Ueber die vollständige quadratische Gleichung mit zwei Veränderlichen.

Die geometrische Bedeutung eines analytischen Ausdrucks ändert sich, wenn die Veränderlichen, deren Function er ist, eine andere Bedeutung annehmen. Wenn wir in der vollständigen quadratischen Gleichung mit zwei Veränderlichen diesen letzteren statt der gewöhnlichen Abscissen- und Ordinatenwerthe dieselbe Bedeutung geben, welche die Constanten der linearen Gleichung $y + ax + b = 0$ haben, und demgemäß a, als Veränderliche gedacht, mit r, ebenso b mit s bezeichnen, so bedeutet die Gleichung

$$as^2 + 2bsr + cr^2 + 2ds + 2er + f = 0 \quad (1)$$

einen durch eine bestimmte Aufeinanderfolge gerader Linien gebildeten geometrischen Ort oder, was dasselbe ist, eine durch die sie umhüllenden Tangenten dargestellte Curve, so wie die Gleichung $y' + x'r + s = 0$ (2) den Punkt $(y'x')$ als gemeinschaftlichen Durchschnitt aller durch ihn gezogenen geraden Linien ausdrückt. Lösen wir (1) nach s auf, so ist

$$s = \frac{-(br + d) \pm \sqrt{(br + d)^2 - (cr^2 + 2er + f)\,a}}{a} \quad (3).$$

Für jedes r gibt es also zwei von dem Werthe $s = -\dfrac{br + d}{a}$ (4) zu beiden Seiten gleich weit entfernte Tangenten der Curve, die sich dadurch im Allgemeinen als Centralcurve charakterisirt, und deren Centrum zur Ordinate $\dfrac{d}{a}$, zur Abscisse $\dfrac{b}{a}$ hat. In dem besondern Falle, daß $a = 0$, liegt das Centrum unendlich weit.

Eine Tangente $(s'r')$ wird Tangente für einen bestimmten Berührungspunkt, wenn noch eine andere durch denselben Punkt gehende Tangente mit ihr zusammenfällt; fallen noch zwei, drei oder mehrere Tangenten in dieser Weise mit ihr zusammen, so entsteht für jenen Punkt ein Contact zweiter, dritter und überhaupt höherer Ordnung. Eine Tangente $(s'r')$ wird ferner von der unmittelbar auf sie folgenden im Berührungspunkte geschnitten. Dieser Umstand führt uns sofort zu der Gleichung ihres Berührungspunktes, nämlich:

$$(as' + br' + d)\,s + (bs' + cr' + e)\,r + ds' + er' + f = 0 \quad (5),$$

welcher wir auch folgende Form geben können:

$$(as + br + d)\,s' + (bs + cr + e)\,r' + ds + er + f = 0 \quad (6).$$

Für $s' = 0,\ r' = 0$ erhalten wir hieraus

$$ds + er + f = 0 \quad (7)$$

als Gleichung des Berührungspunktes der ersten Axe; ebenso für $\frac{s'}{r'} = 0,\ \frac{1}{r'} = 0$

$$bs + cr + e = 0 \quad (8)$$

als Gleichung des Berührungspunktes der zweiten Axe, falls diese Axen überhaupt der Curve begegnen; endlich für $\frac{r'}{s'} = 0,\ \frac{1}{s'} = 0$, d. h. für eine unendlich weit liegende Tangente ist die Gleichung des Berührungspunktes:

$$as + br + d = 0,$$

d. i. das Centrum, wie Gleichung (4) zeigt. Wir ersehen aus dem Gesagten, daß die Tangente und ihr Berührungspunkt sich voneinander und vom Umfange der Curve entfernen können. Auf diese Beziehung zwischen beiden werden wir später zurückkommen.

Die Gleichung des Berührungspunktes einer vom Ursprunge ausgehenden Tangente ist gemäß (5) und (6):

$$(br' + d)\ s + (cr' + e)\ r + er' + f = 0$$

oder $$(bs + cr + e)\ r' + ds + er + f = 0;$$

für eine der ersten Axe parallele Tangente ist sie:

$$(as' + d)\ s + (bs' + e)\ r + ds' + f = 0$$

oder $$(as + br + d)\ s' + ds + er + f = 0$$

und für eine der zweiten Axe parallele Tangente:

$$(as' + br')\ s + (bs' + cr')\ r + ds' + er' = 0$$

oder $$(as + br + d)\ s' + (bs + cr + e)\ r' = 0.$$

Aus (5) erhalten wir für die Coordinaten des Berührungspunktes der Tangente $(s'r')$ die Werthe:

$$y = \frac{ds' + er' + f}{as' + br' + d'},\quad x = \frac{bs' + cr' + e}{as' + br' + d'}$$

aus welchem sich wiederum Ausdrücke von folgender Form ergeben:

$$s = \frac{\alpha y + \beta x + \gamma}{\delta y + \varepsilon x + \zeta},\quad r = \frac{\alpha' y + \beta' x + \gamma'}{\delta y + \varepsilon x + \zeta}.$$

Denken wir uns diese in (1) substituirt, so erhalten wir die vollständige quadratische Gleichung in x und y. Die Gleichung (1) ist somit der Ausdruck einer Curve zweiter Ordnung. Wir wollen dieselbe in ihren verschiedenen Modificationen näher betrachten.

Aus dem Radicanden in (3) läßt sich die Wurzel ziehen, wenn $(b^2 - ac)(d^2 - af) = (bd - ae)^2$ (9). In diesem Falle gibt die Gleichung (3):

$$s = -\frac{br + d}{a} \pm \frac{r\sqrt{b^2 - ac} + \sqrt{d^2 - af}}{a} \quad (10)$$

und stellt zwei vom Punkte $s = -\frac{br + d}{a}$ d. i. vom Centrum gleich weit entfernte und mit demselben in gerader Linie liegende Punkte dar. Diese gerade Linie ist bestimmt durch $r = -\sqrt{\frac{d^2 - af}{b^2 - ac}} = -\frac{bd - ae}{b^2 - ac}$ und $s = -\frac{be - cd}{b^2 - ac}$.

Ist zugleich mit (9) auch $b^2 - ac = 0$, woraus weiter folgt, daß $be - cd = 0$, so sind die beiden Punkte:

$$s = -\frac{br + d}{a} \pm \frac{\sqrt{d^2 - af}}{a} \quad (11)$$

und liegen mit dem Punkte $s = -\frac{br + d}{a}$ auf einer der zweiten Axe Parallelen, deren Lage durch $\frac{s}{r} = -\frac{b}{a} = -\frac{e}{d}$ bestimmt ist.

Ist $d^2 - af = 0$, so liegen die Punkte

$$s = -\frac{br + d}{a} \pm \frac{r\sqrt{b^2 - ac}}{a} \quad (12)$$

in derselben Weise auf einer mit der ersten Axe Parallelen, deren Lage durch $s = -\frac{d}{a}$ bestimmt ist. Finden die Bedingungen $b^2 - ac = 0$ und $d^2 - af = 0$ zugleich mit (9) Statt, so fallen beide Punkte mit dem Mittelpunkte zusammen.

Die Gleichung (9) könnte auch bestehen 1) wenn sowohl $b^2 - ac$ als auch $d^2 - af$ negativ wären; 2) wenn $b^2 - ac = 0$ und $d^2 - af < 0$; 3) wenn $b^2 - ac < 0$ und $d^2 - af = 0$. In jedem dieser Fälle würden die bezüglichen zwei Punkte imaginär, ihre Verbindungslinie aber reell sein.

Die Gleichung (1) führt uns zu folgenden allgemeinen Beziehungen zwischen einer Tangente und ihrem Berührungspunkte. Die Tangente $(s'r')$ berührt gemäß (5) die Curve im Punkte

$$(as' + br' + d)\, s + (bs' + cr' + e)\, r + ds' + er' + f = 0;$$

eine beliebige zweite Tangente $(s''r'')$ berührt im Punkte

$$(as'' + br'' + d)\, s + (bs'' + cr'' + e)\, r + ds'' + er'' + f = 0.$$

Bezeichnen wir die Verbindungslinie beider Berührungspunkte mit $(s_1 r_1)$, so erhalten wir mit Weglassung der Accente in den Parenthesen:

$$(as + br + d)\, s_1 + (bs + cr + e)\, r_1 + ds + er + f = 0 \quad (13)$$

d. i. die Gleichung des Durchschnittspunktes der beiden Tangenten $(s'r')$ und $(s''r'')$. Wir nennen diesen Punkt den Pol der Secante $(s_1 r_1)$ und diese Secante selbst die Polare jenes Punktes. Seine Gleichung läßt sich auch so ausdrücken:

$$(as_1 + br_1 + d)\, s + (bs_1 + cr_1 + e)\, r + ds_1 + er_1 + f = 0.$$

Der Pol einer zweiten Secante $(s_2 r_2)$ ist demnach:

$$(as_2 + br_2 + d)\, s + (bs_2 + cr_2 + e)\, r + ds_2 + er_2 + f = 0.$$

Nennen wir die Verbindungslinie dieser beiden Pole (RS), so erhalten wir analog wie früher:

$$(as + br + d)\, S + (bs + cr + e)\, R + ds + er + f = 0$$

für die Gleichung des Punktes, in welchem sich die Secanten $(s_1 r_1)$ und $(s_2 r_2)$ schneiden. Wir nennen auch diesen Punkt den Pol der Geraden (RS) und letztere seine Polare, da seine Gleichung in Beziehung auf (RS) dieselbe Form hat, wie (13) in Beziehung auf $(r_1 s_1)$. Wir schließen hieraus, daß die Verbindungslinie der Pole zweier Geraden die Polare des Durchschnittspunktes dieser Geraden ist, daß also überhaupt die Polaren aller Punkte einer Geraden durch den Pol dieser Geraden gehen und die Pole aller durch denselben Punkt gehenden Geraden auf der Polare dieses Punktes liegen. Der Berührungspunkt einer Geraden hat dieselbe Gleichung wie ihr Pol; er geht also in den Pol über, wenn die Gerade die Curve entweder schneidet oder gar nicht trifft. Die Gleichungen (7) und (8), welche die Berührungspunkte der ersten und zweiten Axe bezeichnen, drücken daher allgemein die Pole dieser Geraden aus, und das Centrum ist der Pol einer unendlich weit liegenden Geraden. Die Ordinate und Abscisse des Poles der ersten Axe sind $\frac{f}{d}$, $\frac{e}{d}$ und des Poles der zweiten Axe $\frac{e}{b}$, $\frac{c}{b}$. Ziehen wir eine mit der ersten Axe parallele Tangente, so ist ihr Berührungspunkt:

$$(as_1 + d)\, s + (bs_1 + e)\, r + ds_1 + f = 0.$$

Der durch diesen Berührungspunkt gehende Durchmesser hat also die Gleichung:

$$(d^2 - af)\, s + (de - bf)\, r = 0.$$

Der durch den Pol der ersten Axe gehende Durchmesser hat die nämliche Gleichung, wie sich dieses aus der Gleichung des Centrums: $as + br + d = 0$ und des genannten Poles: $ds + er + f = 0$ unmittelbar ergibt. Also liegt der Pol einer Geraden auf dem durch den Berührungspunkt einer mit ihr parallelen Tangente gezogenen Durchmesser. Setzen wir in der Gleichung der Curve $r = 0$, so erhalten wir aus der Gleichung:

$$as^2 + 2ds + f = 0$$

die Ordinatenwerthe der Berührungspunkte der mit der ersten Axe parallelen Tangenten. Für die dieser Axe zunächst liegende Tangente ist derselbe:

$$\frac{d}{a} - \frac{\sqrt{d^2 - af}}{a},$$

während $\frac{d}{a}$ und $\frac{f}{d}$ die Ordinaten des Centrums und des Poles der ersten Axe sind. Aus ihnen ergibt sich die Proportion:

$$\frac{d}{a} : \frac{\sqrt{d^2 - af}}{a} = \frac{\sqrt{d^2 - af}}{a} : \left(\frac{d}{a} - \frac{f}{d}\right)$$

d. h. der durch den Pol gehende Halbmesser ist die mittlere Proportionale zwischen den Abständen des Poles und seiner Polare vom Centrum.

Die Gleichung (1), nach r aufgelöst, gibt:

$$r = \frac{-(bs + e) \pm \sqrt{(bs + e)^2 - (as^2 + 2ds + f)\, c}}{c}.$$

Da nun $r = -\frac{bs + e}{c}$ der Pol der zweiten Axe ist, so folgt hieraus, daß zwei von einem beliebigen Punkte der zweiten Axe ausgehende Tangenten mit dieser Axe und mit der vom nämlichen Punkte durch den Pol derselben gezogenen Geraden ein harmonisches Büschel darstellen. Zu einem analogen Schlusse führt der aus Gleichung (1) hervorgehende Werth:

$$\frac{1}{r} = \frac{-\left(d\frac{s}{r} + e\right) \pm \sqrt{\left(d\frac{s}{r} + e\right)^2 - \left(a\frac{s^2}{r^2} + 2b\frac{s}{r} + c\right) f}}{f},$$

da wir wissen, daß $\frac{1}{r} = -\frac{d\frac{s}{r} + e}{f}$ der Pol der ersten Axe ist. Jedes von einem beliebigen Punkte der ersten Axe ausgehende Tangentenpaar bildet mit der vom nämlichen Punkte aus durch den Pol der ersten Axe gezogenen Geraden und mit dieser Axe selbst vier Harmonikalen.

Die aus Gleichung (1) für s und $\frac{s}{r}$ sich ergebenden Werthe können wir in folgender Form ausdrücken:

$$s = \frac{-(br + d) \pm \sqrt{(b^2 - ac)\left[r^2 + 2\frac{bd - ae}{b^2 - ac}r + 1\right]}}{a}$$

$$\frac{s}{r} = \frac{-\left(\frac{d}{r} + b\right) \pm \sqrt{(d^2 - af)\left[\frac{1}{r^2} + 2\frac{bd - ae}{d^2 - af}\frac{1}{r} + 1\right]}}{a}.$$

In jedem dieser Ausdrücke ist der rationale Theil die Gleichung für das Centrum. Tritt nun der Fall ein, daß $b^2 - ac = d^2 - af$, so folgt, daß für $r = 0$ und $\frac{1}{r} = 0$ die Wurzel jedesmal denselben Werth hat, daß also die mit den beiden Axen parallelen Tangentenpaare gleiche Entfernung vom Centrum haben, in welchen Richtungen wir auch die Axen annehmen mögen. Das Quadrat dieser constanten Entfernung ist:

$$\frac{b^2 - ac}{a^2} \sin^2\beta = \frac{d^2 - af}{a^2} \sin^2\beta,$$

wo β den Coordinatenwinkel bezeichnet. Setzen wir in diesen Ausdrücken die Constante a, welche wir ja willkürlich annehmen können, gleich $\sin^2\beta$, so reduciren sie sich auf:

$$\frac{b^2 - ac}{a} = \frac{d^2 - af}{a},$$

welche Quotienten wir kurz durch R^2 bezeichnen wollen. Nennen wir die Coordinaten des Centrums y' und x' so erhalten wir:

$$y' = \frac{d}{a},\ x' = \frac{b}{a},\ \text{also } d = y' \sin^2\beta \text{ und } b = x' \sin^2\beta;$$

$$c = \frac{b^2}{a} - R^2 = x'^2 \sin^2\beta - R^2;\ f = \frac{d^2}{a} - R^2 = y'^2 \sin^2\beta - R^2.$$

Der Pol der ersten Axe hat zur Abscisse: $\frac{e}{d} = \frac{e}{y' \sin^2\beta}$, und in Beziehung auf diesen Pol und die erste Axe findet nach dem Frühern die Proportion Statt:

$$y' \sin\beta : R = R : \left(\frac{e}{y' \sin^2\beta} - x'\right) tg\beta,$$

woraus folgt, daß $e = y'x' \sin^2\beta + R^2 \cos\beta$. Demgemäß nimmt die Gleichung der Curve folgende Form an:

$$[s^2 + 2x'sr + x'^2r^2 + 2y's + 2y'x'r + y'^2] \sin^2\beta = R^2 (1 - 2\cos\beta + r^2)$$

$$\text{oder: } \frac{(y' + x'r + s)^2 \sin^2\beta}{1 - 2r\cos\beta + r^2} = R^2.$$

Sie stellt also den geometrischen Ort aller von einem gegebenen Punkte $(y'x')$ in constanter Entfernung R liegenden Geraden dar, d. i. einen **Kreis**.

Für rechtwinkelige Coordinaten ist die Gleichung des Kreises:

$$\frac{(y' + x'r + s)^2}{1 + r^2} = R^2.$$

Im Allgemeinen hat s den Werth:

$$\frac{-(br+d) \pm \sqrt{(b^2-ac)\,r^2 + 2\,(bd-ae)\,r + d^2 - af}}{a},$$

dessen Radicand $(b^2-ac)\left[r^2 + \frac{2(bd-ae)}{b^2-ac}\,r + \frac{d^2-af}{b^2-ac}\right]$ für alle reellen Werthe von r positiv bleibt, wenn b^2-ac positiv ist und $r^2 + \frac{2(bd-ae)}{b^2-ac}\,r + \frac{d^2-af}{b^2-ac}$ sich in imaginäre Factoren zerlegen läßt, also wenn

$$(ae-bd)^2 - (b^2-ac)\,(d^2-af) < 0.$$

Die Curve hat alsdann in allen Richtungen ein Paar reeller Tangenten und ist in sich selbst geschlossen, also eine Ellipse. Ist der letzte Ausdruck positiv, so ist der Radicand im Werthe für s kurz ausgedrückt: $(b^2-ac)\,(r-r_1)\,(r-r_2)$, wo r_1 und r_2 reell sind. Je mehr r sich einem dieser Werthe nähert, um so näher kommen die beiden parallelen Tangenten dem Centrum; für jeden der Werthe r_1 und r_2 selbst fallen die Tangenten in eine einzige zusammen, welche durch das Centrum geht. Für Tangenten, deren r zwischen r_1 und r_2 liegt, ist, wenn $b^2-ac<0$, das entsprechende s reell, für alle andern Tangenten aber imaginär; wenn $b^2-ac>0$, so ist umgekehrt s für die erstgenannten Tangenten imaginär, für die letzteren reell. Die Curve liegt somit nur in einem Paare der von den Tangenten r_1 und r_2 gebildeten Scheitelwinkel; sie nähert sich diesen Geraden immer mehr und wird in unendlicher Entfernung von ihnen berührt, ist daher eine zwischen ihren beiden Asymptoten liegende Hyperbel. Zur nähern Bestimmung ihrer Lage bemerken wir, daß, wenn b^2-ac und d^2-af zugleich entweder positiv oder negativ sind, beide Asymptoten in das nämliche Paar Scheitelwinkel der Coordinatenaxen fallen und im ersten Falle die Hyperbel in demjenigen Paar Scheitelwinkel der Asymptoten liegt, welches die Coordinatenaxen nicht enthält, und alsdann sowohl Tangenten hat, die der ersten, als auch solche, die der zweiten Axe parallel sind; im letzteren Falle umgekehrt. Sind b^2-ac und d^2-af von entgegengesetztem Vorzeichen, so liegt jede Asymptote in einem besonderen Paar Scheitelwinkel der Coordinatenaxen; ist b^2-ac positiv, so liegt die Hyperbel mit der ersten Axe im nämlichen Paar Scheitelwinkel der Asymptoten und hat unter ihren Tangenten solche, die der zweiten Axe parallel sind; ist b^2-ac negativ, so findet das Umgekehrte Statt.

Die Asymptotenwerthe r_1 und r_2 gehen aus der Gleichung

$$(b^2-ac)\,r^2 + 2\,(bd-ac)\,r + d^2 - af = 0$$

hervor. Ist also $d^2-af=0$, so ist eine Asymptote der ersten Axe parallel; die andere ist bestimmt durch: $-\frac{2(bd-ae)}{b^2-ac}$. Ist $b^2-ac=0$, so ist eine Asymptote der zweiten Axe parallel; für die andere erhält man den Werth: $-\frac{2(bd-ae)}{d^2-af}$. Finden beide Bedingungen zugleich Statt, so sind beide Asymptoten den Coordinatenaxen parallel. Die Bedingung $d^2-af=0$ ist gleichbedeutend mit $\frac{d}{a}=\frac{f}{d}$ d. h. das Centrum und der Pol der ersten Axe haben dieselbe Ordinate. Eine einer Asymptote parallele Gerade hat ihren Pol auf der Asymptote. Die Bedingung $b^2-ac=0$ ist gleichbedeutend mit $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}$ d. h. das Centrum und der Pol der zweiten Axe haben dieselben Abscisse.

Wenn der Ausdruck $(ae - bd)^2 - (b^2 - ac)(d^2 - af)$ Null ist, so erhält r den Werth $\frac{ae - bd}{b^2 - ac}$; der Radicand im Ausdrucke für s wird alsdann:

$$(b^2 - ac)\left[r - \frac{ae - bd}{b^2 - ac}\right]^2$$

und die Gleichung läßt sich so schreiben:

$$\left(s + \frac{b + \sqrt{b^2 - ac}}{a} r + \frac{d}{a} - \frac{ae - bd}{a\sqrt{b^2 - ac}}\right)\left(s + \frac{b - \sqrt{b^2 - ac}}{a} r + \frac{d}{a} + \frac{ae - bd}{a\sqrt{b^2 - ac}}\right) = 0.$$

Sie stellt somit zwei Punkte dar, die mit dem Centrum in gerader Linie liegen. Diese Linie ist bestimmt durch den Werth:

$$r = \frac{ae - bd}{b^2 - ac}.$$

Da die Ordinate und Abscisse des Centrums $\frac{d}{a}$ und $\frac{b}{a}$ sind, so folgt, daß, wenn $d = 0$ und $b = 0$, das Centrum im Coordinatenanfange liegt. Da ferner $\frac{f}{d}$ die Ordinate des Poles der ersten Axe, $\frac{c}{b}$ die Abscisse des Poles der zweiten Axe ist, so muß, je nachdem $f = 0$ oder $c = 0$, die Curve von der ersten oder von der zweiten Coordinatenaxe berührt werden. Hieraus werden wir leicht die Bedeutung der unvollständigen quadratischen Gleichungen erkennen. Zunächst sehen wir in der Gleichung

$$as^2 + cr^2 + 2er + f = 0$$

die Centralcurve, deren Centrum im Coordinatenanfange liegt. Wir erhalten für s die Werthe:

$$s = \pm\sqrt{-\frac{cr^2 + 2er + f}{a}} = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}\left(r^2 + \frac{2e}{c} r + \frac{f}{c}\right)}.$$

Je nachdem $e^2 - cf$ negativ, positiv oder Null ist, haben wir eine Ellipse, Hyperbel oder zwei vom Centrum gleichweit entfernte und mit demselben in gerader Linie liegende Punkte. Die Asymptoten der Hyperbel ergeben sich aus der Gleichung:

$$r = \frac{-e \pm \sqrt{e^2 - cf}}{c}.$$

Diese Gleichung bleibt dieselbe, wenn wir den Werth $\frac{s}{r}$ herleiten, nämlich:

$$\frac{s}{r} = \pm\sqrt{-\frac{f}{a}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{2e}{f}\frac{1}{r} + \frac{c}{f}\right)},$$

aus welcher für die Asymptoten folgt:

$$\frac{1}{r} = \frac{-e \pm \sqrt{e^2 - cf}}{f}.$$

Hier können c und f vom nämlichen oder von entgegengesetzten Vorzeichen sein. Im ersten Falle liegen die Asymptoten im nämlichen Paar Scheitelwinkel der Coordinatenaxen; sind dann c und f positiv, so liegt die Hyperbel in demjenigen Paar Scheitelwinkel der Asymptoten, in welchem die Coordinatenaxen liegen; sind c und f negativ, so hat die Hyperbel zu beiden Coordinatenaxen parallele Tangenten. Im andern Falle liegt jede Coordinatenaxe in einem besondern Paar Scheitelwinkel der Asymptoten; ist c positiv, so liegt die Hyperbel in demjenigen Paar Scheitelwinkel, in welchem die zweite Axe liegt; ist c negativ, so liegt sie mit der ersten Axe im nämlichen Paar Scheitelwinkel.

Aus Vorstehendem erhellt ferner, daß, wenn $e = 0$ und c und f zugleich positiv oder negativ sind, die Curve entweder imaginär oder eine Ellipse ist; wenn aber c und f entgegengesetzte Vorzeichen haben, so ist sie eine Hyperbel. Diesen Fall zeigt die Gleichung: $as^2 + cr^2 + f = 0$, aus welcher folgt:

$$r = \pm \sqrt{-\frac{as^2 + f}{c}} \text{ und } \frac{1}{r} = \pm \sqrt{-\frac{a\frac{s^2}{r^2} + c}{f}}.$$

Die von einem beliebigen Punkte einer Coordinatenaxe gezogenen beiden Tangenten bilden hier mit den Coordinatenaxen vier Harmonicalen. Für $r = 0$ erhält man $s^2 = -\frac{f}{a}$; für $\frac{1}{r} = 0$ $\left(\frac{s}{r}\right)^2 = -\frac{c}{a}$. Wir wollen diese Werthe, im Falle c und f negativ sind, durch B^2 und A^2 bezeichnen. Der Berührungspunkt irgend einer Tangente (sr) hat zur Ordinate: $y = -\frac{f}{as}$, zur Abscisse: $x = -\frac{cr}{as}$. Substituiren wir demnach in die Gleichung der Curve $s = \frac{B^2}{y}$, $c = -aA^2$, $r = \frac{B^2 x}{A^2 y}$, $f = -aB^2$, so nimmt diese Gleichung folgende Form an:

$$A^2y^2 + B^2x^2 = A^2B^2.$$

Setzen wir für den Fall, daß c positiv ist, $-\frac{c}{a} = -A^2$; im Falle aber, daß c negativ ist, $-\frac{f}{a} = -B^2$, so kommt:

$$A^2y^2 - B^2x^2 = \pm A^2B^2.$$

Die Ellipse und Hyperbel sind also auf conjugirte Diameter bezogen, und zwar liegt für die Hyperbel im Falle des obern Zeichens der reelle Durchmesser auf der zweiten, im andern Falle auf der ersten Coordinatenaxe. Wenn $c = f$, so stellt die Gleichung

$$as^2 + cr^2 + c = 0$$

einen Kreis dar, da $s^2 = -\frac{c}{a}$ und $\left(\frac{s}{r}\right)^2 = -\frac{c}{a}$. Hier wird $A^2 = B^2 = R^2$ und die Gleichung der Ellipse geht über in:

$$y^2 + x^2 = R^2.$$

Wenn $e^2 - cf = 0$, so erhält man die Gleichungen zweier Punkte, nämlich:

$$s \pm r\sqrt{-\frac{c}{a}} \pm \sqrt{-\frac{f}{a}} = 0.$$

Die Richtung ihrer Verbindungslinie, welche, wie der Anblick der Gleichungen zeigt, durch den Coordinatenanfang geht, ist bestimmt durch:

$$r = -\sqrt{\frac{f}{c}} = -\frac{e}{c}.$$

Die Gleichungen

$$as^2 + cr^2 + 2er = 0$$

und

$$as^2 + 2er + f = 0$$

sind dem Vorhergehenden gemäß Hyperbelgleichungen, und zwar ist, wie wir sofort aus der Asymptotengleichung $cr^2 + 2er + f = 0$ ersehen, in der ersteren die Abscissenaxe die eine Asymptote, die andere Asypmtote ist $r = -\frac{2e}{c}$; in der letzteren ist die Ordinatenaxe die eine und $r = -\frac{2e}{f}$ die andere Asymptote.

Ebenso ist die Gleichung:

$$as^2 + 2er = 0$$

eine Hyperbel, deren Asymptoten die Coordinatenaxen sind. In dieser Form der Gleichung:

$$as\frac{s}{r} + 2e = 0$$

erkennen wir unmittelbar den Ausdruck, daß die von den Tangenten im Asymptotenwinkel begrenzten Dreiecke gleichen Flächeninhalt haben. Aus der Gleichung der Tangente $(s'r')$:

$$as's + er + er' = 0$$

ergibt sich als die Ordinate des Berührungspunktes:

$$-\frac{er'}{as'}$$

und die Gleichung der Curve $as'^2 + 2er' = 0$ ergibt für das durch die Tangente auf der Ordinatenaxe bestimmte Segment:

$$-\frac{2er'}{as'},$$

woraus hervorgeht, daß die Tangente im Berührungspunkte halbirt wird.

Die Gleichung: $as^2 + cr^2 = 0$ stellt zwei auf der Abscissenaxe zu beiden Seiten des Ursprungs in der Entfernung $\sqrt{-\frac{c}{a}}$, und die Gleichung $as^2 + f = 0$ zwei auf der Ordinatenaxe zu beiden Seiten des Ursprungs in der Entfernung $\sqrt{-\frac{f}{a}}$ liegende Punkte dar.

Wenn wir rechtwinkelige Coordinaten voraussetzen, so hat die Gleichung, in welcher $e = 0$ und $f = c$, also:

$$as^2 + 2bsr + cr^2 + 2ds + c = 0$$

das Eigenthümliche, daß für $s = 0$ r die Werthe $\pm\sqrt{-1}$ erhält. Da nun, wenn $tgz = \pm\sqrt{-1}$, auch $tg\,(z + \varphi) = \pm\sqrt{-1}$, so bilden die beiden aus dem Coordinatenanfange gezogenen Tangenten, welche imaginär sind, mit jedem rechtwinkeligen Axensysteme vier Harmonicalen. Ziehen wir vom Coordinatenanfange auf eine Tangente (sr) ein Perpendikel und nennen seinen Fußpunkt (xy), so folgt aus der Lage dieses Punktes auf der Tangente (sr): $y + rx + s = 0$ und aus seiner Lage auf dem Perpendikel: $ry - x = 0$, also $s = -y\,(1 + r^2)$ und $r = \frac{x}{y}$. Diese Werthe in die Gleichung der Curve eingesetzt, führen zu dem Resultate:

$$\left(y - \frac{d}{a}\right)^2 + \left(x - \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + d^2 - ac}{a^2},$$

welches den geometrischen Ort der Fußpunkte aller vom Coordinatenanfange auf beliebige Tangenten gefällten Perpendikel darstellt. Dieser Ort ist, wie man sogleich erkennt, ein Kreis, dessen Centrum im Centrum der Curve liegt. Aus der Gleichung der Curve erhalten wir für die mit der zweiten Axe parallelen Tangenten die Werthe:

$$-\frac{s}{r} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}.$$

Eben diese Werthe erhalten wir aus der Gleichung des Kreises, wenn wir die erste Axe durch das Centrum legen, also $d = 0$ setzen, für die Abscissen der Endpunkte des auf der ersten Axe liegenden Durchmessers.

Der Kreis ist somit um denjenigen Diameter beschrieben, welcher die Berührungspunkte zweier auf ihm senkrechten Tangenten verbindet. Das Product der eben genannten Abscissenwerthe ist $\frac{c}{a}$. Ist c positiv, so liegen die Abscissen auf derselben Seite des Coordinatenanfangs und für diesen Punkt ist die Ordinate des Kreises:

$$y^2 = -\frac{c}{a},$$

also imaginär; zugleich wird der Werth

$$s = \frac{-br \pm \sqrt{(b^2 - ac)\, r^2 - ac}}{a}$$

für die Werthe

$$r = \pm \sqrt{\frac{ac}{b^2 - ac}},$$

welche reell sind, Null. Die Curve ist also eine Hyperbel. Ist c negativ, so liegen die beiden Abscissen auf entgegengesetzten Seiten des Coordinatenanfangs und $y^2 = -\frac{c}{a}$ gibt reelle Werthe; s ist für jedes r reell. Die Curve ist eine Ellipse. Setzen wir in dem Falle, daß c positiv, $\frac{c}{a} = B^2$, im andern Falle $-\frac{c}{a} = B^2$, und nennen die Entfernung des Coordinatenanfangs vom Centrum e, so daß $\frac{b}{a} = e$, so sind die vorgenannten Abscissen bei der Hyperbel: $e \pm \sqrt{e^2 - B^2}$ und bei der Ellipse: $e \pm \sqrt{e^2 + B^2}$. Der Coordinatenanfang ist der Brennpunkt, deren es, wie man leicht einsieht, zwei in gleicher Entfernung vom Centrum gibt.

Aus der allgemeinen Gleichung (1) haben wir ersehen, daß die Coordinaten des Centrums $\frac{d}{a}$ und $\frac{b}{a}$ sind, daß also, wenn $a = 0$, das Centrum unendlich weit liegt. Die Gleichung desselben ist alsdann

$$br + d = 0$$

und zeigt, daß alle Diameter unter sich parallel sind und zwar in der Richtung $r = -\frac{d}{b}$. Je nachdem daher b oder d Null ist, sind die Diameter mit der Ordinaten- oder Abscissenaxe parallel. Die vollständige Gleichung der Curve ist für den in Rede stehenden Fall:

$$2bsr + cr^2 + 2ds + 2er + f = 0.$$

In ihr erkennen wir die Eigenschaft, daß jedem Werthe von r ein einziger Werth von s, also eine einzige Tangente entspricht, während die andere mit ihr parallele Tangente unendlich weit liegt, was aus folgender Form der vorstehenden Gleichung

$$2\,(br + d)\frac{1}{s} + (cr^2 + 2er + f)\,\frac{1}{s^2} = 0,$$

in welcher das Absolutglied fehlt, sofort erhellt. Die beiden mit den Diametern parallelen, also durch das Centrum gehenden Tangenten, welche durch $r = -\frac{d}{b}$ bestimmt werden, liegen nach entgegengesetzten Seiten unendlich weit, da für sie $\frac{1}{s} = \pm 0$. Eine Tangente (sr) der Curve hat zur Ordinate und Abscisse ihres Berührungspunktes:

$$y = \frac{ds + er + f}{br + d},\ x = \frac{bs + cr + e}{br + d}.$$

Hieraus erhalten wir die Werthe von s und r, wenn wir durch M, N und P constante Ausdrücke, durch X und X' einfache Binome in x und y bezeichnen, in folgender Form:

$$s = \frac{P + X'}{N - bX};\ r = \frac{M + dX}{N - bX}.$$

Setzen wir diese Werthe in die Gleichung der Curve ein, so erhalten wir eine Gleichung zweiten Grades, deren quadratischer Theil ist: $(cd^2 - 2bde + b^2f)\ X^2$,
also in Bezug auf die mit y und x behafteten Glieder ein vollständiges Quadrat bildet, worin sich der wesentliche Charakter der Parabel ausspricht.

Die Curve $cr^2 + 2ds + 2er + f = 0$ hat, da $b = 0$, ihre Diameter mit der Ordinatenaxe parallel. Von dem Punkte der Ordinatenaxe

$$s = -\frac{f}{2d}$$

gibt es, da für diesen Werth von s $r' = 0$ und $r'' = -\frac{2e}{c}$, zwei Tangenten an die Curve, von denen die eine der ersten Axe parallel ist. Die andere Tangente wird dieselbe Eigenschaft haben, sobald $e = 0$. Folglich ist $cr^2 + 2ds + f = 0$
eine Parabel, deren Diameter der zweiten Axe parallel sind, und welche im Punkte

$$s = -\frac{f}{2d}$$

dieser Axe eine mit der ersten Axe parallele Tangente hat. Ist nur $f = 0$, so stellt

$$cr^2 + 2ds + 2er = 0$$

eine Parabel dar, an welche vom Ursprunge aus eine Tangente

$$r' = -\frac{2e}{c}$$

geht, während die andere Tangente die erste Axe selbst ist. Ist zugleich $e = 0$, so wird die Parabel

$$cr^2 + 2ds = 0$$

im Ursprunge von der ersten Axe berührt. Eine Tangente der letzterwähnten Curve hat zur Ordinate und Abscisse des Berührungspunktes:

$$y = s,\ x = \frac{cr}{d},\ \text{also}\ r = \frac{dx}{c}.$$

Daraus erhalten wir folgende Gleichung derselben Curve:

$$x^2 = 2\left(-\frac{c}{d}\right) y.$$

Die Gleichung $2bsr + cr^2 + 2er + f = 0$
stellt die Parabel dar, deren Diameter mit der ersten Axe parallel sind. Aus dem Punkte der ersten Axe $\frac{s}{r} = -\frac{c}{2b}$ lassen sich an die Curve zwei Tangenten ziehen, von denen die eine mit der zweiten Axe

parallel ist, während die andere durch $\frac{1}{r} = -\frac{2e}{f}$ bestimmt wird. Ist also $e = 0$, so hat die Parabel, deren Gleichung ist: $2bsr + cr^2 + f = 0$, im Punkte $\frac{s}{r} = -\frac{c}{2b}$ der ersten Axe eine mit der zweiten Axe parallele Tangente. Ist $c = 0$, so ist die zweite Axe selbst Tangente, während vom Ursprunge aus die andere Tangente

$$\frac{1}{r} = \frac{2e}{f}$$

ist. Die Gleichung der Parabel ist in diesem Falle: $2bsr + 2er + f = 0$. Wird außerdem noch $e = 0$, so wird die durch die Gleichung $2bsr + f = 0$ dargestellte Parabel im Ursprunge von der zweiten Axe berührt. Die Coordinaten des Berührungspunktes einer beliebigen Tangente im letzten Falle sind:

$$y = \frac{f}{br},\ x = \frac{s}{r},\ \text{also}\ r = \frac{f}{by},\ s = \frac{fx}{by};$$

woraus die Gleichung derselben Curve folgende wird:

$$y^2 = 2\left(-\frac{f}{b}\right) x.$$

Wenn $e = 0$ und $f = c$, so erhalten wir aus der Gleichung: $2bsr + cr^2 + 2ds + c = 0$ wenn $s = 0$ gesetzt wird, $r = \pm\sqrt{-1}$.

Wir haben früher bei Voraussetzung rechtwinkeliger Coordinaten gesehen, daß in dem vorstehenden Falle die Fußpunkte der vom Coordinatenanfange auf die Tangenten gefällten Perpendikel auf einer Kreisperipherie liegen, deren Gleichung ist:

$$a\,(y^2 + x^2) - 2dy - 2bx + c = 0.$$

Dieselbe geht nun, da $a = 0$, in die gerade Linie $2dy + 2bx - c = 0$ über. Denken wir uns eine beliebige, durch den Coordinatenanfang gehende Gerade r_1, so ist ihr Pol:

$$(bs + cr)\, r_1 + ds + c = 0.$$

Um die Richtung der von ihm an die Curve gehenden Tangenten zu erhalten, substituiren wir in die Gleichung der Curve den aus vorstehender Gleichung hervorgehenden Werth

$$s = -\frac{c\,(r_1 r + 1)}{br_1 + d},$$

und erhalten:

$$r^2 - \frac{2\,(b + dr_1)}{d - br_1}\, r - 1 = 0,$$

woraus folgt, daß die beiden Tangenten senkrecht aufeinander stehen. Wenn wir ferner die Coordinaten jenes Poles, nämlich:

$$y = \frac{c}{br_1 + d},\ x = \frac{cr_1}{br_1 + d}$$

mit den Coordinaten des Poles einer zweiten durch den Anfangspunkt gezogenen Geraden r_2 vergleichen, also mit

$$y = \frac{c}{br_2 + d},\ x = \frac{cr_2}{br_2 + d},$$

so erhalten wir für jede solche Gerade die nämliche Relation zwischen den Coordinaten ihres Poles, nämlich:

$$\frac{c - dy}{by} = \frac{dx}{c - bx}$$

oder: $dy + bx - c = 0$, d. i. die Polare des Coordinatenanfangs, welche, wie ihre Gleichung zeigt, mit der Geraden, worauf die Fußpunkte aller vom Anfangspunkte auf die Tangenten gefällten Perpendikel liegen, parallel, aber noch einmal so weit, als diese, vom Anfangspunkte entfernt ist. Dieser Anfangspunkt ist der Brennpunkt der Parabel.

Aus der allgemeinen Parabelgleichung erhalten wir für r die Werthe:

$$\frac{-(bs + e) \pm \sqrt{(bs + e)^2 - (2ds + f)\,c}}{c}.$$

Aus diesem Radicanden läßt sich die Wurzel ziehen, wenn $b^2(e^2 - fc) = (be - cd)^2$. Die Gleichung zerfällt dann in zwei Factoren:

$$(cr + 2bs + e + \sqrt{e^2 - cf})\,(cr + e - \sqrt{e^2 - cf}) = 0$$

und stellt zwei Punkte dar, von welchen der zweite unendlich weit liegt. Da gemäß der eben aufgestellten Bedingungsgleichung

$$e - \sqrt{e^2 - cf} = \frac{cd}{b}$$

$$\text{und} \quad e + \sqrt{e^2 - cf} = \frac{fb}{d},$$

so läßt sich die Gleichung des ersten Punktes auch so ausdrücken:

$$cdr + 2bds + fb = 0.$$

Seine Ordinate ist $\frac{f}{2d}$ und seine Abscisse $\frac{c}{2b}$. Die Gleichung des zweiten Punktes kann auch folgenden Ausdruck erhalten:

$$br + d = 0.$$

Wenn in der Parabelgleichung b und d zugleich Null sind, so reducirt sie sich auf $cr^2 + 2er + f = 0$ oder:

$$(cr + e - \sqrt{e^2 - fc})\,(cr + e + \sqrt{e^2 - fc}) = 0,$$

d. i. auf die Richtungen zweier verschiedener Gruppen von Parallelen oder, was dasselbe ist, auf zwei unendlich weit liegende Punkte, die reell oder imaginär sind oder zusammenfallen, je nachdem $e^2 - fc$ positiv, negativ oder Null ist.

Während die Gleichung (1), indem wir sie nach s auflösten, unmittelbar zur Gleichung des Centrums führte, erhalten wir aus der in gewöhnlichen Ordinaten und Abscissen ausgedrückten Gleichung:

$$\alpha y^2 + 2\beta yx + \gamma x^2 + 2\delta y + 2\varepsilon x + \zeta = 0 \quad \text{(I)},$$

wenn wir ein Mal nach y, das andere Mal nach x auflösen, das Centrum als den Durchschnitt zweier Geraden:

$$\alpha y + \beta x + \delta = 0$$

$$\beta y + \gamma x + \varepsilon = 0,$$

von denen die erstere alle mit der Ordinatenaxe, die letztere alle mit der Abscissenaxe parallelen Sehnen halbirt. Die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes sind:

$$y = \frac{\gamma\delta - \beta\varepsilon}{\beta^2 - \alpha\gamma}, \quad x = \frac{\alpha\varepsilon - \beta\delta}{\beta^2 - \alpha\gamma}.$$

In diesen Werthen erkennen wir die Bedingung, unter welcher sie unendlich werden oder unter welcher die beiden Geraden parallel sind, nämlich:

$$\beta^2 - \alpha\gamma = 0.$$

In diesem Falle ist zugleich der quadratische Theil der allgemeinen Gleichung:

$$\alpha y^2 + 2\beta yx + \gamma x^2$$

ein vollständiges Quadrat: $(y\sqrt{\alpha} + x\sqrt{\gamma})^2$
und die Curve ist bekanntlich eine Parabel.

Die Gleichung (1) bedeutet in dem besonderen Falle, in welchem sie sich in zwei einfache Factoren zerlegen läßt, zwei Punkte; die Gleichung (I) bedeutet in demselben Falle zwei gerade Linien. Lösen wir sie nämlich nach y auf, so ist der Radicand

$$(\beta^2 - \alpha\gamma)\, x^2 + 2\, (\beta\delta - \alpha\varepsilon)\, x + \delta^2 - \alpha\zeta = 0$$

ein vollständiges Quadrat, wenn

$$(\beta^2 - \alpha\gamma)\, (\delta^2 - \alpha\zeta) = (\beta\delta - \alpha\varepsilon)^2,$$

und die beiden Geraden sind alsdann folgende:

$$y + \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}\, x + \frac{\delta + \sqrt{\delta^2 - \alpha\zeta}}{\alpha} = 0 \quad \text{(II)}$$

$$\text{und} \quad y + \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}\, x + \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - \alpha\zeta}}{\alpha} = 0 \quad \text{(III)}.$$

Lösen wir nach x auf, so erhalten wir den Radicanden:

$$(\beta^2 - \alpha\gamma)\, y^2 + 2\, (\beta\varepsilon - \delta\gamma)\, y + \varepsilon^2 - \gamma\zeta,$$

welcher, um ein vollständiges Quadrat zu sein, auf die mit der vorigen identische Bedingungsgleichung führt:

$$(\beta^2 - \alpha\gamma)\, (\varepsilon^2 - \gamma\zeta) = (\beta\varepsilon - \delta\gamma)^2.$$

Die beiden Geraden erhalten nunmehr den Ausdruck:

$$x + \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\gamma}\, y + \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - \gamma\zeta}}{\gamma} = 0 \quad \text{(IV)}$$

$$x + \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\gamma}\, y + \frac{\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - \gamma\zeta}}{\gamma} = 0 \quad \text{(V)}.$$

Die Linie (V) ist dieselbe wie (II), (IV) dieselbe wie (III). Beide Geraden sind reell oder imaginär, je nachdem $\beta^2 - \alpha\gamma$ positiv oder negativ ist, da $\delta^2 - \alpha\zeta$ und $\varepsilon^2 - \gamma\zeta$ mit $\beta^2 - \alpha\gamma$ gemäß den Bedingungsgleichungen dasselbe Zeichen haben. Auch wenn die Geraden imaginär sind, ist ihr Durchschnittspunkt reell, und zwar das Centrum. In ähnlicher Weise sahen wir, daß die Punkte der Gleichung (1) imaginär sein können und doch auf einer durch das Centrum gehenden reellen Geraden liegen. Wenn $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$, so sind beide Geraden parallel und zu beiden Seiten gleich weit entfernt von der Geraden

$$\alpha y + \beta x + \delta = 0,$$

die in diesem Falle identisch ist mit $\beta y + \gamma x + \varepsilon = 0$; ihre Gleichungen sind:

$$\alpha y + \beta x + \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \alpha\zeta} = 0.$$

Ist auch $\delta^2 - \alpha\zeta = 0$, so fallen sie in eine einzige Gerade zusammen. Die Gleichungen

$$y + \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}\, x = 0$$

$$y + \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - \alpha\gamma}}{\alpha}\, x = 0$$

drücken zwei mit (II) und (III) durch den Coordinatenanfang parallel gezogene Geraden aus; somit sind die drei ersten Glieder der Gleichung (I) in folgendem Ausdrucke:

$$\alpha y^2 + 2\beta yx + \gamma x^2 = 0$$

das System dieser beiden Parallelen.