschnitt dar.

Aufgabe 25. Einen Kegelschnitt zu zeichnen, von dem zwei imaginäre Tangenten durch den Büschel $O(KK_1RR_1)$ (Fig. 41) nebst den imaginären Berührungspunkten durch die Doppelpunkte der Reihe KK_1RR_1 und eine reelle Tangente t gegeben sind.

Auflösung: Verlängern wir die beiden entsprechenden Graden KO und K_1O bis zu dem Durchschnitt A und D mit der gegebenen Tangente, dann ist C vierter harmonischer Punkt zu K_1, O, A, also bekannt; denn die Diagonalen eines vollständigen Vierseits teilen sich gegenseitig harmonisch. (Uth, Übungssatz 236). Verbinden wir dann weiter D und L_1 mit C, dann erhält man die Punkte R und B. Man hat auf diese Weise ein dem Kegelschnitt umbeschriebenes Vierseit RAL_1CR dargestellt. Nimmt man zwei beliebige andere entsprechende Punkte X und X_1 der Involution und verfährt mit denselben wie oben mit K und K_1, dann erhält man ein neues umbeschriebenes Vierseit, dessen Seiten den Kegelschnitt einhüllen.

In der Figur 41 stellt der Kreis die gesuchte Kurve dar.

Aufgabe 26. Zwei Kegelschnitte sollen gezeichnet werden, die zwei gegebene imaginäre Tangenten in zwei gegebenen imaginären Punkten berühren und von denen der eine durch einen gegebenen reellen Punkt geht, während der andere eine gegebene reelle Grade berührt.

Auflösung (Fig. 42): $P(AA_1BB_1)$ seien die gegebenen imaginären Tangenten mit den imaginären Punkten der Punktreihe AA_1BB_1. Der gegebene Punkt für den einen Kegelschnitt sei M und die Tangente an den anderen t. Wir zeichnen mit beliebigem Radius einen Kreis O, der die beiden imaginären Tangenten berührt, dessen Mittelpunkt also auf der Normallinie PZ liegt. (In der gezeichneten Figur liegt nur zufällig O auf $\mathfrak{M}\mathfrak{N}_1$.) Derselbe ist die Vorlage für die beiden zu zeichnenden Kegelschnitte und zwar für P als Strahlpunkt.

Konstruieren wir die Polare des Kreises zu dem Punkte P, nämlich p_1p_1, dann entspricht diese der Polaren pp der gesuchten Kegelschnitte. Den ersten Kegelschnitt zeichnen wir als Bild des Kreises für den Strahlpunkt P und eine noch zu bestimmende Bildaxe. Der Durchschnittspunkt T von pp und p_1p_1 ist der erste bekannte Punkt der Bildaxe. Um noch einen zweiten zu finden, verbinden wir M mit P, wodurch wir zunächst die Punkte $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1$ auf dem Kreise erhalten. Der Punkt $\mathfrak{M}$ ist hier als der dem Punkte M entsprechende angenommen. Die Grade MP liefert auch den Punkt $\mathfrak{Q}$ auf der Polaren des Kegelschnittes, der wiederum mit M und P den Punkt M_1 als vierten harmonischen Punkt bezeichnet. Verbinden wir jetzt T mit $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}_1$, dann erhalten wir die neuen Kreispunkte $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N}_1$. TM entspricht $T\mathfrak{M}$, daher liegt der dem Kreispunkte $\mathfrak{N}$ entsprechende Kurvenpunkt N auf $P\mathfrak{N}$; ebenso liegt der Kurvenpunkt N_1 auf TM_1 und $P\mathfrak{N}_1$. Die Durchschnittspunkte U von $\mathfrak{M}\mathfrak{N}_1$ und MN_1 und U_1 von $\mathfrak{M}_1\mathfrak{N}$ und M_1N sind als Schnittpunkte zweier entsprechender Graden zwei neue Punkte der Bildaxe. Jeder derselben bestimmt mit T die Lage der Bildaxe für den durch M gehenden gesuchten Kegelschnitt. Nehmen wir auf derselben einen beliebigen Punkt X an und verbinden ihn mit zwei entsprechenden bekannten Punkten der Kurve und des Kreises, z. B. mit N_1 und $\mathfrak{N}_1$, dann liefert der Strahl $P\mathfrak{A}$ einen neuen Punkt A des gesuchten Kegelschnittes, der sich in der Zeichnung als Ellipse darstellt.

Ist $\mathfrak{S}$ der Schnittpunkt der für den zweiten Kegelschnitt gegebenen Tangente t mit der Polaren pp derselben, dann entspricht ihm der Punkt S auf dem Strahl $P\mathfrak{S}$ und der Polaren des Kreises p_1p_1. Ziehen wir von diesem Punkte aus die Tangente SD an den Kreis O, dann erhalten wir den Berührungspunkt D derselben mit dem Kreise und durch PD den Berührungspunkt $\mathfrak{D}$ der Tangente t mit dem zweiten gesuchten Kegelschnitte.

Wir haben also aufser den beiden imaginären Tangenten und ihren Berührungspunkten noch einen reellen Punkt der zweiten Kurve und können demnach bei der Konstruktion derselben genau verfahren wie bei der Darstellung der ersten. Wir erhalten den Kegelschnitt, welcher in der Figur durch die Punkte $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}_1$ geht.

Aufgabe 27. Zwei auseinanderliegende Kegelschnitte sind gegeben; man soll ihre imaginären Durchschnittspunkte bestimmen.

Auflösung: Sind die beiden Kegelschnitte die in Figur 43 gezeichneten Ellipsen und ist O ein Durchschnittspunkt von zwei nach Kap. IV, § 9, Aufgabe III konstruierten gemeinschaftlichen Tangenten, dann können wir jeden Kegelschnitt als ein Bild des anderen betrachten für den Punkt O als Strahlpunkt und eine noch festzulegende Grade als Bildaxe. Um diese zu finden, ziehen wir drei beliebige Sekanten OA, OB, OC, die auf jedem der beiden Kegelschnitte je drei Paare von Punkten, nämlich AA_1, BB_1, CC_1, $\mathfrak{A}\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{C}\mathfrak{C}_1$ und dadurch wieder zwei Gruppen von perspektivischen Dreiecken: ABC, $A_1B_1C_1$, $\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ etc. bestimmen. Die entsprechenden Seiten je zweier dieser Dreiecke schneiden sich nach Kap. IV, § 1, Satz I auf einer Graden. Diese Graden sind die zwei Polaren der beiden Kurven, denen O als Pol zugehört (Kap. IV, § 5, Satz IV und V), und die beiden Bildaxen L und L_1. Nimmt man Dreieck ABC als Vorlage und $\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$ als Bild, dann erhält man als Bildaxe die Grade L. Man erhält z. B. zwei Punkte von L_1, wenn man die Graden BA und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_1$, BA_1 und $\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}$ bis zu ihrem Schnitt verlängert; und man bekommt zwei Punkte von L_1, wenn man in derselben Weise mit BA und $\mathfrak{B}\mathfrak{A}$, CB und $\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ verfährt. Bestimmt man zu irgend einem Punkte der Graden L, etwa zum Punkte α, die Polaren in beiden Ellipsen, dann sind sie entsprechende Grade in der Vorlage und im Bild und müssen sich wiederum auf L schneiden. Die Punkte α, β und die Schnittpunkte α_1 und β_1 ihrer Polaren sind aber zugehörige Punkte einer Involution nach Kap. IV, § 9, Satz VIII (α und α_1 können mit K und K_1 in Figur 41 verglichen werden). Die beiden Graden L und L_1 sind demnach die Träger von involutorischen Punktreihen, die elliptisch werden und den beiden Kegelschnitten zugleich angehören. Die imaginären Doppelpunkte dieser elliptischen Punktreihen sind als die Schnittpunkte der beiden Kegelschnitte anzusehen. In der Figur sind sie durch J_1, J_2, J_3 angegeben. J_4 ist, um Raum zu sparen, in der Figur nicht angegeben. Ihre Konstruktion mit Hilfe der Punktreihen $\alpha\alpha_1\beta\beta_1 \ldots$ und $aa_1bb_1 \ldots$ ist aus der Zeichnung ersichtlich.

Schlufs.

Die Rechnungen in Kapitel IV und die Konstruktionen in Kapitel V haben uns gezeigt, dafs man die sogenannten imaginären Werte nicht als unmögliche, mit denen nichts anzufangen ist, zu betrachten hat, dafs man dieselben vielmehr ebenso gut wie die reellen zur praktischen Rechnung und zur Konstruktion ebener Figuren benutzen kann und dafs die mathematische Zeichen- und Wortsprache erst durch die vierte Erweiterung des Zahlengebietes eine umfassende und einfache geworden ist, sodafs man z. B. sagen kann: das Symbol $\sqrt[m]{a}$ giebt bestimmt und ohne Einschränkung den Wert und die Zahl der Wurzeln von a an; eine Grade schneidet einen Kegelschnitt in zwei Punkten; zwei Kegelschnitte schneiden sich in vier Punkten; von einem Punkte, mag er aufserhalb, innerhalb oder auf dem Kegelschnitt liegen, kann man zwei Tangenten an denselben ziehen; u. s. w.

Wir haben gesehen, daſs das Imaginäre dann entsteht, wenn sich zwei algebraische Operationen in unvollziehbarer Weise vereinigen, und daſs dasselbe anzeigt, daſs die absolute Gröſse, um die es sich handelt, zwar nicht auf dem eingeschlagenen Wege, wohl aber auf einem anderen zu finden ist, daſs z. B. die Gleichung $e^{i\varphi} = \cos.\ \varphi + i \sin.\ \varphi$ bedeutet: Eine Exponentialfunktion mit der Basis des natürlichen Logarithmensystems kann die cyclometrischen Funktionen sinus und cosinus nicht in reeller Weise als Summe oder Differenz angeben, wohl aber die entsprechenden hyperbolischen Funktionen, auf die man durch Vermittelung des Imaginären gelangt, wenn man vom Kreise zur gleichseitigen Hyperbel übergeht.

Wir haben erkannt, daſs, wenn man aus der Verbindung der Gleichungen einer Graden und eines Kegelschnittes Wurzeln von imaginärer Form erhält, wirkliche reelle Durchschnittspunkte nicht vorhanden sind, daſs es aber Punkte giebt, die als solche betrachtet werden können und die sich mittelst einer auf der Graden darstellbaren elliptischen involutorischen Punktreihe angeben lassen.

Wir haben endlich gefunden, daſs $\sqrt{-1}$, als Operationszeichen betrachtet, die Drehung einer Graden um 90^0 bewirkt und daſs die complexe Zahl $q + q i$ sowohl einen Punkt der Ebene darstellt, dessen Coordinaten p und q sind, als eine Grade, deren absolute Länge $\sqrt{p^2 + q^2}$ ist, und daſs es gleichgiltig ist, ob man eine Strecke $1_\alpha = \cos.\ \alpha + i \sin.\ \alpha$ selbst um das mfache des Winkels α dreht oder ihre Summanden $\cos.\ \alpha$ und $i \sin.\ \alpha$ einzeln. Setzt man fest, daſs in dem Symbol $a (\cos.\ \alpha + \omega \sin.\ \alpha)$ ω nicht das algebraische $\sqrt{-1}$ bedeutet, sondern irgend eine Strecke im Raum, deren Quadrat $= -1$ ist, dann gehört dieses Symbol der fünften und neuesten Erweiterung des Zahlengebietes an, nämlich dem von Graſsmann und Hamilton entdeckten Gebiete der Quaternionen. Dasselbe faſst mehr in seine Zeichen als alle früheren üblichen Methoden zusammengenommen, und diese Zeichen unterscheiden sich von den früher gebräuchlichen auch noch dadurch, daſs sie auſser den Gröſsenverhältnissen auch solche Eigenschaften angeben, welche sich auf Lage und Bewegung der Objekte beziehen. Dieser neueren Methode bedienen sich demnach vorzugsweise die Physiker, da durch dieselbe solche Anwendungen der Mathematik auf die praktische Physik erlaubt sind, die bisher auf groſse Schwierigkeiten stieſsen. In dieser neuesten Rechnungsmethode wird $\sqrt{-1}$ als Strecke im Raume aufgefaſst, welche an keine bestimmte Richtung gebunden ist.

Unter besonderen Umständen wird die Strecke ϱ, welche hier Vektor genannt wird, auf ein System von drei aufeinander senkrecht stehenden Einheitsstrecken bezogen und durch die Gleichung $\varrho = xi + yj + zk$ angegeben, worin x, y, z drei gewöhnliche algebraische Gröſsen sind, während i, j, k den Wert $\sqrt{-1}$ haben, aber so, daſs $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$, wobei also das kommutative Prinzip nicht mehr giltig ist. Der Quotient zweier Vektoren verlangt zu seiner Bestimmung auſser den Vektoren i, j und k noch vier gewöhnliche algebraische Gröſsen; deshalb ist die ganze Rechnungsweise von Hamilton als Methode der Quaternionen bezeichnet worden.

Ich habe in der vorliegenden Abhandlung in bescheidener Weise von dieser Methode, soweit dieselbe in einer Ebene in Betracht kommen kann, Anwendung gemacht, als ich mich der Richtungszahlen bediente.

Mir bleibt nun noch übrig, den Wunsch auszusprechen, daſs meine Abhandlung über die sogenannten imaginären Werte diejenigen Schüler, welche sich mit derselben befassen werden, zum weiteren Studium, namentlich in der neueren Geometrie, anregen möge.

Bei meiner Arbeit habe ich nachstehende Abhandlungen und Bücher benutzt, von denen zum Anfangsstudium in der neueren Geometrie, meiner Auffassung nach, namentlich das von Seeger verfaſste zu empfehlen ist:

Tillich. Grundlage und Ausbau unserer Algebra. Berlin. 1869.
Röſsler. Die neuen Definitionen der irrationalen Zahlen. Hannover. 1886.
Kämmerer. Zur Theorie des Negativen und Imaginären. Sondershausen. 1891.
v. d. Heyden. Anwendung der Hyperbelfunktionen. Essen. 1886.
Grebel. Complexe Werte in geometrischer Darstellung. Zeitz. 1851.
Riecke. Rechnung mit Richtungszahlen. Stuttgart. 1856.
Günther. Hyperbelfunktionen. Halle. 1881.
Staudigl. Lehrbuch der neueren Geometrie. Wien. 1870.
Cremona (Trautvetter). Elemente der projektivischen Geometrie. Stuttgart. 1882.
Tait (Scherff). Elementares Handbuch der Quaternionen. Leipzig. 1880.
Paulus. Neuere Geometrie. Stuttgart. 1853.
Witzschel. Neuere Geometrie. Leipzig. 1858.
Seeger. Neuere Geometrie. Braunschweig. 1880.
Henrici und Treutlein. Elementare Geometrie. Leipzig. 1897.
Spitz. Ebene Geometrie. Leipzig und Heidelberg. 1869.
Uth (Franz). Leitfaden für den Unterricht in der Planimetrie. Cassel. 1894.

Druckfehler-Berichtigung.

In Folge der Schwierigkeit der Wiedergabe durch den Druck haben einige Figuren, z. B. Nr. 43, ihre Genauigkeit eingebüſst.

Seite 6, Zeile 4 von unten lies $a\,b + b\,c$ statt $b\,c$.
„ 8, „ 5 „ „ „ $a\,i \sin. \alpha$ „ $a \sin. \alpha$.
„ 9, „ 11 „ „ „ $a \cdot e^{i\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$ statt $A\,E^{i\frac{1}{2}\frac{1}{2}}$.
„ 10, „ 20 bis 23 „ $A\,B$ und $A_1\,B_1$ statt $B\,C$ und $B_1\,C_1$ und umgekehrt.
„ 10, „ 25 „ Divisoren statt Dividenden und umgekehrt.

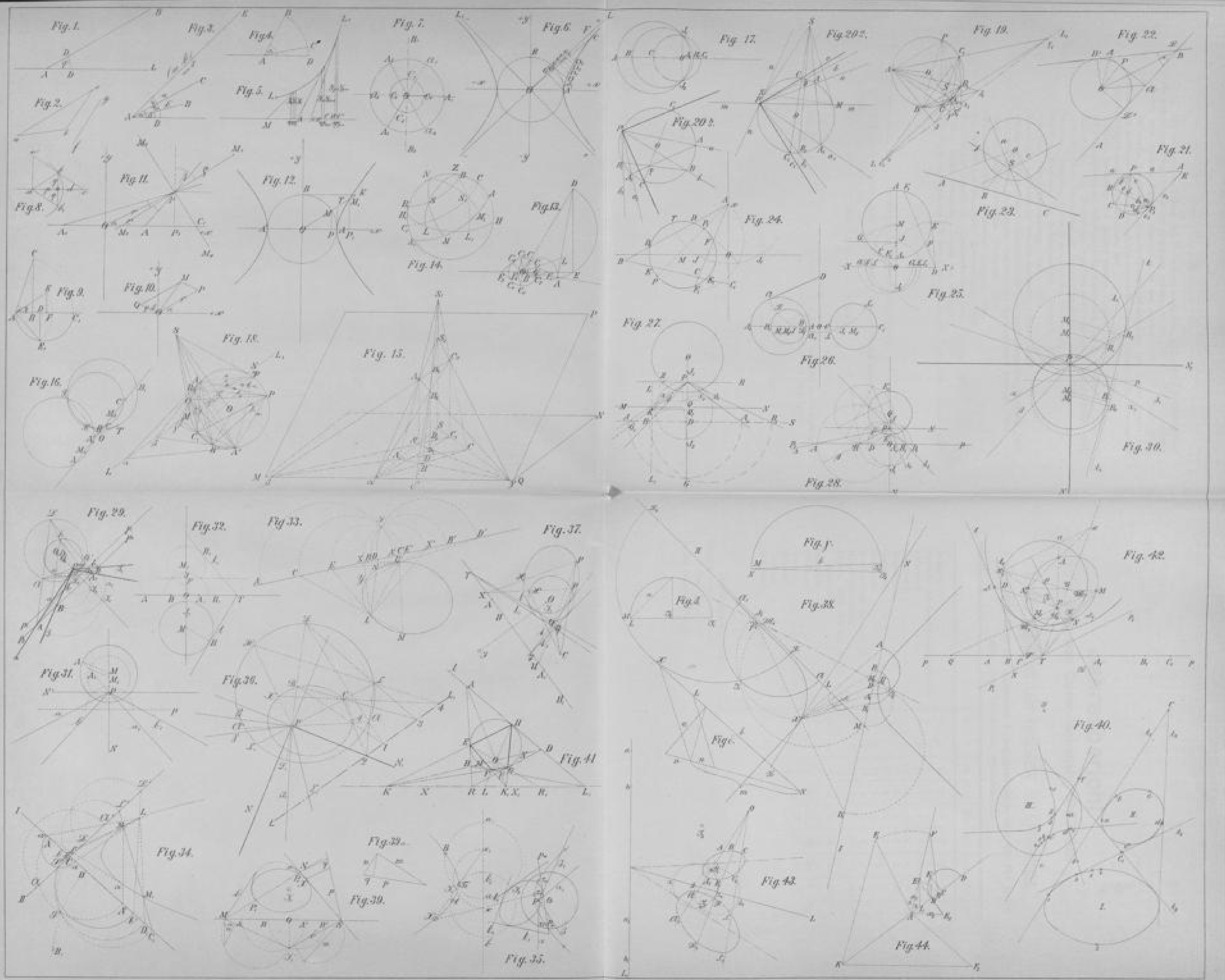

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 33.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
Fig. 39.
Fig. 40.
Fig. 41
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.