Die folgende Zusammenstellung ist für die Hand des Schülers bestimmt und bietet demselben in knapper übersichtlicher Form nur den mathematischen Lehrstoff, welcher in seinen sicheren geistigen Besitz übergehen soll. Alles die Methode des Unterrichts Betreffende ist daher fortgelassen. Nur die an unserer Anstalt benutzte östreichische Rechenmethode ist in Nr. 1 bis 4 an einer Reihe von Beispielen ausführlicher erläutert, weil dieselbe noch nicht die allgemein übliche ist.

Die eingefügten Rechen- und arithmetischen Aufgaben vertreten immer ganze Gruppen. In der Geometrie sind nur solche Aufgaben angeführt, deren Lösung jedem Schüler zu jeder Zeit gegenwärtig sein soll (Fundamentalaufgaben).

Der Stoff ist an unserer Anstalt in folgender Weise auf die einzelnen Klassen verteilt:

Sexta: 1 bis 44.
Quinta: 45 bis 67.
Quarta: 68 bis 81, 201 bis 234.
Untertertia: 82 bis 133, 235 bis 265.
Obertertia: 134 bis 180, 266 bis 283.
Untersekunda: 181 bis 200, 284 bis 316.

A. Rechnen und Arithmetik.

I. Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen.

1. **Addieren.** Rechenzeichen: +, **plus. Summanden** oder **Glieder; Summe.**

Beispiel:*)

$$\begin{array}{r} 3729 \\ +\ 240826 \\ +\ 91743 \\ \hline 336298 \end{array}$$

$9 + 6 = 15$, $15 + 3 = \mathbf{18}$, 1 gemerkt, $1 + 2 = 3$, $3 + 2 = 5$, $5 + 4 = \mathbf{9}$, $7 + 8 = 15$, $15 + 7 = \mathbf{22}$, 2 gemerkt, $2 + 3 = 5$, $5 + 1 = \mathbf{6}$, $4 + 9 = \mathbf{13}$, 1 gemerkt, $1 + 2 = \mathbf{3}$.

*) In diesem und den folgenden Beispielen wird beim Rechnen die fett gedruckte Ziffer geschrieben.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

2. Subtrahieren. Rechenzeichen: **—, minus. Minuendus** und **Subtrahendus; Differenz.**

Beispiele:

a)
$$\begin{array}{r} 5829 \\ -1503 \\ \hline 4326 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 73421 \\ -45283 \\ \hline 28138 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 68273 \\ -\ 1568 \\ -43092 \\ -\ 7254 \\ \hline 16359 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 4129 \\ -\ 278 \\ -\ 278 \\ -\ 278 \\ -\ 278 \\ \hline 3017 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r} 4129 \\ -4 \cdot 278 \\ \hline 3017 \end{array}$$

a) 3 + **6** = 9, 0 + **2** = 2, 5 + **3** = 8, 1 + **4** = 5.

b) 3 + **8** = 11, 1 gemerkt, 1 + 8 = 9, 9 + **3** = 12, 1 gemerkt, 1 + 2 = 3, 3 + **1** = 4, 5 + **8** = 13, 1 gemerkt, 1 + 4 = 5, 5 + **2** = 7.

c) 8 + 2 + 4 = 14, 14 + **9** = 23, 2 gemerkt, 2 + 6 + 9 + 5 = 22, 22 + **5** = 27, 2 gemerkt, 2 + 5 + 2 = 9, 9 + **3** = 12, 1 gemerkt, 1 + 1 + 3 + 7 = 12, 12 + **6** = 18, 1 gemerkt, 1 + 4 = 5, 5 + **1** = 6.

d) 8 + 8 + 8 + 8 = 32, 32 + **7** = 39, 3 gemerkt, 3 + 7 + 7 + 7 + 7 = 31, 31 + **1** = 32, 3 gemerkt, 3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 11, 11 + **0** = 11, 1 gemerkt, 1 + **3** = 4.

d) und e) 4 · 8 = 32, 32 + **7** = 39, 3 gemerkt, 4 · 7 = 28, 28 + 3 = 31, 31 + **1** = 32, 3 gemerkt, 4 · 2 = 8, 8 + 3 = 11, 11 + **0** = 11, 1 gemerkt, 1 + **3** = 4.

3. Multiplizieren. Rechenzeichen: **·, mal. Faktoren** oder **Multiplikandus** und **Multiplikator; Produkt.**

Beispiele:

a)
$$\begin{array}{r} 6529 \\ 253 \\ \hline 13058 \\ 32645 \\ 19587 \\ \hline 1651837 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 4783 \\ 9021 \\ \hline 43047 \\ 9566 \\ 7483 \\ \hline 43150143 \end{array}$$

4. Dividieren. Rechenzeichen: **:, dividiert durch. Dividendus** und **Divisor; Quotient.**

Beispiele:

a)
$$\begin{array}{r} 43150143 : 4783 = 9021 \\ -\ 9 \cdot 4783 \\ \hline 10314 \\ -\ 2 \cdot 4783 \\ \hline 7483 \\ -\ 1 \cdot 7483 \\ \hline 0000 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 43150143 : 4783 = 9021 \\ 10314 \\ 7483 \\ 0000 \end{array}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

a) und b) $43150 : 4783 = \mathbf{9}$, $9 \cdot 3 = 27$, $27 + \mathbf{3} = 30$, 3 gemerkt, $9 \cdot 8 = 72$, $72 + 3 = 75$, $75 + \mathbf{0} = 75$, 7 gemerkt, $9 \cdot 7 = 63$, $63 + 7 = 70$, $70 + \mathbf{1} = 71$, 7 gemerkt, $9 \cdot 4 = 36$, $36 + 7 = 43$, $43 + 0 = 43$.

$1031 : 4783 = \mathbf{0}$.

$10314 : 4783 = \mathbf{2}$, $2 \cdot 3 = 6$, $6 + \mathbf{8} = 14$, 1 gemerkt, $2 \cdot 8 = 16$, $16 + 1 = 17$, $17 + \mathbf{4} = 21$, 2 gemerkt, $2 \cdot 7 = 14$, $14 + 2 = 16$, $16 + \mathbf{7} = 23$, 2 gemerkt, $2 \cdot 4 = 8$, $8 + 2 = 10$, $10 + 0 = 10$.

$7483 : 7483 = \mathbf{1}$, $1 \cdot 3 = 3$, $3 + \mathbf{0} = 3$, $1 \cdot 8 = 8$, $8 + \mathbf{0} = 8$, $1 \cdot 4 = 4$, $4 + \mathbf{0} = 4$, $1 \cdot 7 = 7$, $7 + \mathbf{0} = 7$.

5. Es gibt zwei Arten des Dividierens, das **Teilen** und das **Messen.**

Bei dem Teilen wird der Dividendus in so viele gleiche Teile geteilt, als der Divisor angibt.

Bei dem Messen wird berechnet, wie oft der Divisor in dem Dividendus enthalten ist.

6. Addieren und Subtrahieren sind Rechnungen **erster Stufe.** Multiplizieren und Dividieren sind Rechnungen **zweiter Stufe.**

7. Eine Aufgabe wird in eine **Klammer** eingeschlossen, wenn mit ihrem Resultat eine weitere Rechnung vorgenommen werden soll. Diese Klammer wird indessen **fortgelassen,**

a) wenn von zwei Rechnungen derselben Stufe die voranstehende zuerst ausgeführt werden soll;

b) wenn von zwei Rechnungen verschiedener Stufe die Rechnung höherer Stufe zuerst ausgeführt werden soll.

Beispiele:

$13 - 7 + 2 = 6 + 2 = 8$	$2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4 = 10$	$8 + 2 \cdot 7 = 8 + 14 = 22$
$13 - (7 + 2) = 13 - 9 = 4$	$2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$	$(8 + 2) \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70$
$60 : 6 \cdot 5 = 10 \cdot 5 = 50$	$5 \cdot 8 - 2 = 40 - 2 = 38$	$20 - 3 \cdot 5 = 20 - 15 = 5$
$60 : (6 \cdot 5) = 60 : 30 = 2$	$5 \cdot (8 - 2) = 5 \cdot 6 = 30$	$(20 - 3) \cdot 5 = 17 \cdot 5 = 85$

$3 \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 6 + 4 \cdot 7 = 6 + 28 = 34$	$17 - [9 - (5 - 3)] = 17 - [9 - 2] = 17 - 7 = 10$
$3 \cdot (2 + 4) \cdot 7 = 3 \cdot 6 \cdot 7 = 18 \cdot 7 = 126$	$17 - (9 - 5 - 3) = 17 - (4 - 3) = 17 - 1 = 16$
$(3 \cdot 2 + 4) \cdot 7 = (6 + 4) \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70$	$17 - 9 - (5 - 3) = 8 - (5 - 3) = 8 - 2 = 6$
$3 \cdot (2 + 4 \cdot 7) = 3 \cdot (2 + 28) = 3 \cdot 30 = 90$	$17 - (9 - 5) - 3 = 17 - 4 - 3 = 13 - 3 = 10$
$40 : 5 + 6 : 2 = 8 + 6 : 2 = 8 + 3 = 11$	$17 - 9 - 5 - 3 = 8 - 5 - 3 = 3 - 3 = 0$
$(40 : 5 + 6) : 2 = (8 + 6) : 2 = 14 : 2 = 7$	

II. Rechnen mit benannten ganzen Zahlen.

8. Münzen: Mark, M. Pfennig, Pf.

1 M = 100 Pf.

9. Längenmasse: Kilometer, km. Meter, m. (Dezimeter, dm). Zentimeter, cm. Millimeter, mm.

1 km =	1000 m =	100000 cm =	1000000 mm.
	1 m =	100 cm =	1000 mm.
		1 cm =	10 mm.

1 Meile = 7500 m.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

10. Flächenmasse: Quadratkilometer, qkm. Hektar, ha. Ar, a. Quadratmeter, qm. Quadratzentimeter, qcm. Quadratmillimeter, qmm.

1 qkm = 100 ha = 10000 a = 1000000 qm = 10000000000 qcm
= 1000000000000 qmm.

1 ha = 100 a = 10000 qm = 100000000 qcm = 10000000000 qmm.
1 a = 100 qm = 1000000 qcm = 100000000 qmm.
1 qm = 10000 qcm = 1000000 qmm.
1 qcm = 100 qmm.

11. Körpermasse: Kubikmeter, cbm. (Kubikdezimeter oder) Liter, l. Kubikzentimeter, ccm. Kubikmillimeter, cmm.

1 cbm = 1000 l = 1000000 ccm = 1000000000 cmm.
1 l = 1000 ccm = 1000000 cmm.
1 ccm = 1000 cmm.

1 Hektoliter (hl) = 100 l. 1 Scheffel = 50 l.

12. Zeitmasse. 1 Jahr = 12 Monaten oder = 365 Tagen.
1 Schaltjahr = 366 Tagen.
1 Tag = 24 Stunden.
1 Stunde = 60 Minuten.
1 Minute = 60 Sekunden.

13. Andere Masse. 1 Gros = 12 Dutzend = 144 Stück.
1 Dutzend = 12 Stück.
1 Schock = 4 Mandel = 60 Stück.
1 Mandel = 15 Stück.

14. Gewichte. Tonne, t. Kilogramm, kg. Gramm, g. Milligramm, mg.

1 t = 1000 kg = 1000000 g = 1000000000 mg.
1 kg = 1000 g = 1000000 mg.
1 g = 1000 mg.

1 cbm Wasser wiegt 1 t, 1 l Wasser wiegt 1 kg, 1 ccm Wasser wiegt 1 g, 1 cmm Wasser wiegt 1 mg.

1 Pfund = 500 g.
1 Centner = 100 Pfund = 50 kg.

15. Bei Nr. 8 bis 11 und Nr. 14 kann man die **dezimale Schreibweise** anwenden. Es ist dann:

85,37 M = 85 M 37 Pf.; 4,60 m = 4 m 60 cm;
0,30 M = 30 Pf.; 5,02 m = 5 m 2 cm;
6,02 M = 6 M 2 Pf.; 0,01 m = 1 cm;
7,060 m = 7 m 60 mm; 1,513 kg = 1 kg 513 g;
0,785 m = 785 mm; 9,024 kg = 9 kg 24 g;
57,860 m = 57 m 860 mm; 5,700 kg = 5 kg 700 g.

16. Aufg. 12 ha 67 a 85 qm in qm zu verwandeln. (= 126785 qm.)

17. Aufg. 395866 Sekunden in Tage, Stunden, Minuten und Sekunden zu verwandeln. (= 4 Tage 13 Stunden 57 Minuten 46 Sekunden.)

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

18. Aufg. 27 cbm 568 l 4 ccm + 9 cbm 13 l 809 ccm + 35 cbm 784 l 496 ccm = 72 cbm 366 l 309 ccm.

19. Aufg. 746 t 99 kg 127 g — 89 t 853 kg 87 g = 656 t 246 kg 40 g.

20. Aufg. 18 Schock 3 Mandel 11 Stück · 29 = 549 Schock 4 Stück.

21. Aufg. 873 km 495 m : 63 = 13 km 865 m.

22. Aufg. 1260 M 77 Pf. : 25 M 73 Pf. = 49.

23. Schluss von der Einheit auf eine Mehrheit.
1 kg kostet 8 M 25 Pf.
7 kg kosten 8 M 25 Pf. · 7 = 57 M 75 Pf.

24. Schluss von einer Mehrheit auf die Einheit.
Für 26 M erhält man 19 m 50 cm,
für 1 M erhält man 19 m 50 cm : 26 = 75 cm.

III. Teilbarkeit der Zahlen.

25. Eine Zahl ist **durch 2 ohne Rest teilbar,** wenn ihre letzte Ziffer eine 2, 4, 6, 8 oder 0 ist. Solche Zahlen heissen gerade Zahlen.

26. Eine Zahl ist **durch 5 ohne Rest teilbar,** wenn ihre letzte Ziffer eine 5 oder 0 ist.

27. Man bildet die **Quersumme** einer Zahl, indem man die Ziffern derselben addiert.

28. Eine Zahl ist **durch 3 ohne Rest teilbar,** wenn ihre Quersumme durch 3 ohne Rest teilbar ist.

29. Eine Zahl, welche durch keine andere ohne Rest teilbar ist, heisst eine **Primzahl.**

30. Jede Zahl, welche keine Primzahl ist, kann **in ein Produkt** von lauter Primzahlen **verwandelt** werden. 72 = 2 · 2 · 2 · 3 · 3.

IV. Rechnen mit gemeinen Brüchen.

31. Der **Bruch** $\frac{4}{7}$ entsteht, wenn man ein Ganzes in 7 gleiche Teile teilt und 4 solche Teile zusammen nimmt.

32. Die Zahl 7 bestimmt den **Namen** der einzelnen Teile, **Siebentel,** und heisst **Nenner.**

33. Die Zahl 4 gibt die **Anzahl der Teile** an, welche zusammen genommen werden, und heisst **Zähler.**

34. Beide Zahlen werden durch den **Bruchstrich** (wagerecht!) getrennt.

35. Der **Bruch** $\frac{4}{7}$ entsteht auch, wenn man 4 Ganze in 7 gleiche Teile teilt.

Man kann daher den Bruchstrich auch **„dividiert durch"** lesen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und in gleicher Bedeutung gebrauchen, wie das Divisionszeichen (:). $\frac{15}{4} = 15:4$.

36. Bei einem **echten** Bruch ist der Zähler kleiner als der Nenner.

37. Bei einem **unechten** Bruch ist der Zähler gleich dem Nenner oder grösser als derselbe. $\frac{8}{8}, \frac{9}{5}$.

38. Eine **gemischte Zahl** besteht aus Ganzen und einem echten Bruch. $6\frac{2}{3}$.

39. Ein unechter Bruch kann in Ganze oder **in eine gemischte Zahl verwandelt** werden. $\frac{24}{6} = 4$, $\frac{19}{8} = 2\frac{3}{8}$.

40. Eine gemischte Zahl kann **eingerichtet,** d. h. in einen unechten Bruch verwandelt werden. $7\frac{1}{5} = \frac{36}{5}$.

41. Man **erweitert** einen Bruch, indem man seinen Zähler und seinen Nenner mit derselben Zahl multipliziert. Er ändert dadurch seinen Wert nicht. $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$.

42. Man **kürzt** oder **hebt** einen Bruch, indem man seinen Zähler und seinen Nenner durch dieselbe Zahl dividiert. Er ändert dadurch seinen Wert nicht. $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$.

43. Nach No. 25 bis 28 kann man bestimmen, ob ein Bruch durch 2, 3 oder 5 zu kürzen ist.

44. Um zu bestimmen, ob und durch welche Zahlen sonst noch ein Bruch gekürzt werden kann, bedient man sich der **Kettendivision.** Wenn dieselbe bis zu dem Reste 0 durchgeführt wird, gibt der letzte Divisor die grösste Zahl an, durch welche der Bruch zu kürzen ist. Ist dieser Divisor gleich 1, so lässt der Bruch sich nicht kürzen.

Beispiele:

a) $\frac{29869}{56287} = \frac{251}{473}$

56287 : 29869 = 1	2261 : 1190 = 1	29869 : 119 = 251
26418	1071	606
		119
		0
29869 : 26418 = 1	1190 : 1071 = 1	
3451	119	
		56287 : 119 = 473
26418 : 3451 = 7	1071 : 119 = 9	868
2261	0	357
		0
3451 : 2261 = 1		
1190		

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

b) $\dfrac{137}{257}$

$257 : 137 = 1$	$137 : 120 = 1$	$120 : 17 = 7$	$17 : 1 = 17$
$\underline{}$ 120	17	1	0

Der erste Bruch ist durch 119 zu kürzen, der zweite lässt sich nicht kürzen.

45. Brüche heissen **gleichnamig,** wenn sie gleiche Nenner haben.

46. Brüche, deren Nenner einander nicht gleich sind, können durch Erweitern mit geeigneten Zahlen **gleichnamig gemacht** werden.

47. Der gemeinsame Nenner, welchen sie dabei erhalten, der **Hauptnenner** oder **Generalnenner,** muss durch jeden der ursprünglichen Nenner ohne Rest teilbar sein.

48. Um den **Hauptnenner zu bestimmen,** zerlegt man zunächst jeden der gegebenen Nenner in seine Primzahlfaktoren. Dann setzt man jeden der letzteren so oft als Faktor in den Hauptnenner, dass der Faktor in keinem der Nenner häufiger als in dem Hauptnenner vorkommt.

Beispiel:

Erster Nenner: $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$	
Zweiter Nenner: $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$	Hauptnenner:
Dritter Nenner: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 4200.$
Vierter Nenner: $35 = 5 \cdot 7$	

49. Regel. Man **addiert gleichnamige Brüche** zu einander, indem man ihre Zähler zu einander addiert. $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$

50. Regel. Man **subtrahiert gleichnamige Brüche** von einander, indem man ihre Zähler von einander subtrahiert.

$$\frac{9}{11} - \frac{4}{11} = \frac{5}{11}.$$

51. Ungleichnamige Brüche müssen vor dem **Addieren** oder dem **Subtrahieren** gleichnamig gemacht werden.

a) $\frac{17}{50} + \frac{27}{56} + \frac{41}{60} + \frac{12}{35} = \frac{1428}{4200} + \frac{2025}{4200} + \frac{2870}{4200} + \frac{1440}{4200} = \frac{7763}{4200} = \frac{1109}{600}$
$= 1\frac{509}{600}$

b) $\frac{7}{15} - \frac{4}{33} = \frac{77}{165} - \frac{20}{165} = \frac{57}{165} = \frac{19}{55}$

52. Regel. Man **multipliziert** einen **Bruch** mit einer **ganzen Zahl,** indem man den Zähler mit derselben multipliziert (oder den Nenner durch dieselbe dividiert, wenn diese Division aufgeht).

a) $\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{12} \cdot 3 = \frac{7}{4} = 1\frac{3}{4}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

53. Regel. Man **dividiert** einen **Bruch** durch eine **ganze Zahl**, indem man den Nenner mit derselben multipliziert (oder den Zähler durch dieselbe dividiert, wenn diese Division aufgeht).

a) $\frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10}$ b) $\frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$

54. Regel. Man **multipliziert Brüche mit einander**, indem man ihre Zähler mit einander und ihre Nenner mit einander multipliziert.

a) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15}$ b) $\frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3 \cdot \overset{3}{\cancel{6}}}{\underset{2}{\cancel{4}} \cdot 7} = \frac{9}{14}$

c) $2\frac{2}{5} \cdot 1\frac{1}{9} = \frac{12}{5} \cdot \frac{10}{9} = \frac{\overset{4}{\cancel{12}} \cdot \overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{1}{\cancel{5}} \cdot \underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$

55. Regel. Man **dividiert zwei Brüche durch einander**, indem man den Divisorbruch umkehrt, (d. h. darin Zähler und Nenner mit einander vertauscht) und die Brüche dann mit einander multipliziert.

a) $\frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{28}{15} = 1\frac{13}{15}$ b) $\frac{9}{10} : \frac{6}{7} = \frac{\overset{3}{\cancel{9}} \cdot 7}{10 \cdot \underset{2}{\cancel{6}}} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$

c) $3\frac{3}{4} : 1\frac{1}{8} = \frac{15}{4} : \frac{9}{8} = \frac{\overset{5}{\cancel{15}} \cdot \overset{2}{\cancel{8}}}{\underset{1}{\cancel{4}} \cdot \underset{3}{\cancel{9}}} = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}$

56. Ausser in den in No. 7 angeführten Fällen wird eine **Klammer** auch dann **fortgelassen**, wenn sie einen **Zähler** oder einen **Nenner** einschliesst. **Aufg.** (vergl. No. 7).

a) $27\frac{3}{4} - \left(8\frac{2}{5} + 3\frac{1}{2}\right) = 15\frac{17}{20}$ b) $9\frac{1}{10} + 7\frac{2}{3} \cdot 2\frac{1}{5} = 25\frac{29}{30}$

c) $1\frac{1}{4} \cdot \left(12\frac{1}{2} - 5\frac{5}{6}\right) = 8\frac{1}{3}$ d) $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{5}{9} + 1\frac{7}{15} \cdot 1\frac{11}{14} = 11\frac{32}{63}$

e) $\dfrac{2\frac{1}{2} + 7\frac{2}{3} + 3\frac{1}{6}}{3\frac{1}{3} - 2\frac{1}{2}} = 16$ f) $\dfrac{7\frac{1}{10} - 3\frac{1}{5} \cdot 2\frac{1}{6}}{3\frac{3}{4} : 9\frac{1}{6}} = \frac{11}{27}$

57. Aufg. $6\frac{5}{13}$ Tage $=$ 6 Tage 9 Stunden 13 Minuten $50\frac{10}{13}$ Sekunden.

$\frac{5}{13}$ Tage $= \frac{120}{13}$ Stunden $= 9\frac{3}{13}$ Stunden,
$\frac{3}{13}$ Stunden $= \frac{180}{13}$ Minuten $= 13\frac{11}{13}$ Minuten,
$\frac{11}{13}$ Minuten $= \frac{660}{13}$ Sekunden $= 50\frac{10}{13}$ Sekunden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

58. Aufg.

a) $5\frac{3}{4}$ M · 17 = 97 M 75 Pf., b) $9\frac{1}{2}$ km : 11 = 863 m $636\frac{4}{11}$ mm,

c) $6\frac{2}{3}$ kg · $3\frac{1}{5}$ = 21 kg $333\frac{1}{3}$ g, d) $4\frac{1}{6}$ ha : $3\frac{3}{4}$ = 1 ha 11 a $11\frac{1}{9}$ qm.

59. Bei Benutzung der **dezimalen Schreibweise** (vergl. No. 15) müssen Brüche, welche etwa zum Schlusse noch vorkommen, fortgelassen werden. Ist ein solcher Bruch gleich $\frac{1}{2}$ oder grösser als $\frac{1}{2}$, so wird die letzte geschriebene Ziffer um 1 erhöht.

3 M $37\frac{1}{3}$ Pf. = 3,37 M; 9 m $7\frac{1}{2}$ cm = 9,08 m;

6 kg $389\frac{7}{10}$ g = 6,390 kg.

60. Regel de tri. (Vergl. No. 23 und No. 24).

Aufgaben:

a) Wieviel erhält man für 28 M, wenn 16,25 m 13 M kosten? (= 35 m);

b) Wie teuer sind $6\frac{1}{4}$ kg, wenn $5\frac{5}{6}$ kg $6\frac{1}{8}$ M kosten? (= 6,56 M);

c) Wie lange reicht man mit einem Futtervorrat für 16 Pferde, wenn derselbe Vorrat von 14 Pferden in 112 Tagen verbraucht wird? (= 98 Tage).

61. 1 **Prozent** (%) einer Grösse ist 1 Hundertstel derselben.

Aufgaben:

a) Wieviel sind 7 % von 325 M? (= 22,75 M);

b) Wieviel % von 680 kg sind 34 kg? (= 5 %).

V. Rechnen mit Dezimalbrüchen.

62. Ein Bruch, dessen Nenner 10, 100, 1000 . . . . lautet, kann als **Dezimalbruch** geschrieben werden. Dabei wird

1. der Nenner fortgelassen,
2. zwischen die Ganzen (0, wenn keine Ganzen vorhanden sind) und den darauf folgenden Zähler ein Komma gesetzt und
3. die Anzahl der Ziffern hinter dem Komma (Dezimalstellen) durch hinter dem Komma eingeschobene Nullen gleich der Anzahl der Nullen des fortgelassenen Nenners gemacht, falls diese Zahlen nicht gleich sind.

63. Ein Dezimalbruch **ändert seinen Wert nicht,** wenn man an sein Ende beliebig viele **Nullen anhängt** oder wenn man **Nullen,** welche an seinem Ende stehen, **fortlässt.**

64. Bei den Dezimalbrüchen hat, wie bei den ganzen Zahlen, jede Ziffer den zehnten Teil des Wertes, welchen sie in der vor-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

hergehenden Stelle haben würde. Die erste Stelle hinter dem Komma gibt also Zehntel, die zweite Hundertstel, die dritte Tausendstel usw. an.

65. Regel. Man **multipliziert** einen Dezimalbruch mit **10, 100, 1000,** ...., indem man das Komma um 1, 2, 3 .... Stellen nach rechts rückt.

66. Regel. Man **dividiert** einen Dezimalbruch durch **10, 100, 1000,** ...., indem man das Komma um 1, 2, 3 ... Stellen nach links rückt.

67. Man kann einen **Dezimalbruch** auf eine gegebene Anzahl von Dezimalstellen **abkürzen,** indem man die übrigen Ziffern fortlässt und die letzte bleibende Ziffer um 1 erhöht, wenn die erste fortgelassene Ziffer eine 5 oder grösser als 5 ist.

68. Regel. Man **addiert Dezimalbrüche** zu einander, indem man sie so unter einander stellt, dass die Kommata unter einander stehen, und die Brüche dann wie ganze Zahlen addiert. Im Resultat wird das Komma unter die anderen Kommata gesetzt.

$$\begin{array}{r} 8{,}27 \\ +\ 103{,}8204 \\ +\ 0{,}516 \\ \hline 112{,}6064 \end{array}$$

69. Regel. Man **subtrahiert Dezimalbrüche** von einander, indem man sie so unter einander stellt, dass die Kommata unter einander stehen, und die Brüche dann wie ganze Zahlen subtrahiert. Im Resultat wird das Komma unter die anderen Kommata gesetzt.

$$\text{a)}\ \begin{array}{r} 28{,}37 \\ -\ 3{,}8026 \\ \hline 24{,}5674 \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{r} 0{,}0538 \\ -\ 0{,}029 \\ \hline 0{,}0248 \end{array}$$

70. Regel. Man **multipliziert** zwei **Dezimalbrüche** mit einander, indem man sie wie ganze Zahlen mit einander multipliziert. Das Resultat hat soviel Dezimalstellen als die beiden Faktoren zusammen haben.

$$\text{a)}\ \begin{array}{r} 7{,}256 \\ 3{,}2 \\ \hline 21768 \\ 14512 \\ \hline 23{,}2192 \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{r} 0{,}695 \\ 0{,}0148 \\ \hline 695 \\ 2780 \\ 5560 \\ \hline 0{,}0102860 \end{array}$$

71. Regel. Man **dividiert** einen **Dezimalbruch** durch eine **ganze Zahl,** indem man wie mit ganzen Zahlen dividiert und im Resultat das Komma setzt, wenn die Ganzen des Dividendus zu Ende sind.

$$\text{a)}\ \begin{array}{l} 352{,}35 : 45 = 7{,}83 \\ \ \ 373 \\ \ \ \ \ 135 \\ \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array} \qquad \text{b)}\ \begin{array}{l} 12{,}11 : 175 = 0{,}0692 \\ \ \ 1610 \\ \ \ \ \ 350 \\ \ \ \ \ \ \ \ 0 \end{array}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

72. Regel. Man **verwandelt** einen **gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch,** indem man nach demselben Verfahren den Zähler durch den Nenner dividiert. Geht hierbei die Division nach einer gewissen Anzahl von Dezimalstellen auf, so erhält man einen **endlichen** Dezimalbruch (Beisp. a und b). Anderenfalls müssen sich nach einer gewissen Anzahl von Dezimalstellen die Reste in einer festen Reihenfolge wiederholen und es entsteht ein **periodischer** Dezimalbruch (Beisp. c und d).

a) $\frac{3421}{275} = 3421 : 275 = 12{,}44$
671
1210
1100
0

b) $\frac{7}{8} = 7{,}0 : 8 = 0{,}875$
60
40
0

c) $\frac{13}{37} = 13{,}0 : 37 = 0{,}\overline{351}$
190
50
13

d) $\frac{31}{44} = 31{,}0 : 44 = 0{,}70\overline{45}$
200
240
20

73. Ein **periodischer Dezimalbruch** kann auf folgende Art **in einen gemeinen Bruch** verwandelt werden:

$$\begin{aligned} b &= 0{,}6\overline{4950} = 0{,}6495049504950\ldots \\ 10000\,b &= 6495{,}\overline{04950} = 6495{,}0495049504950\ldots \\ \hline 9999\,b &= 6494\,4 = 6494{,}4000000000000\ldots \\ 9999\,b &= \frac{64944}{10} \\ b &= \frac{64944}{99990} = \frac{328}{505} \end{aligned}$$

74. Regel. Man **dividiert** zwei **Dezimalbrüche** durch einander, indem man das Komma an das Ende des Divisors und im Dividendus um die gleiche Anzahl von Stellen nach rechts rückt und darauf die Division nach No. 71 ausführt.

a) 843,98,6 : 29,51, = 28,6
253 78
17 70 6
0

b) 43,120, : 1,375, = 31,36
1 870
4950
8250
0

c) 0,3,50 : 11,2, = 0,03125
140
280
560
0

d) 14,30,0 : 17,55, = 0,814
2600
8450
1430

75. Aufg. (Vergl. No. 6, 7 und 56).

1. $\frac{a + b \cdot c}{d - e}$ 3. $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$ 5. $\frac{a \cdot b - c}{a + b + c}$

2. $\frac{(a + b) \cdot c}{d - e}$ 4. $\frac{a - (b + c)}{a - (b - c)}$ 6. $\frac{a \cdot b + c \cdot d}{a \cdot (b - c)}$

$a = 27{,}5$ $b = 2{,}2$
$c = 0{,}63$
$d = 0{,}792$
$e = 0{,}45$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

76. Aufg. Wieviel erhält man für 15,50 M, wenn 19,5 kg 11,70 M kosten? (= 25,833 kg).

77. Der **Gewinn,** welchen man bei einem Geschäfte erzielt oder der **Verlust,** den man bei demselben erleidet, wird in Prozenten von dem Einkaufspreise oder von dem Anlagekapital berechnet (vergl. No. 61 und 62).

Aufgaben:

a) Wie teuer muss man eine Ware verkaufen, die man für 165 M gekauft hat, wenn man $7\frac{1}{2}$ % daran gewinnen will? (= 177,38 M).

b) Wieviel % beträgt der Verlust, wenn der Einkaufspreis 345 M, der Verkaufspreis 322 M beträgt? (= $6\frac{2}{3}$ %).

78. Eine Geldsumme, welche z. B. bei Barzahlung von dem Kaufpreise einer Ware abgezogen wird, heisst **Rabatt** (in 100). Derselbe wird in Prozenten des Einkaufspreises angegeben.

Aufgabe: Wieviel hat man zu zahlen, wenn der Kaufpreis 26,50 M und der Rabatt 4 % beträgt? (= 25,44 M).

79. Das Gewicht einer Ware mit ihrer Verpackung nennt man **Brutto**. Das Gewicht der Ware allein heisst **Netto** und das Gewicht der Verpackung **Tara.** Die Tara wird in Prozenten des Brutto angegeben.

Aufgabe: Wie gross ist das Nettogewicht, wenn eine Ware 75,6 kg Br. wiegt und 8 % Ta. zu rechnen sind? (= 69,552 kg).

80. Bei der **Zinsrechnung** nennt man diejenigen Zinsen, welche der **Schuldner** dem **Gläubiger** für 100 Mark **Kapital** und für **1 Jahr** zahlt, **Prozente** oder **Zinsfuss.**

Aufgaben:

a) Wieviel Zinsen erhält man für 3450 M Kapital zu 3 % in 1 Jahre 10 Monaten? (= 189,75 M Z.).

b) Zu welchem Zinsfusse sind 21600 M Kapital ausgeliehen, wenn sie in 3 Jahren 5 Monaten 2460 M Zinsen bringen? (= $3\frac{1}{3}$ %).

c) In welcher Zeit bringen 8472 M Kapital zu 5 % 917,80 M Zinsen? (= 2 Jahren 2 Mon.).

d) Welches Kapital bringt zu $4\frac{1}{2}$ % in 8 Jahren 48,96 M Zinsen? (= 136 M K.).

81. Aufg. Zu einem gemeinsamen Geschäfte hat A 2500 M, B 1350 M und C 1050 M eingezahlt. Wie ist der erzielte **Gewinn** von 441 M zu **verteilen?** (A erhält 225 M, B 121,50 M und C 94,50 M).

82. Beispiele für **abgekürzte Multiplikation** von Dezimalbrüchen:

a)	b)
79,3,1	0,0,6543
2,4,85	0,5,912
15862	32715
3172	5889
634	65
40	13
1970,8	0,38682

83. Beispiele für **abgekürzte Division** von Dezimalbrüchen:

a) $\underline{1970{,}8}\,.{,}:2\cancel{4}{,}\cancel{8}\cancel{5}, = 79{,}31$

231 3
7 6
2
0

b) $\underline{58{,}5{,}9}:64\cancel{1}{,}\cancel{7}, = 0{,}0913$

8 4
2 0
1

VI. Die vier Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen.

84. Die **Klammern** werden in derselben Weise angewendet, wie es in No. 6, 7 und 56 angegeben ist.

85. Addieren. **Summanden** oder **Glieder:** a, b und c.
Summe: $a + b + c$.

86. Subtrahieren. **Minuendus:** a, **Subtrahendus:** b.
Differenz: $a - b$.

87. Lehrsatz. Man **addiert** eine **Summe** zu einer Grösse, indem man die Summanden nach einander dazu addiert. $a + (b + c) = a + b + c$.

88. Lehrs. Man **addiert** eine **Differenz** zu einer Grösse, indem man den Minuendus dazu addiert und dann den Subtrahendus subtrahiert. $a + (b - c) = a + b - c$.

89. Lehrs. Man **subtrahiert** eine **Summe** von einer Grösse, indem man die Summanden nach einander davon subtrahiert. $a - (b + c) = a - b - c$.

90. Lehrs. Man **subtrahiert** eine **Differenz** von einer Grösse, indem man den Minuendus davon subtrahiert und den Subtrahendus dann addiert. $a - (b - c) = a - b + c$.

91. Wenn in einer Differenz der Subtrahendus grösser als der Minuendus ist, so ist dieselbe kleiner als Null; sie heisst dann eine **negative** Zahl. $5 - 7 = 5 - 5 - 2 = 0 - 2 = -2$.

92. Die **negativen Zahlen** bilden die Fortsetzung der bisher allein benutzten **positiven Zahlen** über deren untere Grenze (Null) hinaus und zwar in der Art, dass jede Zahl um 1 grösser ist als die vorhergehende. $\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \ldots$

93. Die beiden **Vorzeichen** $+$ **(plus)** und $-$ **(minus)** werden einander **entgegengesetzt** genannt.

94. Man **kehrt ein Vorzeichen um,** indem man dafür das entgegengesetzte schreibt.

95. Eine **algebraische Summe** kann aus positiven und aus negativen Gliedern bestehen. $a + b - c - d + e$.

96. Regel für das Auflösen von Klammern. Soll eine in eine Klammer eingeschlossene algebraische Summe zu einer Grösse addiert werden, so kann man die Klammer fortlassen. Soll eine in eine Klammer eingeschlossene algebraische Summe von einer Grösse subtrahiert werden, so kann man die Klammer ebenfalls fortlassen; man muss dann aber bei jedem in der Klammer vorkommenden Gliede das Vorzeichen umkehren. $a + (b - c + d + e - f) = a + b - c + d + e - f$, $a - (b - c + d + e - f) = a - b + c - d - e + f$.

97. **Multiplizieren.** **Faktoren** (Multiplikandus, Multiplikator): a, b, c, d.

Produkt: $a \cdot b \cdot c \cdot d$.

Ein Produkt ändert seinen Wert nicht, wenn man die Reihenfolge seiner Faktoren beliebig ändert. $a \cdot 5 \cdot b \cdot 3 \cdot c = 5 \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot c$.

98. Das **Multiplikationszeichen** wird meistens zwischen zwei Buchstabenfaktoren und zwischen einer Zahl und einem Buchstaben **fortgelassen.** $5 \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot c = 15\,abc$.

99. Sind in einem Produkte mehrere Faktoren einander gleich, so wird der Faktor nur einmal geschrieben und die Anzahl, in welcher er vorkommt rechts oben daneben gesetzt. z. B. $pppp = p^4$. Ein solches Produkt nennt man eine **Potenz,** den Faktor darin **Grundzahl** und seine Anzahl **Exponent.**

100. Ein positives oder negatives Produkt von Zahlen- und Buchstabenfaktoren nennt man eine **algebraische Grösse.** Man unterscheidet darin das **Vorzeichen** + oder —, den **Koeffizienten** (meistens der Zahlenfaktor) und die **Benennung** (meistens die Buchstabenfaktoren). Wenn ein Zahlenfaktor nicht vorhanden ist, so kann man den Koeffizienten 1 hinzusetzen.

101. **Lehrs.** Man **addiert gleichnamige algebraische Grössen mit gleichen Vorzeichen** zu einander, indem man die Koeffizienten zu einander addiert und das Vorzeichen und die Benennung ungeändert lässt. $24a^2x + 5a^2x = 29a^2x$, $-5x^3 - 9x^3 = -14x^3$.

102. **Lehrs.** Man **addiert gleichnamige algebraische Grössen mit verschiedenen Vorzeichen** zu einander, indem man die Koeffizienten von einander subtrahiert, die Benennung ungeändert lässt und dem Resultat das Vorzeichen der grösseren gibt. $5ab - 3ab = 2ab$, $8xyz - 12xyz = -4xyz$.

103. **Lehrs.** Das **Produkt** zweier algebraischer Grössen mit **gleichen** Vorzeichen ist **positiv.** Das **Produkt** zweier algebraischer Grössen mit **verschiedenen** Vorzeichen ist **negativ.** $(+a)(+b) = +ab$, $(-a)(-b) = +ab$, $(+a)(-b) = -ab$, $(-a)(+b) = -ab$.

104. Die Glieder einer algebraischen Summe können auch algebraische Grössen sein.

105. Eine algebraische Summe ändert ihren Wert nicht, wenn man ihre Glieder in einer anderen beliebigen Reihenfolge schreibt.

106. Eine algebraische Summe ist nach einem Buchstaben **geordnet,** wenn jedes Glied diesen Buchstaben in derselben oder

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in einer höheren Potenz enthält als alle folgenden Glieder. Die Glieder, welche die gleiche Potenz dieses Buchstabens enthalten, müssen nach einem anderen Buchstaben geordnet werden. Man benutzt dabei in der Regel die Buchstaben in der Reihenfolge des Alphabets.

107. Lehrs. Man **multipliziert** eine **algebraische Summe** mit einer **Grösse,** indem man jedes Glied der Summe mit der Grösse multipliziert.

$$a(b + c - d - e) = (b + c - d - e)a = ab + ac - ad - ae.$$

108. Lehrs. Man **multipliziert zwei algebraische Summen** mit einander, indem man jedes Glied der einen mit jedem Gliede der anderen multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert (Beachtung der Vorzeichenregel No. 103).

$$\begin{array}{rl} & (4x^2 + 5xy - 2y^2) \\ \cdot & \underline{(3x^2 - 2xy - y^2)} \\ = & 12x^4 + 15x^3y - 6x^2y^2 \\ & \quad - 8x^3y - 10x^2y^2 + 4xy^3 \\ & \quad\quad \underline{- 4x^2y^2 - 5xy^3 + 2y^4} \\ = & 12x^4 + 7x^3y - 20x^2y^2 - xy^3 + 2y^4 \end{array}$$

109. Formeln: $(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2.$
$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2.$
$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2.$

110. Dividieren. Dividendus: a, **Divisor:** b.
Quotient: a : b.

111. Lehrs. Der **Quotient** zweier algebraischer Grössen mit **gleichen** Vorzeichen ist **positiv.** Der **Quotient** zweier algebraischer Grössen mit **verschiedenen** Vorzeichen ist **negativ.**

112. Wenn der Dividendus jeden Faktor des Divisors mindestens in derselben Potenz enthält, in welcher er im Divisor vorkommt, so ist der Quotient eine **ganze** algebraische Grösse. Anderenfalls ist er ein **Bruch.**

$(+10ab^2) : (+2ab) = +5b.$ $\quad(+10a) : (+2b) = +\frac{5a}{b}$

$(-36p^2q^5) : (-3pq^2) = +12pq^3.$ $\quad(-2x) : (-6xy) = +\frac{1}{3y}$

$(+10ab^2) : (-2ab) = -5b.$ $\quad(+9a^3x) : (-12a^2y) = -\frac{3ax}{4y}$

$(-36p^2q^2) : (+3pq) = -12pq.$ $\quad(-5p^3q^4) : (+3p^2q) = -\frac{5pq^3}{3}$

113. Lehrs. Man **dividiert** eine **algebraische Summe** durch eine **Grösse,** indem man jedes Glied der Summe durch die Grösse dividiert. $(ax + bx - cx) : x = a + b - c.$

114. In einer algebraischen Summe, deren sämtliche Glieder einen **gemeinschaftlichen Faktor** haben, kann man denselben **vor** oder **hinter eine Klammer ziehen.** Man dividiert dazu die Summe

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

durch den Faktor, setzt das Resultat in eine Klammer und schreibt den Faktor vor oder hinter dieselbe. $ab + ac + ad - ae = a(b + c + d - e)$ oder $= (b + c + d - e)a$.

115. Eine **algebraische Summe** kann **in ein Produkt** verwandelt werden,

1. wenn man einen Faktor vor eine Klammer ziehen kann und
2. wenn man eine der drei Formeln No. 109 anwenden kann.

116. Sollen **zwei algebraische Summen** durch einander **dividiert** werden, so müssen sie nach denselben Buchstaben geordnet werden. Dann dividiert man das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors, multipliziert den Quotienten mit dem ganzen Divisor und subtrahiert das Resultat von dem Dividendus. Der Rest muss nach denselben Buchstaben wie der Dividendus geordnet werden und wird dann auch weiter wie dieser behandelt.

$$
\begin{array}{l}
(12x^4 + 7x^3y - 20x^2y^2 - xy^3 + 2y^4) : (3x^2 - 2xy - y^2) = 4x^2 + 5xy - 2y^2. \\
\underline{\pm 12x^4 \mp 8x^3y \mp 4x^2y^2} \\
\qquad 15x^3y - 16x^2y^2 - xy^3 + 2y^4 \\
\qquad \underline{\pm 15x^3y \mp 10x^2y^2 \mp 5xy^3} \\
\qquad\qquad -6x^2y^2 + 4xy^3 + 2y^4 \\
\qquad\qquad \underline{\mp 6x^2y^2 \pm 4xy^3 \pm 2y^4}
\end{array}
$$

117. Für die Rechnung mit **Brüchen, in welchen Buchstabengrössen vorkommen,** gelten die in No. 41, 42 und 45 bis 55 aufgeführten Erklärungen und Lehrsätze (die letzteren sind dort Regeln genannt).

Beispiele:

zu No. 41: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

zu No. 42: $\frac{5x^2y}{3xy^2} = \frac{5x}{3y}$, $\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 - b^2} = \frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b}{a-b}$.

zu No. 48: a) Erster Nenner: $50f^2g = 2 \cdot 5 \cdot 5ffg$
Zweiter Nenner: $6g^2h^3 = 2 \cdot 3gghhh$
Dritter Nenner: $45f^3h = 3 \cdot 3 \cdot 5fffh$
Hauptnenner: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5f^3g^2h^3 = 450f^3g^2h^3$.

b) Erster Nenner: $4x^2 - 9y^2 = (2x + 3y)(2x - 3y)$
Zweiter Nenner: $12x + 18y = 2 \cdot 3(2x + 3y)$
Dritter Nenner: $20x - 30y = 2 \cdot 5(2x - 3y)$
Hauptnenner: $2 \cdot 3 \cdot 5(2x + 3y)(2x - 3y)$
$= 120x^2 - 270y^2$.

zu No. 49: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$, $\frac{p}{s} + \frac{q+r}{s} = \frac{p+q+r}{s}$

zu No. 50: $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$, $\frac{p}{s} - \frac{q+r}{s} = \frac{p-q-r}{s}$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

zu No. 51: a) $\frac{3h}{50f^2g} - \frac{f}{6g^2h^3} + \frac{2g}{45f^3h} = \frac{27fgh^4 - 75f^4 + 20g^3h^2}{450f^3g^2h^3}$

b) $\frac{xy + y^2}{4x^2 - 9y^2} + \frac{x + y}{12x + 18y} - \frac{x - y}{20x - 30y}$

$$= \frac{30(xy + y^2) + (10x - 15y)(x + y) - (6x + 9y)(x - y)}{120x^2 - 270y^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 22xy + 24y^2}{120x^2 - 270y^2} = \frac{2(x + 4y)(2x + 3y)}{2 \cdot 3 \cdot 5(2x + 3y)(2x - 3y)}$$

$$= \frac{x + 4y}{30x - 45y}$$

zu No. 52: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}$, $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$, $\frac{x}{y^2} \cdot y = \frac{x}{y}$.

zu No. 53: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$, $\frac{p^2}{q} : p = \frac{p}{q}$.

zu No. 54: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{x^2}{y} \cdot \frac{y^3}{x^2} = \frac{x^2y^3}{y\,x^2} = y^2$.

zu No. 55: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$, $\frac{3p^2}{10q^2} : \frac{6p^3}{35q^2} = \frac{3p^2 \cdot 35q^2}{10q^2 \cdot 6p^3} = \frac{7}{4p}$.

VII. Proportionen.

118. Das **Verhältnis** a : b gibt an, wie oft b in a enthalten ist.

119. Verbindet man zwei Verhältnisse, welche gleichen Wert haben, durch ein Gleichheitszeichen, so entsteht eine **Proportion.** Z. B. a : b = c : d. Hierin heissen

a und b **Glieder des ersten Verhältnisses,**
c und d **Glieder des zweiten Verhältnisses,**
a und c **Vorderglieder,**
b und d **Hinterglieder,**
a und d **Aussenglieder** und
b und c **Innenglieder.**

120. Lehrs. In einer Proportion kann man die Glieder **eines** Verhältnisses **mit derselben Zahl multiplizieren.** a : b = c : d; ma : mb = nc : nd.

121. Lehrs. In einer Proportion kann man die Glieder **eines** Verhältnisses **durch dieselbe Zahl dividieren.** a : b = c : d; $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$.

2*

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

122. Lehrs. In einer Proportion ist das **Produkt** der **Aussenglieder** gleich dem **Produkte** der **Innenglieder.** $a : b = c : d$; $ad = bc$.

123. Die Gleichung $ad = bc$ wird **Produktengleichung** genannt.

124. Aufg. Zu drei gegebenen Grössen die **vierte Proportionale** zu **berechnen.**

125. Lehrs. Die **Glieder** einer Proportion können beliebig mit einander **vertauscht** werden, wenn nur die Produktengleichung ungeändert bleibt.

126. Aufg. Aus einer gegebenen Produktengleichung acht verschiedene Proportionen abzuleiten.

127. Lehrs. In einer Proportion verhält sich die **Summe** (oder Differenz) **der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe** (oder Differenz) **der Glieder des zweiten Verhältnisses** wie die Vorderglieder zu einander oder wie die Hinterglieder zu einander. $a : b = c : d$; $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c = b : d$.

128. Lehrs. In einer Proportion verhält sich die **Summe** (oder Differenz) **der Vorderglieder zur Summe** (oder Differenz) **der Hinterglieder** wie ein Vorderglied zu seinem Hinterglied. $a : b = c : d$; $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b$.

129. Eine Proportion, in welcher die Innenglieder einander gleich sind, wird eine **stetige Proportion** genannt. $a : b = b : c$. b heisst darin die **mittlere Proportionale** zu a und c.

130. Aufg. Zu zwei gegebenen Grössen die **mittlere Proportionale** zu **berechnen.**

131. Lehrs. Proportionen können mit einander **Glied für Glied multipliziert** oder durch einander **Glied für Glied dividiert** werden. $a : b = c : d$, $e : f = g : h$; $ae : bf = cg : dh$, $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$.

132. Lehrs. Stimmen zwei Proportionen in je drei Gliedern überein, so sind darin auch **die vierten Glieder** einander **gleich.** $a : b = c : x$, $a : b = c : y$; $x = y$.

133. Haben mehr als zwei Verhältnisse gleichen Wert, oder stimmen mehrere Proportionen in den Vordergliedern überein, so kann man daraus eine **laufende Proportion** ableiten.

Aus $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = a_4 : b_4$
oder aus $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$; $a_1 : a_3 = b_1 : b_3$; $a_1 : a_4 : b_1 : b_4$
folgt $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = b_1 : b_2 : b_3 : b_4$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

VIII. Gleichungen ersten Grades.

134. Eine **Gleichung** entsteht, wenn man zwei Grössen, welche gleichen Wert haben, durch ein Gleichheitszeichen verbindet.

Diese Grössen heissen **Seiten der Gleichung.**

Sind die Seiten algebraische Summen, so heisst jedes Glied derselben ein **Glied der Gleichung**.

135. In einer **identischen Gleichung** sind beide Seiten für jeden Wert, welchen man den darin vorkommenden Buchstabengrössen erteilt, einander gleich. $(x + 3)(x - 5) = x^2 - 2x - 15$.

136. Ist eine Gleichung nicht für alle Werte einer Buchstabengrösse, sondern nur für bestimmte Werte derselben richtig, so heisst sie eine **Bestimmungsgleichung.** $x^2 - 3x - 10 = 0$.

137. In einer Bestimmungsgleichung muss wenigstens eine Buchstabengrösse vorkommen. Man nennt sie die **Unbekannte** und wählt meistens die letzten Buchstaben des Alphabets dazu.

Der Wert der Unbekannten, welcher die Gleichung zu einer identischen macht, heisst die **Wurzel der Gleichung.**

Man **löst eine Gleichung auf,** indem man ihre Wurzel bestimmt.

138. **Grundsatz.** Gleiche Rechnungen mit gleichen Grössen geben gleiche Resultate.

Grundsatz. Eine Grösse kann durch eine ihr gleiche ersetzt werden.

139. Wenn man ein **Glied** einer Gleichung **auf die andere Seite schafft,** so muss man ihm dort das entgegengesetzte Vorzeichen geben. $2x + 5 = -x + 11$; $2x + x = -5 + 11$.

140. **Gleiche** Glieder, welche **auf beiden Seiten** einer Gleichung vorkommen, kann man fortlassen.

141. Enthält eine Gleichung eine oder mehrere Unbekannte in einer Klammer oder in einem Nenner, so muss sie zuerst **entwickelt** werden.

142. **Klammern,** welche eine Unbekannte enthalten, **löst man auf.**

143. **Nenner,** welche eine Unbekannte enthalten, schafft man fort, indem man die **ganze Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert.** (Derselbe darf jedoch nicht gleich 0 sein und auch nicht den Wert 0 annehmen, wenn man eine Wurzel der Gleichung für die Unbekannte einsetzt.)

144. Die höchste Zahl der unbekannten Faktoren, welche in einem Gliede vorkommen, heisst der **Grad der Gleichung.**

145. **Methode der Auflösung einer Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten.** Man schafft alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, auf eine Seite und alle anderen Glieder auf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

die andere Seite. Dann vereinigt man die die Unbekannte enthaltenden Glieder zu einem Gliede und dividiert die ganze Gleichung durch den Koeffizienten der Unbekannten.

146. Man macht die **Probe** auf die Richtigkeit der Rechnung, indem man den gefundenen Wert der Unbekannten in die **gegebene** Gleichung einsetzt. Es muss sich dann eine identische Gleichung ergeben.

147. Beispiele:

a) $5x + 3 - 2x - 7 = -4x - 18$, $5x - 2x + 4x = -3 + 7 - 18$,
$7x = -14$, $x = -2$.

Probe: $-10 + 3 + 4 - 7 = 8 - 18$, $-10 = -10$.

b) $ax + b^2 = a^2 - bx$, $ax + bx = a^2 - b^2$, $(a + b)\, x = a^2 - b^2$,

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b.$$

Probe: $a\,(a - b) + b^2 = a^2 - b\,(a - b)$,
$a^2 - ab + b^2 = a^2 - ab + b^2$.

c) Eingekleidete Aufgaben.

148. Sollen **zwei Unbekannte** berechnet werden, so müssen **zwei von einander unabhängige Gleichungen** gegeben sein.

Diese muss man zunächst entwickeln und so ordnen, dass die Glieder, welche die Unbekannten enthalten, auf einer Seite und alle bekannten Glieder auf der anderen Seite stehen.

149. Erste Methode zur Auflösung von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten (Substitutionsmethode). Man berechnet eine Unbekannte aus einer Gleichung und setzt den gefundenen Wert in die andere Gleichung ein. Dann erhält man eine Gleichung für die andere Unbekannte.

$$2x + 3y = 1$$
$$3x - 4y = 10$$
$$x = \frac{1 - 3y}{2}$$
$$\frac{3\,(1 - 3y)}{2} - 4y = 10$$

$$3 - 9y - 8y = 20$$
$$-17y = 17$$
$$y = -1$$
$$x = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Probe:
$4 - 3 = 1$
$6 + 4 = 10.$

150. Zweite Methode zur Auflösung von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten (Multiplikationsmethode). Man multipliziert beide Gleichungen mit geeigneten Faktoren, sodass die Koeffizienten einer Unbekannten einander gleich werden, und addiert oder subtrahiert die Gleichungen. Dann erhält man eine Gleichung für die andere Unbekannte.

$$\begin{array}{l|l} 2x + 3y = 1 & 4 \\ 3x - 4y = 10 & 3 \end{array}$$
$$8x + 12y = 4$$
$$9x - 12y = 30$$

$$17x = 34$$
$$x = 2$$
$$4 + 3y = 1$$

$$3y = -3$$
$$y = -1.$$

151. Beispiel für die Anwendung der Multiplikationsmethode zur Auflösung von **drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten.**

$$\begin{array}{r|c|c} 2x - y + 3z = 19 & 1 & \\ x + 4y - 2z = -18 & 2 & 3 \\ 3x - 2y - 4z = -4 & & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r} 2x - y + 3z = 19 & 3x + 12y - 6z = -54 \\ 2x + 8y - 4z = -36 & 3x - 2y - 4z = -4 \\ \hline 9y - 7z = -55 & 14y - 2z = -50 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|c} 9y - 7z = -55 & 2 \\ 14y - 2z = -50 & 7 \\ \hline 18y - 14z = -110 & \\ 98y - 14z = -350 & \\ \hline 80y = -240 & \\ y = -3 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} -42 - 2z = -50 \\ -2z = -8 \\ z = 4 \\ x - 12 - 8 = -18 \\ x = 2 \end{array}$$

$$\text{Probe:}\quad \begin{array}{r} 4 + 3 + 12 = 19 \\ 2 - 12 - 8 = -18 \\ 6 + 6 - 16 = -4 \end{array}$$

IX. Potenzen mit ganzen positiven oder negativen Exponenten.

152. Die Rechnungsarten **dritter Stufe** (vergl. No. 6) sind: Potenzieren (No. 153), Radizieren (No. 165) und Logarithmieren (No. 181).

Für den Gebrauch der **Klammern** und das **Fortlassen** derselben gelten die in No. 7 und No. 56 gegebenen Regeln.

Ausser in den dort angeführten Fällen wird indessen eine Klammer auch fortgelassen, welche einen **Potenzexponenten,** einen **Wurzelexponenten,** einen **Radikanden** oder einen **Numerus** einschliesst.

153. Eine **Potenz** ist ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren.

Der Faktor heisst **Grundzahl** oder **Basis.**

Die Anzahl der Faktoren heisst **Exponent.**

Man schreibt $ppp \,.\,.\, p = p^n$ und spricht: p hoch n oder p zur n-ten (zu ergänzen Potenz).

Der Potenzexponent **1** wird **fortgelassen.**

Potenzen **besonderer Grundzahlen** sind:

$$0^n = 0,\ (+1)^n = +1,\ (-1)^{2n-1} = -1,\ (-1)^{2n} = +1.$$

154. Lehrs. Man multipliziert Potenzen mit gleicher Grundzahl mit einander, indem man ihre Exponenten addiert. $p^m p^n = p^{m+n}$.

155. Lehrs. Man **dividiert zwei Potenzen mit gleicher Grundzahl** durch einander, indem man die Exponenten von einander subtrahiert. $p^m : p^n = p^{m-n}$.

156. Den **reziproken Wert** einer Grösse erhält man, wenn man 1 durch dieselbe dividiert.

157. Erweiterung des Begriffes der Potenz.

1. Eine **Potenz mit dem Exponenten 0** ist gleich 1. $p^0 = 1$.
2. Eine **Potenz mit negativem Exponenten** ist gleich dem reziproken Wert der entsprechenden Potenz mit positivem Exponenten. $p^{-n} = \frac{1}{p^n}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

158. Lehrs. Man **potenziert ein Produkt,** indem man jeden Faktor potenziert. $(abc)^n = a^n b^n c^n$.

159. Lehrs. Man **potenziert einen Bruch,** indem man Zähler und Nenner potenziert. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

160. Lehrs. Man **multipliziert Potenzen mit gleichen Exponenten** mit einander, indem man die Grundzahlen mit einander multipliziert. $a^n b^n c^n = (abc)^n$.

161. Lehrs. Man **dividiert zwei Potenzen mit gleichen Exponenten** durch einander, indem man die Grundzahlen durch einander dividiert. $a^n : b^n = (a : b)^n$.

162. Lehrs. Man **potenziert eine Potenz,** indem man die Exponenten mit einander multipliziert. $(a^m)^n = a^{mn}$.

X. Quadratwurzeln.

163. Die **Quadratwurzel** aus einer Grösse a ist diejenige Grösse, welche mit sich selbst multipliziert a ergiebt. $\sqrt{a}\sqrt{a} = a$, $\sqrt{25} = 5$.

164. Beispiele für die Berechnung von Quadratwurzeln:

a)
$$\begin{array}{l} \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b \\ \underline{\pm a^2} \\ \quad (+ 2ab + b^2) : (2a + b) \\ \quad \underline{\pm 2ab \pm b^2} \\ \qquad 0 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \sqrt{9x^2 + 30xy + 25y^2} = 3x + 5y \\ \underline{\pm 9x^2} \\ \quad (+ 30xy + 25y^2) : (6x + 5y) \\ \quad \underline{\pm 30xy \pm 25y^2} \\ \qquad 0 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{l} \sqrt{4p^2 + 12pq - 4pr + 9q^2 - 6qr + r^2} = 2p + 3q - r \\ \underline{\pm 4p^2} \\ \quad (+ 12pq - 4pr + 9q^2 - 6qr + r^2) : (4p + 3q) \\ \quad \underline{\pm 12pq \qquad \pm 9q^2} \\ \qquad (- 4pr \quad - 6qr + r^2) : (4p + 6q - r) \\ \qquad \underline{\pm 4pr \quad \pm 6qr \pm r^2} \\ \qquad\qquad 0 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{l} \sqrt{190969} = 437 \\ \underline{\pm 16} \\ \quad 309 \quad : 83 \\ \quad \underline{\pm 249} \\ \qquad 6069 : 867 \\ \qquad \underline{6069} \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{l} \sqrt{190969} = 437 \\ \quad 309 \quad : 83 \\ \qquad 6069 : 867 \\ \qquad\quad 0 \end{array}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\begin{array}{rl}
\text{f)}\ \sqrt{343{,}3609} & = 18{,}53 \\
243 & :\ 28 \\
1936 & :\ 365 \\
11109 & :\ 3703 \\
0 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rl}
\text{g)}\ \sqrt{750} & = 27{,}386 \\
350 & :\ 47 \\
2100 & :\ 543 \\
47100 & :\ 5468 \\
335600 & :\ 54766 \\
7004 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{h)}\ \sqrt{0{,}0250} & = 0{,}15811 \\
150 & :\ 25 \\
2500 & :\ 308 \\
3600 & :\ 3161 \\
43900 & :\ 31621 \\
12279 &
\end{array}$$

XI. Wurzeln.

165. Die **n-te Wurzel** aus a ist diejenige Grösse, welche zur n-ten Potenz erhoben a ergibt. $\sqrt[n]{a}^{\,n} = a$.

a heisst darin der **Radikand** oder die **Grundzahl.**
n heisst darin der **Wurzelexponent.**

Der Wurzelexponent 2 wird **fortgelassen.**

Man **radiziert** eine Grösse mit dem Exponenten n, wenn man die n-te Wurzel aus ihr bestimmt.

Radizieren und Potenzieren **mit demselben Exponenten** ändern eine Grösse nicht. $\sqrt[n]{a}^{\,n} = a$, $\sqrt[n]{a^n} = a$.

166. Lehrs. Man **radiziert ein Produkt,** indem man jeden Faktor radiziert. $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$.

167. Lehrs. Man **multipliziert Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten** mit einander, indem man die Radikanden mit einander multipliziert. $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$.

168. Aufg. $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{5})(3\sqrt{2}+22\sqrt{3}-25\sqrt{5}-12\sqrt{30}) = -239$.

169. Lehrs. Man **radiziert einen Bruch,** indem man Zähler und Nenner radiziert. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

170. Lehrs. Man **dividiert zwei Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten** durch einander, indem man die Radikanden durch einander dividiert. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a:b}$.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

171. Wenn eine Wurzel aus einer ganzen Zahl selbst keine ganze Zahl ist, so ist sie eine **irrationale Zahl.** Eine solche kann man in einen Dezimalbruch entwickeln, welcher weder endlich noch periodisch sein kann (vergl. No. 164g).

172. Eine Zahl, welche durch Anwendung der vier Grundrechnungsarten aus ganzen Zahlen hergeleitet werden kann, heisst eine **rationale Zahl.** Eine solche kann man in einen endlichen oder in einen periodischen Dezimalbruch entwickeln (vergl. No. 72).

173. Aufg. In folgenden Brüchen den **Nenner rational zu machen:**

a) $\frac{3\sqrt{5}}{7\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{14}$, b) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{11+3\sqrt{15}}{7}$,

c) $\frac{\sqrt{7}+2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+2\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{20+5\sqrt{15}-4\sqrt{21}-3\sqrt{35}}{2}$.

174. Aufg. In folgenden Gleichungen die **Quadratwurzeln fortzuschaffen** und die Gleichungen aufzulösen:

a) $3\sqrt{x-3} - 1 = \sqrt{x-3} + 3$ $(x = 7)$ b) $\sqrt{x+9} - 2 = \sqrt{x+2} - 1$ $(x = 7)$

175. Lehrs. Man **potenziert eine Wurzel,** indem man den Radikanden potenziert. $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$.

176. Lehrs. Man **radiziert eine Wurzel,** indem man die Wurzelexponenten mit einander multipliziert. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

177. Lehrs. Wenn eine **Potenz radiziert** werden soll, so kann man den Potenzexponenten und den Wurzelexponenten mit derselben Zahl multiplizieren **(Erweitern der Exponenten).**

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[mp]{a^{np}}.$$

178. Lehrs. Wenn eine **Potenz radiziert** werden soll, so kann man den Potenzexponenten und den Wurzelexponenten durch dieselbe Zahl dividieren **(Kürzen der Exponenten).**

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m:q]{a^{n:q}}.$$

179. Dividiert man beide Exponenten durch den Wurzelexponenten, so erhält man im allgemeinen **Potenzen mit gebrochenen Exponenten.** $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

180. Erweiterung des Begriffes der Potenz (vgl. No. 153 und 157). Eine **Potenz, deren Exponent ein Bruch ist,** bedeutet eine Wurzel aus einer Potenz, worin der Potenzexponent gleich dem Zähler und der Wurzelexponent gleich dem Nenner des Bruches ist. Für die Rechnung mit solchen Potenzen gelten die Sätze No. 154 bis 162.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XII. Logarithmen.

181. Der **Logarithmus von a für die Grundzahl g** $\left(\ell_{g}^{a}\right)$ ist derjenige Exponent, mit welchem man g potenzieren muss, um a zu erhalten. $\ell_{2}^{8} = 3$, $\ell_{5}^{25} = 2$.

g heisst die **Grundzahl.**
a heisst der **Numerus.**

182. Lehrs. Man erhält den **Logarithmus eines Produktes,** wenn man die Logarithmen seiner Faktoren addiert.

$$\ell_{g}^{abc} = \ell_{g}^{a} + \ell_{g}^{b} + \ell_{g}^{c}.$$

183. Lehrs. Man erhält den **Logarithmus eines Bruches,** wenn man den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers subtrahiert. $\ell_{g}^{\frac{a}{b}} = \ell_{g}^{a} - \ell_{g}^{b}$.

184. Lehrs. Man erhält den **Logarithmus einer Potenz,** wenn man den Logarithmus der Grundzahl mit dem Potenzexponenten multipliziert. $\ell_{g}^{a^n} = n\,\ell_{g}^{a}$.

185. Lehrs. Man erhält den **Logarithmus einer Wurzel,** wenn man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert. $\ell_{g}^{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{n}\,\ell_{g}^{a}$.

186. Die Logarithmen für die Grundzahl 10 werden Briggs'sche oder **gemeine Logarithmen** genannt.

Die Grundzahl **10** wird **fortgelassen.**

Bei denselben unterscheidet man die **Kennziffer** (die Ganzen, welche auch negativ sein können) und die **Mantisse** (die Dezimalstellen, welche immer positiv sein müssen).

Die **Mantissen** sind in **Logarithmentafeln** zusammengestellt und aus diesen zu entnehmen.

Die **Kennziffer** ist um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen vor dem Komma des Numerus. Beginnt derselbe mit 0, so ist die Kennziffer negativ und zwar gleich der Anzahl der Nullen am Anfange des Numerus.

187. Zu einem gegebenen Logarithmus findet man den zugehörigen Numerus, indem man in den Logarithmentafeln die zu der Mantisse gehörigen Ziffern des Numerus aufsucht und die Stellung des Kommas nach folgender Regel bestimmt:

Der Numerus hat eine Stelle mehr vor dem Komma als die Kennziffer angibt. Ist dieselbe negativ, so beginnt der Numerus mit soviel Nullen als die Kennziffer angibt.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

188. Zinseszinsrechnung. Anfangskapital a, Endkapital A, Jahre n, Prozente p, **Verzinsungsfaktor** $q = 1 + \frac{p}{100}$.

$$A = aq^n;\ a = A : q^n;\ q = \sqrt[n]{A : a};\ n = (\ell A - \ell a) : \ell q.$$

XIII. Quadratische Gleichungen.

189. Die **Quadratwurzel** aus einer positiven Grösse kann positiv oder negativ sein, sie hat immer **zwei Werte,** welche sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. $\sqrt{9} = +3$ oder $= -3$.

190. Eine **quadratische Gleichung (Gleichung zweiten Grades)** mit einer Unbekannten hat die Gestalt: $cx^2 + dx + e = 0$.

191. Ist der Koeffizient von x gleich 0, so heisst die Gleichung eine **rein quadratische.**

192. Eine **rein quadratische** Gleichung wird **aufgelöst,** indem man daraus x^2 berechnet und dann aus beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel zieht. Dabei erhält man **zwei** Werte für x, welche sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

193. Dividiert man die allgemeine quadratische Gleichung durch den Koeffizienten des ersten Gliedes, so erhält man die **Normalform** der quadratischen Gleichung. $x^2 + ax + b = 0$.

194. Hierin wird $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ die **quadratische Ergänzung** genannt.

195. Erste Methode zur Auflösung der Normalform der quadratischen Gleichung.

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}$$

$$x_1 = -\left(\frac{a}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b},\quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

196. Zweite Methode zur Auflösung der Normalform der quadratischen Gleichung.

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b = 0$$

$$\left[x + \frac{a}{2}\right]^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right]^2 = 0$$

$$\left[x + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right]\left[x + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] = 0$$

$$x_1 = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b},\quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

197. Diese Methode der **Zerlegung eines quadratischen Ausdruckes in zwei Faktoren** ersten Grades kann auch bei der Bestimmung eines Generalnenners oder beim Kürzen von Brüchen benutzt werden (vergl. No. 117).

198. Beziehungen zwischen den **Wurzeln** einer quadratischen Gleichung in der Normalform und den **Koeffizienten** derselben.

$$1.\ x_1 + x_2 = -a, \quad 2.\ x_1\, x_2 = b.$$

199. Ist eine von **zwei** gegebenen Gleichungen mit **zwei** Unbekannten vom zweiten Grade und die andere vom ersten Grade, so führt die Substitutionsmethode (No. 149) zu einer quadratischen Gleichung mit einer Unbekannten.

200. Beispiele:

a) $2x^2 + 3xy - y^2 - 5x + y = 10$, $3x - y = 2$ $\quad (x_1 = 2,\ x_2 = -4,\ y_1 = 4,\ y_2 = -14)$

b) $xy = 18$, $x + y = 10$ $\quad (x_1 = y_2 = 5 + \sqrt{7},\ y_1 = x_2 = 5 - \sqrt{7})$

c) $x^2 + y^2 = 29$, $x - y = 7$ $\quad (x_1 = 5,\ x_2 = 2,\ y_1 = -2,\ y_2 = -5)$

d) Eingekleidete Aufgaben.

B. Planimetrie.

XIV. Geometrische Grundbegriffe.

201. Ein mathematischer **Körper** ist ein allseitig begrenzter Teil des Raumes.

Die Grenzen eines Körpers heissen **Flächen.**
Die Grenzen einer Fläche heissen **Linien.**
Die Grenzen einer Linie heissen **Punkte.**

202. Ein **Punkt** hat **keine Ausdehnung.**

Durch Bewegung eines Punktes entsteht eine Linie. Eine **Linie** hat **eine Ausdehnung** oder **Dimension.**

Durch Bewegung einer Linie in einer Richtung, in welcher sie nicht ausgedehnt ist, entsteht eine Fläche. Eine **Fläche** hat **zwei Dimensionen.**

Durch Bewegung einer Fläche in einer Richtung, in welcher sie nicht ausgedehnt ist, entsteht ein Körper. Ein **Körper** hat **drei Dimensionen.**

203. Eine **gerade Linie** oder eine **Gerade** ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten. Sie heisst auch die **Entfernung** der beiden Punkte von einander.

Grundsatz. Durch zwei Punkte kann nur **eine** Gerade gezogen werden.

Aufg. Durch **zwei gegebenen Punkte** die **Gerade** zu **ziehen.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Eine durch zwei Punkte begrenzte Gerade wird **Strecke** genannt.

Lehrs. Zwei verschiedene gerade Linien können nicht mehr als einen Punkt gemeinsam haben, sie können sich nur **in einem Punkte schneiden.**

204. Eine **ebene Fläche** oder **Ebene** enthält jede Gerade in sich, welche durch irgend zwei ihrer Punkte geht.

205. Ein **Kreis** entsteht, wenn sich eine Strecke in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte dreht, bis sie in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt.

Die Strecke beschreibt dabei die **Kreisfläche** und ihr beweglicher Endpunkt die **Kreislinie** oder **Peripherie.**

Ein Teil der Peripherie heisst **Bogen.**

Der feste Endpunkt der Strecke heisst **Mittelpunkt** oder **Zentrum.**

Eine Gerade, welche den Mittelpunkt mit einem Punkte der Peripherie verbindet, heisst **Radius** oder **Halbmesser.**

Eine Gerade, welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, heisst **Sehne.**

Eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, heisst **Durchmesser.**

Durch einen Durchmesser wird ein Kreis in zwei **Halbkreise** geteilt.

Aufg. Um einen gegebenen Punkt **mit** einem gegebenen Radius den **Kreis zu schlagen.**

Lehrs. Radien desselben Kreises sind einander gleich.

Lehrs. Durchmesser desselben Kreises sind einander gleich.

206. Ein **Winkel** ist ein Teil einer Ebene, welcher durch zwei von einem Punkte ausgehende (unendlich lange) Gerade begrenzt wird.

Die Geraden werden **Schenkel,** ihr gemeinsamer Endpunkt wird **Scheitelpunkt** oder **Scheitel** genannt.

207. Winkel sind einander gleich, wenn sie so auf einander gelegt werden können, dass ihre Schenkel sich decken.

208. Ein Winkel, dessen Schenkel in die entgegengesetzten Richtungen einer Geraden fallen, heisst ein **gestreckter Winkel.**

Die Hälfte eines gestreckten Winkels heisst ein **rechter Winkel** oder **Rechter.**

Ein Neunzigstel eines Rechten heisst ein **Grad** (^{0}).

Ein Sechzigstel eines Grades heisst eine **Minute** ($'$).

Ein Sechzigstel einer Minute heisst eine **Sekunde** ($''$).

209. Die Schenkel eines rechten Winkels **stehen senkrecht auf einander.**

Der eine Schenkel eines rechten Winkels ist ein **Lot** oder eine **Senkrechte** auf dem anderen.

210. Ein **spitzer** Winkel ist kleiner als ein Rechter.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Ein **stumpfer** Winkel ist grösser als ein Rechter, aber kleiner als ein gestreckter Winkel.

Spitze, rechte und stumpfe Winkel werden **konkave** Winkel genannt.

Ein Winkel, welcher grösser als ein gestreckter Winkel ist, heisst ein **konvexer** Winkel.

211. Zwei (spitze) Winkel, welche zusammen einen Rechten betragen, heissen **Komplementwinkel.**

Zwei (konkave) Winkel, welche zusammen zwei Rechte betragen, heissen **Supplementwinkel.**

212. Zwei konkave Winkel heissen **Nebenwinkel,** wenn sie je einen Schenkel gemeinsam haben und ihre anderen Schenkel einen gestreckten Winkel bilden.

Lehrs. Nebenwinkel betragen zusammen zwei Rechte.

213. Zwei konkave Winkel heissen **Scheitelwinkel,** wenn die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des anderen sind.

Lehrs. Scheitelwinkel sind einander gleich.

214. Werden zwei in einer Ebene liegende Gerade von einer dritten geschnitten, so entstehen acht Winkel, von denen die vier zwischen den geschnittenen Linien liegenden **innere,** die vier anderen **äussere** genannt werden.

Die Winkel mit verschiedenen Scheitelpunkten lassen sich auf vier Arten paarweise zusammenfassen:

Gegenwinkel sind ein innerer und ein äusserer an derselben Seite der schneidenden Linie.

(**Konjugierte Winkel** sind ein innerer und ein äusserer an verschiedenen Seiten der schneidenden Linie.)

Entgegengesetzte Winkel sind zwei innere oder zwei äussere an derselben Seite der schneidenden Linie.

Wechselwinkel sind zwei innere oder zwei äussere an verschiedenen Seiten der schneidenden Linie.

215. Parallele Linien oder **Parallelen** sind gerade Linien, welche in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, wie weit man sie auch verlängern mag.

Grundsatz. Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden kann nur **eine Parallele** zu derselben gezogen werden.

216. Lehrs. Sind zwei Gegenwinkel einander gleich, so sind die geschnittenen Linien einander parallel.

Lehrs. Sind zwei Wechselwinkel einander gleich, so sind die geschnittenen Linien einander parallel.

Lehrs. Betragen zwei entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte, so sind die geschnittenen Linien einander parallel.

Lehrs. Gegenwinkel an Parallelen sind einander gleich.

Lehrs. Wechselwinkel an Parallelen sind einander gleich.

Lehrs. Entgegengesetzte Winkel an Parallelen betragen zusammen zwei Rechte.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XV. Ebene Figuren. Dreiecke.

217. Ein ringsum begrenzter Teil einer Ebene heisst **Figur.** Die Grösse der Figur heisst ihr **Flächeninhalt** oder ihr **Inhalt.** Die Länge der die Figur begrenzenden Linie heisst ihr **Umfang.**

218. Wird eine Figur nur durch Gerade begrenzt, so heisst sie ein **Vieleck.**

Die Strecke einer Geraden, welche an der Begrenzung teilnimmt, heisst **Seite des Vielecks.**

Ein Punkt, in welchem zwei Seiten zusammenstossen, heisst **Ecke des Vielecks.**

Ein **Winkel des Vielecks** wird von zwei benachbarten Seiten desselben gebildet.

Ein **Aussenwinkel** wird von einer Seite des Vielecks und der Verlängerung der Nachbarseite gebildet.

Eine **Diagonale** ist eine Gerade, welche zwei nicht benachbarte Ecken des Vielecks verbindet.

Aufg. Die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks von gegebener Seitenzahl zu berechnen.

219. Lehrs. Die **Summe zweier Seiten** eines Dreiecks ist grösser als die dritte.

Lehrs. Die **Differenz zweier Seiten** eines Dreiecks ist kleiner als die dritte.

220. Lehrs. Die **Summe der drei Winkel** eines Dreiecks beträgt zwei Rechte.

Aufg. Die Summe der Winkel eines Vielecks von gegebener Seitenzahl zu berechnen.

221. Ein **stumpfwinkliges** Dreieck enthält einen stumpfen Winkel.

Ein **rechtwinkliges** Dreieck enthält einen rechten Winkel. Die den rechten Winkel einschliessenden Seiten heissen **Katheten,** die dritte Seite heisst **Hypotenuse.**

Durch einen gegebenen Punkt kann nur **eine Senkrechte** zu einer gegebenen Geraden gezogen werden.

222. Lehrs. Ein **Aussenwinkel eines Dreiecks** ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Dreieckswinkel.

223. Figuren heissen **kongruent,** wenn sie so auf einander gelegt werden können, dass ihre Grenzen sich decken.

Stücke (Seiten, Winkel usw.), welche sich dabei decken, entsprechen einander und werden **homologe Stücke** genannt.

Homologe Stücke in kongruenten Figuren sind einander **gleich.**

224. Lehrs. (Erster Kongruenzsatz). **Dreiecke sind kongruent,** wenn sie in je zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

225. **Lehrs.** (Zweiter Kongruenzsatz, erster Teil). **Dreiecke sind kongruent,** wenn sie in je einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Lehrs. (Zweiter Kongruenzsatz, zweiter Teil). **Dreiecke sind kongruent,** wenn sie in je einer Seite, einem anliegenden Winkel und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

226. Ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten wird **gleichschenklig,** die beiden gleichen Seiten darin werden **Schenkel** und die dritte Seite wird **Grundlinie** oder **Basis** genannt.

Die der letzteren gegenüberliegende Ecke heisst **Spitze.**

Lehrs. Die **Winkel an der Grundlinie** eines **gleichschenkligen** Dreiecks sind einander gleich.

Lehrs. In einem **Dreieck mit zwei gleichen Winkeln** sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

227. Ein Dreieck mit drei gleichen Seiten heisst **gleichseitig.**

Lehrs. In einem **gleichseitigen Dreieck** ist jeder Winkel gleich 60^0.

Lehrs. Ein Dreieck, in welchem **zwei Winkel gleich 60^0** sind, ist gleichseitig.

228. **Lehrs.** Der **grösseren von zwei Seiten** eines Dreiecks liegt auch der grössere Winkel gegenüber.

Lehrs. Dem **grösseren von zwei Winkeln** eines Dreiecks liegt auch die grössere Seite gegenüber.

Unter allen Linien, welche man von einem gegebenen Punkte P nach einem Punkte der gegebenen Geraden L ziehen kann, ist die auf L senkrechte Gerade die kürzeste. Sie heisst die **Entfernung des Punktes P von der Geraden L.**

229. **Lehrs.** (Dritter Kongruenzsatz). **Dreiecke sind kongruent,** wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

230. **Lehrs.** (Vierter Kongruenzsatz). **Dreiecke sind kongruent,** wenn sie in je zwei Seiten und dem der grösseren gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

231. Eine Gerade, welche von einer Ecke eines Dreiecks aus senkrecht zur gegenüberliegenden Seite bis zu dieser gezogen wird, heisst **Höhe.**

Die Seite, auf welcher die Höhe senkrecht steht, heisst die zugehörige **Grundlinie.**

Die Teile, in welche letztere durch den Höhenfusspunkt geteilt wird, heissen **Höhenabschnitte.**

Eine Gerade, welche eine Ecke eines Dreiecks mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite verbindet, wird **Mittellinie** oder **Schwerlinie** genannt.

Eine Gerade, welche einen Dreieckswinkel halbiert und bis zur gegenüberliegenden Seite reicht, heisst **Winkelhalbierungslinie.**

232. **Lehrs.** In einem **gleichschenkligen Dreieck** fallen die Höhe, die Mittellinie und die Winkelhalbierungslinie, welche von der Spitze ausgehen, in eine Gerade zusammen.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

233. Lehrs. Haben **zwei gleichschenklige Dreiecke** gemeinschaftliche Grundlinie, so ist die Verbindungslinie ihrer Spitzen zugleich Höhe, Mittellinie und Winkelhalbierungslinie in beiden Dreiecken.

Die Gerade, welche im Mittelpunkt einer Strecke auf ihr senkrecht steht, wird die **Mittelsenkrechte** der Strecke genannt.

234. Aufgaben.

a) Ein Dreieck aus den drei Seiten zu zeichnen.
b) **An** eine gegebene Gerade **in** einem gegebenen Punkte einen gegebenen Winkel **anzutragen.**
c) Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden **die** Parallele zu ziehen.
d) Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu zeichnen.
e) Ein Dreieck aus zwei Seiten und einem der nicht von ihnen eingeschlossenen Winkel zu zeichnen.
f) Ein Dreieck aus einer Seite und zwei Winkeln zu zeichnen.
g) Auf **einer** gegebenen Geraden **in** einem gegebenen Punkte die Senkrechte zu **errichten.**
h) Auf **eine** gegebene Gerade **von** einem gegebenen Punkte die Senkrechte zu **fällen.**
i) Eine gegebene Strecke zu halbieren.
k) Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

XVI. Vierecke.

235. Ein Viereck, in welchem zwei gegenüberliegende Seiten einander parallel sind, heisst ein **Trapez.**

Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten einander parallel sind, heisst ein **Parallelogramm.**

236. Lehrs. Ein Parallelogramm wird durch eine Diagonale in zwei einander kongruente Dreiecke geteilt.

Lehrs. In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

Lehrs. In einem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Lehrs. In einem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

237. Ein Parallelogramm mit vier gleichen Seiten heisst ein **Rhombus.**

Ein Parallelogramm mit vier gleichen Winkeln heisst ein **Rechteck.**

Ein Viereck mit vier gleichen Seiten und vier gleichen Winkeln heisst ein **Quadrat.**

Lehrs. In einem Rhombus stehen die Diagonalen auf einander senkrecht.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lehrs. In einem Rechteck sind die Diagonalen einander gleich.

238. Lehrs. Ein Viereck, in welchem **je zwei gegenüberliegenden Winkel** einander **gleich** sind, ist ein Parallelogramm.

Lehrs. Ein Viereck, in welchem **zwei Seiten gleich und parallel** sind, ist ein Parallelogramm.

Lehrs. Ein Viereck, in welchem **je zwei gegenüberliegende Seiten** einander **gleich** sind, ist ein Parallelogramm.

Lehrs. Ein Viereck, in welchem die **Diagonalen einander halbieren,** ist ein Parallelogramm.

Aufg. Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden **die Parallele zu ziehen.**

239. Lehrs. Schneiden **drei oder mehr Parallelen aus einer Geraden gleiche Stücke** aus, so schneiden sie auch aus jeder anderen Geraden gleiche Stücke aus.

Aufg. Eine gegebene **Strecke** in eine gegebene Anzahl von **gleichen Teilen zu teilen.**

240. Die Senkrechte, welche man von einem Punkte einer von zwei Parallelen auf die andere fällt, heisst die **Entfernung der beiden Parallelen** von einander.

Aufg. Zu einer gegebenen Geraden in einer gegebenen Entfernung **eine Parallele zu ziehen.**

241. Ein **geometrischer Ort** ist die Gesamtheit aller Punkte, welche einer bestimmten Bedingung genügen. Er besteht in der Planimetrie aus einer oder mehreren geraden oder krummen Linien.

Soll ein Punkt einer bestimmten Bedingung genügen, so muss er also auf dem entsprechenden geometrischen Orte liegen.

a) Der g. O. für einen Punkt, welcher mit zwei anderen gegebenen Punkten auf einer Geraden liegen soll, ist die durch die beiden gegebenen Punkte gehende Gerade.

b) Der g. O. für einen Punkt, dessen Verbindungslinie mit einem gegebenen Punkte mit einer durch diesen Punkt gehenden gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel bilden soll, ist der freie Schenkel des Winkels, wenn derselbe in dem gegebenen Punkte an die gegebene Gerade angetragen wird.

c) Der g. O. für einen Punkt, welcher von einem gegebenen Punkte P um eine gegebene Strecke x entfernt ist, ist der mit dem Radius x um P geschlagene Kreis.

d) Der g. O. für einen Punkt, welcher von zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2 gleich weit entfernt ist, ist die Mittel senkrechte von $P_1 P_2$.

e) Der g. O. für einen Punkt, welcher von einer gegebenen Geraden L um eine gegebene Strecke x entfernt ist, wird von den beiden in der Entfernung x zu L gezogenen Parallelen gebildet.

f) Der g. O. für einen Punkt, welcher von zwei gegebenen Geraden L_1 und L_2 gleich weit entfernt ist, wird von den beiden Geraden gebildet, welche die von L_1 und L_2 gebildeten Winkel halbieren.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

XVII. Kreise.

242. Ein Teil eines Kreises, welcher von zwei Radien und dem dazwischenliegenden Bogen begrenzt wird, heisst **Kreisausschnitt** oder **Sektor.**

Ein Teil eines Kreises, welcher von einer Sehne und dem zwischen ihren Endpunkten liegenden Bogen begrenzt wird, heisst **Kreisabschnitt** oder **Segment.**

243. Ein Winkel, dessen Schenkel Radien eines Kreises sind, heisst **Zentriwinkel.**

Ein Winkel, dessen Schenkel Sehnen eines Kreises sind und dessen Scheitel auf der Peripherie desselben liegt, heisst **Peripheriewinkel.**

244. Lehrs. Zu **gleichen Zentriwinkeln** eines Kreises gehören kongruente Sektoren, gleiche Sehnen und gleiche Bogen.

245. Lehrs. Ein **Zentriwinkel** ist doppelt so gross als ein Peripheriewinkel, welcher mit ihm auf demselben Bogen steht.

Lehrs. Peripheriewinkel über gleichen Bogen desselben Kreises sind einander gleich.

246. Lehrs. Der Peripheriewinkel über (oder in) einem **Halbkreise** ist ein **Rechter.**

Geom. Ort. Der g. O. für die Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse AB ist der über dem Durchmesser AB geschlagene Halbkreis.

247. Eine Gerade, welche die Peripherie eines Kreises in zwei Punkten schneidet, heisst **Sekante** des Kreises.

Eine Gerade, welche mit der Peripherie eines Kreises nur einen Punkt gemeinsam hat, heisst **Tangente** des Kreises.

Die Tangente und der Kreis **berühren** einander. Der gemeinsame Punkt beider heisst ihr **Berührungspunkt.**

248. Lehrs. Eine **Tangente** steht auf dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Radius senkrecht.

Aufg. An einen gegebenen Kreis durch einen gegebenen Punkt eine **Tangente zu ziehen.**

Geom. Ort. Der g. O. für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt, ist die in dem Punkte auf der Geraden errichtete Senkrechte.

Geom. Ort. Der g. O. für den Mittelpunkt eines Kreises mit dem gegebenen Radius r, welcher eine gegebene Gerade berührt, besteht aus den beiden zu der Geraden in der Entfernung r gezogenen Parallelen.

249. Lehrs. Zieht man von einem Punkte P ausserhalb eines Kreises die **beiden Tangenten** an denselben, so sind die Abschnitte bis zu den Berührungspunkten einander gleich und so halbiert die von P nach dem Mittelpunkte des Kreises gezogene Gerade den Winkel zwischen den Tangenten und den Winkel zwischen den Berührungsradien.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lehrs. Die **Halbierungslinie des Winkels,** welchen **zwei Tangenten** eines Kreises mit einander bilden, geht durch den Mittelpunkt desselben.

Geom. Ort. Der g. O. für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher zwei gegebene Gerade berührt, besteht aus den Halbierungslinien der Winkel, welche die Geraden mit einander bilden.

Aufg. Einen Kreis zu zeichnen, welcher **drei gegebene Gerade** berührt.

250. Lehrs. Die **Mittelsenkrechte einer Sehne** eines Kreises geht durch den Mittelpunkt desselben.

Geom. Ort. Der g. O. für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher durch zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 geht, ist die Mittelsenkrechte von $P_1 P_2$.

Aufg. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch **drei gegebene Punkte** geht.

251. Ein Winkel, welcher von einer Tangente eines Kreises und einer durch den Berührungspunkt gehenden Sehne desselben gebildet wird, heisst **Sehnentangentenwinkel.**

Lehrs. Ein **Sehnentangentenwinkel** ist gleich dem Peripheriewinkel über dem zwischen seinen Schenkeln liegenden Bogen.

Aufg. Einen Bogen zu zeichnen, welcher über einer gegebenen Strecke AB als Sehne einen gegebenen Winkel als Peripheriewinkel fasst.

Geom. Ort. Der g. O. für die Spitze eines Dreiecks mit der gegebenen Seite AB und dem gegebenen gegenüberliegenden Winkel γ ist der Bogen, welcher über AB als Sehne den Winkel γ als Peripheriewinkel fasst.

252. Die Gerade, welche die Mittelpunkte zweier Kreise mit einander verbindet, heisst **Zentrale.**

Wenn zwei Kreise sich **schneiden,** so haben ihre Peripherien **zwei** Punkte gemeinsam.

253. Haben die Peripherien zweier Kreise nur **einen** Punkt gemeinsam, so **berühren die Kreise einander.**

Lehrs. Wenn **zwei Kreise einander berühren,** so geht die Zentrale durch den Berührungspunkt.

Geom. Ort. Der g. O. für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt, ist die Gerade, welche durch den Mittelpunkt des gegebenen Kreises und den gegebenen Berührungspunkt geht.

Geom. Ort. Der g. O. für den Mittelpunkt eines Kreises mit dem Radius r, welcher einen gegebenen Kreis mit dem Mittelpunkt M_1 und dem Radius r_1 berührt, besteht aus den mit den Radien $r_1 + r$ und $r_1 - r$ um M_1 geschlagenen Kreisen.

254. Wenn die Zentrale zweier Kreise grösser als die Summe ihrer Radien ist, so haben sie keinen Punkt gemeinsam. Es gibt dann **zwei innere** und **zwei äussere gemeinschaftliche Tangenten** beider Kreise.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufg. An zwei gegebene Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen.

255. Ein Kreis, welcher durch sämtliche Ecken eines Vielecks geht, heisst der **umgeschriebene Kreis** oder der **Umkreis** des Vielecks. Das Vieleck heisst ein **Sehnenvieleck** und ist dem Kreise eingeschrieben.

Ein Kreis, welcher sämtliche Seiten eines Vielecks berührt und innerhalb desselben liegt, heisst der **eingeschriebene Kreis** oder der **Inkreis** des Vielecks. Das Vieleck heisst ein **Tangentenvieleck** und ist dem Kreise umgeschrieben.

256. Lehrs. Die **drei Mittelsenkrechten** der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem **Mittelpunkte des Umkreises des Dreiecks.**

Lehrs. Die **drei Höhen** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte (dem **Höhenpunkte**).

Lehrs. Die **drei Winkelhalbierungslinien** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem **Mittelpunkte des Inkreises** des Dreiecks.

Lehrs. Die **Halbierungslinie eines Dreieckswinkels** und die Halbierungslinien der an den **beiden** anderen Winkeln liegenden **Aussenwinkel** schneiden sich in einem Punkte, dem **Mittelpunkte eines der drei Ankreise** des Dreiecks.

257. Lehrs. In einem **Sehnenviereck** betragen je zwei einander gegenüberliegende Winkel zusammen zwei Rechte.

Lehrs. In einem **Tangentenviereck** sind die Summen je zweier gegenüberliegender Seiten einander gleich.

258. Ein Vieleck mit lauter gleichen Seiten und lauter gleichen Winkeln heisst ein **regelmässiges Vieleck.**

Lehrs. Um und in ein **regelmässiges Vieleck** lässt sich ein Kreis zeichnen. Die **Mittelpunkte** beider Kreise **fallen zusammen.**

XVIII. Gleichheit von Figuren.

259. Bei einem Parallelogramm kann man eine beliebige Seite als **Grundlinie** und ihre Entfernung von der gegenüberliegenden Seite als **zugehörige Höhe** ansehen.

Lehrs. Parallelogramme von gleicher Grundlinie und gleicher zugehöriger Höhe haben gleichen Inhalt (vergl. No. 217).

Lehrs. Dreiecke von gleicher Grundlinie und gleicher zugehöriger Höhe haben gleichen Inhalt.

Geom. Ort. Der g. O. für die Spitze eines Dreiecks, welches die Seite AB und mit dem gegebenen Dreieck ABC gleichen Inhalt hat, ist die durch C zu AB gezogene Parallele.

260. Man **verwandelt** eine Figur, indem man eine andere Figur von gleichem Inhalte zeichnet, welche sich von der gegebenen Figur durch ihre Gestalt unterscheidet.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Aufgaben:

a) Ein gegebenes Vieleck in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger als das gegebene hat.

b) Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln.

c) Ein gegebenes Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

261. Aufg. Ein gegebenes **Dreieck** durch Gerade, welche durch eine Ecke gehen, in eine gegebene Anzahl von **gleichen Teilen zu teilen.**

262. Lehrs. Zieht man durch einen Punkt einer Diagonale eines Parallelogramms Parallelen zu den Seiten, so sind die von der Diagonale nicht geschnittenen Parallelogramme einander gleich **(Ergänzungsparallelogramme).**

Aufg. Ein gegebenes Parallelogramm mit Beibehaltung seiner Winkel in ein anderes mit gegebener Seite zu verwandeln.

263. Lehrs. In einem **rechtwinkligen Dreieck** ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Höhenabschnitte.

Lehrs. (des **Pythagoras,** um 550 v. Chr.). In einem **rechtwinkligen Dreieck** ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Lehrs. In einem **rechtwinkligen Dreieck** ist das Quadrat über der (zur Hypotenuse gehörigen) Höhe gleich dem Rechteck aus den beiden Höhenabschnitten.

264. Aufgaben:

a) Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

b) Ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck mit gegebener Seite zu verwandeln.

c) Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich der Summe (oder gleich der Differenz) zweier gegebener Quadrate ist

d) Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich einem gegebenen Vielfachen eines gegebenen Quadrates ist.

265. Fällt man von den Endpunkten einer Strecke auf eine Gerade die Senkrechten, so heisst die Entfernung der Fusspunkte der Senkrechten von einander die **Projektion der Strecke auf die Gerade.**

Lehrs. Projiziert man zwei Dreiecksseiten auf einander, so sind die Rechtecke aus je einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie einander gleich.

Lehrs. Das **Quadrat über einer Dreiecksseite,** welche einem spitzen (oder stumpfen) Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten vermindert (oder vermehrt) um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie.

XIX. Berechnung des Inhaltes von Figuren.

266. Alle bei der Berechnung des Inhaltes von Figuren zu benutzenden Strecken müssen mit derselben **Längeneinheit** gemessen werden.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Das Quadrat, dessen Seite gleich dieser Längeneinheit ist, ist die **Flächeneinheit.**

Jeder Strecke entspricht dann eine bestimmte Zahl.

Sollen **zwei Strecken** mit einander **multipliziert** werden, so werden die ihnen entsprechenden Zahlen mit einander multipliziert und das Produkt derselben gibt die Anzahl der Flächeneinheiten, welche das **Produkt der Strecken** enthält.

267. Lehrs. Der Inhalt eines **Rechtecks** ist gleich dem Produkt zweier aneinander stossender Seiten.

Lehrs. Der Inhalt eines **Parallelogramms** ist gleich dem Produkt der Grundlinie und der zugehörigen Höhe.

Lehrs. Der Inhalt eines **Dreiecks** ist gleich dem halben Produkt aus der Grundlinie und der zugehörigen Höhe.

XX. Proportionen von Strecken. Ähnlichkeit von Figuren. Stetige Teilung.

268. Gerade Linien, welche sich in einem Punkte schneiden, heissen **Strahlen.** Sie bilden ein **Strahlenbüschel** und ihr Schnittpunkt wird **Scheitelpunkt** desselben genannt.

Lehrs. (Erster Strahlensatz.) Werden **Strahlen** von **Parallelen** geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte eines Strahles wie die entsprechenden eines anderen Strahles und die Abschnitte auf den Parallelen wie die entsprechenden vom Scheitelpunkte begrenzten Abschnitte eines Strahles.

Aufg. Zu drei gegebenen Strecken die **vierte Proportionale zu konstruieren.**

269. Eine Strecke wird durch einen ihrer Punkte **innerlich** geteilt. Jeder der beiden Abschnitte reicht von dem Teilpunkte bis zu einem Endpunkt der Strecke. Die **Summe** der Abschnitte ist gleich der Strecke.

Eine Strecke wird durch einen Punkt ihrer Verlängerung **äusserlich** geteilt. Jeder der beiden Abschnitte reicht von dem Teilpunkt bis zu einem Endpunkt der Strecke. Die **Differenz** der Abschnitte ist gleich der Strecke.

Aufg. Eine gegebene **Strecke** innerlich resp. äusserlich **in einem gegebenen Verhältnis zu teilen.**

270. Figuren heissen **ähnlich,** wenn ihre Seiten proportioniert und die zwischen entsprechenden Seiten liegenden Winkel einander gleich sind.

Aufg. Ein Vieleck mit einer gegebenen Seite zu zeichnen, welches einem gegebenen Vieleck ähnlich ist.

Lehrs. Eine **Parallele zu einer Dreiecksseite** schneidet ein dem gegebenen ähnliches Dreieck ab.

271. Lehrs. (Erster Ähnlichkeitssatz.) **Dreiecke sind ähnlich,** wenn in ihnen je zwei Seiten proportioniert und die eingeschlossenen Winkel einander gleich sind.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lehrs. (Zweiter Ähnlichkeitssatz.) **Dreiecke sind ähnlich,** wenn in ihnen je zwei Winkel bezüglich gleich sind.

Lehrs. (Dritter Ähnlichkeitssatz.) **Dreiecke sind ähnlich,** wenn in ihnen die drei Seiten proportioniert sind.

Lehrs. (Vierter Ähnlichkeitssatz.) **Dreiecke sind ähnlich,** wenn in ihnen je zwei Seiten proportioniert und die den grösseren gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind.

272. Die Seiten, welche in **ähnlichen** Figuren einander entsprechen (vergl. No. 270), heissen **homologe Seiten.**

Linien, welche man in ähnlichen Figuren durch dieselbe Konstruktion erhält, heissen **homologe Linien.**

Winkel, welche in ähnlichen Figuren zwischen homologen Linien liegen, heissen **homologe Winkel.**

Lehrs. In **ähnlichen Figuren** verhalten sich homologe Linien wie homologe Seiten und sind homologe Winkel einander gleich.

273. Lehrs. Die **drei Mittellinien** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte (dem **Schwerpunkte** des Dreiecks) und teilen sich im Verhältnisse 2 : 1.

Lehrs. Zwei Höhen eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Grundlinien.

Lehrs. Die **Halbierungslinie eines Dreieckswinkels** teilt die gegenüberliegende Seite innerlich im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Lehrs. Die **Halbierungslinie eines Aussenwinkels eines Dreiecks** teilt die gegenüberliegende Seite äusserlich im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Geom. Ort. Den g. O. für die Ecke C eines Dreiecks mit der gegebenen Seite AB und dem gegebenen Verhältnis der beiden anderen Seiten erhält man, indem man AB innerlich und äusserlich in dem gegebenen Verhältnisse teilt und über der durch die Teilpunkte begrenzten Strecke als Durchmesser den Kreis beschreibt.

274. Lehrs. In einem **rechtwinkligen Dreieck** ist eine Kathete die mittlere Proportionale zu der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Höhenabschnitte (vergl. No. 263).

Lehrs. In einem **rechtwinkligen Dreieck** ist die zur Hypotenuse gehörige Höhe die mittlere Proportionale zu den beiden Höhenabschnitten (vergl. No. 263).

Aufg. Zu zwei gegebenen Strecken die **mittlere Proportionale** zu **konstruieren.**

275. Lehrs. Die Inhalte von **Dreiecken mit gleichen Grundlinien** verhalten sich wie die zugehörigen Höhen.

Lehrs. Die Inhalte von **Dreiecken mit gleichen Höhen** verhalten sich wie die zugehörigen Grundlinien.

Lehrs. Die Inhalte von **Dreiecken, welche in einem Winkel übereinstimmen,** verhalten sich wie die Produkte der den Winkel einschliessenden Seiten.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lehrs. Die Inhalte **ähnlicher Dreiecke** verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Aufg. Ein gegebenes **Dreieck** durch Parallelen zu einer Seite in eine gegebene Anzahl von **gleichen Teilen zu teilen.**

276. **Lehrs.** Die **Inhalte ähnlicher Vielecke** verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Lehrs. Die **Umfänge ähnlicher Vielecke** verhalten sich wie homologe Seiten.

277. **Lehrs. Regelmässige Vielecke von gleicher Seitenzahl** sind einander ähnlich.

Lehrs. Die **Umfänge** regelmässiger Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie **die Radien ihrer Umkreise.**

Lehrs. Die **Inhalte** regelmässiger Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie **die Quadrate der Radien ihrer Umkreise.**

278. **Lehrs.** Die **Umfänge von Kreisen** verhalten sich wie ihre Radien.

Lehrs. Die **Inhalte von Kreisen** verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien.

Lehrs. Der **Umfang eines Kreises** mit dem Radius r ist ist gleich $2r\pi$.

Lehrs. Der **Inhalt eines Kreises** mit dem Radius r ist gleich $r^2\pi$.

Näherungswerte für π sind folgende: $\frac{22}{7}$; $\frac{355}{113}$; 3,1416.

279. **Lehrs.** Der **Inhalt eines Kreises ist gleich dem eines Dreiecks,** dessen Grundlinie gleich der Peripherie des Kreises und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist.

Lehrs. Der **Inhalt eines Kreissektors** ist gleich dem halben Produkt aus dem zugehörigen Bogen und dem Radius des Kreises.

280. **Lehrs. Bogen desselben Kreises** verhalten sich wie die zugehörigen Zentriwinkel.

281. **Lehrs.** (Zweiter Strahlensatz.) Werden **Strahlen** von einem **Kreise** geschnitten, so sind die Produkte aus den vom Scheitelpunkt begrenzten Abschnitten je eines Strahles einander gleich.

Der Scheitelpunkt kann dabei sowohl innerhalb als ausserhalb des Kreises liegen.

Fallen die Schnittpunkte eines Strahles mit dem Kreise in einen Punkt zusammen, so ist der Strahl eine Tangente des Kreises.

Aufgaben:

a) Zu drei gegebenen Strecken die **vierte Proportionale zu konstruieren** (vergl. No. 268).

b) Zu zwei gegebenen Strecken die **mittlere Proportionale zu konstruieren** (vergl. No. 274).

282. Eine Strecke heisst **stetig geteilt,** wenn ihr grösserer Abschnitt die mittlere Proportionale zu der ganzen Strecke und ihrem kleineren Abschnitte ist.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lehrs. Trägt man den kleineren Abschnitt einer stetig geteilten Strecke **auf dem grösseren Abschnitte ab,** so ist dieser stetig geteilt.

Lehrs. Verlängert man eine stetig geteilte Strecke **um ihren grösseren Abschnitt,** so entsteht wieder eine stetig geteilte Strecke.

Aufgaben:

a) Eine stetig geteilte Strecke aus ihrem grösseren Abschnitte zu zeichnen.

b) Eine gegebene **Strecke stetig zu teilen.**

283. Lehrs. Die Seite eines **regelmässigen Zehnecks** ist gleich dem grösseren Abschnitte des stetig geteilten Radius des Umkreises des Zehnecks.

XXI. Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

284. Aufg. Aus den gegebenen Strecken m, n und p soll die Strecke x nach folgenden Gleichungen konstruiert werden:

a) $x = m + n$ b) $x = m - n$ c) $x = \sqrt{m^2 + n^2}$ d) $x = \sqrt{m^2 - n^2}$

e) $x = \sqrt{mn}$ f) $x = \frac{m^2}{n}$ g) $x = \frac{mn}{p}$ h) $x^2 \pm mx \pm n^2 = 0.$

XXII. Berechnungen bei Dreiecken und regelmässigen Vielecken.

285. Rechtwinkliges Dreieck. Bezeichnen a und b die Katheten, c die Hypotenuse, h die Höhe auf der Hypotenuse, p und q die entsprechenden Höhenabschnitte und $\varDelta$ den Inhalt des Dreiecks, so gelten folgende Gleichungen (vergl. No. 263 und 267).

$$a^2 = cp, \quad a^2 + b^2 = c^2, \quad h^2 = pq,$$
$$b^2 = cq, \quad p + q = c, \quad \varDelta = \frac{ch}{2} = \frac{ab}{2}.$$

286. Gleichseitiges Dreieck. Bezeichnet a die Seite, h die Höhe, r den Radius des Umkreises, ϱ den Radius des Inkreises und $\varDelta$ den Inhalt des Dreiecks, so lassen sich folgende Gleichungen ableiten:

$$h = \frac{a}{2}\sqrt{3}, \; r = \frac{a}{3}\sqrt{3}, \; \varrho = \frac{a}{6}\sqrt{3}, \; \varDelta = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$$

287. Ungleichseitiges Dreieck mit den Seiten a, b und c. Bezeichnet man $\frac{a+b+c}{2}$ mit s, so erhält man

1. die **Abschnitte,** in welche die **Seiten** durch die Berührungspunkte des **Inkreises** geteilt werden

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

	auf a	auf b	auf c
an A gelegen		$= s - a$	$= s - a$
an B gelegen	$= s - b$		$= s - b$
an C gelegen	$= s - c$	$= s - c$	

2. die **Abschnitte,** in welche die **Seiten** durch die Berührungspunkte des **Ankreises** geteilt werden, der die Seite a von aussen berührt,

	auf a	auf b	auf c
an A gelegen		$= s$	$= s$
an B gelegen	$= s - c$		$= s - c$
an C gelegen	$= s - b$	$= s - b$	

3. die **Höhenabschnitte**

	auf a	auf b	auf c
an A gelegen		$= \frac{-a^2+b^2+c^2}{2b}$	$= \frac{-a^2+b^2+c^2}{2c}$
an B gelegen	$= \frac{a^2-b^2+c^2}{2a}$		$= \frac{a^2-b^2+c^2}{2c}$
an C gelegen	$= \frac{a^2+b^2-c^2}{2a}$	$= \frac{a^2+b^2-c^2}{2b}$	

4. den **Inhalt** $\Delta = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$,

5. die **Höhen** $h_a = \frac{2\Delta}{a}$, $h_b = \frac{2\Delta}{b}$, $h_c = \frac{2\Delta}{c}$,

6. den Radius des **Inkreises** und die Radien der drei **Ankreise**
$$\varrho = \frac{\Delta}{s},\ \varrho_a = \frac{\Delta}{s-a},\ \varrho_b = \frac{\Delta}{s-b},\ \varrho_c = \frac{\Delta}{s-c},$$

7. den Radius des **Umkreises** $r = \frac{abc}{4\Delta}$.

288. Zwischen den Grössen ϱ, ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c, Δ und r bestehen folgende **Beziehungen:**

$$1.\ \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho}, \qquad 2.\ \Delta = \sqrt{\varrho\,\varrho_a\,\varrho_b\,\varrho_c},$$
$$3.\ \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r.$$

289. Aus dem Radius eines Kreises r kann man die Seite des dem Kreise **eingeschriebenen regelmässigen n-Ecks** s_n, seinen Inhalt i_n, die Seite des dem Kreise **umgeschriebenen regelmässigen n-Ecks** S_n und dessen Inhalt I_n berechnen. Es ergibt sich:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$s_4 = r\sqrt{2}, \quad i_4 = 2r^2, \quad S_4 = 2r,$$

$$s_8 = r\sqrt{2-\sqrt{2}}, \quad i_8 = 2r^2\sqrt{2}, \quad S_8 = 2r(\sqrt{2}-1),$$

$$s_6 = r, \quad i_6 = \frac{3r^2}{2}\sqrt{3}, \quad S_6 = \frac{2r}{3}\sqrt{3},$$

$$s_{12} = r\sqrt{2-\sqrt{3}}, \quad i_{12} = 3r^2, \quad S_{12} = 2r(2-\sqrt{3}),$$

$$s_{10} = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1), \quad i_{10} = \frac{5r^2}{4}\sqrt{2(5-\sqrt{5})}, \quad S_{10} = \frac{2r}{5}\sqrt{5(5-2\sqrt{5})},$$

$$I_4 = 4r^2,$$
$$I_8 = 8r^2(\sqrt{2}-1),$$
$$I_6 = 2r^2\sqrt{3},$$
$$I_{12} = 12r^2(2-\sqrt{3}),$$
$$I_{10} = 2r^2\sqrt{5(5-2\sqrt{5})}.$$

290. Durch Berechnung der Umfänge des einem Kreise mit dem Radius r eingeschriebenen regelmässigen 6-Ecks, 12-Ecks, 24-Ecks, 48-Ecks usw. erhält man Werte, welche kleiner als der Umfang des Kreises sind, demselben aber immer näher kommen. Durch Berechnung der Umfänge der entsprechenden dem Kreise umgeschriebenen regelmässigen Vielecke erhält man eine zweite Reihe von Werten, welche sich dem Umfang des Kreises immer mehr nähern, aber beständig grösser als derselbe sind. Dadurch wird der Wert für den **Umfang des Kreises** in immer engere Grenzen eingeschlossen und der **Näherungswert** für π immer genauer bestimmt (vergl. No. 278).

C. Trigonometrie.

XXIII. Trigonometrische Funktionen. Rechtwinklige Dreiecke.

291. Rechtwinklige Dreiecke, welche in einem ihrer spitzen Winkel übereinstimmen, sind einander ähnlich und haben gleiche Verhältnisse je zweier Seiten. Diese Verhältnisse heissen **trigonometrische Funktionen** des Winkels. Die wichtigsten derselben sind folgende:

Der **Sinus** eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Der **Kosinus** eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse.

Die **Tangente** eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis der gegenüberliegenden zur anliegenden Kathete.

Die **Kotangente** eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis der anliegenden zur gegenüberliegenden Kathete.

$$\sin\alpha = a : c,\quad \cos\alpha = b : c,\quad \operatorname{tang}\alpha = a : b,\quad \operatorname{cotang}\alpha = b : a.$$

292. Lehrs. Der Sinus eines Winkels ist gleich dem Kosinus seines Komplementwinkels.

Lehrs. Der Kosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus seines Komplementwinkels.

Lehrs. Die Tangente eines Winkels ist gleich der Kotangente seines Komplementwinkels.

Lehrs. Die Kotangente eines Winkels ist gleich der Tangente seines Komplementwinkels.

293. Wenn Winkel α von 0 bis 90^0 **wächst,** so **wächst** $\sin\alpha$ von 0 bis 1 und $\operatorname{tang}\alpha$ von 0 bis ∞ (unendlich), dagegen **nimmt** $\cos\alpha$ von 1 bis 0 und $\operatorname{cotang}\alpha$ von ∞ bis 0 **ab.**

Die Werte dieser Funktionen und ihrer Logarithmen sind in **Tafeln** zusammengestellt und daraus zu entnehmen.

294. Die Funktionen des Winkels α stehen zu einander in folgenden **Beziehungen:**

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,\qquad \operatorname{tang}\alpha = \sin\alpha : \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tang}\alpha \cdot \operatorname{cotang}\alpha = 1,\qquad \operatorname{cotang}\alpha = \cos\alpha : \sin\alpha.$$

295. Aufg. Berechnung der Stücke eines **rechtwinkligen Dreiecks,** wenn gegeben sind

1. a und b, 2. a und c, 3. a und α, 4. b und α, 5. c und α.

296. Aufg. Berechnung der Seiten, der Winkel und des Inhaltes von gleichschenkligen Dreiecken, Trapezen und regelmässigen Vielecken aus gegebenen Stücken durch Zerlegung der Figuren in rechtwinklige Dreiecke.

D. Stereometrie.

XXIV. Vielflache (Polyeder). Kugel.

297. Eine **Gerade steht auf einer Ebene senkrecht,** wenn sie auf zwei in derselben liegenden Geraden senkrecht steht.

Zwei verschiedene **Ebenen schneiden sich** im allgemeinen in **einer Geraden.**

Zwei Ebenen heissen **parallel,** wenn sie sich nicht schneiden, wie weit man sie auch ausdehnen mag.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Parallele Ebenen werden durch eine andere Ebene in **parallelen Geraden** geschnitten.

298. Ein Körper, welcher nur von Ebenen begrenzt wird, heisst ein **Vielflach.**

Die das Vielflach begrenzenden Ebenen heissen **Flächen** des Körpers.

Die Summe der Inhalte der Flächen heisst die **Oberfläche** des Körpers.

Die Geraden, in welchen sich zwei benachbarte Flächen schneiden, heissen **Kanten.**

Die Punkte, in welchen drei oder mehr Kanten zusammenstossen, heissen **Ecken.**

Eine Gerade, welche zwei nicht benachbarte Ecken eines Vielflaches verbindet, heisst eine **Körperdiagonale.**

299. Eulersche Beziehung. Die Summe der Anzahl der Ecken und der Anzahl der Flächen eines Vielflaches ist um 2 grösser als die Anzahl seiner Kanten.

300. Eine **Kugel** ist von einer krummen Fläche begrenzt, deren Punkte sämtlich von einem festen Punkte (dem **Mittelpunkte der Kugel**) gleiche Entfernung **(Radius der Kugel)** haben.

Eine **Ebene berührt** eine Kugel, wenn sie nur einen Punkt mit der Kugeloberfläche gemeinsam hat. Der Berührungsradius steht dann senkrecht auf der Ebene.

301. Eine Kugel, welche durch sämtliche Ecken eines Vielflachs geht, heisst die **umgeschriebene Kugel** oder die **Umkugel** des Vielflachs. Das letztere ist der Kugel eingeschrieben.

Eine Kugel, welche sämtliche Flächen eines Vielflachs berührt, und innerhalb desselben liegt, heisst die **eingeschriebene Kugel** oder die **Inkugel** des Vielflachs. Das letztere ist der Kugel umgeschrieben.

XXV. Prismen. Pyramiden.

302. Ein **n-seitiges Prisma** ist von zwei einander parallelen **Grundflächen** (kongruente n-Ecke) und n **Seitenflächen** (Parallelogramme) begrenzt.

Es hat 2n **Grundkanten,** n unter einander parallele gleich lange **Seitenkanten** und 2n **Ecken.**

Die Senkrechte, welche man von einem Punkte einer der Grundflächen auf die andere fällt, heisst die **Höhe** des Prismas.

Ein Prisma heisst **gerade,** wenn seine Seitenkanten senkrecht auf den Grundflächen stehen. Anderen Falles heisst es **schief.**

Ein Prisma heisst **regelmässig,** wenn es gerade ist und seine Grundflächen regelmässige Vielecke sind.

303. Ein Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist, heisst ein **Parallelepipedon.**

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Stehen in einem Parallelepipedon die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten auf einander senkrecht, so heisst es ein **Quader.**

Ein Quader, dessen Kanten sämtlich unter einander gleich sind, heisst ein **Würfel.**

Ein Würfel ist von sechs Quadraten begrenzt (erster **regelmässiger Körper**).

304. Eine **n-seitige Pyramide** ist von einer **Grundfläche** (n-Eck) und n **Seitenflächen** (Dreiecke) begrenzt.

Es hat n **Grundkanten,** n durch einen Punkt (**Spitze** der Pyramide) gehende **Seitenkanten** und n + 1 **Ecken.**

Die Senkrechte, welche man von der Spitze auf die Grundfläche fällt, heisst die **Höhe** der Pyramide.

Eine Pyramide heisst **gerade,** wenn der Fusspunkt ihrer Höhe mit dem Mittelpunkt des Umkreises ihrer Grundfläche zusammenfällt. Die **Seitenkanten** einer geraden Pyramide sind einander **gleich.**

Eine Pyramide heisst **regelmässig,** wenn sie gerade und ihre Grundfläche ein regelmässiges Vieleck ist.

305. Eine regelmässige dreiseitige Pyramide, deren Kanten sämtlich einander gleich sind, heisst ein **regelmässiges Vierflach** (Tetraeder).

Ein regelmässiges Vierflach ist von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt (zweiter **regelmässiger Körper**).

306. Ein **regelmässiges Achtflach** (Oktaeder) ist von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt (dritter regelmässiger Körper). Man kann es aus zwei regelmässigen vierseitigen Pyramiden zusammensetzen, welche man mit ihren Grundflächen aneinander legt.

XXVI. Körperinhalt.

307. Der **Körperinhalt** oder das **Volumen** eines Körpers wird mit der **Körpereinheit** gemessen. Diese ist ein Würfel, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist (vergl. No. 266).

Das Produkt der Zahlen, welche die Länge von drei Strecken (in Längeneinheiten) angeben, ist gleich der Anzahl von Körpereinheiten, welche das **Produkt der drei Strecken** enthält.

Das Produkt der Anzahl von Flächeneinheiten, welche eine Fläche, und der Anzahl von Längeneinheiten, welche eine Strecke enthält, ist gleich der Anzahl von Körpereinheiten, welche das **Produkt** der **Fläche** und der **Strecke** enthält.

308. Grundsatz. (Cavalierisches Prinzip.) Befinden sich zwei Körper zwischen parallelen Ebenen und haben in diesen und allen ihnen parallelen Ebenen die Schnittfiguren gleichen Flächeninhalt, so haben die beiden Körper gleichen Körperinhalt.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

309. Lehrs. Der **Inhalt eines Quaders** ist gleich dem Produkt dreier in einer Ecke zusammenstossender Kanten.

Lehrs. Der **Inhalt eines Prismas** ist gleich dem Produkt seiner Grundfläche und seiner Höhe.

Lehrs. Pyramiden von gleicher Grundfläche und **gleicher Höhe** haben gleichen Inhalt.

Lehrs. Ein **dreiseitiges Prisma** kann in drei dreiseitige Pyramiden zerlegt werden, deren Inhalte einander gleich sind.

Lehrs. Der **Inhalt einer dreiseitigen Pyramide** ist gleich dem dritten Teil des Produktes ihrer Grundfläche und ihrer Höhe.

Lehrs. Der **Inhalt einer Pyramide** ist gleich dem dritten Teil des Produktes ihrer Grundfläche und ihrer Höhe.

XXVII. Kreiszylinder. Kreiskegel. Kugel.

310. Ein **Kreiszylinder** ist von zwei einander parallelen **Grundflächen** (Kreisen mit dem Radius r) und einer krummen **Mantelfläche** begrenzt, in welcher durch jeden ihrer Punkte eine Gerade (**Seite** s des Zylinders) gezogen werden kann, die auf den Grundflächen senkrecht steht.

Die Gerade, welche die Mittelpunkte beider Grundflächen mit einander verbindet, steht auf den Grundflächen senkrecht und heisst die **Höhe** oder die **Achse** des Kreiszylinders.

Lehrs. Der **Flächeninhalt der Mantelfläche** eines Kreiszylinders ist gleich $2rs\pi$.

Lehrs. Der **Körperinhalt eines Kreiszylinders** ist gleich $r^2s\pi$.

311. Ein **Kreiskegel** ist von einer **Grundfläche** (Kreis mit dem Radius r) und einer krummen **Mantelfläche** begrenzt, in welcher durch jeden ihrer Punkte eine Gerade (**Seite** s des Kegels) gezogen werden kann, welche durch einen festen Punkt (**Spitze** des Kegels) geht.

Die Gerade, welche die Spitze des Kreiskegels mit dem Mittelpunkte seiner Grundfläche verbindet, steht auf der Grundfläche senkrecht und heisst **Höhe** oder **Achse** des Kreiskegels.

Lehrs. Der **Flächeninhalt der Mantelfläche** eines Kreiskegels ist gleich $rs\pi$.

Lehrs. Der **Körperinhalt eines Kreiskegels** ist gleich $\frac{1}{3}r^2s\pi$.

312. Lehrs. Die **Oberfläche einer Kugel** ist gleich $4r^2\pi$.

Lehrs. Der **Körperinhalt einer Kugel** ist gleich $\frac{4}{3}r^3\pi$.

XXVIII. Parallelprojektion.

313. Alle Senkrechten auf einer Ebene sind einander parallel.

Fällt man von einer Ecke eines Körpers auf eine Ebene (die Ebene der Zeichnung) die Senkrechte, so heisst der Fusspunkt der Senkrechten die **Projektion der Ecke auf die Ebene** (vergl. No. 265).

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Fällt man von sämtlichen Punkten einer Linie auf die Ebene der Zeichnung die Senkrechten, so bildet die Gesamtheit der Fusspunkte der Senkrechten die **Projektion der Linie auf die Ebene.**

Die **Projektion einer ringsum begrenzten Fläche** ist der von der Projektion der Begrenzungslinien eingeschlossene Teil der Zeichnungsebene.

314. Die **Projektion** einer **Geraden,** welche auf der Zeichnungsebene senkrecht steht, ist ein **Punkt.**

Die **Projektion** jeder anderen **Geraden** ist eine **Gerade.**

Die Richtung und Länge der Projektion einer Strecke hängt von ihrer Lage zur Zeichnungsebene ab.

Die Projektion einer der Zeichnungsebene parallelen Strecke ist der projizierten Strecke gleich und parallel.

Die Projektionen anderer Geraden sind kürzer als die projizierten Strecken und zwar um so stärker verkürzt, je mehr sich ihre Richtung der Senkrechten auf der Zeichnungsebene nähert.

Gleiche Strecken derselben Geraden sind in der Projektion einander **gleich.**

Parallele Gerade sind in der Projektion einander **parallel.**

Gleiche Strecken auf parallelen Geraden sind in der Projektion einander **gleich.**

315. Die **Projektion eines Kreises** mit dem Radius r ist eine **Strecke** von der Länge 2r, wenn ein Durchmesser des Kreises senkrecht zur Zeichnungsebene ist. Sie ist ein **Kreis** mit dem Radius r, wenn die Ebene des projizierten Kreises parallel zur Zeichnungsebene ist. In allen anderen Fällen ist sie eine **Ellipse,** deren grosse Achse gleich 2r ist.

316. Die Projektion einer ebenen Figur ist eine Strecke, wenn eine in der Ebene der Figur liegende Gerade senkrecht zur Zeichnungsebene ist. Sie ist der projizierten Figur kongruent, wenn beide Ebenen einander parallel sind. In allen anderen Fällen weicht sie je nach dem Winkel zwischen beiden Ebenen mehr oder weniger von der projizierten Figur ab.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Sachverzeichnis.

Universitäts- und Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf