Ueber die Hypocycloide,

mit besonderer Berücksichtigung des Falles, wo der Durchmesser des rollenden Kreises gleich dem halben Radius der festen Basis ist.

§ 1.

Unter Hypocycloide versteht man diejenige Curve, die ein Peripheriepunkt eines Kreises in dem Falle beschreibt, wenn er auf der innern Seite der Peripherie eines festen Kreises rollt. Es sei R der Radius des festen und r der Radius des rollenden Kreises; ferner denke man sich durch den Mittelpunkt o des ersteren zwei auf einander senkrecht stehende Durchmesser gezogen, welche man als die Achsen des zur Anwendung kommenden Coordinatensystemes annehme. Der Punkt a, wo die Y Achse nnd der feste Kreis sich schneiden, soll der Punkt sein, womit der beschreibende Punkt beim Anfange der Bewegung zusammenfiel, so daß derselbe, wenn er nach iniger Zeit in B angelangt ist, den Weg a B beschrieben hat. Den jetzigen Berührungspunkt beider Kreise nenne man P, so muß der Radius o P auch durch den Mittelpunkt ω des inneren Kreises gehen. Der Abstand o ω wird dann durch $R - r$ ausgedrückt.

Es ist nun:

$$\sphericalangle\, a o P = \frac{\text{Arc } a P}{R}$$

ferner:

$$\sphericalangle\, B \omega P = \frac{\text{Arc } B P}{r};$$

also, da Arc a P = Arc B P ist,

$$\sphericalangle\, a o P : \sphericalangle\, B \omega P = \frac{1}{R} : \frac{1}{r}.$$

Bezeichnet man nun den Wälzungswinkel B ω P mit ϱ, so ist:

$$\sphericalangle\, a o P = \frac{r \varrho}{R}.$$

Man ziehe das Perpendikel B M auf die X Achse, so ist:

$$\sphericalangle\, M B \omega = \sphericalangle\, \varrho - \sphericalangle\, \frac{r \varrho}{R} = \sphericalangle\, \frac{(R - r)\, \varrho}{R}.$$

Fällt man endlich noch das Perpendikel ω N auf die X Achse und ω F auf die Linie B M, so ist, wenn durch x und y die Coordinaten des Punktes B ausgedrückt werden:

$$x = o N - \omega F$$

oder

$$x = (R - r) \sin \frac{r \varrho}{R} - r \sin \frac{(R - r)\, \varrho}{R}.$$

Ferner ist:

$$y = \omega N + B F$$

oder:

$$y = (R - r) \cos \frac{r \varrho}{R} + r \cos \frac{(R - r)\, \varrho}{R}.$$

Die Coordinaten eines jeden Punktes der Hypocycloide sind demnach durch folgende zwei Gleichungen bestimmt:

$$\text{I.}\quad\begin{cases} x = (R - r)\sin\dfrac{r\,\varrho}{R} - r\sin\dfrac{(R-r)\,\varrho}{R} \\[2ex] y = (R - r)\cos\dfrac{r\,\varrho}{R} + r\cos\dfrac{(R-r)\,\varrho}{R}. \end{cases}$$

§ 2.

Es ist leicht einzusehen, daß im Allgemeinen die Hypocycloide eine transcendente Linie sein wird; sobald jedoch das Verhältniß der beiden Linien r und R zueinander ein commensurables ist, wird man $\sphericalangle\,\varrho$ aus den Gleichungen I. eliminiren können und auf diese Weise zu einer einzigen algebraischen Gleichung zwischen x und y gelangen. Man nehme z. B. $r = \frac{1}{2} R$ an, so verwandeln sich die Gleichungen I. in folgende:

$$1)\quad x = o$$
$$2)\quad y = R\cos\tfrac{1}{2}\,\varrho.$$

Aus der ersten Gleichung erkennt man, daß in diesem Falle der beschreibende Punkt des Rollkreises stets auf der Y Achse verbleiben muß und zwar wegen der Gleichung 2) stets innerhalb des festen Kreises. Ferner läßt sich aus diesem speziellen Falle folgender geometrischer Satz gewinnen: „Berühren sich zwei Kreise, in denen der Radius des einen gleich dem halben Radius des anderen ist, von innen, und zieht man einen Radius des größeren Kreises, der auch den kleineren zum zweitenmale schneidet, so sind die Bogen, welche in beiden Kreisen zwischen dem gemeinschaftlichen Berührungspunkte und dem Endpunkte resp. Durchschnittspunkte des Radius liegen, einander gleich."

Es sei ferner $x = \frac{1}{3} R$, so verwandeln sich die Gleichungen I. in folgende:

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} R\sin\frac{1}{3}\,\varrho - \frac{1}{3} R\sin\frac{2}{3}\,\varrho \\ y = \frac{2}{3} R\cos\frac{1}{3}\,\varrho + \frac{1}{3} R\cos\frac{2}{3}\,\varrho. \end{cases}$$

Da jedoch

$$\sin\tfrac{2}{3}\,\varrho = 2\sin\tfrac{1}{3}\,\varrho\cos\tfrac{1}{3}\,\varrho$$

ist, so erhält man:

$$1)\quad x = \tfrac{2}{3} R\sin\tfrac{1}{3}\,\varrho\,(1 - \cos\tfrac{1}{3}\,\varrho).$$

Um die y Gleichung auf eine ähnliche Form zu bringen, verlege man den Coordinatenanfangspunkt auf der X Achse um eine Strecke $= \frac{1}{3} R$ nach unten, so daß $y = y - \frac{1}{3} R$ wird; man erhält in diesem Falle:

$$y = \tfrac{1}{3} R\,(1 + \cos\tfrac{2}{3}\,\varrho) + \tfrac{2}{3} R\cos\tfrac{1}{3}\,\varrho,$$

oder mit Benutzung der Formel:

$$1 + \cos\tfrac{2}{3}\,\varrho = 2\cos\tfrac{1}{3}\,\varrho^2$$

entsteht aus Vorstehendem die Gleichung:

$$2)\quad y = \tfrac{2}{3} R\cos\tfrac{1}{3}\,\varrho\,(1 + \cos\tfrac{1}{3}\,\varrho).$$

Alle Werthe von $\sphericalangle\,\varrho$, für welche

$$\cos\tfrac{1}{3}\,\varrho = o \text{ oder } = -1$$

wird, müssen y zu Null machen. Dies geschieht, wenn ϱ folgende Werthe annimmt:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{3\pi}{2}, & 3\pi, & \dfrac{9\pi}{2} \\[2ex] \dfrac{15\pi}{2}, & \dfrac{18\pi}{2}, & \dfrac{21\pi}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \dfrac{3(4n+1)\pi}{2}, & \dfrac{3(4n+2)\pi}{2}, & \dfrac{3(4n+3)\pi}{2}, \end{array}$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet.

Für je drei dieser Winkelgrößen nimmt x periodisch immer folgende Werthe an:

$$-\tfrac{2}{3} R,\quad o,\quad +\tfrac{2}{3} R.$$

x wird = o für alle Werthe von ϱ, für welche

$$\sin\tfrac{1}{3}\,\varrho = o \text{ und } \cos\tfrac{1}{3}\,\varrho = +1$$

wird, also für folgende Winkelwerthe:

$$o,\ 3\pi,\ 6\pi,\ 9\pi,\ 12\pi,\ \ldots .\ 3\,n\,\pi$$

wo n jede ganze Zahl bedeutet; in diesen Fällen wird y abwechselnd $\frac{4}{3}$ R und o. Die Curve besteht demnach aus drei Zügen; zwei derselben durchschneiden die X Achse zu beiden Seiten des Coordinatenanfangspunktes in dem Abstande $\frac{2}{3}$ R, während der dritte dieselbe in dem genannten Punkte berührt. Die Y Achse wird von den beiden ersteren im Punkte, wo die Rollbewegung anfing, tangirt und von den letzteren im Coordinatenanfangspunkte durchschnitten.

Um eine algebraische Gleichung der Curve zu erhalten, löse man die Gleichung:

$$y = \tfrac{2}{3}\,R \cos \tfrac{1}{3}\,\varrho\,(1 + \cos \tfrac{1}{3}\,\varrho)$$

in Bezug auf $\cos \frac{1}{3}\,\varrho$ auf. Man erhält dann:

$$\cos \tfrac{1}{3}\,\varrho^2 + \cos \tfrac{1}{3}\,\varrho = \tfrac{3}{2} \cdot \frac{y}{R}$$

oder:

$$\cos \tfrac{1}{3}\,\varrho = \sqrt{\frac{3\,y}{2\,R} + \tfrac{1}{4}} - \tfrac{1}{2}$$

Hieraus findet man:

$$1 - \cos \tfrac{1}{3}\,\varrho = \tfrac{3}{2} - \sqrt{\frac{3\,y}{2\,R} + \tfrac{1}{4}}$$

oder

$$(1 - \cos \tfrac{1}{3}\,\varrho)^2 = \tfrac{5}{2} + \frac{3\,y}{2\,R} - 3\sqrt{\frac{3\,y}{2\,R} + \tfrac{1}{4}}$$

Ferner ist:

$$\sin \tfrac{1}{3}\,\varrho^2 = 1 - \cos \tfrac{1}{3}\,\varrho^2 = \tfrac{1}{2} - \frac{3\,y}{2\,R} + \sqrt{\frac{3\,y}{2\,R} + \tfrac{1}{4}}.$$

Quadrirt man nun Gleichung 1), so erhält man:

$$x^2 = \tfrac{4}{9}\,R^2 \sin \tfrac{1}{3}\,\varrho^2\,(1 - \cos \tfrac{1}{3}\,\varrho)^2$$

und nach Substitution der gefundenen Werthe:

$$\text{II.}\quad x^2 = \tfrac{1}{9}\left(R - 3\,y + \sqrt{6\,R\,y + R^2}\right)\left(5\,R + 3\,y - 3\sqrt{6\,R\,y + R^2}\right)$$

Führt man nun die Multiplikationen aus und schafft das Wurzelzeichen aus der Gleichung, so erhält man nach gehöriger Vereinfachung die Gleichung:

$$\text{III.}\quad \left[9\,(x^2 + y^2) + 2\,R\,(15\,y - R)\right]^2 = 4\,R\,(6\,y + R)^3.$$

Setzt man in diese Gleichung $y = o$, so gewinnt man dieselben Werthe für x, die eben bereits bestimmt wurden, nämlich o und $\pm \frac{2}{3}$ R. Um die Werthe für y, die der Bedingung $x = o$ genügen, zu finden, bediene man sich der vorletzten Gleichung; es bestimmen sich dann die betreffenden Werthe für y aus den beiden Gleichungen:

$$1)\ R - 3\,y + \sqrt{6\,R\,y + R^2} = o$$

$$2)\ 5\,R + 3\,y - 3\sqrt{6\,R\,y + R^2} = o.$$

Man erhält hieraus $y = o$ und $y = \frac{4}{3}$ R, was ebenfalls mit den obigen Resultaten übereinstimmt.

Da ferner:

$$x = \pm \sqrt{\tfrac{1}{9}\left(R - 3\,y + \sqrt{6\,R\,y + R^2}\right)\left(5\,R + 3\,y - 3\sqrt{6\,R\,y + R^2}\right)}$$

ist, so folgt, daß man als größten negativen Werth für y den Werth $-\frac{1}{6}$ R annehmen darf, weil sonst

$$\sqrt{6\,R\,y + R^2}$$

imaginär werden würde. Der größte positive Werth von y ist $\frac{4}{3}$ R, was schon sowohl aus der Entstehung der Curve einleuchtet, da ja der rollende Kreis nicht aus der Basis heraustritt, als auch aus dem aufgestellten Werthe von x folgt, indem im Falle, wo

$$y > \tfrac{4}{3}\,R$$

gesetzt ist, einer der beiden Faktoren im Radicanden negativ wird. Dem Werthe

$$y = -\tfrac{1}{6}\,R$$

entsprechen die zwei Werthe

$$x = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{3}\,R.$$

Diese beiden Punkte sind übrigens Rückkehrpunkte; außerdem der Punkt $y = \frac{1}{3} R$ mit der besonderen Eigenschaft, daß in ihm die Tangente $\perp$ zur Abscissenachse steht.

Eine ähnliche Rechnung, wie die vorige, wird uns in dem Falle, daß $r = \frac{2}{3} R$ genommen ist, als Gleichungen der Curve folgende geben:

$$x = -\tfrac{2}{3} R \sin \tfrac{1}{3} \varrho (1 - \cos \tfrac{1}{3} \varrho)$$
$$y = \tfrac{2}{3} R \cos \tfrac{1}{3} \varrho (1 + \cos \tfrac{1}{3} \varrho)$$

Es wird dieses also genau dieselbe Curve sein, wie im vorigen Falle, nur ist die Entstehungsweise eine andere; während für $r = \frac{1}{3} R$ die Curve sich nach derselben Seite hin bewegt, wohin auch der rollende Kreis geht, zieht sie sich für $r = \frac{2}{3} R$ nach der entgegengesetzten. Bei der ersteren ist die Curve schon dann vollendet, wenn der Rollkreis die ganze Basis nur einmal zurückgelegt hat, während derselbe im letzteren Falle zweimal diesen Weg machen muß. Ueberhaupt wird im Allgemeinen in beiden Fällen, daß

$$r = \frac{1}{\lambda} R \text{ und } r = \frac{\lambda - 1}{\lambda} R$$

ist, unter λ eine beliebige ganze positive Zahl verstanden, die entstehende Hypocycloide dieselbe Gestalt haben.

§ 3.

Wir wenden uns zu dem interessanteren Falle, daß $r = \frac{1}{4} R$ gesetzt wird. Unterwirft man die beiden allgemeinen Gleichungen der Hypocycloide:

$$x = (R - r) \sin \frac{r \varrho}{R} - r \sin \frac{(R - r) \varrho}{R}$$
$$y = (R - r) \cos \frac{r \varrho}{R} + r \cos \frac{(R - r) \varrho}{R}$$

der angeführten Bedingung, so erhält man die Gleichungen:

$$x = \tfrac{3}{4} R \sin \tfrac{1}{4} \varrho - \tfrac{1}{4} R \sin \tfrac{3}{4} \varrho$$
$$y = \tfrac{3}{4} R \cos \tfrac{1}{4} \varrho + \tfrac{1}{4} R \cos \tfrac{3}{4} \varrho.$$

Es ist nun:

$$\begin{aligned} \sin \tfrac{3}{4} \varrho &= 3 \cos \tfrac{1}{4} \varrho^2 \sin \tfrac{1}{4} \varrho - \sin \tfrac{1}{4} \varrho^3 \\ &= 3 \sin \tfrac{1}{4} \varrho (1 - \sin \tfrac{1}{4} \varrho^2) - \sin \tfrac{1}{4} \varrho^3 \\ &= 3 \sin \tfrac{1}{4} \varrho - 4 \sin \tfrac{1}{4} \varrho^3. \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\begin{aligned} \cos \tfrac{3}{4} \varrho &= \cos \tfrac{1}{4} \varrho^3 - 3 \sin \tfrac{1}{4} \varrho^2 \cos \tfrac{1}{4} \varrho \\ &= \cos \tfrac{1}{4} \varrho^3 - 3 \cos \tfrac{1}{4} \varrho (1 - \cos \tfrac{1}{4} \varrho^2) \\ &= 4 \cos \tfrac{1}{4} \varrho^3 - 3 \cos \tfrac{1}{4} \varrho. \end{aligned}$$

Setzt man diese Ausdrücke für $\sin \frac{3}{4} \varrho$ und $\cos \frac{3}{4} \varrho$ in die beiden Gleichungen ein, so erhält man:

$$x = \tfrac{3}{4} R \sin \tfrac{1}{4} \varrho - \tfrac{1}{4} R (3 \sin \tfrac{1}{4} \varrho - 4 \sin \tfrac{1}{4} \varrho^3)$$
$$y = \tfrac{3}{4} R \cos \tfrac{1}{4} \varrho + \tfrac{1}{4} R (4 \cos \tfrac{1}{4} \varrho^3 - 3 \cos \tfrac{1}{4} \varrho),$$

welche sich in folgende verwandeln:

$$x = R \sin \tfrac{1}{4} \varrho^3$$
$$y = R \cos \tfrac{1}{4} \varrho^3,$$

oder, indem man jede Seite mit $\frac{2}{3}$ potenzirt:

$$x^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}} \sin \tfrac{1}{4} \varrho^2$$
$$y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}} \cos \tfrac{1}{4} \varrho^2.$$

Durch Addition beider Gleichungen erhält man dann als einzige Gleichung der Hypocycloide in diesem Falle:

$$\text{IV. } x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

Aus der Form dieser Gleichung geht hervor, daß die Werthe einer jeden Veränderlichen nur zwischen o und $\pm R$ liegen dürfen; ist eine derselben $=$ o, so besitzt die andere den Werth $\pm R$. Ueberhaupt ist die Curve zu beiden Coordinatenachsen symmetrisch; sie muß demnach aus 4 Zügen bestehen, die eine Fläche von bestimmter Größe einschließen.

Um weiteres über die Gestalt der Curve erkennen zu können, bilde man den ersten und zweiten Differentialquotienten. Es ist

$$y = \left(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

also:

$$\frac{dy}{dx} = -\tfrac{3}{2} \cdot \sqrt{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= -\frac{\sqrt{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

Hieraus schließen wir, daß in dem Punkte, wo $y = 0$ ist, die Tangente des Winkels, den die Tangente der Curve in diesem Punkte mit der positiven Richtung der X Achse bildet, $= 0$ wird; es muß demnach die Abscissenachse die Curve tangiren. Wird $x = 0$, so erhalten wir für die Tangente dieses Winkels einen unendlichen Werth, d. h. die Ordinatenachse ist ebenfalls gleichzeitig Tangente der Curve. Ferner folgt aus dem Vorzeichen der ersten abgeleiteten Funktion, daß die Curve in denjenigen Quadranten, wo die Coordinaten entweder beide positiv oder beide negativ genommen werden, fällt, während sie in den übrigen steigt.

Wir bilden nun den zweiten Differentialquotienten. Es ist:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{x^{\frac{1}{3}} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}\left(-\tfrac{2}{3} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\right) - \sqrt{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}} + \tfrac{1}{3}\sqrt{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} \cdot \dfrac{1}{x^{\frac{2}{3}}}}{x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{3} R^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}\sqrt{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}$$

$$= \tfrac{1}{3} \cdot \frac{R^{\frac{2}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}\, x^{\frac{4}{3}}}.$$

Es ist demnach:

$$y \cdot \frac{d^2 y}{dx^2} = \tfrac{1}{3} \cdot \frac{R^{\frac{2}{3}}\left(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)}{x^{\frac{4}{3}}}.$$

Weil der Ausdruck auf der rechten Seite für jeden Werth von x — natürlich zwischen den eben aufgestellten Grenzen — positiv sein muß, so folgt nach einem bekannten Satze aus der Differentialrechnung, daß die Curve in allen ihren Punkten der Abscissenachse die convexe Seite zuwenden muß.

Aus den gefundenen Werthen des ersten und zweiten Differentialquotienten läßt sich, wie bekannt, die Formel für den Krümmungshalbmesser einer jeden Curve im Punkte x, y bestimmen. Es ist nämlich, wenn ϱ die absolute Größe des Krümmungshalbmessers bezeichnet:

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\dfrac{d^2 y}{dx^2}};$$

wendet man diese Formel für unsere Curve an, so erhält man:

$$\varrho = 3\, y^{\frac{1}{3}}\, x^{\frac{4}{3}} \cdot \frac{\left[1 + \dfrac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{3}{2}}}{R^{\frac{2}{3}}}$$

$$= 3\, R^{\frac{1}{3}}\, x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$$
$$= 3 \sqrt[3]{R\, x\, y}.$$

Die Lage des Mittelpunktes des Krümmungskreises ist natürlich nach der concaven Seite der Curve hin zu nehmen. Aus der aufgestellten Formel folgt, daß $\varrho = o$ ist, wenn x oder $y = o$ wird. Um den Fall zu ermitteln, wo die Krümmung ein Maximum erreicht, setze man:

$$\varrho = 3\, R^{\frac{1}{3}}\, x^{\frac{1}{3}} \sqrt{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}.$$

Hierauf differentiire man nach x, so erhält man:

$$\frac{d\varrho}{dx} = -\, 3\, R^{\frac{1}{3}}\, x^{\frac{1}{3}} \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} + \sqrt{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}} \cdot 3\, R^{\frac{1}{3}} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}}.$$

Setzt man diesen gefundenen Werth für $\frac{d\varrho}{dx} = o$, so ergibt sich, daß ϱ seinen Maximalwerth annimmt, wenn

$$x = \tfrac{1}{4} \sqrt{2}\, R$$

wird.

Eine sehr einfache Form gewinnt die Gleichung der Evolute für diese Curve. Bezeichnet man die Coordinaten des Mittelpunktes des Krümmungskreises für den Punkt x, y der Curve mit α und β, so finden bekanntlich folgende zwei Gleichungen statt:

$$1)\ \alpha - x = -\frac{\frac{dy}{dx}\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2 y}{dx^2}}$$

$$2)\ \beta - y = \frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}}.$$

Diese Gleichungen verwandeln sich nach Einsetzung der eben entwickelten Werthe für $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{d^2 y}{dx^2}$ in folgende einfache Gleichungen:

$$1)\ \alpha = x + 3\, x^{\frac{1}{3}}\, y^{\frac{2}{3}}$$
$$2)\ \beta = y + 3\, x^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{1}{3}}.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$\alpha + \beta = x + 3\, x^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{1}{3}} + 3\, x^{\frac{1}{3}}\, y^{\frac{2}{3}} + y$$

oder:

$$\alpha + \beta = \left(x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}\right)^3.$$

und ebenso durch Subtraction der Gleichung 2) von Gleichung 1):

$$\alpha - \beta = x - 3\, x^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{1}{3}} + 3\, x^{\frac{1}{3}}\, y^{\frac{2}{3}} - y$$

oder

$$\alpha - \beta = \left(x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}}\right)^3.$$

Hieraus findet man:

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\alpha + \beta}$$
$$x^{\frac{1}{3}} - y^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{\alpha + \beta}.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen ergibt sich:

$$x^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\alpha + \beta} + \sqrt[3]{\alpha - \beta}\right)$$
$$y^{\frac{1}{3}} = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\alpha + \beta} - \sqrt[3]{\alpha - \beta}\right)$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung der Hypocycloide ein und sieht die Größen α und β als zwei neue Veränderliche an, so erhält man als Gleichung der Evolute:

$$\tfrac{1}{4}\left(\sqrt[3]{\alpha + \beta} + \sqrt[3]{\alpha - \beta}\right)^2 + \tfrac{1}{4}\left(\sqrt[3]{\alpha + \beta} - \sqrt[3]{\alpha - \beta}\right)^2 = R^{\frac{2}{3}},$$

welche nach gehöriger Vereinfachung folgende Gestalt erhält:

$$(\alpha+\beta)^{\frac{2}{3}} + (\alpha-\beta)^{\frac{2}{3}} = 2\,R^{\frac{2}{3}}.$$

Wir wollen die Curve rectificiren. Es ist, wenn wir die Länge einer Curvenstrecke, die zwischen x = o und x = x liegt, mit L bezeichnen,

$$L = \int ds,$$

und da

$$ds = dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

ist, so wird:

$$\begin{aligned} L &= \int dx\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \\ &= \int dx\sqrt{1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} \\ &= \int dx\sqrt{\frac{R^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}} \\ &= R^{\frac{1}{3}}\int x^{-\frac{1}{3}}\cdot dx \\ &= \tfrac{3}{2}\,R^{\frac{1}{3}}\,x^{\frac{2}{3}} + C. \end{aligned}$$

Nimmt man nun das Integral von x = o bis x = R, so ist:

$$\begin{aligned} L &= R^{\frac{1}{3}}\int_o^R x^{-\frac{1}{3}}\,dx \\ &= R^{\frac{1}{3}}\,\tfrac{3}{2}\,R^{\frac{2}{3}} \\ &= \tfrac{3}{2}\,R. \end{aligned}$$

Daraus findet sich:

$$4\,L = 6\,R.$$

Also ist der Perimeter der Curve = dem sechsfachen Radius der Basis.

Es bleibt noch übrig, den Inhalt der von der Curve begrenzten Fläche zu bestimmen. Bezeichnet man den Inhalt der Fläche, die zwischen den positiven Richtungen der Coordinatenachsen und der Curve liegt, mit J, so ist:

$$J = \int_o^R y\,dx$$

also, da

$$y = (R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}$$

ist:

$$J = \int_o^R dx\,(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Um den Werth dieses bestimmten Integrales zu ermitteln, untersuche man zuvor das unbestimmte Integral:

$$\int dx\,(R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}.$$

Man setze:

$$R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}} = z^2,$$

so ist:

$$-\tfrac{2}{3}\,\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}\,dx = 2\,z\cdot dz$$

und deshalb:

$$dx = -\,3\,x^{\frac{1}{3}} \cdot z \cdot dz$$
$$= -\,3\,z\sqrt{R^{\frac{2}{3}} - z^2}\,dz.$$

Folglich ist:

$$\int (R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,dx = -\,3\int z^4\sqrt{R^{\frac{2}{3}} - z^2} \cdot dz.$$

Hierauf setze man:

$$R^{\frac{2}{3}} - z^2 = z^2\,t^2$$

so ist:

$$z = \sqrt{\frac{R^{\frac{2}{3}}}{1+t^2}}$$

und

$$dz = \tfrac{1}{2}\left(\frac{R^{\frac{2}{3}}}{1+t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{R^{\frac{2}{3}}}{1+t^2}\right).$$

Man erhält demnach:

$$\int (R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,dx = -\,3\int\left(\frac{R^{\frac{2}{3}}}{1+t^2}\right)^2\left(\frac{R^{\frac{2}{3}}}{1+t^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{t}{2}\left(\frac{R^{\frac{2}{3}}}{1+t^2}\right)^{-\frac{1}{2}} d\left(\frac{R^{\frac{2}{3}}}{1+t^2}\right).$$

Es ist aber:

$$d\left(\frac{R^{\frac{2}{3}}}{1+t^2}\right) = -\,\frac{R^{\frac{2}{3}}}{(1+t^2)^2}\,2t \cdot dt.$$

Folglich ist:

$$\int (R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,dx = 3\,R^2\int\frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^4}.$$

Behandelt man dieses Integral nach der Methode der Integration durch Theile, indem man $\frac{t}{2}$ und $\frac{2\,t\,dt}{(1+t^2)^4}$ zu Faktoren wählt, so erhält man:

$$\int (R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,dx = 3\,R^2\left(-\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{3\,(1+t^2)^3} + \int\frac{dt}{2}\cdot\frac{1}{3\,(1+t^2)^3}\right)$$
$$= 3\,R^2\left(-\frac{t}{6\,(1+t^2)^3} + \frac{1}{6}\int\frac{dt}{(1+t^2)^3}\right).$$

Durch eine einfache Integrationsmethode erhält man mit Vernachlässigung der Constanten:

$$\int\frac{dt}{(1+t^2)^3} = \frac{t}{2\,(1+t^2)^2}\left[\tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{4}\,(1+t^2)\right] + \tfrac{3}{8}\ \text{arc tang}\ t.$$

Nach Einsetzung dieses Werthes ergibt sich:

$$\int (R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,dx = \tfrac{1}{2}\,R^2\left[-\frac{t}{(1+t^2)^3} + \frac{t\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\,(1+t^2)\right)}{2\,(1+t^2)^2} + \tfrac{3}{8}\ \text{arc tang}\ t\right]$$

oder nach gehöriger Vereinfachung:

$$\int (R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\,dx = \tfrac{1}{2}\,R^2\,\frac{8\,t^3 + 3\,t^5 - 3\,t}{8\,(1+t^2)^3} + \tfrac{3}{16}\,R^2\ \text{arc tang}\ t.$$

Benutzt man jetzt folgende aus dem Vorhergehenden sich ergebende Formeln:

$$t = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}\ \text{und}\ 1 + t^2 = \frac{R^{\frac{2}{3}}}{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}},$$

so erhält man:

$$\int (R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\, dx = \tfrac{1}{16}\left[8\, x\, (R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} + 3\, x^{\frac{5}{3}}\, (R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}} - 3\, x^{\frac{1}{3}}\, (R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{5}{2}}\right]$$

$$+ \tfrac{3}{16}\, R^2 \text{ arc tang } \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}}$$

oder

$$\int (R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\, dx = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}\left(3\, x^{\frac{4}{3}} - 3\, y^{\frac{4}{3}} + 8\, x^{\frac{2}{3}}\, y^{\frac{2}{3}}\right) + \tfrac{3}{16}\, R^2 \text{ arc tang } \frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}}.$$

Das Integral ist nun von $x = o$ bis $x = R$ zu nehmen; man findet:

$$\int_o^R (R^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}}\, dx = \tfrac{3}{16}\, R^2 \text{ arc tang } \infty = \frac{3\pi}{32}\, R^2.$$

Nimmt man nun diesen gefundenen Werth 4 mal, so erhält man als Inhalt der ganzen, von der Curve begrenzten Fläche:

$$J = \frac{3\pi}{8}\, R^2$$

d. h. der Inhalt derselben ist = dem $\frac{3}{8}$fachen Inhalte der Basis.

§ 4.

Auf eine andere Entstehungsweise der zuletzt betrachteten Curve werden wir durch folgende Betrachtungen geführt:

Man denke sich in einem beliebigen Punkte o der Curve eine Tangente gelegt und bezeichne den Durchschnittspunkt derselben mit der X Achse α, den Durchschnittspunkt mit der Y Achse β, so liegt zwischen den beiden Achsen das Stück $\alpha\beta$ von der Tangente. Sind nun x, y die Coordinaten des Punktes o, so ist, wenn man den $\measuredangle$, den die Tangente mit der X Achse bildet, ϱ nennt:

$$1)\ o\alpha = \frac{y}{\sin\varrho}$$

$$2)\ o\beta = \frac{x}{\cos\varrho}.$$

Da aber

$$\text{tang}\, \varrho = \frac{dy}{dx} = -\frac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

ist, so findet man:

$$\sin\varrho = \frac{\frac{dy}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{R^{\frac{1}{3}}}$$

$$\cos\varrho = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{R^{\frac{1}{3}}};$$

also nach Einsetzung dieser Werthe:

$$1)\ o\alpha = \frac{y\, R^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} = y^{\frac{2}{3}}\, R^{\frac{1}{3}}$$

$$2)\ o\beta = \frac{x\, R^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = x^{\frac{2}{3}}\, R^{\frac{1}{3}}.$$

Es ist aber, wenn man mit T die Länge des begrenzten Stückes $\alpha\beta$ der Tangente bezeichnet:

$$T = o\alpha + o\beta,$$

und deshalb mit Benutzung der gefundenen Resultate:

$$T = y^{\frac{2}{3}} R^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}} R^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left(y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}}\right) R^{\frac{1}{3}}$$
$$= R.$$

Es ist also für jeden Punkt der Curve der zwischen den beiden Coordinatenachsen liegende Abschnitt der Tangente constant und zwar gleich dem Radius der festen Basis.

Hieraus folgt, daß wenn eine Linie von constanter Länge R zwischen zwei auf einander senkrecht stehenden Linien X und Y abwärts gleitet, die Umhüllungscurve des hierdurch entstehenden Liniensystems identisch ist mit der Hypocycloide in dem besonderen Falle, daß der Radius des Rollkreises $= \frac{1}{4}$mal dem Radius R der festen Basis ist.

Wir wollen die Richtigkeit des zuletzt ausgesprochenen Resultates auch direkt beweisen, indem wir zeigen, daß, wenn eine Linie von der Länge R zwischen zwei festen rechtwinkeligen Achsen X und Y alle möglichen Lagen annimmt, die Gleichung der Umhüllungscurve für die Linie in allen ihren Lagen die Form:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$$

gewinnt.

Man bezeichne zu dem Zwecke die Abschnitte, die durch die Linie R auf der Y und X Achse entstehen, mit m und n, so finden folgende Gleichungen statt:

$$1)\ \frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$$

$$2)\ m^2 + n^2 = R^2.$$

Diesen Gleichungen muß Genüge geschehen für jedes m und für jedes n; sieht man nun m und n in beiden Gleichungen als Variable an und differentiirt nach diesen neuen veränderlichen Größen, so findet man:

$$-\frac{x}{m^2}\, dm - \frac{y}{n^2}\, dn = o \text{ (aus Gl. 1))}$$

$$m\, dm + n\, dn = o \text{ (aus Gl. 2))}$$

oder:

$$3)\ \frac{x}{m^2} \cdot \frac{dm}{dn} + \frac{y}{n^2} = o$$

$$4)\ m \frac{dm}{dn} + n = o.$$

Aus den Gleichungen 1), 2), 3) und 4) sind nun die Größen m, n und $\frac{dm}{dn}$ zu eliminiren und die gefundenen Werthe in eine derselben zu substituiren; die dadurch gewonnene Gleichung wird die gesuchte Gleichung der Umhüllungscurve sein.

Multiplicirt man Gleichung 4) mit dem unbestimmten Faktor ϱ, so ergibt sich:

$$\varrho\, m \frac{dm}{dn} + \varrho\, n = o;$$

ferner wird durch Addition dieser Gleichung zu Gleichung 3):

$$5)\ \left(\frac{x}{m^2} + \varrho\, m\right) \frac{dm}{dn} + \left(\frac{y}{n^2} + \varrho\, n\right) = o.$$

Bestimmt man nun den angenommenen Faktor durch die Bedingung:

$$\frac{x}{m^2} + \varrho\, m = o,$$

so muß wegen 5) auch die Gleichung:

$$\frac{y}{n^2} + \varrho\, n = o$$

erfüllt werden. Man gewinnt demnach die neuen Gleichungen:

$$6)\ \frac{x}{m} + \varrho\, m^2 = o$$

$$7)\ \frac{y}{n} + \varrho\, n^2 = o.$$

Addirt man die beiden letzten Gleichungen zu einander, so wird:

$$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \varrho\,(m^2 + n^2) = o,$$

also mit Benutzung von Gleichung 1) und Gleichung 2):

$$1 + \varrho\, R^2 = o.$$

Hieraus bestimmt sich:

$$\varrho = -\frac{1}{R^2}.$$

Setzt man diesen Werth für ϱ in die Gleichungen 6) und 7) ein, so wird:

$$m^3 = x\, R^2$$
$$n^3 = y\, R^2$$

oder:

$$m^2 = x^{\frac{2}{3}}\, R^{\frac{4}{3}}$$
$$n^2 = y^{\frac{2}{3}}\, R^{\frac{4}{3}}.$$

Hieraus ergibt sich schließlich:

$$m^2 + n^2 = (x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}})\, R^{\frac{4}{3}}$$

oder:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}.$$

Die gewonnene Gleichung der Umhüllungscurve ist demnach genau dieselbe, wie die der besprochenen Hypocycloide.

Es läßt sich dies noch auf eine andere Art beweisen. Man nehme an, die Linie bilde mit der X Achse den $\measuredangle\ \alpha$, so ist für einen Punkt P der Linie auf der Strecke R zwischen den beiden Achsen, wenn wir den Durchschnittspunkt der ersteren mit der Abscissenachse Q nennen:

$$y = PQ.\ \sin\alpha.$$

Da ferner, wenn wir den Coordinatenanfangspunkt mit O und den Fußpunkt der Ordinate mit S bezeichnen,

$$x = OQ - SQ$$
$$= -R\cos\alpha + PQ\cos\alpha$$

ist, so bestimmt sich hieraus:

$$PQ = \frac{x + R\cos\alpha}{\cos\alpha},$$

und dies in den Ausdruck für y substituirt, gibt:

$$1)\ y = \sin\alpha \left(\frac{x}{\cos\alpha} + R\right).$$

Diese Gleichung ist abhängig von dem jedesmaligen $\measuredangle\ \alpha$; differentiirt man dieselbe nach α, so erhält man:

$$o = \left[\cos\alpha\left(\frac{x}{\cos\alpha} + R\right) + \sin\alpha^2 \cdot \frac{x}{\cos\alpha^2}\right] d\alpha$$

oder:

$$o = \left[R\cos\alpha + x + \frac{\sin\alpha^2\, x}{\cos\alpha^2}\right] d\alpha$$

oder:

$$o = \left[R\cos\alpha + \frac{(\cos\alpha^2 + \sin\alpha^2)\, x}{\cos\alpha^2}\right] d\alpha$$

oder:

$$2)\ R\cos\alpha + \frac{x}{\cos\alpha^2} = o.$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) ist α zu eliminiren; mit Hülfe von Gleichung 2) bestimmt sich:

$$\cos\alpha = -\sqrt[3]{\frac{x}{R}}$$

und deshalb:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{2}{3}}}.$$

Dadurch, daß man diese Werthe für $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ in die Gleichung 1) einsetzt, erhält man nun die gesuchte Gleichung der Umhüllungscurve des angenommenen Liniensystems. Die Substitution gibt:

$$y = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^{\frac{2}{3}}}\left(R - x\frac{R^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)$$

$$= \sqrt{1 - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{R^{\frac{2}{3}}}}\, R\left(1 - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{R^{\frac{2}{3}}}\right)$$

$$= R\left(1 - \frac{x^{\frac{2}{3}}}{R^{\frac{2}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Folglich ist:

$$\frac{y^{\frac{2}{3}}}{R^{\frac{2}{3}}} = 1 + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{R^{\frac{2}{3}}}$$

oder:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}},$$

eine Gleichung, welche wiederum genau dieselbe Form aufweist, wie die der besprochenen Hypocycloide.