Wissenschaftliche Beilage
zum Jahresbericht des Städtischen Realgymnasiums in Königsberg i. Pr.
Ostern 1912.

Über rationale Dreiecke.

Von Prof. Dr. Benno Hecht.

Als rationale Dreiecke werden im folgenden solche Dreiecke bezeichnet, deren Seiten und Inhalt rationale Masszahlen besitzen. Multipliziert man in einem solchen Dreieck die drei Seiten mit derselben rationalen Grösse, so erhält man ein rationales Dreieck, das dem gegebenen ähnlich ist. Unter allen Dreiecken, die auf diese Weise aus einem gegebenen abgeleitet werden können, gibt es immer eines und nur eines, bei dem sich die drei Seiten als ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler ergeben. Unter drei oder mehr ganzen Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind hier und im folgenden solche Zahlen zu verstehen, die keinen ihnen allen gemeinsamen Teiler enthalten, während je zwei von ihnen gemeinsame Faktoren besitzen können. Das oben erwähnte Dreieck soll als rationales Primdreieck bezeichnet werden.

Berechnet man aus den Seiten a_1, a_2 und a_3 eines solchen die Radien der vier Berührungskreise ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 und ϱ, so werden diese zwar rationale Grössen, im allgemeinen aber nicht ganze Zahlen sein. Durch Multiplikation der Seiten mit einem geeigneten Faktor F' kann man dann aber ein Dreieck ableiten, in welchem $\varrho'_1 = F'\varrho_1$, $\varrho'_2 = F'\varrho_2$, $\varrho'_3 = F'\varrho_3$ und $\varrho' = F'\varrho$ ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind.

In § 1 werden nun zunächst alle möglichen Kombinationen von ganzen Zahlen ohne gemeinsamen Teiler bestimmt, die als Radien der Berührungskreise eines Dreiecks auftreten können. In § 2 werden sodann die Zahlenkombinationen ausgesondert, für die auch der Inhalt eine ganze Zahl wird. Aus diesen wird dann eine allgemeine Form für die drei Seiten aller rationalen Primdreiecke hergeleitet. In § 3 sind schliesslich noch die Änderungen behandelt, die die Resultate in besonderen Fällen (rechtwinklige Dreiecke, gleichschenklige Dreiecke) erleiden.

§ 1. **Ganzzahlige Lösungen der Gleichung:** $\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}=\frac{1}{\varrho}$. Nennt man eine ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$\frac{1}{\varrho_1}+\frac{1}{\varrho_2}+\frac{1}{\varrho_3}=\frac{1}{\varrho}, \tag{I}$$

bei der die ϱ Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, eine eigentliche Lösung, so gibt es immer eine und nur eine eigentliche Lösung der Gleichung, für welche

$$\varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 = \varkappa_1 : \varkappa_2 : \varkappa_3$$

ist, wenn die $\varkappa$ drei beliebige gegebene ganze Zahlen sind. Setzt man

$$\varkappa_2\varkappa_3+\varkappa_3\varkappa_1+\varkappa_1\varkappa_2 = q,$$

so folgt:

(II) $$\frac{1}{\varkappa_1 q}+\frac{1}{\varkappa_2 q}+\frac{1}{\varkappa_3 q}=\frac{1}{\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3}.$$

Enthalten die $\varkappa$ einen allen dreien gemeinsamen Faktor, so kommt dieser in jedem Nenner in der dritten Potenz vor. Sucht man nur die eigentlichen Lösungen der Gleichung (I), so kann man einen solchen Faktor von vornherein fortlassen, also annehmen, dass die $\varkappa$ Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind. Ebenso kann man ohne die allgemeine Gültigkeit der folgenden Betrachtungen zu beschränken festsetzen, dass

$$\varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \varrho_3, \text{ also auch } \varkappa_1 \geqq \varkappa_2 \geqq \varkappa_3$$

sein soll. Setzt man nun

$$\varkappa_{hk} = \varkappa_{kh} = \text{dem grössten gem. Teiler von } \varkappa_h \text{ und } \varkappa_k,$$
$$f_{hk} = \text{dem grössten gem. Teiler von } \varkappa_{hk} \text{ und } (\varkappa_h+\varkappa_k) : \varkappa_{hk},$$
$$\varkappa_1 = \varkappa_{12}\varkappa_{13}\lambda_1,\ \varkappa_2 = \varkappa_{23}\varkappa_{21}\lambda_2,\ \varkappa_3 = \varkappa_{31}\varkappa_{32}\lambda_3,$$
$$f = \varkappa_{23}\varkappa_{31}\varkappa_{12}f_{23}f_{31}f_{12},$$

so wird:

$$\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 = \varkappa_{23}{}^2\varkappa_{31}{}^2\varkappa_{12}{}^2\lambda_1\lambda_2\lambda_3,$$
$$q = \varkappa_{23}\varkappa_{31}\varkappa_{12}\,(\varkappa_{23}\lambda_2\lambda_3+\varkappa_{31}\lambda_3\lambda_1+\varkappa_{12}\lambda_1\lambda_2).$$

Da nun $\varkappa_{23}$, $\varkappa_{31}$ und $\varkappa_{12}$ zu einander, λ_1, λ_2 und λ_3 zu einander $\varkappa_{23}$ zu λ_1, $\varkappa_{31}$ zu λ_2 und $\varkappa_{12}$ zu λ_3 teilerfremd sind, so erhält man als eigentliche Lösung der Gleichung (I):

(III) $$\varrho_1 = \varkappa_1 q : f,\ \varrho_2 = \varkappa_2 q : f,\ \varrho_3 = \varkappa_3 q : f,\ \varrho = \varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 : f.$$

Sind $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ und $\varkappa_3$ teilerfremd, so ist $f = 1$.

Diese Gleichungen (III) geben sämtliche eigentlichen Lösungen der Gleichung (I) und jede Lösung nur einmal, wenn die für die $\varkappa$ festgesetzten Bedingungen beachtet werden.

Einige Beispiele hierfür sind in Tabelle 1 zusammengestellt.

§ 2. **Bestimmung der Seiten aller rationalen Primdreiecke.** Sollen die ϱ Radien der Berührungskreise eines rationalen Dreiecks sein, so muss ihr Produkt $\varkappa_1{}^2\varkappa_2{}^2\varkappa_3{}^2q^3 : f^4$ eine Quadratzahl, also auch q eine solche sein. Bezeichnet man diese mit λ^2, so folgt aus

$$\varkappa_2\varkappa_3+\varkappa_3\varkappa_1+\varkappa_1\varkappa_2 = \lambda^2$$

für $\varkappa_3$ der Wert $(\lambda^2-\varkappa_1\varkappa_2):(\varkappa_1+\varkappa_2)$ und es besteht die Proportion:

$$\varrho_1 : \varrho_2 : \varrho_3 = \varkappa_1(\varkappa_1+\varkappa_2) : \varkappa_2(\varkappa_1+\varkappa_2) : (\lambda^2-\varkappa_1\varkappa_2).$$

Bezeichnet man nun mit γ_1, γ_2 und γ_3 drei ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, die den Bedingungen:

$$\gamma_1 \geqq \gamma_2 \text{ und } \gamma_2(\gamma_1+\gamma_2) \geqq (\gamma_3{}^2-\gamma_1\gamma_2) > 0$$

genügen, und nennt man g den grössten gemeinsamen Teiler von $\gamma_1+\gamma_2$ und $\gamma_3{}^2-\gamma_1\gamma_2$, so erfüllen die Grössen

$$\varkappa_1 = \gamma_1(\gamma_1+\gamma_2) : g,\ \varkappa_2 = \gamma_2(\gamma_1+\gamma_2) : g,\ \varkappa_3 = (\gamma_3{}^2-\gamma_1\gamma_2) : g$$

die in § 1 aufgestellten Bedingungen. Man erhält dann

$$\varkappa_1\varkappa_2\varkappa_3 = \gamma_1\gamma_2(\gamma_1+\gamma_2)^2(\gamma_3{}^2-\gamma_1\gamma_2) : g^3 \text{ und } q = (\gamma_1+\gamma_2)^2\gamma_3{}^2 : g^2.$$

Bezeichnet man den grössten gemeinsamen Teiler von γ_1 und γ_3 mit γ_{13}, den grössten gemeinsamen Teiler von γ_2 und γ_3 mit γ_{23} und $\gamma_3 : (\gamma_{13}\gamma_{23})$ mit δ_3, so ergeben sich aus den Gleichungen (III) für rationale Dreiecke, deren Berührungsradien ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, die folgenden Gleichungen:

(IV) $$\varrho'_1 = \gamma_1(\gamma_1+\gamma_2)\delta_3{}^2 : g,\ \varrho'_2 = \gamma_2(\gamma_1+\gamma_2)\delta_3{}^2 : g,$$
$$\varrho'_3 = (\gamma_3{}^2-\gamma_1\gamma_2)\delta_3{}^2 : g,\ \varrho' = \gamma_1\gamma_2(\gamma_3{}^2-\gamma_1\gamma_2) : (g\gamma_{13}{}^2\gamma_{23}{}^2).$$

Diese stellen sämtliche eigentlichen Lösungen der Gleichung (I) für rationale Dreiecke dar und bei der Beachtung der für die γ festgesetzten Beschränkungen jede Lösung nur einmal.

Aus den Gleichungen (IV) ergibt sich:

$$\Delta' = \gamma_1\gamma_2(\gamma_1+\gamma_2)(\gamma_3^2-\gamma_1\gamma_2)\delta_3^3 : (g^2\gamma_{13}\gamma_{23}),$$
$$s'-a'_1 = \gamma_2(\gamma_3^2-\gamma_1\gamma_2)\delta_3 : (g\gamma_{13}\gamma_{23}),\quad s'-a'_2 = \gamma_1(\gamma_3^2-\gamma_1\gamma_2)\delta_3 : (g\gamma_{13}\gamma_{23}),$$
$$s'-a'_3 = \gamma_1\gamma_2(\gamma_1+\gamma_2)\delta_3 : (g\gamma_{13}\gamma_{23}),\qquad s' = (\gamma_1+\gamma_2)\gamma_3^2\delta_3 : (g\gamma_{13}\gamma_{23}),$$
$$a'_1 = \gamma_1(\gamma_3^2+\gamma_2^2)\delta_3 : (g\gamma_{13}\gamma_{23}),\ a'_2 = \gamma_2(\gamma_3^2+\gamma_1^2)\delta_3 : (g\gamma_{13}\gamma_{23}),\ a'_3 = (\gamma_1+\gamma_2)(\gamma_3^2-\gamma_1\gamma_2)\delta_3 : (g\gamma_{13}\gamma_{23}).$$

Diese Ausdrücke für die drei Seiten enthalten den gemeinsamen Faktor $F' = \gamma_{12}\delta_{13}\delta_{23}\delta_3$, worin γ_{12} den grössten gemeinsamen Teiler von γ_1 und γ_2, δ_{13} den grössten gemeinsamen Teiler von γ_3 und $\gamma_1 : \gamma_{13}$ und δ_{23} den grössten gemeinsamen Teiler von γ_3 und $\gamma_2 : \gamma_{23}$ bedeuten. Dividiert man die Ausdrücke für die Seiten a' durch F' und setzt man noch

$$g\gamma_{13}\gamma_{23}\gamma_{12}\delta_{13}\delta_{23} = F,$$

so ergeben sich für die Seiten der rationalen Primdreiecke die folgenden Resultate:

$$\text{(V)}\qquad a_1 = \gamma_1(\gamma_3^2+\gamma_2^2) : F,\ a_2 = \gamma_2(\gamma_3^2+\gamma_1^2) : F,\ a_3 = (\gamma_1+\gamma_2)(\gamma_3^2-\gamma_1\gamma_2) : F.$$

Diese Ausdrücke geben bei Berücksichtigung aller für die γ festgesetzten Beschränkungen die Seiten jedes rationalen Primdreiecks nur einmal. Wählt man dagegen für die γ drei beliebige ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler, die nur der Bedingung $\gamma_3^2>\gamma_1\gamma_2$ genügen, so erhält man im allgemeinen je 6 einander kongruente Dreiecke, die durch Vertauschung der Seiten in einander übergehen.

Mit Benutzung der Gleichungen (V) ergeben sich nun für die rationalen Primdreiecke noch folgende Resultate:

$$s = (\gamma_1+\gamma_2)\gamma_3^2 : F,\quad s-a_1 = \gamma_2(\gamma_3^2-\gamma_1\gamma_2) : F,$$
$$s-a_2 = \gamma_1(\gamma_3^2-\gamma_1\gamma_2) : F,\ s-a_3 = \gamma_1\gamma_2(\gamma_1+\gamma_2) : F,$$
$$\Delta = \gamma_1\gamma_2\gamma_3(\gamma_1+\gamma_2)(\gamma_3-\gamma_1\gamma_2) : F^2$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} = \gamma_1 : \gamma_3,\ \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = \gamma_2 : \gamma_3,\ \operatorname{tg}\frac{\alpha_3}{2} = (\gamma_3^2-\gamma_1\gamma_2) : (\gamma_1+\gamma_2)\gamma_3.$$

Ein Dreieck ist also stumpfwinklig, wenn $\gamma_1>\gamma_3$, rechtwinklig, wenn $\gamma_1 = \gamma_3$, und spitzwinklig, wenn $\gamma_1<\gamma_3$ ist.

Tabelle 2 enthält für eine Reihe von schiefwinkligen ungleichseitigen Primdreiecken die Werte der Grössen γ, der Seiten a und des Inhalts Δ. Ferner ist darin der Faktor F' angegeben, mit dem die Seiten multipliziert werden müssen, damit die Radien der Berührungskreise ϱ' u.s.w. ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler werden. In dieser Tabelle sind unter anderen alle rationalen Primdreiecke enthalten, in denen keine Seite grösser als 100 ist.[1])

§ 3. **Besondere Fälle.** A. Rechtwinklige Dreiecke. Bei einem rechtwinkligen Dreieck ist $\gamma_3 = \gamma_1$. Die Grenzbedingungen für die γ nehmen dann folgende Gestalt an: $\gamma_1>\gamma_2>\gamma_1(\sqrt{2}-1)$.

Ferner ist: $\gamma_{12} = \gamma_{23} = \delta_{13} = \delta_{23} = 1$, $\gamma_{13} = \gamma_1$ und $g = 2$, wenn γ_1 und γ_2 ungerade Zahlen, dagegen $g = 1$, wenn eine der Zahlen γ_1 und γ_2 gerade ist. Man erhält dann aus den Gleichungen (V):

$$a_1 = (\gamma_1^2+\gamma_2^2) : g,\ a_2 = 2\gamma_1\gamma_2 : g,\ a_3 = (\gamma_1^2-\gamma_2^2) : g,$$
$$\Delta = \gamma_1\gamma_2(\gamma_1^2-\gamma_2^2) : g^2,\ \delta_3 = 1,\ F' = 1,$$
$$\varrho_1 = \gamma_1(\gamma_1+\gamma_2) : g,\ \varrho_2 = \gamma_2(\gamma_1+\gamma_2) : g,\ \varrho_3 = \gamma_1(\gamma_1-\gamma_2) : g,\ \varrho = \gamma_2(\gamma_1-\gamma_2) : g,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} = 1,\ \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = \gamma_2 : \gamma_1,\ \operatorname{tg}\frac{\alpha_3}{2} = (\gamma_1-\gamma_2) : (\gamma_1+\gamma_2).$$

Einige Beispiele sind in Tabelle 3 zusammengestellt.

1) Vergl.: Sachs, Tafeln zum mathematischen Unterricht. Leipzig 1908, p. 120.

B. Gleichschenklige Dreiecke ($a_1 = a_2$). Sind in einem Dreieck die beiden grösseren Seiten einander gleich, so ist $\gamma_2 = \gamma_1$. Als Grenzbedingung erhält man: $\gamma_1 \sqrt{3} > \gamma_3 > \gamma_1$.

Nun ist: $\gamma_{12} = \gamma_1$, $\gamma_{13} = \gamma_{23} = \delta_{13} = \delta_{23} = 1$ und $g = 2$, wenn beide Zahlen γ_1 und γ_3 ungerade sind, dagegen $g = 1$, wenn eine dieser Zahlen gerade ist. Aus den Gleichungen (V) folgt dann:

$$a_1 = a_2 = (\gamma_3^2 + \gamma_1^2) : g,\ a_3 = 2\,(\gamma_3^2 - \gamma_1^2) : g,$$
$$\Delta = 2\gamma_1\gamma_2(\gamma_3^2 - \gamma_1^2) : g^2,\ \delta_3 = \gamma_3,\ F' = \gamma_1\gamma_3,$$
$$\varrho'_1 = \varrho'_2 = 2\gamma_1^2\gamma_3^2 : g,\ \varrho'_3 = \gamma_3^2(\gamma_3^2 - \gamma_1^2) : g,\ \varrho' = \gamma_1^2(\gamma_3^2 - \gamma_1^2) : g,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = \gamma_1 : \gamma_3,\ \operatorname{tg}\frac{\alpha_3}{2} = (\gamma_3^2 - \gamma_1^2) : 2\gamma_1\gamma_3.$$

Die Dreiecke sind immer spitzwinklig.

Beispiele finden sich in Tabelle 4.

C. Gleichschenklige Dreiecke ($a_2 = a_3$). Wenn in einem Dreieck die beiden kleineren Seiten einander gleich sind, so ist $\gamma_3^2 = (2\gamma_1 + \gamma_2)\gamma_2$. Hierzu kommt noch die Grenzbedingung $\gamma_1 > \gamma_2$.

Schreibt man die obige Gleichung in der Form: $\gamma_3(\gamma_3 : \gamma_{23}) = (2\gamma_1 + \gamma_2)(\gamma_2 : \gamma_{23})$, so geht daraus hervor, dass der Faktor $\gamma_2 : \gamma_{23}$ der rechten Seite, der ja zu $\gamma_3 : \gamma_{23}$ teilerfremd ist, ein Teiler von γ_3 sein muss. Es ist also $\gamma_2 : \gamma_{23} = \delta_{23}$. Ferner ergibt sich leicht: $\gamma_{12} = \gamma_{13} = \delta_{13} = 1$ und $g = \gamma_1 + \gamma_2$. Aus den Gleichungen (V) folgt dann:

$$a_1 = 2\gamma_1,\ a_2 = a_3 = \gamma_1 + \gamma_2,$$
$$\Delta = \gamma_1\gamma_3,\ \delta_3 = \gamma_3 : \gamma_{23},\ F' = \gamma_2\gamma_3 : \gamma_{23}^2,$$
$$\varrho'_1 = \gamma_1\gamma_3^2 : \gamma_{23}^2,\ \varrho'_2 = \varrho'_3 = \gamma_2\gamma_3^2 : \gamma_{23}^2,\ \varrho' = \gamma_1\gamma_2^2 : \gamma_{23}^2,$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_1}{2} = \gamma_1 : \gamma_3,\ \operatorname{tg}\frac{\alpha_2}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha_3}{2} = \gamma_2 : \gamma_3.$$

Um nun noch die Zahlen γ zu bestimmen, die der obigen Bedingungsgleichung genügen, mögen die quadratischen Faktoren in γ_2 von den nichtquadratischen gesondert werden, so dass man $\gamma_2 = px^2$ erhält. γ_3 muss dann ebenfalls die Faktoren p und x enthalten und man kann $\gamma_3 = pxy$ setzen. Nun folgt dann aber $\gamma_1 = p(y^2 - x^2) : 2$. Damit nun die drei Grössen γ ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind, müssen erstens x und y teilerfremde Zahlen sein und muss zweitens $p = 2$ sein, wenn eine der Zahlen x und y gerade ist, dagegen $p = 1$ sein, wenn x und y ungerade Zahlen sind.

Da $\gamma_1 > \gamma_2$ sein soll, muss $y > x\sqrt{3}$ sein.

Beispiele solcher Dreiecke bilden die Tabelle 5.

D. Dreiecke, deren Seiten eine arithmetische Reihe bilden. Soll $a_1 - a_2 = a_2 - a_3$ sein, so ist $\gamma_2(3\gamma_1^2 + \gamma_3^2) = 2\gamma_1\gamma_3^2$. Hieraus folgt:

$$\gamma_1 : \gamma_2 : \gamma_3 = \gamma_1(3\gamma_1^2 + \gamma_3^2) : 2\gamma_1\gamma_3^2 : \gamma_3(3\gamma_1^2 + \gamma_3^2).$$

Da gemeinsame Faktoren der drei Grössen γ fortzulassen sind, so erhält man:

$$\gamma_1 = x(3x^2 + y^2) : hk,\ \gamma_2 = 2xy^2 : hk,\ \gamma_3 = y(3x^2 + y^2) : hk,$$

worin x und y teilerfremde ganze Zahlen sind, $h = 2$, wenn x und y ungerade, dagegen $h = 1$ ist, wenn eine dieser Zahlen gerade ist, und $k = 3$, wenn y den Faktor 3 hat, aber $k = 1$ ist, wenn y nicht durch 3 teilbar ist. Die Grenzbedingungen für die γ ergeben dann noch: $x\sqrt{3} > y$.

In Tabelle 6 sind für eine Reihe von Werten der Zahlen x und y die Grössen γ berechnet. Die anderen Stücke dieser Dreiecke finden sich dann in Tabelle 2 mit Ausnahme des einzigen hierher gehörigen rechtwinkligen Dreiecks mit den Seiten 5, 4, 3, das in Tabelle 3 angeführt ist.

Tabelle 1. Ganzzahlige ϱ.

$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\varkappa_3$	q	f	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ
1	1	1	3	1	3	3	3	1
2	1	1	5	1	10	5	5	2
2	2	1	8	4	4	4	2	1
3	1	1	7	1	21	7	7	3
3	2	1	11	1	33	22	11	6
3	2	2	16	4	12	8	8	3
3	3	1	15	3	15	15	5	3
3	3	2	21	3	21	21	14	6
5	3	2	31	1	155	93	62	30
15	10	6	300	300	15	10	6	3
42	7	3	441	441	42	7	3	2
105	30	14	5040	1260	420	120	56	35

Tabelle 2. Ungleichseitige schiefwinklige Dreiecke.

γ_1	γ_2	γ_3	a_1	a_2	a_3	Δ	F′	ϱ'_1	ϱ'_2	ϱ'_3	ϱ'
3	1	2	15	13	4	24	2	48	16	4	3
4	2	3	26	25	3	36	6	216	108	9	8
4	3	5	136	123	91	5460	5	700	525	325	156
5	1	3	25	17	12	90	3	135	27	18	10
5	2	4	50	41	21	420	2	140	56	24	15
5	3	4	125	123	8	480	4	640	384	16	15
5	3	6	75	61	56	1680	2	160	96	84	35
5	4	6	65	61	36	1080	6	405	324	144	80
5	4	7	325	296	261	36540	7	2205	1764	1421	580
6	1	3	20	15	7	42	1	42	7	3	2
6	2	5	87	61	52	1560	10	1200	400	325	156
6	3	5	68	61	21	630	15	1350	675	175	126
6	4	5	123	122	5	300	10	1500	1000	25	24
6	4	7	39	34	25	420	14	588	392	245	120
6	5	7	444	425	209	43890	7	3234	2695	931	570
6	5	8	267	250	187	22440	4	1056	880	544	255
6	5	9	212	195	187	16830	3	594	495	459	170
7	1	3	35	29	8	84	3	252	36	9	7
7	2	4	70	65	9	252	2	252	72	8	7
7	2	5	203	148	99	6930	5	1575	450	275	154
7	3	5	119	111	20	1050	5	875	375	50	42
7	3	6	21	17	10	84	2	56	24	12	7
7	4	6	91	85	22	924	6	693	396	72	56
7	4	8	140	113	99	5544	2	308	176	144	63
7	5	6	427	425	12	2520	6	3024	2160	36	35
7	5	8	623	565	348	97440	8	5376	3840	1856	1015
7	5	9	371	325	276	43470	9	3402	2430	1863	805
7	6	8	350	339	143	24024	4	1456	1248	352	231
7	6	9	21	20	13	126	3	63	54	27	14
7	6	10	476	447	377	79170	5	2275	1950	1450	609
8	1	3	80	73	9	216	3	648	81	9	8
8	1	4	17	10	9	36	2	72	9	8	4
8	3	6	30	25	11	132	2	88	33	12	8
8	5	10	50	41	39	780	2	104	65	60	24
9	2	6	20	13	11	66	3	99	22	18	9
9	3	7	87	65	44	1386	21	2646	882	539	297
9	4	7	45	40	13	252	7	441	196	49	36

Tabelle 2. (Fortsetzung.)

γ_1	γ_2	γ_3	a_1	a_2	a_3	Δ	F′	ϱ'_1	ϱ'_2	ϱ'_3	ϱ'
9	6	8	30	29	5	72	12	432	288	32	27
9	8	12	26	25	17	204	6	153	136	72	36
10	1	4	85	58	33	660	2	440	44	24	15
10	2	5	29	25	6	60	2	120	24	5	4
10	3	6	75	68	13	390	1	130	39	6	5
10	5	8	89	82	21	840	20	2400	1200	224	175
10	7	11	100	91	51	2310	11	1210	847	363	210
10	9	15	68	65	57	1710	3	190	171	135	54
11	4	8	44	37	15	264	2	132	48	16	11
11	6	10	44	39	17	330	5	275	150	50	33
11	9	12	55	53	20	528	12	704	576	144	99
12	1	4	51	40	13	156	1	156	13	4	3
12	3	8	73	52	35	840	6	720	180	112	63
12	4	9	97	75	44	1584	12	1728	576	297	176
12	5	10	75	61	34	1020	2	204	85	40	24
13	2	6	52	41	15	234	3	351	54	18	13
13	7	14	91	73	60	2184	2	208	112	84	39
13	12	16	52	51	25	624	4	208	192	64	39
14	2	7	53	35	24	336	2	224	32	21	12
14	12	21	15	14	13	84	2	28	24	21	8
15	1	5	39	25	16	120	1	120	8	5	3
15	2	6	100	87	17	510	1	255	34	6	5
15	4	10	87	65	38	1140	2	285	76	40	24
15	5	9	53	51	4	90	15	1350	450	27	25
15	6	10	68	65	7	210	3	315	126	10	9
16	3	8	73	60	19	456	2	304	57	16	12
16	5	10	100	89	21	840	2	336	105	20	16
16	9	18	36	29	25	360	2	80	45	36	16
16	10	15	40	37	13	240	6	288	180	45	32
16	13	18	68	65	29	936	18	1296	1053	324	208
17	3	9	51	37	29	306	3	306	54	27	17
18	1	6	37	20	19	114	3	342	19	18	9
18	4	9	97	90	11	396	2	396	88	9	8
18	7	14	63	52	25	630	1	90	35	14	9
18	10	15	65	61	14	420	6	504	280	45	36
18	14	21	91	85	48	2016	6	576	448	189	108
18	16	21	41	40	17	336	42	1764	1568	441	288
19	15	25	95	87	68	2850	5	475	375	250	114
20	19	30	97	95	78	3420	6	540	513	360	152
21	4	12	56	39	25	420	1	105	20	12	7
21	5	14	51	35	26	420	2	168	40	28	15
21	14	18	52	51	5	126	21	1323	882	54	49
22	3	11	52	33	25	330	1	110	15	11	6
23	6	14	92	75	29	966	7	1127	294	98	69
23	6	15	69	52	29	690	5	575	150	75	46
23	16	24	92	85	39	1656	6	621	432	144	92
24	1	6	74	51	25	300	2	600	25	12	8
24	11	22	66	53	35	924	2	168	77	44	24
24	17	30	58	51	41	1020	10	600	425	300	136
24	21	28	35	34	15	252	6	216	189	56	36
25	2	10	52	29	27	270	5	675	54	50	25
25	6	15	87	68	31	930	5	775	186	75	50
25	8	20	58	41	33	660	10	825	264	200	100
25	18	30	68	61	43	1290	15	1075	774	450	225
26	4	13	37	26	15	156	2	156	24	13	8
27	2	9	85	60	29	522	3	783	58	27	18
27	5	15	75	53	32	720	3	432	80	45	27

Tabelle 2. (Fortsetzung.)

γ_1	γ_2	γ_3	a_1	a_2	a_3	Δ	F′	ϱ'_1	ϱ'_2	ϱ'_3	ϱ'
27	8	18	97	78	35	1260	6	945	280	108	72
27	23	36	73	69	50	1656	12	864	736	432	207
27	24	28	90	89	17	756	42	3969	3528	392	324
28	7	16	61	52	15	336	28	3136	784	192	147
28	9	20	91	72	37	1260	5	700	225	100	63
28	12	21	39	35	10	168	4	224	96	21	16
30	9	20	37	30	13	180	6	360	108	40	27
30	11	24	85	66	41	1320	4	480	176	96	55
30	21	35	28	25	17	210	3	90	63	35	18
30	22	33	55	51	26	660	2	120	88	33	20
31	3	12	93	65	34	744	4	992	96	48	31
32	1	8	65	34	33	264	4	1056	33	32	16
32	2	9	80	65	17	288	18	5184	324	81	64
32	9	24	73	50	41	984	12	1312	369	288	144
32	25	40	89	82	57	2280	20	1824	1425	800	400
33	2	11	75	44	35	462	1	231	14	11	6
33	3	11	65	55	12	198	3	594	54	11	9
33	7	21	77	51	40	924	1	132	28	21	11
33	20	36	88	75	53	1980	3	297	180	108	55
33	32	48	88	87	65	2640	2	165	160	96	44
34	6	17	65	51	20	408	2	272	48	17	12
35	26	42	100	91	61	2730	3	315	234	126	65
35	33	55	77	75	68	2310	1	70	66	55	21
36	14	27	74	63	25	756	6	648	252	81	56
38	1	8	95	58	39	456	4	1824	48	32	19
38	3	14	95	60	41	798	7	1862	147	98	57
39	3	13	89	65	28	546	3	819	63	26	18
39	36	52	40	39	25	468	3	117	108	52	27
42	3	14	41	28	15	126	3	378	27	14	9
42	33	44	77	74	25	924	6	504	396	88	63
45	44	72	100	99	89	3960	2	180	176	144	55
49	2	14	100	53	51	714	7	2499	102	98	49
52	18	39	82	65	35	1092	6	728	252	117	72
54	50	75	75	73	52	1800	6	432	400	225	108
63	24	56	48	35	29	504	3	189	72	56	27
70	15	42	39	29	17	210	5	350	75	42	25
75	36	80	52	39	37	720	60	3600	1728	1600	675
76	24	57	51	38	25	456	4	304	96	57	32
77	42	66	60	55	17	462	7	539	294	66	49
78	75	130	53	52	51	1170	15	702	675	650	225
84	80	105	85	84	41	1680	4	336	320	105	64
93	24	62	85	62	39	1116	6	837	216	124	72
99	3	22	87	55	34	396	6	2376	72	44	27
105	80	112	96	91	37	1680	5	525	400	112	75
129	96	172	97	86	75	3096	12	1161	864	688	288
138	45	115	100	69	61	2070	3	414	135	115	54
182	21	78	75	52	29	546	7	1274	147	78	49
185	120	222	87	74	61	2220	10	925	600	444	200
196	8	49	145	98	51	1176	4	2352	96	49	32
266	189	342	87	76	65	2394	21	1862	1323	1026	441
280	7	60	89	50	41	420	42	17640	441	360	196
292	200	365	169	146	123	8760	20	3504	2400	1825	800
427	168	366	159	122	85	5124	14	2989	1176	732	392

Tabelle 3. Rechtwinklige Dreiecke.

γ_1 (γ_3)	γ_2	a_1	a_2	a_3	Δ	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ
2	1	5	4	3	6	6	3	2	1
3	2	13	12	5	30	15	10	3	2
4	3	25	24	7	84	28	21	4	3
5	3	17	15	8	60	20	12	5	3
5	4	41	40	9	180	45	36	5	4
6	5	61	60	11	330	66	55	6	5
7	3	29	21	20	210	35	15	14	6
7	4	65	56	33	924	77	44	21	12
7	5	37	35	12	210	42	30	7	5
7	6	85	84	13	546	91	78	7	6
8	5	89	80	39	1560	104	65	24	15
8	7	113	112	15	840	120	105	8	7

Tabelle 4. Gleichschenklige Dreiecke ($a_1 = a_2$).

γ_1 (γ_2)	γ_3	a_1 (a_2)	a_3	Δ	F′	ϱ'_1 (ϱ'_2)	ϱ'_3	ϱ'
2	3	13	10	60	6	72	45	20
3	4	25	14	168	12	288	112	63
3	5	17	16	120	15	225	200	72
4	5	41	18	360	20	800	225	144
5	6	61	22	660	30	1800	396	275
5	7	37	24	420	35	1225	588	300
5	8	89	78	3120	40	3200	2496	975
6	7	85	26	1092	42	3528	637	468
7	8	113	30	1680	56	6272	960	735
7	9	65	32	1008	63	3969	1296	784
7	10	149	102	7140	70	9800	5100	2499
7	11	85	72	2772	77	5929	4356	1764
7	12	193	190	15960	84	14112	13680	4655

Tabelle 5. Gleichschenklige Dreiecke ($a_2 = a_3$).

x	y	γ_1	γ_2	γ_3	a_1	a_2 (a_3)	Δ	F′	ϱ'_1	ϱ'_2 (ϱ'_3)	ϱ'
1	2	3	2	4	6	5	12	2	12	8	3
1	3	4	1	3	8	5	12	3	36	9	4
1	4	15	2	8	30	17	120	4	240	32	15
1	5	12	1	5	24	13	60	5	300	25	12
2	5	21	8	20	42	29	420	10	525	200	84
1	6	35	2	12	70	37	420	6	1260	72	35
1	7	24	1	7	48	25	168	7	1176	49	24
2	7	45	8	28	90	53	1260	14	2205	392	180
3	7	20	9	21	40	29	420	21	980	441	180
4	7	33	32	56	66	65	1848	28	1617	1568	528
1	8	63	2	16	126	65	1008	8	4032	128	63
3	8	55	18	48	110	73	2640	24	3520	1152	495

Tabelle 2. (Fortsetzun

γ_1	γ_2	γ_3	a_1	a_2	a_3	Δ	F'
27	8	18	97	78	35	1260	6
27	23	36	73	69	50	1656	12
27	24	28	90	89	17	756	42
28	7	16	61	52	15	336	28
28	9	20	91	72	37	1260	5
28	12	21	39	35	10	168	4
30	9	20	37	30	13	180	6
30	11	24	85	66	41	1320	4
30	21	35	28	25	17	210	3
30	22	33	55	51	26	660	2
31	3	12	93	65	34	744	4
32	1	8	65	34	33	264	4
32	2	9	80	65	17	288	18
32	9	24	73	50	41	984	12
32	25	40	89	82	57	2280	20
33	2	11	75	44	35	462	1
33	3	11	65	55	12	198	3
33	7	21	77	51	40	924	1
33	20	36	88	75	53	1980	3
33	32	48	88	87	65	2640	2
34	6	17	65	51	20	408	2
35	26	42	100	91	61	2730	3
35	33	55	77	75	68	2310	1
36	14	27	74	63	25	756	6
38	1	8	95	58	39	456	4
38	3	14	95	60	41	798	7
39	3	13	89	65	28	546	3
39	36	52	40	39	25	468	3
42	3	14	41	28	15	126	3
42	33	44	77	74	25	924	6
45	44	72	100	99	89	3960	2
49	2	14	100	53	51	714	7
52	18	39	82	65	35	1092	6
54	50	75	75	73	52	1800	6
63	24	56	48	35	29	504	3
70	15	42	39	29	17	210	5
75	36	80	52	39	37	720	60
76	24	57	51	38	25	456	4
77	42	66	60	55	17	462	7
78	75	130	53	52	51	1170	15
84	80	105	85	84	41	1680	4
93	24	62	85	62	39	1116	6
99	3	22	87	55	34	396	6
105	80	112	96	91	37	1680	5
129	96	172	97	86	75	3096	12
138	45	115	100	69	61	2070	3
182	21	78	75	52	29	546	7
185	120	222	87	74	61	2220	10
196	8	49	145	98	51	1176	4
266	189	342	87	76	65	2394	21
280	7	60	89	50	41	420	42
292	200	365	169	146	123	8760	20
427	168	366	159	122	85	5124	14

…3. Rechtwinklige Dreiecke.

a_2	a_3	Δ	ϱ_1	ϱ_2	ϱ_3	ϱ
4	3	6	6	3	2	1
12	5	30	15	10	3	2
24	7	84	28	21	4	3
15	8	60	20	12	5	3
40	9	180	45	36	5	4
60	11	330	66	55	6	5
21	20	210	35	15	14	6
56	33	924	77	44	21	12
35	12	210	42	30	7	5
84	13	546	91	78	7	6
80	39	1560	104	65	24	15
112	15	840	120	105	8	7

…leichschenklige Dreiecke ($a_1 = a_2$).

a_3	Δ	F'	$\varrho'_1(\varrho'_2)$	ϱ'_3	ϱ'
10	60	6	72	45	20
14	168	12	288	112	63
16	120	15	225	200	72
18	360	20	800	225	144
22	660	30	1800	396	275
24	420	35	1225	588	300
78	3120	40	3200	2496	975
26	1092	42	3528	637	468
30	1680	56	6272	960	735
32	1008	63	3969	1296	784
102	7140	70	9800	5100	2499
72	2772	77	5929	4356	1764
190	15960	84	14112	13680	4655

…Gleichschenklige Dreiecke ($a_2 = a_3$).

γ_3	a_1	$a_2(a_3)$	Δ	F'	ϱ'_1	$\varrho'_2(\varrho'_3)$	ϱ'
4	6	5	12	2	12	8	3
3	8	5	12	3	36	9	4
8	30	17	120	4	240	32	15
5	24	13	60	5	300	25	12
20	42	29	420	10	525	200	84
12	70	37	420	6	1260	72	35
7	48	25	168	7	1176	49	24
28	90	53	1260	14	2205	392	180
21	40	29	420	21	980	441	180
56	66	65	1848	28	1617	1568	528
16	126	65	1008	8	4032	128	63
48	110	73	2640	24	3520	1152	495

Tabelle 6. $a_1 - a_2 = a_2 - a_3$.

x	y	γ_1	γ_2	γ_3
1	1	2	1	2
2	1	26	4	13
2	3	14	12	21
3	1	42	3	14
3	2	93	24	62
3	4	129	96	172
3	5	78	75	130
4	1	196	8	49
4	3	76	24	57
4	5	292	200	365
5	3	70	15	42
5	6	185	120	222
7	3	182	21	78
7	6	427	168	366
7	9	266	189	342

Hartungsche Buchdruckerei, Königsberg i. Pr.