Metrische Beziehungen.

Messen, Einheit, Masszahl, Vielfaches, Mass.
Ganze, gebrochene, irrationale Masszahlen.
Kommensurabilität, Inkommensurabilität.

Definition des Produkts zweier Strecken:

Sind a und b zwei Strecken, $|a|$[1] und $|b|$ ihre Masszahlen in Bezug auf die Längeneinheit e, so definieren wir $ab = |a| \cdot |b|$ qe[2]).

Bei dieser Definition gelten alle arithmetischen Sätze über Multiplikation zweier Zahlen auch für zwei Strecken; denn man braucht auf beiden Seiten der Formel über die zugehörigen Masszahlen nur die Quadrateinheit als Benennung hinzuzufügen, um an der Hand der obigen Definition die Richtigkeit der Formel für die Strecken zu erweisen. Infolgedessen gelten dann auch die Formeln über Division zweier Strecken.

Die gebräuchlichste Längeneinheit, das Meter, ist der zehnmillionste Teil des Meridianquadranten:

km, (Hm), (Dm), m, (dm), cm, mm.
qkm, qHm = ha, qDm = a, qm, (qdm), qcm, qmm.

Ueber den Flächeninhalt geradliniger Figuren.

Der Flächeninhalt einer Figur ist der von ihr eingeschlossene Teil der Ebene.

59. *Der Inhalt des Rechtecks ist*

$R = ab.$

Beweis. I. Fall der Kommensurabilität[3]):

1) die Einheit geht in a und b auf.

Es sei $a = ne$, $b = oe$; dann ist $R = no$ qe $= ab$.

2) Ein aliquoter Teil der Einheit geht in a und b auf.

Es sei $a = n\frac{e}{p}$, $b = o\frac{e}{p}$; dann ist nach 1)

$$R = no\ q\left(\frac{e}{p}\right) = \frac{no}{p^2}\ qe = \frac{n}{p}\,e \cdot \frac{o}{p}\,e = ab.$$

---

[1]) gelesen: Masszahl von a. [2]) gelesen: Quadrateinheit.
[3]) con, zusammen; mensurare, messen.

II. Fall der Inkommensurabilität:

1) Die Einheit ist mit a kommensurabel, mit b inkommensurabel. Angenommen $R \gtrless ab$, so muss es, da der Flächeninhalt eines Rechtecks durch Veränderung einer Seite um jede beliebige, noch so kleine Grösse geändert werden kann, ein anderes Rechteck vom Inhalt ab mit den Seiten a und BC_1 geben. Trägt man dann einen in a aufgehenden aliquoten Teil der Einheit, der kleiner ist, als CC_1 auf b von B aus ab, so muss mindestens ein Teilpunkt zwischen C und C_1 fallen, etwa in C_2. Dann ist das Rechteck $ABC_2D_2 = AB \cdot BC_2$ nach Fall I; nach Annahme aber ist $ABC_1D_1 = AB \cdot BC$.

Diese beiden Gleichungen widersprechen einander.

2) Die Einheit ist mit a und b inkommensurabel. Dieser Fall wird ähnlich auf 1) zurückgeführt, wie dieser Fall auf den der Kommensurabilität.

60. *Der Inhalt des Parallelogramms ist*

$P = ah.$

Beweis durch den Satz vom Inhalt des Rechtecks.

61. *Der Inhalt des Dreiecks ist*

$\triangle = \frac{1}{2}ch.$

Beweis durch den Satz vom Inhalt des Parallelogramms.

62. *Der Inhalt des Trapezes ist*

$T = \frac{1}{2}(a + c)\,h.$

Beweis durch den Satz vom Inhalt des Dreiecks.

63. *Der Inhalt des regulären n-seitigen Polygons ist*

$P_n = \frac{1}{2}na\varrho.$

Beweis durch den Satz vom regulären Polygon in Verbindung mit dem Satz vom Inhalt des Dreiecks.

Ueber Aehnlichkeit geradliniger Figuren.

64. Satz von der Parallelen im Dreieck.

Wenn im Dreieck $A_1B_1 \parallel AB$, so ist $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a}{b}$

Beweis: Denkt man sich A mit B_1 und B mit A_1 verbunden, so ist $\frac{\varDelta_1}{\varDelta_2} = \frac{a_1}{a_2}$ und $\frac{\varDelta_1}{\varDelta_3} = \frac{b_1}{b_2}$; es ist aber $\varDelta_2 = \varDelta_3$, also $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$; durch correspondierende Addition folgt dann $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$.

65. Umkehrung.

Wenn im Dreieck $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ so ist $c_1 \parallel c$.

Beweis (indirekt). Durch den Parallelensatz ergiebt sich nach einer Umstellung ein Widerspruch.

66. Satz von den beiden Parallelen im Dreieck.

Wenn im Dreieck $A_1B_1 \parallel AB$ und $B_1A_2 \parallel AC$, so ist
$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$; $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$; $\frac{a}{a_2} = \frac{b}{b_2} = \frac{c}{c_2}$.

Beweis: Durch Anwendung des Parallelensatzes und des Satzes von den Gegenseiten im Parallelogramm.

Definition der Ähnlichkeit von Polygonen.

Wenn in zwei Polygonen

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \text{und } \alpha = \alpha_1,\ \beta = \beta_1,\ \gamma = \gamma_1 \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{so ist} \\ P \sim P_1\end{array}$$

67. Ähnlichkeitssätze.

$\varDelta \sim \varDelta_1$, wenn

1) $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$ und $\gamma = \gamma_1$, oder 2) $\alpha = \alpha_1$ und $\gamma = \gamma_1$ oder

3) $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$, oder 4) $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1}$, $\alpha = \alpha_1$, $a > b$.

Beweis: Trage b_1 auf b von C aus ab bis A_2, ziehe durch A_2 eine Parallele zu c bis B_2; dann ist das so abgeschnittene Dreieck $\varDelta_2 \sim \varDelta$; ferner ergiebt sich aus dieser Ähnlichkeit im Verein mit den Voraussetzungen, dass $\varDelta_2 \cong \varDelta_1$ also auch $\varDelta_1 \sim \varDelta$.

68a. Satz über ähnliche Dreiecke.

Wenn $\Delta \sim \Delta_1$, so ist $\frac{a}{a_1} = \frac{h}{h_1} = \frac{m}{m_1} = \frac{a+b+c}{a_1+b_1+c_1}$

Beweis: Durch Ähnlichkeit von Teildreiecken; der letzte Teil der Behauptung durch den Satz über fortlaufende Proportionen.

68b. Satz über die Flächeninhalte ähnlicher Dreiecke.

Wenn $\Delta \sim \Delta_1$, so ist $\frac{\Delta}{\Delta_1} = \frac{a^2}{a_1^{\,2}} = \frac{h^2}{h_1^{\,2}}$.

Beweis: Durch Division der Flächeninhalte der beiden Dreiecke und den Satz über ähnliche Dreiecke.

69a. Satz über ähnliche Polygone.

Wenn $P \sim P_1$, so ist $\Delta a \sim \Delta a_1$, $\Delta b \sim \Delta b_1$, $\Delta c \sim \Delta c_1 \ldots$

Beweis: Die Ähnlichkeit von Δa und Δa_1 folgt aus der Voraussetzung; hieraus folgt die Gleichheit von φ und φ_1, und mit Hilfe der Voraussetzung auch die von ψ und ψ_1; ferner folgt aus der Ähnlichkeit von Δa und Δa_1, dass $\frac{b}{b_1} = \frac{f}{f_1}$, somit auch die Ähnlichkeit des zweiten Dreieckspaares, und so fort.

69b. Satz über die Flächeninhalte ähnlicher Polygone.

Wenn $P \sim P_1$, so ist $\frac{P}{P_1} = \frac{a^2}{a_1^{\,2}} = \frac{b^2}{b_1^{\,2}} = \ldots\ldots$

Beweis: Aus dem vorigen Satz folgt, wenn man die homologen Diagonalen zieht, die Ähnlichkeit der Teildreiecke. Da nun diese sich verhalten wie die Quadrate homologer Seiten, so ergiebt sich die fortlaufende Proportion $\frac{\Delta a}{\Delta a_1} = \frac{\Delta b}{\Delta b_1} = \frac{\Delta c}{\Delta c_1} \ldots$; durch korresspondierende Addition folgt

$$\frac{P}{P_1} = \frac{\Delta a}{\Delta a_1} = \frac{a^2}{a_1^{\,2}} = \frac{b^2}{b_1^{\,2}} = \ldots\ldots$$

Metrische Beziehungen am Dreieck.

70a. Satz von der Hypotenusenhöhe.

Wenn im Dreieck $\gamma = R$, so ist

1) $h^2 = pq$, 2) $a^2 = cp$ und $b^2 = cq$.

Beweis: 1) durch Ähnlichkeit von $\varDelta_p$ und $\varDelta_q$ 2) durch Ähnlichkeit eines der beiden Teildreiecke mit $\varDelta$.

70b. Satz des Pythagoras.

Wenn im Dreieck $\gamma = R$, so ist $a^2 + b^2 = c^2$.

Beweis: Durch den Satz von der Hypotenusenhöhe.

71. Umkehrung.

Wenn im Dreieck $a^2 + b^2 = c^2$, so ist $\gamma = R$.

Beweis: Denke b auf a in C senkrecht errichtet, dann liefert der Pythagoras und die Voraussetzung: $c = c_1$.

72. Verallgemeinerung des Pythagoreischen[1]) Lehrsatzes.

Im Dreieck ist $a^2 = b^2 + c^2 - 2cq$.

Beweis: Durch Anwendung des Pythagoras auf ein Teildreieck folgt $a^2 = h^2 + p^2$. Drückt man nun h^2 aus dem andern Dreieck nach dem Pythagoras und p^2 nach der Formel über Quadrierung einer Differenz aus und setzt die gefundenen Werte ein, so ergiebt sich die Behauptung.

Bemerkung: Fällt H in die Verlängerung von c, so gilt der ganz auf der Verlängerung liegende Höhenabschnitt als negativ, der nur teilweise in die Verlängerung fallende Abschnitt als positiv.

73. Satz vom Quadrat der Mittellinie.

Im Dreieck ist $a^2 + b^2 = 2m^2 + \frac{1}{2}c^2$.

Beweis: Wende die Verallgemeinerung des pythagoreischen Lehrsatzes auf die beiden Teildreiecke an; dann ergiebt sich durch Addition die Behauptung.

74. Satz von der Winkelhalbierenden.

Im Dreieck ist $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$.

Beweis: Denkt man von W auf a und b Senkrechte gefällt, so ist $\frac{\triangle BCW}{\triangle ACW} = \frac{a}{b}$. Es ist aber auch $\frac{\triangle BWC}{\triangle AWC} = \frac{u}{v}$, folglich $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$.

---

1) ποθαγόρειος, pythagoreisch.

75. *Satz von der Halbierungslinie des Aussenwinkels.*

Im Dreieck ist $\frac{a}{b} = \frac{u'}{v'}$.

Beweis: Fälle von W' die Senkrechten auf a und b; dann ist $\frac{\triangle BCW'}{\triangle ACW'} = \frac{a}{b}$; es ist aber auch $\frac{\triangle BW'C}{\triangle AW'C} = \frac{u'}{v'}$, folglich $\frac{a}{b} = \frac{u'}{v'}$.

76a. *Definition der harmonischen Teilung.*

Eine Strecke heisst harmonisch geteilt, wenn sie innerlich und äusserlich in demselben Verhältnis geteilt ist.

76b. *Satz des Apollonius.*

Wenn am Dreieck $\angle WXW' = R$, so ist $\frac{BX}{AX} = \frac{a}{b}$.

Beweis: Ziehe durch W eine Parallele zu W'X, verwende die Ähnlichkeit zweier Dreieckspaare und den Umstand, dass AB durch W und W' harmonisch geteilt ist zum Nachweis dafür, dass DW = EW. Dann folgt die Behauptung aus dem Satz von der Winkelhalbierenden.

77. *Satz von den drei Höhen.*

Im Dreick schneiden sich h_a, h_b, h_c in einem Punkte, und es ist $h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}$.

Beweis: Legt man durch die Spitzen des Dreiecks Parallelen zu den Gegenseiten, so entstehen drei Paare von Parallelogrammen, und die Seiten des neu entstandenen Dreiecks werden durch die Ecken des ursprünglichen halbiert. Dann folgt die erste Behauptung aus dem Satz von den drei Mittelsenkrechten des Dreiecks. — Drückt man ferner den Inhalt des Dreiecks dreimal aus und setzt die sich ergebende Produktengleichung in eine fortlaufende Proportion um, so ergiebt sich die zweite Behauptung.

78. Satz von den drei Mittellinien.

Im Dreieck schneiden sich m_a, m_b, m_c in einem Punkt so, dass jede Mittellinie dreimal so gross ist, wie ihr unterer Abschnitt.[1])

Beweis: Zwei Mittellinien m_a und m_b schneiden sich in einem Punkte S. Nun ist $\triangle ABS = \triangle CBS$, da sie gleiche Grundlinie und gleiche Höhe haben. Aus demselben Grunde ist $\triangle BAS = \triangle CAS$, also $\triangle ABS = \triangle CBS = \triangle ACS = \frac{1}{3}\Delta$. Da nun $\triangle ACS$ und $\triangle BCS$ gleichen Inhalt und gleiche Grundlinie haben, so müssen sie auch gleiche Höhe haben. Daraus folgt, dass CS die Seite c halbiert. Nunmehr muss $\triangle ASM_c = \frac{1}{3} \triangle ACM_c$ sein, also $SM_c = \frac{1}{3}m_c$, ebenso $SM_a = \frac{1}{3}m_a$ und $SM_b = \frac{1}{3}m_b$.

Bemerkung: Der Durchschnittspunkt der drei Mittellinien heisst „Schwerpunkt" des Dreiecks, weil die Fläche desselben um ihn gleichmässig verteilt ist.

79a, b. Satz des Ceva.

Wenn drei Transversalen[2]) eines Dreiecks, AT_a, BT_b, CT_c durch einen Punkt gehen, so ist

$$\frac{AT_c}{BT_c} \cdot \frac{BT_a}{CT_a} \cdot \frac{CT_b}{AT_b} = 1.$$

Beweis: Setzt man je zwei Dreiecke zwischen je einer Seite und dem Punkt X in Verhältniss und wendet die Ähnlichkeit dreier rechtwinkliger Dreieckspaare an, so ergiebt sich durch Multiplikation der drei resultierenden Proportionen die Behauptung.

79c. Umkehrung des Satzes von Ceva.

Schneiden drei Transversalen die drei Seiten — oder die Verlängerungen zweier Seiten und die dritte — in drei Punkten T_a, T_b, T_c so, dass $\frac{AT_c}{BT_c} \cdot \frac{BT_a}{CT_a} \cdot \frac{CT_b}{AT_b} = 1$ ist, so gehen sie durch einen Punkt.

Beweis: Indirekt vermittelst des Hauptsatzes.

---

[1]) Der untere Abschnitt ist der nach der Seite, der obere ist der nach der Ecke zu liegende. [2]) transversus, quer durchschneidend.

Metrische Beziehungen am Kreise.

80. *Satz von den sich schneidenden Sehnen.*

Wenn die Sehnen AB und A_1B_1 sich in O schneiden, so ist $AO \cdot BO = A_1O \cdot B_1O$.

Beweis: Verbinde A mit B_1 und B mit A_1, dann folgt die Behauptung aus der Ähnlichkeit zweier Dreiecke.

81. *Satz von der Tangente und Sekante.*

Wenn die Sehne AB und eine Tangente in B_1 sich in O schneiden, so ist $\overline{B_1O}^2 = AO \cdot BO$.

Beweis: Verbinde B_1 mit A und B, dann folgt die Behauptung aus der Ähnlichkeit zweier Dreiecke.

82. *Satz über stetige Teilung.*

Wenn die Sehne CD und eine Tangente in B sich in A schneiden, wenn ferner $CD = AB$ und $AD = AE$ ist, so ist $AB \cdot EB = \overline{AE}^2$.

Beweis: Durch den Satz von der Tangente und Sekante vermittelst korrespondierender Subtraktion.

83. *Definition der stetigen Teilung.*

Eine Strecke a heisst stetig geteilt, wenn ein Teil x derselben die Gleichung erfüllt: $x^2 = a(a - x)$.

84. *Satz vom Bestimmungsdreieck des regulären Zehnecks.*

Wenn im Dreieck $a = b$ und $c^2 = a\ (a - c)$, so ist $\gamma = \frac{2}{5}R$.

Beweis: Trägt man c auf a von C aus ab bis D, so ist $\triangle ACB \sim \triangle DAB$, also $\triangle DAB$ gleichschenklig, somit auch $\triangle ADC$ gleichschenklig; folglich $\angle ADB = 2\gamma = \alpha = \beta$. Daraus folgt $\gamma = \frac{2}{5}R = \frac{4R}{10}$.

85. *Der Ptolemäische Lehrsatz.*

Im Sehnenviereck ist $ef = ac + bd$.

Beweis: Man trage $\angle(bf)$ an a in B an; der freie Schenkel teile e in e_1 und e_2; man beweise dann die Ähnlichkeit zweier Dreieckspaare. Zwei sich so ergebende Proportionen setze man nach dem Produktensatz um. Durch Addition ergiebt sich dann die Behauptung.

86. *Satz über Umfang und Inhalt des Kreises.*

1) $u = 2r\pi$. 2) $K = r^2\pi$.

Beweis: Zwei Kreise können als reguläre Polygone mit gleicher, aber unendlich grosser Seitenanzahl, somit als ähnliche Figuren angesehen werden. Bezeichnen also u und u_1 ihre Umfänge, r und r_1 ihre Radien; so ist $\frac{u}{u_1} = \frac{2r}{2r_1}$ oder $\frac{u}{2r} = \frac{u_1}{2r_1}$; d. h. der Quotient aus Umfang und Durchmesser hat für alle Kreise denselben Wert. Derselbe wird mit π bezeichnet, demgemäss ist 1) $u = 2r\pi$.

Der Inhalt des Kreises ist nun $K = \frac{1}{2}u\varrho = \frac{1}{2}ur$, so dass durch 1) folgt: 2) $K = r^2\pi$.

Zur Berechnung von π können folgende Betrachtungen dienen:

87a. *Satz über den kleinen Radius des regulären 2n-Ecks.*

$$\varrho_{2n} = \sqrt{\tfrac{1}{2}r\,(r + \varrho_n)}.$$

Beweis: Bezeichnen s_n die Seite, ϱ_n den kleinen Radius, u_n den Umfang, P_n den Inhalt des einem Kreise mit dem Radius r eingeschriebenen regulären n-Ecks, so ist nach dem Satz von der Hypotenusenhöhe

$$\varrho^2_{2n} = r\,[\varrho_n + \tfrac{1}{2}\,(r - \varrho_n)]$$

$$= \frac{r}{2}\,(r + \varrho_n),\ \text{also}$$

$$\varrho_{2n} = \sqrt{\frac{r}{2}\,(r + \varrho_n)}$$

87b. *Satz über den Inhalt des regulären n-Ecks.*

$$P_{2n} = \frac{r\,P_n}{\varrho_n}.$$

Beweis: Es ist $P_n = n \cdot \frac{1}{2}\,s_n\,\varrho_n$

$$P_{2n} = n \cdot [\tfrac{1}{2}\,s_n\,\varrho_n + \tfrac{1}{2}s_n\,(r - \varrho_n)]$$

$$= n \cdot \tfrac{1}{2}\,r\,s_n,\ \text{also}$$

$$\frac{P_n}{P_{2n}} = \frac{\varrho_n}{r}\ \text{oder}$$

$$P_{2n} = \frac{r \cdot P_n}{\varrho_n}$$

87c. Satz über die Ludolfsche Zahl.

$$\pi = \frac{3}{|\varrho_{12}| \cdot |\varrho_{24}| \cdot |\varrho_{48}| \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot} \text{ [1]}$$

Beweis: Für $|r| = 1$ ergiebt sich aus den vorigen Sätzen, wenn man vom regulären Sechseck ausgeht:

$$\frac{|P_6|}{|P_{12}|} = |\varrho_6|, \text{ wo } |\varrho_6| = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}.$$

$$\frac{|P_{12}|}{|P_{24}|} = |\varrho_{12}|, \text{ wo } |\varrho_{12}| = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,(1 + |\varrho_6|)}.$$

$$\frac{|P_{24}|}{|P_{48}|} = |\varrho_{24}|, \text{ wo } |\varrho_{24}| = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,(1 + |\varrho_{12}|)}.$$

$$\frac{|P_{48}|}{|P_{96}|} = |\varrho_{48}|, \text{ wo } |\varrho_{48}| = \sqrt{\tfrac{1}{2}\,(1 + |\varrho_{24}|)}$$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Durch Multiplikation dieser Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{|P_6|}{|P_\infty|} = |\varrho_6| \cdot |\varrho_{12}| \cdot |\varrho_{24}| \cdot |\varrho_{48}| \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$|P_\infty| = \frac{|P_6|}{|\varrho_6| \cdot |\varrho_{12}| \cdot |\varrho_{24}| \cdot |\varrho_{48}| \cdot \cdot \cdot \cdot}$$

Da aber $\frac{|P_6|}{|\varrho_6|} = 3$, und da $|P_\infty|$ als Masszahl vom Inhalt des Kreises den Wert π hat, so ergiebt sich

$$\pi = \frac{3}{|\varrho_{12}| \cdot |\varrho_{24}| \cdot |\varrho_{48}| \cdot \cdot \cdot \cdot}$$

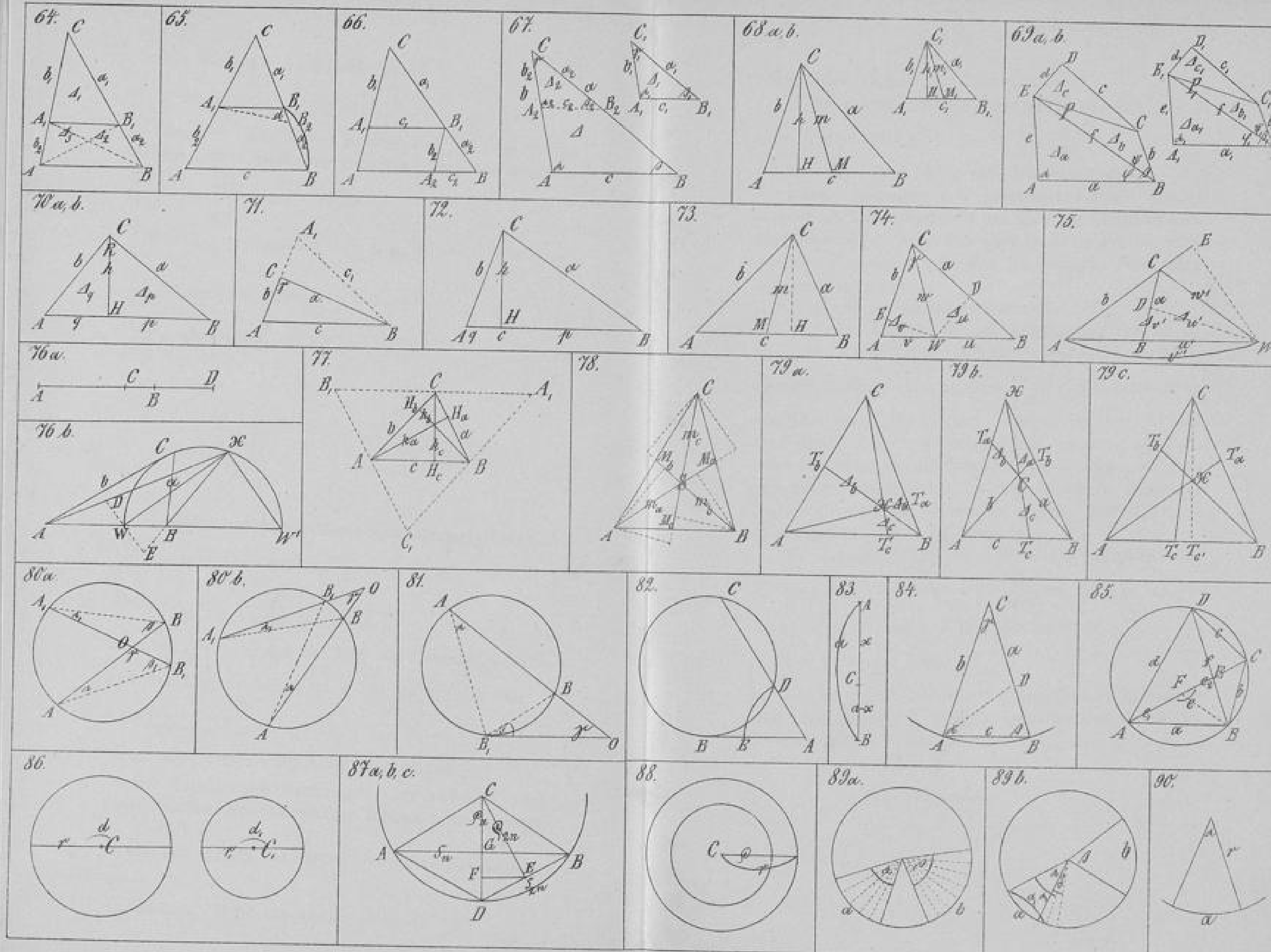
88. Satz über den Inhalt eines Kreisringes.

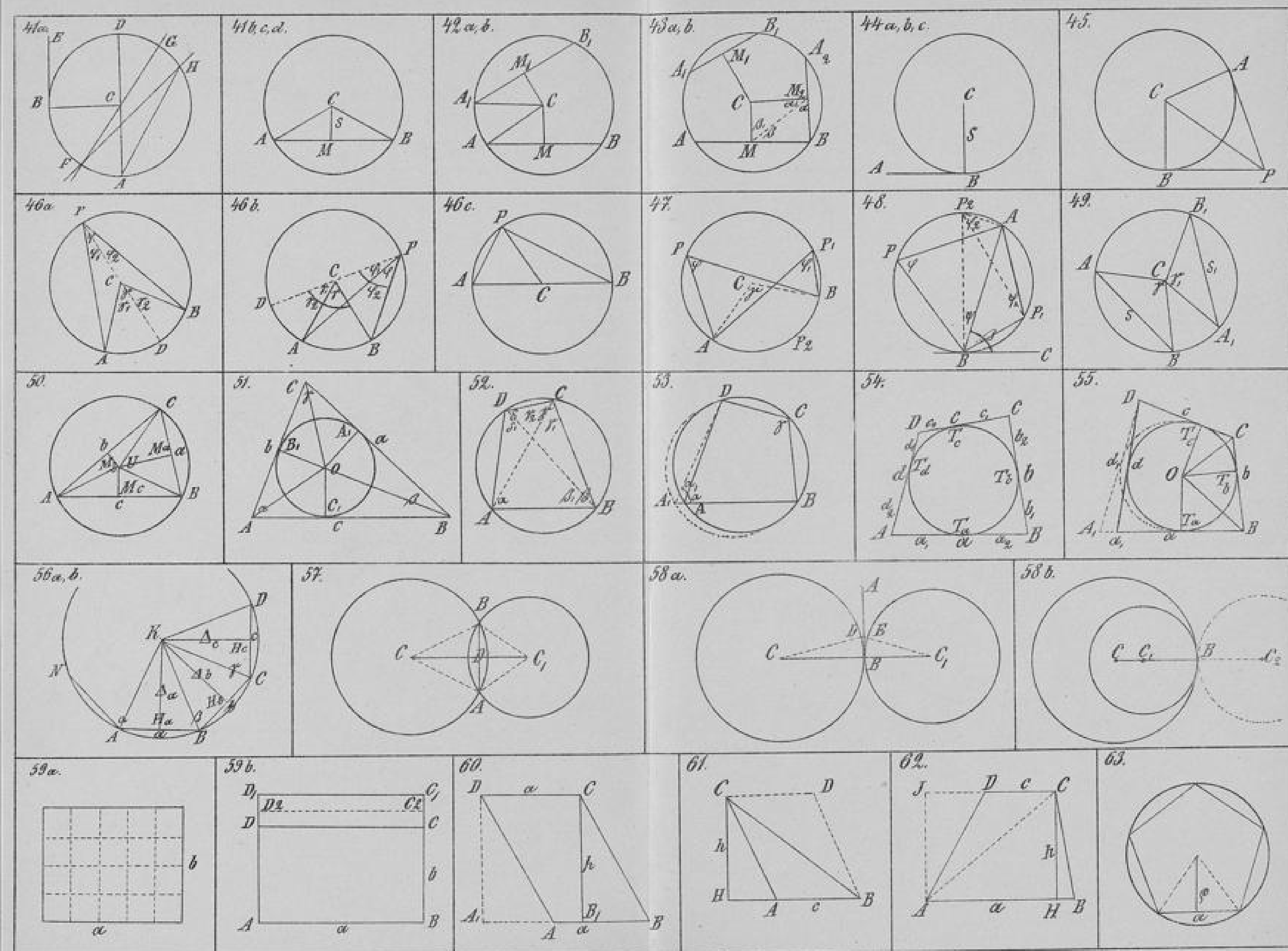
Der Inhalt eines Kreisringes, der zwischen zwei konzentrischen Kreisen von den Radien r und ϱ liegt, ist $(r^2 - \varrho^2)\,\pi$.

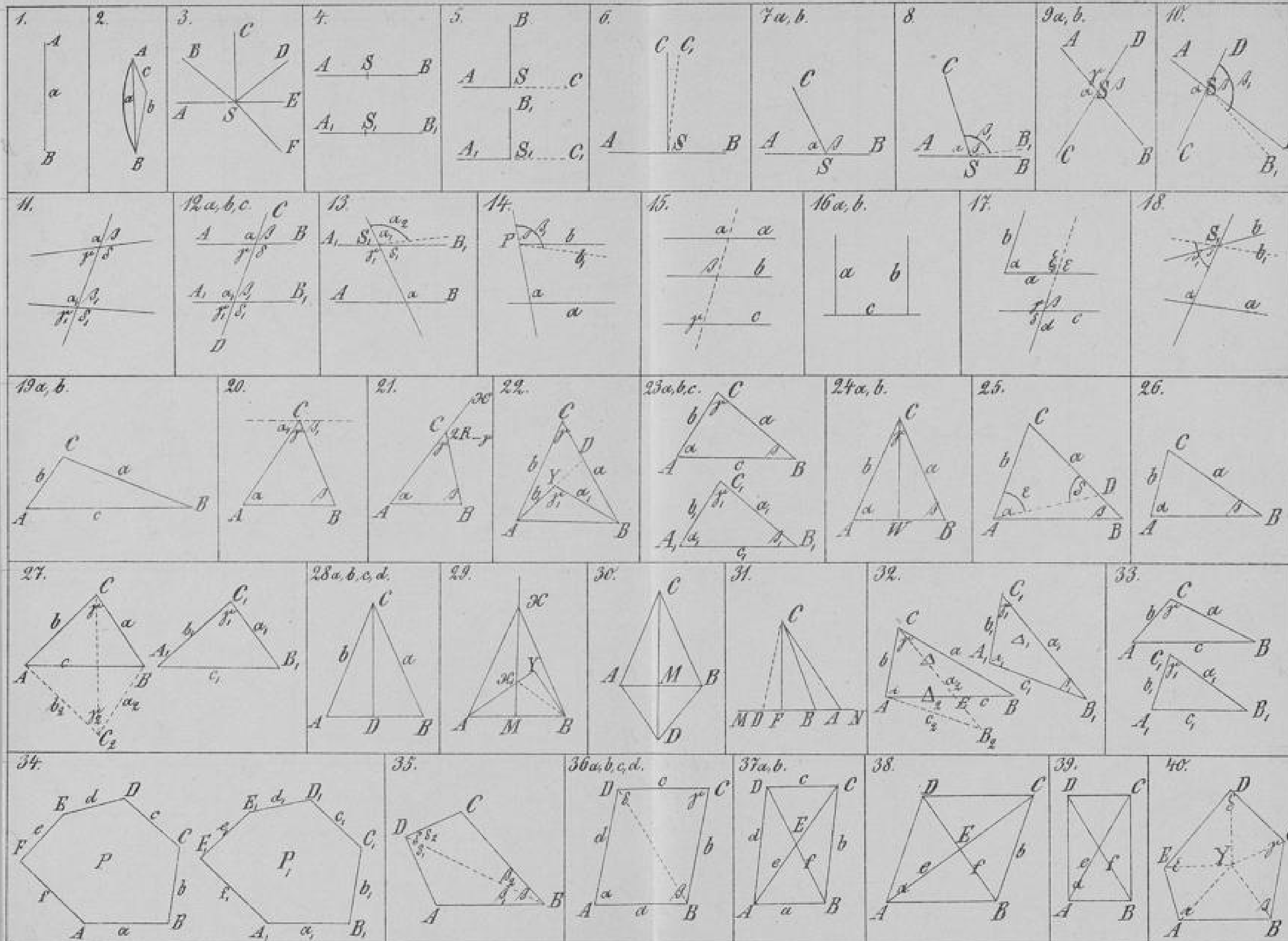
Beweis: Durch die Formel vom Inhalt des Kreises.

---

[1]) Das Zeichen „| |“ bedeutet wieder: „Masszahl von“.


64.
65.
66.
67.
68 a, b.
69 a, b.
70 a, b.
71.
72.
73.
74.
75.
76 a.
76 b.
77.
78.
79 a.
79 b.
79 c.
80 a.
80 b.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87 a, b, c.
88.
89 a.
89 b.
90.


41a.
41b, c, d.
42a, b.
43a, b.
44a, b, c.
45.
46a
46b.
46c.
47.
48.
49.
50.
51.
52.
53.
54.
55.
56a, b.
57.
58a.
58b.
59a.
59b.
60.
61.
62.
63.


1.
2.
3.
4.
5.
6.
7a, b.
8.
9a, b.
10.
11.
12a, b, c.
13.
14.
15.
16a, b.
17.
18.
19a, b.
20.
21.
22.
23a, b, c.
24a, b.
25.
26.
27.
28a, b, c, d.
29.
30.
31.
32.
33.
34.
35.
36a, b, c, d.
37a, b.
38.
39.
40.

89. Satz über Bogen und Centriwinkel.

Wenn a und b Bogen desselben Kreises, α und β ihre Centriwinkel sind, so ist $\frac{a}{b} = \frac{\alpha}{\beta}$.

Beweis: 1) α und β sind kommensurabel.

Durch Abtragen des gemeinschaftlichen Masses werden nach dem Satz von den gleichen Centriwinkeln auch die Bogen in lauter gleiche Teile geteilt. Die Division der sich ergebenden Gleichungen führt dann zur Behauptung.

2) α und β sind inkommensurabel.

Indirekt: Angenommen, die Behauptung wäre falsch, so könnte sie durch Veränderung eines Gliedes richtig gestellt werden, etwa in $\frac{a}{b} = \frac{\alpha + \delta}{\beta}$. Es muss dann ein Mass von β geben, welches kleiner ist als δ. Trägt man dies auf α ab, so oft es geht, so muss ein Teilschenkel zwischen die Schenkel von δ fallen, so dass ein neuer Centriwinkel α_1 und ein dazu gehöriger Bogen a_1 entsteht. Nunmehr ergiebt Teil 1) einen Widerspruch gegen die Annahme.

Folgerung. Wählt man für b die Peripherie des Kreises, so ergiebt sich $a = \frac{\alpha}{180^0} r\pi$.

90. Satz über den Inhalt des Kreissektors.

$$s = \tfrac{1}{2} ar = \frac{\alpha}{360^0} r^2\pi.$$

Beweis: Durch Zerlegung des Sektors in unendlich viele, unendlich schmale Dreiecke und durch die Folgerung des vorigen Satzes.

89. … *el.*

… Kreises, α und β

… $\frac{\alpha}{\beta}$.

… ensurabel.

… haftlichen Masses

… hen Centriwinkeln

… Teile geteilt. Die

… ungen führt dann

… el.

… ptung wäre falsch,

… es Gliedes richtig

… . Es muss dann

… r ist als δ. Trägt

… so muss ein Teil-

… δ fallen, so dass

… n dazu gehöriger

… bt Teil 1) einen

… die Peripherie des

… π.

90. … *ktors.*

… Sektors in unend-

… ke und durch die