

Zusammenstellung des mathematischen Lehrstoffes

für die

untere und die mittlere Stufe des Realgymnasiums.

Von

Benno Hecht.

Beilage zum Jahresbericht des Städt. Realgymnasiums. Ostern 1903.

Königsberg 1903.

Hartungsche Buchdruckerei.

1903. Progr.-Nr. 18.



9K0
29 (1903)



Die folgende Zusammenstellung ist für die Hand des Schülers bestimmt und bietet demselben in knapper übersichtlicher Form nur den mathematischen Lehrstoff, welcher in seinen sicheren geistigen Besitz übergehen soll. Alles die Methode des Unterrichts Betreffende ist daher fortgelassen. Nur die an unserer Anstalt benutzte österreichische Rechenmethode ist in Nr. 1 bis 4 an einer Reihe von Beispielen ausführlicher erläutert, weil dieselbe noch nicht die allgemein übliche ist.

Die eingefügten Rechen- und arithmetischen Aufgaben vertreten immer ganze Gruppen. In der Geometrie sind nur solche Aufgaben angeführt, deren Lösung jedem Schüler zu jeder Zeit gegenwärtig sein soll (Fundamentalaufgaben).

Der Stoff ist an unserer Anstalt in folgender Weise auf die einzelnen Klassen verteilt:

Sexta: 1 bis 44.

Quinta: 45 bis 67.

Quarta: 68 bis 81, 201 bis 234.

Untertertia: 82 bis 133, 235 bis 265.

Obertertia: 134 bis 180, 266 bis 283.

Untersekunda: 181 bis 200, 284 bis 316.

A. Rechnen und Arithmetik.

I. Rechnen mit unbenannten ganzen Zahlen.

1. Addieren. Rechenzeichen: +, plus. Summanden oder Glieder; Summe.

Beispiel:*)

$$\begin{array}{r} 3729 \\ + 240826 \\ + 91743 \\ \hline 336298 \end{array}$$

$9 + 6 = 15$, $15 + 3 = 18$, 1 gemerkt, $1 + 2 = 3$, $3 + 2 = 5$,
 $5 + 4 = 9$, $7 + 8 = 15$, $15 + 7 = 22$, 2 gemerkt, $2 + 3 = 5$,
 $5 + 1 = 6$, $4 + 9 = 13$, 1 gemerkt, $1 + 2 = 3$.

*) In diesem und den folgenden Beispielen wird beim Rechnen die fett gedruckte Ziffer geschrieben.

2. Subtrahieren. Rechenzeichen: —, minus. Minuendus und Subtrahendus; Differenz.

Beispiele: a)
$$\begin{array}{r} 5829 \\ - 1503 \\ \hline 4326 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 73421 \\ - 45283 \\ \hline 28138 \end{array}$$

c)
$$\begin{array}{r} 68273 \\ - 1568 \\ - 43092 \\ - 7254 \\ \hline 16359 \end{array}$$

d)
$$\begin{array}{r} 4129 \\ - 278 \\ - 278 \\ - 278 \\ - 278 \\ \hline 3017 \end{array}$$

e)
$$\begin{array}{r} 4129 \\ - 4 \cdot 278 \\ \hline 3017 \end{array}$$

- a) $3 + 6 = 9, 0 + 2 = 2, 5 + 3 = 8, 1 + 4 = 5.$
b) $3 + 8 = 11, 1$ gemerkt, $1 + 8 = 9, 9 + 3 = 12, 1$ gemerkt, $1 + 2 = 3, 3 + 1 = 4, 5 + 8 = 13, 1$ gemerkt, $1 + 4 = 5, 5 + 2 = 7.$
c) $8 + 2 + 4 = 14, 14 + 9 = 23, 2$ gemerkt, $2 + 6 + 9 + 5 = 22, 22 + 5 = 27, 2$ gemerkt, $2 + 5 + 2 = 9, 9 + 3 = 12, 1$ gemerkt, $1 + 1 + 3 + 7 = 12, 12 + 6 = 18, 1$ gemerkt, $1 + 4 = 5, 5 + 1 = 6.$
d) $8 + 8 + 8 + 8 = 32, 32 + 7 = 39, 3$ gemerkt, $3 + 7 + 7 + 7 + 7 = 31, 31 + 1 = 32, 3$ gemerkt, $3 + 2 + 2 + 2 + 2 = 11, 11 + 0 = 11, 1$ gemerkt, $1 + 3 = 4.$
d) und e) $4 \cdot 8 = 32, 32 + 7 = 39, 3$ gemerkt, $4 \cdot 7 = 28, 28 + 3 = 31, 31 + 1 = 32, 3$ gemerkt, $4 \cdot 2 = 8, 8 + 3 = 11, 11 + 0 = 11, 1$ gemerkt, $1 + 3 = 4.$

3. Multiplizieren. Rechenzeichen: ·, mal. Faktoren oder Multiplikandus und Multiplikator; Produkt.

Beispiele: a)
$$\begin{array}{r} 6529 \\ \quad 253 \\ \hline 13058 \\ \quad 32645 \\ \quad 19587 \\ \hline 1651837 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 4783 \\ \quad 9021 \\ \hline 43047 \\ \quad 9566 \\ \quad 7483 \\ \hline 43150143 \end{array}$$

4. Dividieren. Rechenzeichen: :, dividiert durch. Dividendus und Divisor; Quotient.

Beispiele:

a)
$$\begin{array}{r} 43150143 : 4783 = 9021 \\ - 9 \cdot 4783 \\ \hline 10314 \\ - 2 \cdot 4783 \\ \hline 7483 \\ - 1 \cdot 4783 \\ \hline 0000 \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{r} 43150143 : 4783 = 9021 \\ \quad 10314 \\ \quad 7483 \\ \quad 0000 \end{array}$$

a) und b) $43150 : 4783 = 9$, $9 \cdot 3 = 27$, $27 + 3 = 30$, 3 gemerkt,
 $9 \cdot 8 = 72$, $72 + 3 = 75$, $75 + 0 = 75$, 7 gemerkt, $9 \cdot 7$
 $= 63$, $63 + 7 = 70$, $70 + 1 = 71$, 7 gemerkt, $9 \cdot 4 = 36$,
 $36 + 7 = 43$, $43 + 0 = 43$.

1031 : 4783 = 0.

10314 : 4783 = 2, $2 \cdot 3 = 6$, $6 + 8 = 14$, 1 gemerkt, $2 \cdot 8 = 16$,
 $16 + 1 = 17$, $17 + 4 = 21$, 2 gemerkt, $2 \cdot 7 = 14$, $14 + 2$
 $= 16$, $16 + 7 = 23$, 2 gemerkt, $2 \cdot 4 = 8$, $8 + 2 = 10$,
 $10 + 0 = 10$.

7483 : 7483 = 1, $1 \cdot 3 = 3$, $3 + 0 = 3$, $1 \cdot 8 = 8$, $8 + 0 = 8$,
 $1 \cdot 4 = 4$, $4 + 0 = 4$, $1 \cdot 7 = 7$, $7 + 0 = 7$.

5. Es gibt zwei Arten des Dividierens, das **Teilen** und das **Messen**.

Bei dem Teilen wird der Dividendus in so viele gleiche Teile geteilt, als der Divisor angibt.

Bei dem Messen wird berechnet, wie oft der Divisor in dem Dividendus enthalten ist.

6. Addieren und Subtrahieren sind Rechnungen **erster Stufe**. Multiplizieren und Dividieren sind Rechnungen **zweiter Stufe**.

7. Eine Aufgabe wird in eine **Klammer** eingeschlossen, wenn mit ihrem Resultat eine weitere Rechnung vorgenommen werden soll. Diese Klammer wird indessen **fortgelassen**,

- a) wenn von zwei Rechnungen derselben Stufe die voranstehende zuerst ausgeführt werden soll;
- b) wenn von zwei Rechnungen verschiedener Stufe die Rechnung höherer Stufe zuerst ausgeführt werden soll.

Beispiele:

$13 - 7 + 2 = 6 + 2 = 8$	$2 \cdot 3 + 4 = 6 + 4 = 10$	$8 + 2 \cdot 7 = 8 + 14 = 22$
$13 - (7 + 2) = 13 - 9 = 4$	$2 \cdot (3 + 4) = 2 \cdot 7 = 14$	$(8 + 2) \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70$
$60 : 6 \cdot 5 = 10 \cdot 5 = 50$	$5 \cdot 8 - 2 = 40 - 2 = 38$	$20 - 3 \cdot 5 = 20 - 15 = 5$
$60 : (6 \cdot 5) = 60 : 30 = 2$	$5 \cdot (8 - 2) = 5 \cdot 6 = 30$	$(20 - 3) \cdot 5 = 17 \cdot 5 = 85$
$3 \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 6 + 4 \cdot 7 = 6 + 28 = 34$	$17 - [9 - (5 - 3)] = 17 - [9 - 2] = 17 - 7 = 10$	$17 - (9 - 5 - 3) = 17 - (4 - 3) = 17 - 1 = 16$
$3 \cdot (2 + 4) \cdot 7 = 3 \cdot 6 \cdot 7 = 18 \cdot 7 = 126$	$17 - 9 - (5 - 3) = 8 - (5 - 3) = 8 - 2 = 6$	$17 - (9 - 5) - 3 = 17 - 4 - 3 = 13 - 3 = 10$
$(3 \cdot 2 + 4) \cdot 7 = (6 + 4) \cdot 7 = 10 \cdot 7 = 70$	$17 - 9 - 5 - 3 = 8 - 5 - 3 = 3 - 3 = 0$	
$3 \cdot (2 + 4 \cdot 7) = 3 \cdot (2 + 28) = 3 \cdot 30 = 90$		
$40 : 5 + 6 : 2 = 8 + 6 : 2 = 8 + 3 = 11$		
$(40 : 5 + 6) : 2 = (8 + 6) : 2 = 14 : 2 = 7$		

II. Rechnen mit benannten ganzen Zahlen.

8. **Münzen:** Mark, M. Pfennig, Pf.

$$1 \text{ M} = 100 \text{ Pf.}$$

9. **Längenmasse:** Kilometer, km. Meter, m. (Dezimeter, dm). Zentimeter, cm. Millimeter, mm.

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m} = 100000 \text{ cm} = 1000000 \text{ mm.}$$

$$1 \text{ m} = 100 \text{ cm} = 1000 \text{ mm.}$$

$$1 \text{ cm} = 10 \text{ mm.}$$

$$1 \text{ Meile} = 7500 \text{ m.}$$

10. Flächenmasse: Quadratkilometer, qkm. Hektar, ha. Ar, a. Quadratmeter, qm. Quadratzentimeter, qcm. Quadratmillimeter, qmm.

$$\begin{aligned} 1 \text{ qkm} &= 100 \text{ ha} = 10000 \text{ a} = 1000000 \text{ qm} = 10000000000 \text{ qcm} \\ &= 1000000000000 \text{ qmm.} \\ 1 \text{ ha} &= 100 \text{ a} = 10000 \text{ qm} = 100000000 \text{ qcm} = 10000000000 \text{ qmm.} \\ 1 \text{ a} &= 100 \text{ qm} = 1000000 \text{ qcm} = 100000000 \text{ qmm.} \\ 1 \text{ qm} &= 10000 \text{ qcm} = 1000000 \text{ qmm.} \\ 1 \text{ qcm} &= 100 \text{ qmm.} \end{aligned}$$

11. Körpermasse: Kubikmeter, cbm. (Kubikdezimeter oder) Liter, l. Kubikzentimeter, ccm. Kubikmillimeter, cmm.

$$\begin{aligned} 1 \text{ cbm} &= 1000 \text{ l} = 1000000 \text{ ccm} = 1000000000 \text{ cmm.} \\ 1 \text{ l} &= 1000 \text{ ccm} = 1000000 \text{ cmm.} \\ 1 \text{ ccm} &= 1000 \text{ cmm.} \end{aligned}$$

$$1 \text{ Hektoliter (hl)} = 100 \text{ l. } 1 \text{ Scheffel} = 50 \text{ l.}$$

12. Zeitmasse. 1 Jahr = 12 Monaten oder = 365 Tagen.

$$1 \text{ Schaltjahr} = 366 \text{ Tagen.}$$

$$1 \text{ Tag} = 24 \text{ Stunden.}$$

$$1 \text{ Stunde} = 60 \text{ Minuten.}$$

$$1 \text{ Minute} = 60 \text{ Sekunden.}$$

13. Andere Masse. 1 Gros = 12 Dutzend = 144 Stück.

$$1 \text{ Dutzend} = 12 \text{ Stück.}$$

$$1 \text{ Schock} = 4 \text{ Mandel} = 60 \text{ Stück.}$$

$$1 \text{ Mandel} = 15 \text{ Stück.}$$

14. Gewichte. Tonne, t. Kilogramm, kg. Gramm, g. Milligramm, mg.

$$1 \text{ t} = 1000 \text{ kg} = 1000000 \text{ g} = 1000000000 \text{ mg.}$$

$$1 \text{ kg} = 1000 \text{ g} = 1000000 \text{ mg.}$$

$$1 \text{ g} = 1000 \text{ mg.}$$

1 cbm Wasser wiegt 1 t, 1 l Wasser wiegt 1 kg, 1 ccm Wasser wiegt 1 g, 1 cmm Wasser wiegt 1 mg.

$$1 \text{ Pfund} = 500 \text{ g.}$$

$$1 \text{ Centner} = 100 \text{ Pfund} = 50 \text{ kg.}$$

15. Bei Nr. 8 bis 11 und Nr. 14 kann man die **dezimale Schreibweise** anwenden. Es ist dann:

$$85,37 \text{ M} = 85 \text{ M } 37 \text{ Pf.}; 4,60 \text{ m} = 4 \text{ m } 60 \text{ cm};$$

$$0,30 \text{ M} = 30 \text{ Pf.}; 5,02 \text{ m} = 5 \text{ m } 2 \text{ cm};$$

$$6,02 \text{ M} = 6 \text{ M } 2 \text{ Pf.}; 0,01 \text{ m} = 1 \text{ cm};$$

$$7,060 \text{ m} = 7 \text{ m } 60 \text{ mm}; 1,513 \text{ kg} = 1 \text{ kg } 513 \text{ g};$$

$$0,785 \text{ m} = 785 \text{ mm}; 9,024 \text{ kg} = 9 \text{ kg } 24 \text{ g};$$

$$57,860 \text{ m} = 57 \text{ m } 860 \text{ mm}; 5,700 \text{ kg} = 5 \text{ kg } 700 \text{ g.}$$

16. Aufg. 12 ha 67 a 85 qm in qm zu verwandeln. (= 126785 qm.)

17. Aufg. 395866 Sekunden in Tage, Stunden, Minuten und Sekunden zu verwandeln. (= 4 Tage 13 Stunden 57 Minuten 46 Sekunden.)

18. Aufg. 27 cbm 568 l 4 ccm + 9 cbm 13 l 809 ccm
+ 35 cbm 784 l 496 ccm = 72 cbm 366 l 309 ccm.

19. Aufg. 746 t 99 kg 127 g — 89 t 853 kg 87 g = 656 t
246 kg 40 g.

20. Aufg. 18 Schock 3 Mandel 11 Stück · 29 = 549 Schock
4 Stück.

21. Aufg. 873 km 495 m : 63 = 13 km 865 m.

22. Aufg. 1260 M 77 Pf. : 25 M 73 Pf. = 49.

23. Schluss von der Einheit auf eine Mehrheit.

1 kg kostet 8 M 25 Pf.

7 kg kosten 8 M 25 Pf. · 7 = 57 M 75 Pf.

24. Schluss von einer Mehrheit auf die Einheit.

Für 26 M erhält man 19 m 50 cm,

für 1 M erhält man 19 m 50 cm : 26 = 75 cm.

III. Teilbarkeit der Zahlen.

25. Eine Zahl ist **durch 2 ohne Rest teilbar**, wenn ihre letzte Ziffer eine 2, 4, 6, 8 oder 0 ist. Solche Zahlen heissen gerade Zahlen.

26. Eine Zahl ist **durch 5 ohne Rest teilbar**, wenn ihre letzte Ziffer eine 5 oder 0 ist.

27. Man bildet die **Quersumme** einer Zahl, indem man die Ziffern derselben addiert.

28. Eine Zahl ist **durch 3 ohne Rest teilbar**, wenn ihre Quersumme durch 3 ohne Rest teilbar ist.

29. Eine Zahl, welche durch keine andere ohne Rest teilbar ist, heisst eine **Primzahl**.

30. Jede Zahl, welche keine Primzahl ist, kann **in ein Produkt** von lauter Primzahlen **verwandelt** werden. $72 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

IV. Rechnen mit gemeinen Brüchen.

31. Der Bruch $\frac{4}{7}$ entsteht, wenn man ein Ganzes in 7 gleiche Teile teilt und 4 solche Teile zusammen nimmt.

32. Die Zahl 7 bestimmt den **Namen** der einzelnen Teile, **Siebentel**, und heisst **Denner**.

33. Die Zahl 4 gibt die **Anzahl der Teile** an, welche zusammen genommen werden, und heisst **Zähler**.

34. Beide Zahlen werden durch den **Bruchstrich** (wagerecht!) getrennt.

35. Der Bruch $\frac{4}{7}$ entsteht auch, wenn man 4 Ganze in 7 gleiche Teile teilt.

Man kann daher den Bruchstrich auch „**dividiert durch**“ lesen

und in gleicher Bedeutung gebrauchen, wie das Divisionszeichen (:).

$$\frac{15}{4} = 15 : 4.$$

36. Bei einem **echten** Bruch ist der Zähler kleiner als der Nenner.

37. Bei einem **unechten** Bruch ist der Zähler gleich dem Nenner oder grösser als derselbe. $\frac{8}{8}, \frac{9}{5}$.

38. Eine **gemischte Zahl** besteht aus Ganzen und einem echten Bruch. $6\frac{2}{3}$.

39. Ein unechter Bruch kann in Ganze oder in eine **gemischte Zahl verwandelt** werden. $\frac{24}{6} = 4, \frac{19}{8} = 2\frac{3}{8}$.

40. Eine gemischte Zahl kann **eingerrichtet**, d. h. in einen unechten Bruch verwandelt werden. $7\frac{1}{5} = \frac{36}{5}$.

41. Man **erweitert** einen Bruch, indem man seinen Zähler und seinen Nenner mit derselben Zahl multipliziert. Er ändert dadurch seinen Wert nicht. $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$.

42. Man **kürzt** oder **hebt** einen Bruch, indem man seinen Zähler und seinen Nenner durch dieselbe Zahl dividiert. Er ändert dadurch seinen Wert nicht. $\frac{15}{35} = \frac{3}{7}$.

43. Nach No. 25 bis 28 kann man bestimmen, ob ein Bruch durch 2, 3 oder 5 zu kürzen ist.

44. Um zu bestimmen, ob und durch welche Zahlen sonst noch ein Bruch gekürzt werden kann, bedient man sich der **Ketten-division**. Wenn dieselbe bis zu dem Reste 0 durchgeführt wird, gibt der letzte Divisor die grösste Zahl an, durch welche der Bruch zu kürzen ist. Ist dieser Divisor gleich 1, so lässt der Bruch sich nicht kürzen.

Beispiele:

$$a) \frac{29869}{56287} = \frac{251}{473}$$

$\begin{array}{r} 56287 : 29869 = 1 \\ \underline{26418} \end{array}$	$\begin{array}{r} 2261 : 1190 = 1 \\ \underline{1071} \end{array}$	$\begin{array}{r} 29869 : 119 = 251 \\ \underline{606} \\ 119 \\ \underline{0} \end{array}$
$\begin{array}{r} 29869 : 26418 = 1 \\ \underline{3451} \end{array}$	$\begin{array}{r} 1190 : 1071 = 1 \\ \underline{119} \end{array}$	$\begin{array}{r} 56287 : 119 = 473 \\ \underline{868} \\ 357 \\ \underline{0} \end{array}$
$\begin{array}{r} 26418 : 3451 = 7 \\ \underline{2261} \end{array}$	$\begin{array}{r} 1071 : 119 = 9 \\ \underline{0} \end{array}$	
$\begin{array}{r} 3451 : 2261 = 1 \\ \underline{1190} \end{array}$		

b) $\frac{137}{257}$

$$\frac{257 : 137 = 1}{120} \quad \left| \quad \frac{137 : 120 = 1}{17} \quad \left| \quad \frac{120 : 17 = 7}{1} \quad \left| \quad \frac{17 : 1 = 17}{0} \right. \right. \right.$$

Der erste Bruch ist durch 119 zu kürzen, der zweite lässt sich nicht kürzen.

45. Brüche heissen **gleichnamig**, wenn sie gleiche Nenner haben.

46. Brüche, deren Nenner einander nicht gleich sind, können durch Erweitern mit geeigneten Zahlen **gleichnamig gemacht** werden.

47. Der gemeinsame Nenner, welchen sie dabei erhalten, der **Hauptnenner** oder **Generalnenner**, muss durch jeden der ursprünglichen Nenner ohne Rest teilbar sein.

48. Um den **Hauptnenner** zu bestimmen, zerlegt man zunächst jeden der gegebenen Nenner in seine Primzahlfaktoren. Dann setzt man jeden der letzteren so oft als Faktor in den Hauptnenner, dass der Faktor in keinem der Nenner häufiger als in dem Hauptnenner vorkommt.

Beispiel:

Erster Nenner: $50 = 2 \cdot 5 \cdot 5$		Hauptnenner:
Zweiter Nenner: $56 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$		
Dritter Nenner: $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$		$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = 4200.$
Vierter Nenner: $35 = 5 \cdot 7$		

49. **Regel.** Man **addiert gleichnamige Brüche** zu einander, indem man ihre Zähler zu einander addiert. $\frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$

50. **Regel.** Man **subtrahiert gleichnamige Brüche** von einander, indem man ihre Zähler von einander subtrahiert.

$$\frac{9}{11} - \frac{4}{11} = \frac{5}{11}.$$

51. **Ungleichnamige Brüche** müssen vor dem **Addieren** oder dem **Subtrahieren** gleichnamig gemacht werden.

a) $\frac{17}{50} + \frac{27}{56} + \frac{41}{60} + \frac{12}{35} = \frac{1428}{4200} + \frac{2025}{4200} + \frac{2870}{4200} + \frac{1440}{4200} = \frac{7763}{4200} = \frac{1109}{600}$
 $= 1 \frac{509}{600}$

b) $\frac{7}{15} - \frac{4}{33} = \frac{77}{165} - \frac{20}{165} = \frac{57}{165} = \frac{19}{55}$

52. **Regel.** Man **multipliziert einen Bruch** mit einer **ganzen Zahl**, indem man den Zähler mit derselben multipliziert (oder den Nenner durch dieselbe dividiert, wenn diese Division aufgeht).

a) $\frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{10}{3} = 3 \frac{1}{3}$ b) $\frac{7}{12} \cdot 3 = \frac{7}{4} = 1 \frac{3}{4}$

53. Regel. Man **dividiert** einen **Bruch** durch eine **ganze Zahl**, indem man den Nenner mit derselben multipliziert (oder den Zähler durch dieselbe dividiert, wenn diese Division aufgeht).

$$a) \frac{3}{5} : 2 = \frac{3}{10} \quad b) \frac{6}{7} : 3 = \frac{2}{7}$$

54. Regel. Man **multipliziert Brüche mit einander**, indem man ihre Zähler mit einander und ihre Nenner mit einander multipliziert.

$$a) \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{15} \quad b) \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{7} = \frac{3 \cdot 6}{4 \cdot 7} = \frac{9}{14}$$

$$c) 2 \frac{2}{5} \cdot 1 \frac{1}{9} = \frac{12}{5} \cdot \frac{10}{9} = \frac{12 \cdot 10}{5 \cdot 9} = \frac{8}{3} = 2 \frac{2}{3}$$

55. Regel. Man **dividiert zwei Brüche durch einander**, indem man den Divisorbruch umkehrt, (d. h. darin Zähler und Nenner mit einander vertauscht) und die Brüche dann mit einander multipliziert.

$$a) \frac{4}{5} : \frac{3}{7} = \frac{28}{15} = 1 \frac{13}{15} \quad b) \frac{9}{10} : \frac{6}{7} = \frac{9 \cdot 7}{10 \cdot 6} = \frac{21}{20} = 1 \frac{1}{20}$$

$$c) 3 \frac{3}{4} : 1 \frac{1}{8} = \frac{15}{4} : \frac{9}{8} = \frac{15 \cdot 8}{4 \cdot 9} = \frac{10}{3} = 3 \frac{1}{3}$$

56. Ausser in den in No. 7 angeführten Fällen wird eine **Klammer** auch dann **fortgelassen**, wenn sie einen **Zähler** oder einen **Nenner** einschliesst. **Aufg.** (vergl. No. 7).

$$a) 27 \frac{3}{4} - \left(8 \frac{2}{5} + 3 \frac{1}{2} \right) = 15 \frac{17}{20} \quad b) 9 \frac{1}{10} + 7 \frac{2}{3} \cdot 2 \frac{1}{5} = 25 \frac{29}{30}$$

$$c) 1 \frac{1}{4} \cdot \left(12 \frac{1}{2} - 5 \frac{5}{6} \right) = 8 \frac{1}{3} \quad d) 2 \frac{1}{2} \cdot 3 \frac{5}{9} + 1 \frac{7}{15} \cdot 1 \frac{11}{14} = 11 \frac{32}{63}$$

$$e) \frac{2 \frac{1}{2} + 7 \frac{2}{3} + 3 \frac{1}{6}}{3 \frac{1}{3} - 2 \frac{1}{2}} = 16 \quad f) \frac{7 \frac{1}{10} - 3 \frac{1}{5} \cdot 2 \frac{1}{6}}{3 \frac{3}{4} : 9 \frac{1}{6}} = \frac{11}{27}$$

57. Aufg. $6 \frac{5}{13}$ Tage = 6 Tage 9 Stunden 13 Minuten
50 $\frac{10}{13}$ Sekunden.

$$\frac{5}{13} \text{ Tage} = \frac{120}{13} \text{ Stunden} = 9 \frac{3}{13} \text{ Stunden,}$$

$$\frac{3}{13} \text{ Stunden} = \frac{180}{13} \text{ Minuten} = 13 \frac{11}{13} \text{ Minuten,}$$

$$\frac{11}{13} \text{ Minuten} = \frac{660}{13} \text{ Sekunden} = 50 \frac{10}{13} \text{ Sekunden.}$$

58. Aufg.

- a) $5\frac{3}{4} \text{ M} \cdot 17 = 97 \text{ M } 75 \text{ Pf.}$, b) $9\frac{1}{2} \text{ km} : 11 = 863 \text{ m } 636\frac{4}{11} \text{ mm}$,
c) $6\frac{2}{3} \text{ kg} \cdot 3\frac{1}{5} = 21 \text{ kg } 333\frac{1}{3} \text{ g}$, d) $4\frac{1}{6} \text{ ha} : 3\frac{3}{4} = 1 \text{ ha } 11 \text{ a } 11\frac{1}{9} \text{ qm}$.

59. Bei Benutzung der **dezimalen Schreibweise** (vergl. No. 15) müssen Brüche, welche etwa zum Schlusse noch vorkommen, fortgelassen werden. Ist ein solcher Bruch gleich $\frac{1}{2}$ oder grösser als $\frac{1}{2}$, so wird die letzte geschriebene Ziffer um 1 erhöht.

$$3 \text{ M } 37\frac{1}{3} \text{ Pf.} = 3,37 \text{ M}; \quad 9 \text{ m } 7\frac{1}{2} \text{ cm} = 9,08 \text{ m};$$
$$6 \text{ kg } 389\frac{7}{10} \text{ g} = 6,390 \text{ kg}.$$

60. Regel de tri. (Vergl. No. 23 und No. 24).

Aufgaben:

- a) Wieviel erhält man für 28 M, wenn 16,25 m 13 M kosten? (= 35 m);
b) Wie teuer sind $6\frac{1}{4} \text{ kg}$, wenn $5\frac{5}{6} \text{ kg } 6\frac{1}{8} \text{ M}$ kosten? (= 6,56 M);
c) Wie lange reicht man mit einem Futtermvorrat für 16 Pferde, wenn derselbe Vorrat von 14 Pferden in 112 Tagen verbraucht wird? (= 98 Tage).

61. 1 Prozent ($\%$) einer Grösse ist 1 Hundertstel derselben.

Aufgaben:

- a) Wieviel sind 7% von 325 M? (= 22,75 M);
b) Wieviel $\%$ von 680 kg sind 34 kg? (= 5%).

V. Rechnen mit Dezimalbrüchen.

62. Ein Bruch, dessen Nenner 10, 100, 1000 lautet, kann als **Dezimalbruch** geschrieben werden. Dabei wird

1. der Nenner fortgelassen,
2. zwischen die Ganzen (0, wenn keine Ganzen vorhanden sind) und den darauf folgenden Zähler ein Komma gesetzt und
3. die Anzahl der Ziffern hinter dem Komma (Dezimalstellen) durch hinter dem Komma eingeschobene Nullen gleich der Anzahl der Nullen des fortgelassenen Nenners gemacht, falls diese Zahlen nicht gleich sind.

63. Ein Dezimalbruch **ändert seinen Wert nicht**, wenn man an sein Ende beliebig viele **Nullen anhängt** oder wenn man **Nullen**, welche an seinem Ende stehen, **fortlässt**.

64. Bei den Dezimalbrüchen hat, wie bei den ganzen Zahlen, jede Ziffer den zehnten Teil des Wertes, welchen sie in der vor-

hergehenden Stelle haben würde. Die erste Stelle hinter dem Komma gibt also Zehntel, die zweite Hundertstel, die dritte Tausendstel usw. an.

65. Regel. Man **multipliziert** einen Dezimalbruch mit **10, 100, 1000,**, indem man das Komma um 1, 2, 3 Stellen nach rechts rückt.

66. Regel. Man **dividiert** einen Dezimalbruch durch **10, 100, 1000,**, indem man das Komma um 1, 2, 3 Stellen nach links rückt.

67. Man kann einen **Dezimalbruch** auf eine gegebene Anzahl von Dezimalstellen **abkürzen**, indem man die übrigen Ziffern fortlässt und die letzte bleibende Ziffer um 1 erhöht, wenn die erste fortgelassene Ziffer eine 5 oder grösser als 5 ist.

68. Regel. Man **addiert Dezimalbrüche** zu einander, indem man sie so unter einander stellt, dass die Kommata unter einander stehen, und die Brüche dann wie ganze Zahlen addiert. Im Resultat wird das Komma unter die anderen Kommata gesetzt.

$$\begin{array}{r} 8,27 \\ + 103,8204 \\ + 0,516 \\ \hline 112,6064 \end{array}$$

69. Regel. Man **subtrahiert Dezimalbrüche** von einander, indem man sie so unter einander stellt, dass die Kommata unter einander stehen, und die Brüche dann wie ganze Zahlen subtrahiert. Im Resultat wird das Komma unter die anderen Kommata gesetzt.

$$\begin{array}{r} \text{a) } 28,37 \\ - 3,8026 \\ \hline 24,5674 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{b) } 0,0538 \\ - 0,029 \\ \hline 0,0248 \end{array}$$

70. Regel. Man **multipliziert zwei Dezimalbrüche** mit einander, indem man sie wie ganze Zahlen mit einander multipliziert. Das Resultat hat soviel Dezimalstellen als die beiden Faktoren zusammen haben.

$$\begin{array}{r} \text{a) } 7,256 \\ \quad 3,2 \\ \hline 21768 \\ 14512 \\ \hline 23,2192 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{b) } 0,695 \\ \quad 0,0148 \\ \hline 695 \\ 2780 \\ 5560 \\ \hline 0,0102860 \end{array}$$

71. Regel. Man **dividiert einen Dezimalbruch** durch eine ganze Zahl, indem man wie mit ganzen Zahlen dividiert und im Resultat das Komma setzt, wenn die Ganzen des Dividendus zu Ende sind.

$$\begin{array}{r} \text{a) } 352,35 : 45 = 7,83 \\ \quad 373 \\ \quad 135 \\ \quad 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{b) } 12,11 : 175 = 0,0692 \\ \quad 1610 \\ \quad 350 \\ \quad 0 \end{array}$$

72. Regel. Man verwandelt einen **gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch**, indem man nach demselben Verfahren den Zähler durch den Nenner dividiert. Geht hierbei die Division nach einer gewissen Anzahl von Dezimalstellen auf, so erhält man einen **endlichen** Dezimalbruch (Beisp. a und b). Anderenfalls müssen sich nach einer gewissen Anzahl von Dezimalstellen die Reste in einer festen Reihenfolge wiederholen und es entsteht ein **periodischer** Dezimalbruch (Beisp. c und d).

$$\begin{array}{r} \text{a) } \frac{3421}{275} = 3421 : 275 = 12,44 \\ \underline{671} \\ 1210 \\ \underline{1100} \\ 0 \end{array} \quad \text{b) } \frac{7}{8} = 7,0 : 8 = 0,875 \\ \underline{60} \\ 40 \\ \underline{0} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } \frac{13}{37} = 13,0 : 37 = 0,351 \\ \underline{190} \\ 50 \\ \underline{13} \end{array} \quad \text{d) } \frac{31}{44} = 31,0 : 44 = 0,7045 \\ \underline{200} \\ 240 \\ \underline{20} \end{array}$$

73. Ein **periodischer Dezimalbruch** kann auf folgende Art in einen **gemeinen Bruch** verwandelt werden:

$$\begin{array}{l} b = 0,64950 = 0,6495049504950 \dots \\ 10000 b = 6495,04950 = 6495,0495049504950 \dots \\ \underline{9999 b = 6494,4} = 6494,4000000000000 \dots \\ 9999 b = \frac{64944}{10} \\ b = \frac{64944}{99990} = \frac{328}{505} \end{array}$$

74. Regel. Man **dividiert** zwei **Dezimalbrüche** durch einander, indem man das Komma an das Ende des Divisors und im Dividendus um die gleiche Anzahl von Stellen nach rechts rückt und darauf die Division nach No. 71 ausführt.

$$\begin{array}{r} \text{a) } 843,98,6 : 29,51, = 28,6 \\ \underline{253 \ 78} \\ 17 \ 70 \ 6 \\ \underline{0} \end{array} \quad \text{b) } 43,120, : 1,375, = 31,36 \\ \underline{1 \ 870} \\ 4950 \\ \underline{8250} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } 0,3,50 : 11,2, = 0,03125 \\ \underline{140} \\ 280 \\ \underline{560} \\ 0 \end{array} \quad \text{d) } 14,30,0 : 17,55, = 0,814 \\ \underline{2600} \\ 8450 \\ \underline{1430} \end{array}$$

75. Aufg. (Vergl. No. 6, 7 und 56).

1. $\frac{a + b \cdot c}{d - e}$	3. $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$	5. $\frac{a \cdot b - c}{a + b + c}$	$a = 27,5$ $b = 2,2$ $c = 0,63$ $d = 0,792$ $e = 0,45$
2. $\frac{(a + b) \cdot c}{d - e}$	4. $\frac{a - (b + c)}{a - (b - c)}$	6. $\frac{a \cdot b + c \cdot d}{a \cdot (b - c)}$	

76. Aufg. Wieviel erhält man für 15,50 M, wenn 19,5 kg 11,70 M kosten? (= 25,833 kg).

77. Der **Gewinn**, welchen man bei einem Geschäft erzielt oder der **Verlust**, den man bei demselben erleidet, wird in Prozenten von dem Einkaufspreis oder von dem Anlagekapital berechnet (vergl. No. 61 und 62).

Aufgaben:

a) Wie teuer muss man eine Ware verkaufen, die man für 165 M gekauft hat, wenn man $7\frac{1}{2}\%$ daran gewinnen will? (= 177,38 M).

b) Wieviel % beträgt der Verlust, wenn der Einkaufspreis 345 M, der Verkaufspreis 322 M beträgt? (= $6\frac{2}{3}\%$).

78. Eine Geldsumme, welche z. B. bei Barzahlung von dem Kaufpreise einer Ware abgezogen wird, heisst **Rabatt** (in 100). Derselbe wird in Prozenten des Einkaufspreises angegeben.

Aufgabe: Wieviel hat man zu zahlen, wenn der Kaufpreis 26,50 M und der Rabatt 4% beträgt? (= 25,44 M).

79. Das Gewicht einer Ware mit ihrer Verpackung nennt man **Brutto**. Das Gewicht der Ware allein heisst **Netto** und das Gewicht der Verpackung **Tara**. Die Tara wird in Prozenten des Brutto angegeben.

Aufgabe: Wie gross ist das Nettogewicht, wenn eine Ware 75,6 kg Br. wiegt und 8% Ta. zu rechnen sind? (= 69,552 kg).

80. Bei der **Zinsrechnung** nennt man diejenigen Zinsen, welche der **Schuldner** dem **Gläubiger** für 100 Mark **Kapital** und für 1 Jahr zahlt, **Prozente** oder **Zinsfuss**.

Aufgaben:

a) Wieviel Zinsen erhält man für 3450 M Kapital zu 3% in 1 Jahre 10 Monaten? (= 189,75 M Z.).

b) Zu welchem Zinsfusse sind 21600 M Kapital ausgeliehen, wenn sie in 3 Jahren 5 Monaten 2460 M Zinsen bringen? (= $3\frac{1}{3}\%$).

c) In welcher Zeit bringen 8472 M Kapital zu 5% 917,80 M Zinsen? (= 2 Jahren 2 Mon.).

d) Welches Kapital bringt zu $4\frac{1}{2}\%$ in 8 Jahren 48,96 M Zinsen? (= 136 M K.).

81. Aufg. Zu einem gemeinsamen Geschäft hat A 2500 M, B 1350 M und C 1050 M eingezahlt. Wie ist der erzielte **Gewinn** von 441 M zu **verteilen**? (A erhält 225 M, B 121,50 M und C 94,50 M).

82. Beispiele für **abgekürzte Multiplikation** von Dezimalbrüchen:

a)	79,31	b)	0,06343
	2,485		0,5912
	<hr/>		<hr/>
	15862		32715
	3172		5889
	634		65
	40		13
	<hr/>		<hr/>
	1970,8		0,38682

83. Beispiele für **abgekürzte Division** von Dezimalbrüchen:

a) $1970,8 \dots : 24,85 = 79,31$ b) $58,5,9 : 641,7 = 0,0913$

231 3
7 6
2
0

8 4
2 0
1

VI. Die vier Grundrechnungsarten mit Buchstabengrössen.

84. Die **Klammern** werden in derselben Weise angewendet, wie es in No. 6, 7 und 56 angegeben ist.

85. **Addieren.** **Summanden** oder **Glieder**: a, b und c.
Summe: $a + b + c$.

86. **Subtrahieren.** **Minuendus**: a, **Subtrahendus**: b.
Differenz: $a - b$.

87. **Lehrsatz.** Man **addiert** eine **Summe** zu einer Grösse, indem man die Summanden nach einander dazu addiert. $a + (b + c) = a + b + c$.

88. **Lehrs.** Man **addiert** eine **Differenz** zu einer Grösse, indem man den Minuendus dazu addiert und dann den Subtrahendus subtrahiert. $a + (b - c) = a + b - c$.

89. **Lehrs.** Man **subtrahiert** eine **Summe** von einer Grösse, indem man die Summanden nach einander davon subtrahiert. $a - (b + c) = a - b - c$.

90. **Lehrs.** Man **subtrahiert** eine **Differenz** von einer Grösse, indem man den Minuendus davon subtrahiert und den Subtrahendus dann addiert. $a - (b - c) = a - b + c$.

91. Wenn in einer Differenz der Subtrahendus grösser als der Minuendus ist, so ist dieselbe kleiner als Null; sie heisst dann eine **negative** Zahl. $5 - 7 = 5 - 5 - 2 = 0 - 2 = -2$.

92. Die **negativen Zahlen** bilden die Fortsetzung der bisher allein benutzten **positiven Zahlen** über deren untere Grenze (Null) hinaus und zwar in der Art, dass jede Zahl um 1 grösser ist als die vorhergehende. . . , - 4, - 3, - 2, - 1, 0, + 1, + 2, + 3, + 4, . . .

93. Die beiden **Vorzeichen** + (**plus**) und - (**minus**) werden einander **entgegengesetzt** genannt.

94. Man **kehrt ein Vorzeichen um**, indem man dafür das entgegengesetzte schreibt.

95. Eine **algebraische Summe** kann aus positiven und aus negativen Gliedern bestehen. $a + b - c - d + e$.

96. **Regel für das Auflösen von Klammern.** Soll eine in eine Klammer eingeschlossene algebraische Summe zu einer Grösse

addiert werden, so kann man die Klammer fortlassen. Soll eine in eine Klammer eingeschlossene algebraische Summe von einer Grösse subtrahiert werden, so kann man die Klammer ebenfalls fortlassen; man muss dann aber bei jedem in der Klammer vorkommenden Gliede das Vorzeichen umkehren. $a + (b - c + d + e - f) = a + b - c + d + e - f$, $a - (b - c + d + e - f) = a - b + c - d - e + f$.

97. Multiplizieren. Faktoren (Multiplikandus, Multiplikator): a, b, c, d.

Produkt: $a \cdot b \cdot c \cdot d$.

Ein Produkt ändert seinen Wert nicht, wenn man die Reihenfolge seiner Faktoren beliebig ändert. $a \cdot 5 \cdot b \cdot 3 \cdot c = 5 \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot c$.

98. Das Multiplikationszeichen wird meistens zwischen zwei Buchstabenfaktoren und zwischen einer Zahl und einem Buchstaben fortgelassen. $5 \cdot 3 \cdot a \cdot b \cdot c = 15 abc$.

99. Sind in einem Produkte mehrere Faktoren einander gleich, so wird der Faktor nur einmal geschrieben und die Anzahl, in welcher er vorkommt rechts oben daneben gesetzt. z. B. $pppp = p^4$. Ein solches Produkt nennt man eine **Potenz**, den Faktor darin **Grundzahl** und seine Anzahl **Exponent**.

100. Ein positives oder negatives Produkt von Zahlen- und Buchstabenfaktoren nennt man eine **algebraische Grösse**. Man unterscheidet darin das **Vorzeichen** + oder —, den **Koeffizienten** (meistens der Zahlenfaktor) und die **Benennung** (meistens die Buchstabenfaktoren). Wenn ein Zahlenfaktor nicht vorhanden ist, so kann man den Koeffizienten 1 hinzusetzen.

101. Lehrs. Man addiert gleichnamige algebraische Grössen mit gleichen Vorzeichen zu einander, indem man die Koeffizienten zu einander addiert und das Vorzeichen und die Benennung ungeändert lässt. $24a^2x + 5a^2x = 29a^2x$, $-5x^3 - 9x^3 = -14x^3$.

102. Lehrs. Man addiert gleichnamige algebraische Grössen mit verschiedenen Vorzeichen zu einander, indem man die Koeffizienten von einander subtrahiert, die Benennung ungeändert lässt und dem Resultat das Vorzeichen der grösseren gibt. $5ab - 3ab = 2ab$, $8xyz - 12xyz = -4xyz$.

103. Lehrs. Das Produkt zweier algebraischer Grössen mit gleichen Vorzeichen ist positiv. Das Produkt zweier algebraischer Grössen mit verschiedenen Vorzeichen ist negativ. $(+a)(+b) = +ab$, $(-a)(-b) = +ab$, $(+a)(-b) = -ab$, $(-a)(+b) = -ab$.

104. Die Glieder einer algebraischen Summe können auch algebraische Grössen sein.

105. Eine algebraische Summe ändert ihren Wert nicht, wenn man ihre Glieder in einer anderen beliebigen Reihenfolge schreibt.

106. Eine algebraische Summe ist nach einem Buchstaben geordnet, wenn jedes Glied diesen Buchstaben in derselben oder

in einer höheren Potenz enthält als alle folgenden Glieder. Die Glieder, welche die gleiche Potenz dieses Buchstabens enthalten, müssen nach einem anderen Buchstaben geordnet werden. Man benutzt dabei in der Regel die Buchstaben in der Reihenfolge des Alphabets.

107. Lehrs. Man **multipliziert** eine **algebraische Summe** mit einer **Grösse**, indem man jedes Glied der Summe mit der Grösse multipliziert.

$$a(b + c - d - e) = (b + c - d - e)a = ab + ac - ad - ae.$$

108. Lehrs. Man **multipliziert zwei algebraische Summen** mit einander, indem man jedes Glied der einen mit jedem Gliede der anderen multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert (Beachtung der Vorzeichenregel No. 103).

$$\begin{aligned} & \begin{array}{r} (4x^2 + 5xy - 2y^2) \\ \cdot (3x^2 - 2xy - y^2) \\ \hline 12x^4 + 15x^3y - 6x^2y^2 \\ \quad - 8x^3y - 10x^2y^2 + 4xy^3 \\ \qquad \quad - 4x^2y^2 - 5xy^3 + 2y^4 \\ \hline 12x^4 + 7x^3y - 20x^2y^2 - xy^3 + 2y^4 \end{array} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{109. Formeln:} \quad (a + b)^2 &= (a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2. \\ (a - b)^2 &= (a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2. \\ (a + b)(a - b) &= a^2 - b^2. \end{aligned}$$

110. Dividieren. Dividendus: a, Divisor: b.
Quotient: a : b.

111. Lehrs. Der **Quotient** zweier algebraischer Grössen mit **gleichen** Vorzeichen ist **positiv**. Der **Quotient** zweier algebraischer Grössen mit **verschiedenen** Vorzeichen ist **negativ**.

112. Wenn der Dividendus jeden Faktor des Divisors mindestens in derselben Potenz enthält, in welcher er im Divisor vorkommt, so ist der Quotient eine **ganze** algebraische Grösse. Anderenfalls ist er ein **Bruch**.

$$\begin{aligned} (+10ab^3) : (+2ab) &= +5b. & (+10a) : (+2b) &= +\frac{5a}{b} \\ (-36p^2q^5) : (-3pq^2) &= +12pq^3. & (-2x) : (-6xy) &= +\frac{1}{3y} \\ (+10ab^2) : (-2ab) &= -5b. & (+9a^3x) : (-12a^2y) &= -\frac{3ax}{4y} \\ (-36p^2q^2) : (+3pq) &= -12pq. & (-5p^3q^4) : (+3p^2q) &= -\frac{5pq^3}{3} \end{aligned}$$

113. Lehrs. Man **dividiert** eine **algebraische Summe** durch eine **Grösse**, indem man jedes Glied der Summe durch die Grösse dividiert. $(ax + bx - cx) : x = a + b - c$.

114. In einer algebraischen Summe, deren sämtliche Glieder einen **gemeinschaftlichen Faktor** haben, kann man denselben **vor** oder **hinter eine Klammer ziehen**. Man dividiert dazu die Summe

durch den Faktor, setzt das Resultat in eine Klammer und schreibt den Faktor vor oder hinter dieselbe. $ab+ac+ad-ae = a(b+c+d-e)$ oder $= (b+c+d-e)a$.

115. Eine algebraische Summe kann in ein Produkt verwandelt werden,

1. wenn man einen Faktor vor eine Klammer ziehen kann und
2. wenn man eine der drei Formeln No. 109 anwenden kann.

116. Sollen zwei algebraische Summen durch einander dividiert werden, so müssen sie nach denselben Buchstaben geordnet werden. Dann dividiert man das erste Glied des Dividendus durch das erste Glied des Divisors, multipliziert den Quotienten mit dem ganzen Divisor und subtrahiert das Resultat von dem Dividendus. Der Rest muss nach denselben Buchstaben wie der Dividendus geordnet werden und wird dann auch weiter wie dieser behandelt.

$$\begin{array}{r} (12x^4+7x^3y-20x^2y^2-xy^3+2y^4) : (3x^2-2xy-y^2) = 4x^2+5xy-2y^2 \\ \pm 12x^4 \mp 8x^3y \mp 4x^2y^2 \\ \hline 15x^3y-16x^2y^2-xy^3+2y^4 \\ \pm 15x^3y \mp 10x^2y^2 \mp 5xy^3 \\ \hline -6x^2y^2+4xy^3+2y^4 \\ \mp 6x^2y^2 \pm 4xy^3 \pm 2y^4 \end{array}$$

117. Für die Rechnung mit Brüchen, in welchen Buchstabengrößen vorkommen, gelten die in No. 41, 42 und 45 bis 55 aufgeführten Erklärungen und Lehrsätze (die letzteren sind dort Regeln genannt).

Beispiele:

zu No. 41: $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$.

zu No. 42: $\frac{5x^2y}{3xy^2} = \frac{5x}{3y}$, $\frac{a^2+2ab+b^2}{a^2-b^2} = \frac{(a+b)(a+b)}{(a+b)(a-b)} = \frac{a+b}{a-b}$.

zu No. 48: a) Erster Nenner: $50f^2g = 2 \cdot 5 \cdot 5ffg$
 Zweiter Nenner: $6g^2h^3 = 2 \cdot 3ggghh$
 Dritter Nenner: $45f^3h = 3 \cdot 3 \cdot 5fffh$
 Hauptnenner: $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5f^3g^2h^3 = 450f^3g^2h^3$.

b) Erster Nenner: $4x^2-9y^2 = (2x+3y)(2x-3y)$
 Zweiter Nenner: $12x+18y = 2 \cdot 3(2x+3y)$
 Dritter Nenner: $20x-30y = 2 \cdot 5(2x-3y)$
 Hauptnenner: $2 \cdot 3 \cdot 5(2x+3y)(2x-3y)$
 $= 120x^2-270y^2$.

zu No. 49: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$, $\frac{p}{s} + \frac{q+r}{s} = \frac{p+q+r}{s}$

zu No. 50: $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$, $\frac{p}{s} - \frac{q+r}{s} = \frac{p-q-r}{s}$

$$\text{zu No. 51: a) } \frac{3h}{50f^2g} - \frac{f}{6g^2h^3} + \frac{2g}{45f^3h} = \frac{27fgh^4 - 75f^4 + 20g^3h^2}{450f^3g^2h^3}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } & \frac{xy + y^2}{4x^2 - 9y^2} + \frac{x + y}{12x + 18y} - \frac{x - y}{20x - 30y} \\ &= \frac{30(xy + y^2) + (10x - 15y)(x + y) - (6x + 9y)(x - y)}{120x^2 - 270y^2} \\ &= \frac{4x^2 + 22xy + 24y^2}{120x^2 - 270y^2} = \frac{2(x + 4y)(2x + 3y)}{2 \cdot 3 \cdot 5(2x + 3y)(2x - 3y)} \\ &= \frac{x + 4y}{30x - 45y} \end{aligned}$$

$$\text{zu No. 52: } \frac{a}{b} \cdot c = \frac{ac}{b}, \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{x}{y^2} \cdot y = \frac{x}{y}.$$

$$\text{zu No. 53: } \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}, \quad \frac{p^2}{q} : p = \frac{p}{q}.$$

$$\text{zu No. 54: } \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{x^2}{y} \cdot \frac{y^3}{x^2} = \frac{x^2y^3}{yx^2} = y^2.$$

$$\text{zu No. 55: } \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}, \quad \frac{3p^2}{10q^2} : \frac{6p^3}{35q^2} = \frac{3p^2 \cdot 35q^2}{10q^2 \cdot 6p^3} = \frac{7}{4p}.$$

VII. Proportionen.

118. Das **Verhältnis** $a : b$ gibt an, wie oft b in a enthalten ist.

119. Verbindet man zwei Verhältnisse, welche gleichen Wert haben, durch ein Gleichheitszeichen, so entsteht eine **Proportion**.
Z. B. $a : b = c : d$. Hierin heissen

- a und b **Glieder des ersten Verhältnisses,**
- c und d **Glieder des zweiten Verhältnisses,**
- a und c **Vorderglieder,**
- b und d **Hinterglieder,**
- a und d **Aussenglieder** und
- b und c **Innenglieder.**

120. **Lehrs.** In einer Proportion kann man die Glieder eines Verhältnisses **mit derselben Zahl multiplizieren**. $a : b = c : d$;
 $ma : mb = nc : nd$.

121. **Lehrs.** In einer Proportion kann man die Glieder eines Verhältnisses **durch dieselbe Zahl dividieren**. $a : b = c : d$;
 $\frac{a}{m} : \frac{b}{m} = \frac{c}{n} : \frac{d}{n}$.

122. Lehrs. In einer Proportion ist das **Produkt** der **Aussenglieder** gleich dem **Produkte** der **Innenglieder**. $a : b = c : d$; $ad = bc$.

123. Die Gleichung $ad = bc$ wird **Produktengleichung** genannt.

124. Aufg. Zu drei gegebenen Grössen die **vierte Proportionale** zu **berechnen**.

125. Lehrs. Die **Glieder** einer Proportion können beliebig mit einander **vertauscht** werden, wenn nur die Produktengleichung ungeändert bleibt.

126. Aufg. Aus einer gegebenen Produktengleichung acht verschiedene Proportionen abzuleiten.

127. Lehrs. In einer Proportion verhält sich die **Summe** (oder Differenz) **der Glieder des ersten Verhältnisses** zur **Summe** (oder Differenz) **der Glieder des zweiten Verhältnisses** wie die **Vorderglieder** zu einander oder wie die **Hinterglieder** zu einander. $a : b = c : d$; $(a \pm b) : (c \pm d) = a : c = b : d$.

128. Lehrs. In einer Proportion verhält sich die **Summe** (oder Differenz) **der Vorderglieder** zur **Summe** (oder Differenz) **der Hinterglieder** wie ein **Vorderglied** zu seinem **Hinterglied**. $a : b = c : d$; $(a \pm c) : (b \pm d) = a : b$.

129. Eine Proportion, in welcher die Innenglieder einander gleich sind, wird eine **stetige Proportion** genannt. $a : b = b : c$. b heisst darin die **mittlere Proportionale** zu a und c .

130. Aufg. Zu zwei gegebenen Grössen die **mittlere Proportionale** zu **berechnen**.

131. Lehrs. **Proportionen** können mit einander **Glied für Glied multipliziert** oder durch einander **Glied für Glied dividiert** werden. $a : b = c : d$, $e : f = g : h$; $ae : bf = cg : dh$, $\frac{a}{e} : \frac{b}{f} = \frac{c}{g} : \frac{d}{h}$.

132. Lehrs. Stimmen zwei Proportionen in je drei Gliedern überein, so sind darin auch die **vierten Glieder** einander **gleich**. $a : b = c : x$, $a : b = c : y$; $x = y$.

133. Haben mehr als zwei Verhältnisse gleichen Wert, oder stimmen mehrere Proportionen in den **Vordergliedern** überein, so kann man daraus eine **laufende Proportion** ableiten.

Aus $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = a_3 : b_3 = a_4 : b_4$
oder aus $a_1 : a_2 = b_1 : b_2$; $a_1 : a_3 = b_1 : b_3$; $a_1 : a_4 = b_1 : b_4$
folgt $a_1 : a_2 : a_3 : a_4 = b_1 : b_2 : b_3 : b_4$.

VIII. Gleichungen ersten Grades.

134. Eine **Gleichung** entsteht, wenn man zwei Grössen, welche gleichen Wert haben, durch ein Gleichheitszeichen verbindet.

Diese Grössen heissen **Seiten der Gleichung**.

Sind die Seiten algebraische Summen, so heisst jedes Glied derselben ein **Glied der Gleichung**.

135. In einer **identischen Gleichung** sind beide Seiten für jeden Wert, welchen man den darin vorkommenden Buchstabengrössen erteilt, einander gleich. $(x + 3)(x - 5) = x^2 - 2x - 15$.

136. Ist eine Gleichung nicht für alle Werte einer Buchstabengrösse, sondern nur für bestimmte Werte derselben richtig, so heisst sie eine **Bestimmungsgleichung**. $x^2 - 3x - 10 = 0$.

137. In einer Bestimmungsgleichung muss wenigstens eine Buchstabengrösse vorkommen. Man nennt sie die **Unbekannte** und wählt meistens die letzten Buchstaben des Alphabets dazu.

Der Wert der Unbekannten, welcher die Gleichung zu einer identischen macht, heisst die **Wurzel der Gleichung**.

Man **löst eine Gleichung auf**, indem man ihre Wurzel bestimmt.

138. Grundsatz. Gleiche Rechnungen mit gleichen Grössen geben gleiche Resultate.

Grundsatz. Eine Grösse kann durch eine ihr gleiche ersetzt werden.

139. Wenn man ein **Glied** einer Gleichung **auf die andere Seite schafft**, so muss man ihm dort das entgegengesetzte Vorzeichen geben. $2x + 5 = -x + 11$; $2x + x = -5 + 11$.

140. **Gleiche Glieder, welche auf beiden Seiten** einer Gleichung vorkommen, kann man fortlassen.

141. Enthält eine Gleichung eine oder mehrere Unbekannte in einer Klammer oder in einem Nenner, so muss sie zuerst **entwickelt** werden.

142. Klammern, welche eine Unbekannte enthalten, löst man auf.

143. Nenner, welche eine Unbekannte enthalten, schafft man fort, indem man die ganze Gleichung mit dem Hauptnenner multipliziert. (Derselbe darf jedoch nicht gleich 0 sein und auch nicht den Wert 0 annehmen, wenn man eine Wurzel der Gleichung für die Unbekannte einsetzt.)

144. Die höchste Zahl der unbekanntenen Faktoren, welche in einem Gliede vorkommen, heisst der **Grad der Gleichung**.

145. Methode der Auflösung einer Gleichung ersten Grades mit einer Unbekannten. Man schafft alle Glieder, welche die Unbekannte enthalten, auf eine Seite und alle anderen Glieder auf

die andere Seite. Dann vereinigt man die die Unbekannte enthaltenden Glieder zu einem Gliede und dividiert die ganze Gleichung durch den Koeffizienten der Unbekannten.

146. Man macht die **Probe** auf die Richtigkeit der Rechnung, indem man den gefundenen Wert der Unbekannten in die **gegebene** Gleichung einsetzt. Es muss sich dann eine identische Gleichung ergeben.

147. Beispiele:

a) $5x + 3 - 2x - 7 = -4x - 18, 5x - 2x + 4x = -3 + 7 - 18,$
 $7x = -14, x = -2.$

Probe: $-10 + 3 + 4 - 7 = 8 - 18, -10 = -10.$

b) $ax + b^2 = a^2 - bx, ax + bx = a^2 - b^2, (a + b)x = a^2 - b^2,$
 $x = \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b.$

Probe: $a(a - b) + b^2 = a^2 - b(a - b),$
 $a^2 - ab + b^2 = a^2 - ab + b^2.$

c) Eingekleidete Aufgaben.

148. Sollen zwei Unbekannte berechnet werden, so müssen zwei von einander unabhängige Gleichungen gegeben sein.

Diese muss man zunächst entwickeln und so ordnen, dass die Glieder, welche die Unbekannten enthalten, auf einer Seite und alle bekannten Glieder auf der anderen Seite stehen.

149. Erste Methode zur Auflösung von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten (Substitutionsmethode). Man berechnet eine Unbekannte aus einer Gleichung und setzt den gefundenen Wert in die andere Gleichung ein. Dann erhält man eine Gleichung für die andere Unbekannte.

$2x + 3y = 1$	$3 - 9y - 8y = 20$	Probe:
$3x - 4y = 10$	$-17y = 17$	
$x = \frac{1 - 3y}{2}$	$y = -1$	$4 - 3 = 1$
$\frac{3(1 - 3y)}{2} - 4y = 10$	$x = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$	$6 + 4 = 10.$

150. Zweite Methode zur Auflösung von zwei Gleichungen ersten Grades mit zwei Unbekannten (Multiplikationsmethode). Man multipliziert beide Gleichungen mit geeigneten Faktoren, sodass die Koeffizienten einer Unbekannten einander gleich werden, und addiert oder subtrahiert die Gleichungen. Dann erhält man eine Gleichung für die andere Unbekannte.

$2x + 3y = 1$	4	$17x = 34$	$3y = -3$
$3x - 4y = 10$	3	$x = 2$	
$8x + 12y = 4$		$4 + 3y = 1$	$y = -1.$
$9x - 12y = 30$			

151. Beispiel für die Anwendung der Multiplikationsmethode zur Auflösung von drei Gleichungen ersten Grades mit drei Unbekannten.

$$\begin{array}{r|l|l|l}
 2x - y + 3z = 19 & 1 & & \\
 x + 4y - 2z = -18 & 2 & 3 & \\
 3x - 2y - 4z = -4 & & & 1 \\
 \hline
 2x - y + 3z = 19 & 3x + 12y - 6z = -54 & 9y - 7z = -55 & 2 \\
 2x + 8y - 4z = -36 & 3x - 2y - 4z = -4 & 14y - 2z = -50 & 7 \\
 9y - 7z = -55 & 14y - 2z = -50 & 18y - 14z = -110 & \\
 & & 98y - 14z = -350 & \\
 & & 80y = -240 & \\
 & & y = -3 & \\
 \hline
 \text{Probe: } 4 + 3 + 12 = 19 & & & \\
 & 2 - 12 - 8 = -18 & & \\
 & 6 + 6 - 16 = -4 & & \\
 \hline
 & & & -42 - 2z = -50 \\
 & & & -2z = -8 \\
 & & & z = 4 \\
 & & & x - 12 - 8 = -18 \\
 & & & x = 2
 \end{array}$$

IX. Potenzen mit ganzen positiven oder negativen Exponenten.

152. Die Rechnungsarten **dritter Stufe** (vergl. No. 6) sind: Potenzieren (No. 153), Radizieren (No. 165) und Logarithmieren (No. 181).

Für den Gebrauch der **Klammern** und das **Fortlassen** derselben gelten die in No. 7 und No. 56 gegebenen Regeln.

Ausser in den dort angeführten Fällen wird indessen eine Klammer auch fortgelassen, welche einen **Potenzexponenten**, einen **Wurzelexponenten**, einen **Radikanden** oder einen **Numerus** einschliesst.

153. Eine **Potenz** ist ein Produkt aus lauter gleichen Faktoren.

Der Faktor heisst **Grundzahl** oder **Basis**.

Die Anzahl der Faktoren heisst **Exponent**.

Man schreibt $ppp \dots p = p^n$ und spricht: p hoch n oder p zur n -ten (zu ergänzen Potenz).

Der **Potenzexponent 1** wird fortgelassen.

Potenzen **besonderer Grundzahlen** sind:

$$0^n = 0, (+1)^n = +1, (-1)^{2n-1} = -1, (-1)^{2n} = +1.$$

154. **Lehrs.** Man **multipliziert Potenzen mit gleicher Grundzahl** mit einander, indem man ihre Exponenten addiert. $p^m p^n = p^{m+n}$.

155. **Lehrs.** Man **dividiert zwei Potenzen mit gleicher Grundzahl** durch einander, indem man die Exponenten von einander subtrahiert. $p^m : p^n = p^{m-n}$.

156. Den **reziproken Wert** einer Grösse erhält man, wenn man 1 durch dieselbe dividiert.

157. Erweiterung des Begriffes der Potenz.

1. Eine **Potenz mit dem Exponenten 0** ist gleich 1. $p^0 = 1$.

2. Eine **Potenz mit negativem Exponenten** ist gleich dem reziproken Wert der entsprechenden Potenz mit positivem

Exponenten. $p^{-n} = \frac{1}{p^n}$.

158. **Lehrs.** Man **potenziert ein Produkt**, indem man jeden Faktor potenziert. $(abc)^n = a^n b^n c^n$.

159. **Lehrs.** Man **potenziert einen Bruch**, indem man Zähler und Nenner potenziert. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

160. **Lehrs.** Man **multipliziert Potenzen mit gleichen Exponenten** mit einander, indem man die Grundzahlen mit einander multipliziert. $a^n b^n c^n = (abc)^n$.

161. **Lehrs.** Man **dividiert zwei Potenzen mit gleichen Exponenten** durch einander, indem man die Grundzahlen durch einander dividiert. $a^n : b^n = (a : b)^n$.

162. **Lehrs.** Man **potenziert eine Potenz**, indem man die Exponenten mit einander multipliziert. $(a^m)^n = a^{mn}$.

X. Quadratwurzeln.

163. Die **Quadratwurzel** aus einer Grösse a ist diejenige Grösse, welche mit sich selbst multipliziert a ergibt. $\sqrt{a}\sqrt{a} = a$, $\sqrt{25} = 5$.

164. Beispiele für die Berechnung von Quadratwurzeln:

$$\begin{array}{r} \text{a) } \sqrt{a^2 + 2ab + b^2} = a + b \\ \pm a^2 \\ \hline (+ 2ab + b^2) : (2a + b) \\ \pm 2ab \pm b^2 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{b) } \sqrt{9x^2 + 30xy + 25y^2} = 3x + 5y \\ \pm 9x^2 \\ \hline (+ 30xy + 25y^2) : (6x + 5y) \\ \pm 30xy \pm 25y^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } \sqrt{4p^2 + 12pq - 4pr + 9q^2 - 6qr + r^2} = 2p + 3q - r \\ \pm 4p^2 \\ \hline (+ 12pq - 4pr + 9q^2 - 6qr + r^2) : (4p + 3q) \\ \pm 12pq \qquad \pm 9q^2 \\ \hline (- 4pr \qquad - 6qr + r^2) : (4p + 6q - r) \\ \pm 4pr \qquad \pm 6qr \pm r^2 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{d) } \sqrt{190969} = 437 \\ \pm 16 \\ \hline 309 \quad : 83 \\ \pm 249 \\ \hline 6069 \quad : 867 \\ 6069 \\ \hline 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{e) } \sqrt{190969} = 437 \\ 309 \quad : 83 \\ 6069 \quad : 867 \\ 0 \end{array}$$

f) $\sqrt[3]{343,3609} = 18,53$ 243 : 28 1936 : 365 11109 : 3703 0	g) $\sqrt[3]{750} = 27,386$ 350 : 47 2100 : 543 47100 : 5468 335600 : 54766 7004
--	---

h) $\sqrt[3]{0,0250} = 0,15811$
 150 : 25
 2500 : 308
 3600 : 3161
 43900 : 31621
 12279

XI. Wurzeln.

165. Die **n-te Wurzel** aus a ist diejenige Grösse, welche zur n -ten Potenz erhoben a ergibt. $\sqrt[n]{a} = a$.

a heisst darin der **Radikand** oder die **Grundzahl**.
 n heisst darin der **Wurzelexponent**.

Der Wurzelexponent **2** wird **fortgelassen**.

Man **radiziert** eine Grösse mit dem Exponenten n , wenn man die n -te Wurzel aus ihr bestimmt.

Radizieren und Potenzieren mit demselben Exponenten ändern eine Grösse nicht. $\sqrt[n]{a^n} = a, \sqrt[n]{a^n} = a$.

166. Lehrs. Man **radiziert ein Produkt**, indem man jeden Faktor radiziert. $\sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c}$.

167. Lehrs. Man **multipliziert Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten** mit einander, indem man die Radikanden mit einander multipliziert. $\sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b} \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$.

168. Aufg. $(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + \sqrt{5})(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} - 25\sqrt{5} - 12\sqrt{30}) = -239$.

169. Lehrs. Man **radiziert einen Bruch**, indem man Zähler und Nenner radiziert. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$.

170. Lehrs. Man **dividiert zwei Wurzeln mit gleichen Wurzelexponenten** durch einander, indem man die Radikanden durch einander dividiert. $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$.

171. Wenn eine Wurzel aus einer ganzen Zahl selbst keine ganze Zahl ist, so ist sie eine **irrationale Zahl**. Eine solche kann man in einen Dezimalbruch entwickeln, welcher weder endlich noch periodisch sein kann (vergl. No. 164g).

172. Eine Zahl, welche durch Anwendung der vier Grundrechnungsarten aus ganzen Zahlen hergeleitet werden kann, heisst eine **rationale Zahl**. Eine solche kann man in einen endlichen oder in einen periodischen Dezimalbruch entwickeln (vergl. No. 72).

173. **Aufg.** In folgenden Brüchen den **Nenner rational zu machen**:

$$a) \frac{3\sqrt{5}}{7\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{10}}{14}, \quad b) \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}} = \frac{11 + 3\sqrt{15}}{7},$$

$$c) \frac{\sqrt{7} + 2\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} + 2\sqrt{5} - \sqrt{3}} = \frac{20 + 5\sqrt{15} - 4\sqrt{21} - 3\sqrt{35}}{2}.$$

174. **Aufg.** In folgenden Gleichungen die **Quadratwurzeln fortzuschaffen** und die Gleichungen aufzulösen:

$$a) 3\sqrt{x-3} - 1 = \sqrt{x-3} + 3 \quad (x = 7) \quad b) \sqrt{x+9} - 2 = \sqrt{x+2} - 1 \quad (x = 7)$$

175. **Lehrs.** Man **potenziert eine Wurzel**, indem man den Radikanden potenziert. $(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$.

176. **Lehrs.** Man **radiziert eine Wurzel**, indem man die Wurzelexponenten mit einander multipliziert. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

177. **Lehrs.** Wenn eine **Potenz radiziert** werden soll, so kann man den Potenzexponenten und den Wurzelexponenten mit derselben Zahl multiplizieren (**Erweitern der Exponenten**).

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m \cdot p]{a^{n \cdot p}}.$$

178. **Lehrs.** Wenn eine **Potenz radiziert** werden soll, so kann man den Potenzexponenten und den Wurzelexponenten durch dieselbe Zahl dividieren (**Kürzen der Exponenten**).

$$\sqrt[m]{a^n} = \sqrt[m : q]{a^{n : q}}.$$

179. Dividiert man beide Exponenten durch den Wurzelexponenten, so erhält man im allgemeinen **Potenzen mit gebrochenen Exponenten**. $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

180. Erweiterung des Begriffes der Potenz (vgl. No. 153 und 157). Eine **Potenz, deren Exponent ein Bruch ist**, bedeutet eine Wurzel aus einer Potenz, worin der Potenzexponent gleich dem Zähler und der Wurzelexponent gleich dem Nenner des Bruches ist. Für die Rechnung mit solchen Potenzen gelten die Sätze No. 154 bis 162.

XII. Logarithmen.

181. Der Logarithmus von a für die Grundzahl g ($\log_g a$) ist derjenige Exponent, mit welchem man g potenzieren muss, um a zu erhalten. $\log_2 8 = 3$, $\log_5 25 = 2$.

g heisst die **Grundzahl**.
 a heisst der **Numerus**.

182. **Lehrs.** Man erhält den **Logarithmus eines Produktes**, wenn man die Logarithmen seiner Faktoren addiert.

$$\log_g abc = \log_g a + \log_g b + \log_g c.$$

183. **Lehrs.** Man erhält den **Logarithmus eines Bruches**, wenn man den Logarithmus des Nenners von dem des Zählers

subtrahiert. $\log_g \frac{a}{b} = \log_g a - \log_g b$.

184. **Lehrs.** Man erhält den **Logarithmus einer Potenz**, wenn man den Logarithmus der Grundzahl mit dem Potenzexponenten multipliziert. $\log_g a^n = n \log_g a$.

185. **Lehrs.** Man erhält den **Logarithmus einer Wurzel**, wenn man den Logarithmus des Radikanden durch den Wurzelexponenten dividiert. $\log_g \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_g a$.

186. Die Logarithmen für die Grundzahl 10 werden Briggs'sche oder **gemeine Logarithmen** genannt.

Die Grundzahl 10 wird **fortgelassen**.

Bei denselben unterscheidet man die **Kennziffer** (die Ganzen, welche auch negativ sein können) und die **Mantisse** (die Dezimalstellen, welche immer positiv sein müssen).

Die **Mantissen** sind in **Logarithmentafeln** zusammengestellt und aus diesen zu entnehmen.

Die **Kennziffer** ist um 1 kleiner als die Anzahl der Stellen vor dem Komma des Numerus. Beginnt derselbe mit 0, so ist die Kennziffer negativ und zwar gleich der Anzahl der Nullen am Anfange des Numerus.

187. **Zu einem gegebenen Logarithmus findet man den zugehörigen Numerus**, indem man in den Logarithmentafeln die zu der Mantisse gehörigen Ziffern des Numerus aufsucht und die Stellung des Kommas nach folgender Regel bestimmt:

Der Numerus hat eine Stelle mehr vor dem Komma als die Kennziffer angibt. Ist dieselbe negativ, so beginnt der Numerus mit soviel Nullen als die Kennziffer angibt.

188. **Zinseszinsrechnung.** Anfangskapital a , Endkapital A , Jahre n , Prozente p , **Verzinsungsfaktor** $q = 1 + \frac{p}{100}$.

$$A = aq^n; a = A : q^n; q = \sqrt[n]{A : a}; n = (\mathcal{L}^A - \mathcal{L}^a) : \mathcal{L}^q.$$

XIII. Quadratische Gleichungen.

189. Die **Quadratwurzel** aus einer positiven Grösse kann positiv oder negativ sein, sie hat immer **zwei Werte**, welche sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden. $\sqrt{9} = +3$ oder $= -3$.

190. Eine **quadratische Gleichung (Gleichung zweiten Grades)** mit einer Unbekannten hat die Gestalt: $cx^2 + dx + e = 0$.

191. Ist der Koeffizient von x gleich 0, so heisst die Gleichung eine **rein quadratische**.

192. Eine **rein quadratische Gleichung** wird **aufgelöst**, indem man daraus x^2 berechnet und dann aus beiden Seiten der Gleichung die Quadratwurzel zieht. Dabei erhält man **zwei Werte** für x , welche sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden.

193. Dividiert man die allgemeine quadratische Gleichung durch den Koeffizienten des ersten Gliedes, so erhält man die **Normalform** der quadratischen Gleichung. $x^2 + ax + b = 0$.

194. Hierin wird $\left(\frac{a}{2}\right)^2$ die **quadratische Ergänzung** genannt.

195. **Erste Methode zur Auflösung der Normalform** der quadratischen Gleichung.

$$\begin{aligned} x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 &= \left(\frac{a}{2}\right)^2 - b \\ x + \frac{a}{2} &= \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b} \\ x_1 &= -\left(\frac{a}{2}\right) + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}, \quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}. \end{aligned}$$

196. **Zweite Methode zur Auflösung der Normalform** der quadratischen Gleichung.

$$\begin{aligned} x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b &= 0 \\ \left[x + \frac{a}{2}\right]^2 - \left[\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right]^2 &= 0 \\ \left[x + \frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] \left[x + \frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}\right] &= 0 \\ x_1 &= -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}, \quad x_2 = -\frac{a}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - b}. \end{aligned}$$

Eine durch zwei Punkte begrenzte Gerade wird **Strecke** genannt.

Lehrs. Zwei verschiedene gerade Linien können nicht mehr als einen Punkt gemeinsam haben, sie können sich nur **in einem Punkte schneiden**.

204. Eine **ebene Fläche** oder **Ebene** enthält jede Gerade in sich, welche durch irgend zwei ihrer Punkte geht.

205. Ein **Kreis** entsteht, wenn sich eine Strecke in einer Ebene um einen ihrer Endpunkte dreht, bis sie in ihre ursprüngliche Lage zurückkehrt.

Die Strecke beschreibt dabei die **Kreisfläche** und ihr beweglicher Endpunkt die **Kreislinie** oder **Peripherie**.

Ein Teil der Peripherie heisst **Bogen**.

Der feste Endpunkt der Strecke heisst **Mittelpunkt** oder **Zentrum**.

Eine Gerade, welche den Mittelpunkt mit einem Punkte der Peripherie verbindet, heisst **Radius** oder **Halbmesser**.

Eine Gerade, welche zwei Punkte der Peripherie verbindet, heisst **Sehne**.

Eine Sehne, welche durch den Mittelpunkt geht, heisst **Durchmesser**.

Durch einen Durchmesser wird ein Kreis in zwei **Halbkreise** geteilt.

Aufg. Um einen gegebenen Punkt mit einem gegebenen Radius den **Kreis zu schlagen**.

Lehrs. Radien desselben Kreises sind einander gleich.

Lehrs. Durchmesser desselben Kreises sind einander gleich.

206. Ein **Winkel** ist ein Teil einer Ebene, welcher durch zwei von einem Punkte ausgehende (unendlich lange) Gerade begrenzt wird.

Die Geraden werden **Schenkel**, ihr gemeinsamer Endpunkt wird **Scheitelpunkt** oder **Scheitel** genannt.

207. **Winkel sind einander gleich**, wenn sie so auf einander gelegt werden können, dass ihre Schenkel sich decken.

208. Ein Winkel, dessen Schenkel in die entgegengesetzten Richtungen einer Geraden fallen, heisst ein **gestreckter Winkel**.

Die Hälfte eines gestreckten Winkels heisst ein **rechter Winkel** oder **Rechter**.

Ein Neunzigstel eines Rechten heisst ein **Grad** ($^{\circ}$).

Ein Sechzigstel eines Grades heisst eine **Minute** ($'$).

Ein Sechzigstel einer Minute heisst eine **Sekunde** ($''$).

209. Die Schenkel eines rechten Winkels **stehen senkrecht auf einander**.

Der eine Schenkel eines rechten Winkels ist ein **Lot** oder eine **Senkrechte** auf dem anderen.

210. Ein **spitzer Winkel** ist kleiner als ein Rechter.

Ein **stumpfer** Winkel ist grösser als ein Rechter, aber kleiner als ein gestreckter Winkel.

Spitze, rechte und stumpfe Winkel werden **konkave** Winkel genannt.

Ein Winkel, welcher grösser als ein gestreckter Winkel ist, heisst ein **konvexer** Winkel.

211. Zwei (spitze) Winkel, welche zusammen einen Rechten betragen, heissen **Komplementwinkel**.

Zwei (konkave) Winkel, welche zusammen zwei Rechte betragen, heissen **Supplementwinkel**.

212. Zwei konkave Winkel heissen **Nebenwinkel**, wenn sie je einen Schenkel gemeinsam haben und ihre anderen Schenkel einen gestreckten Winkel bilden.

Lehrs. Nebenwinkel betragen zusammen zwei Rechte.

213. Zwei konkave Winkel heissen **Scheitelwinkel**, wenn die Schenkel des einen die Verlängerungen der Schenkel des anderen sind.

Lehrs. Scheitelwinkel sind einander gleich.

214. Werden zwei in einer Ebene liegende Gerade von einer dritten geschnitten, so entstehen acht Winkel, von denen die vier zwischen den geschnittenen Linien liegenden **innere**, die vier anderen **äussere** genannt werden.

Die Winkel mit verschiedenen Scheitelpunkten lassen sich auf vier Arten paarweise zusammenfassen:

Gegenwinkel sind ein innerer und ein äusserer an derselben Seite der schneidenden Linie.

(**Konjugierte Winkel** sind ein innerer und ein äusserer an verschiedenen Seiten der schneidenden Linie.)

Entgegengesetzte Winkel sind zwei innere oder zwei äussere an derselben Seite der schneidenden Linie.

Wechselwinkel sind zwei innere oder zwei äussere an verschiedenen Seiten der schneidenden Linie.

215. Parallele Linien oder **Parallelen** sind gerade Linien, welche in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, wie weit man sie auch verlängern mag.

Grundsatz. Durch einen Punkt ausserhalb einer Geraden kann nur **eine Parallele** zu derselben gezogen werden.

216. Lehrs. Sind zwei Gegenwinkel einander gleich, so sind die geschnittenen Linien einander parallel.

Lehrs. Sind zwei Wechselwinkel einander gleich, so sind die geschnittenen Linien einander parallel.

Lehrs. Betragen zwei entgegengesetzte Winkel zusammen zwei Rechte, so sind die geschnittenen Linien einander parallel.

Lehrs. Gegenwinkel an Parallelen sind einander gleich.

Lehrs. Wechselwinkel an Parallelen sind einander gleich.

Lehrs. Entgegengesetzte Winkel an Parallelen betragen zusammen zwei Rechte.

XV. Ebene Figuren. Dreiecke.

217. Ein ringsum begrenzter Teil einer Ebene heisst **Figur**. Die Grösse der Figur heisst ihr **Flächeninhalt** oder ihr **Inhalt**. Die Länge der die Figur begrenzenden Linie heisst ihr **Umfang**.

218. Wird eine Figur nur durch Gerade begrenzt, so heisst sie ein **Vieleck**.

Die Strecke einer Geraden, welche an der Begrenzung teilnimmt, heisst **Seite des Vielecks**.

Ein Punkt, in welchem zwei Seiten zusammenstossen, heisst **Ecke des Vielecks**.

Ein **Winkel des Vielecks** wird von zwei benachbarten Seiten desselben gebildet.

Ein **Aussenwinkel** wird von einer Seite des Vielecks und der Verlängerung der Nachbarseite gebildet.

Eine **Diagonale** ist eine Gerade, welche zwei nicht benachbarte Ecken des Vielecks verbindet.

Aufg. Die Anzahl der Diagonalen eines Vielecks von gegebener Seitenzahl zu berechnen.

219. **Lehrs.** Die **Summe zweier Seiten** eines Dreiecks ist grösser als die dritte.

Lehrs. Die **Differenz zweier Seiten** eines Dreiecks ist kleiner als die dritte.

220. **Lehrs.** Die **Summe der drei Winkel** eines Dreiecks beträgt zwei Rechte.

Aufg. Die Summe der Winkel eines Vielecks von gegebener Seitenzahl zu berechnen.

221. Ein **stumpfwinkliges** Dreieck enthält einen stumpfen Winkel.

Ein **rechtwinkliges** Dreieck enthält einen rechten Winkel.

Die den rechten Winkel einschliessenden Seiten heissen **Katheten**, die dritte Seite heisst **Hypotenuse**.

Durch einen gegebenen Punkt kann nur **eine Senkrechte** zu einer gegebenen Geraden gezogen werden.

222. **Lehrs.** Ein **Aussenwinkel eines Dreiecks** ist gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Dreieckswinkel.

223. Figuren heissen **kongruent**, wenn sie so auf einander gelegt werden können, dass ihre Grenzen sich decken.

Stücke (Seiten, Winkel usw.), welche sich dabei decken, entsprechen einander und werden **homologe Stücke** genannt.

Homologe Stücke in kongruenten Figuren sind einander gleich.

224. **Lehrs.** (Erster Kongruenzsatz). **Dreiecke sind kongruent**, wenn sie in je zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen.

225. Lehrs. (Zweiter Kongruenzsatz, erster Teil). **Dreiecke sind kongruent**, wenn sie in je einer Seite und den beiden anliegenden Winkeln übereinstimmen.

Lehrs. (Zweiter Kongruenzsatz, zweiter Teil). **Dreiecke sind kongruent**, wenn sie in je einer Seite, einem anliegenden Winkel und dem gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

226. Ein Dreieck mit zwei gleichen Seiten wird **gleichschenkelig**, die beiden gleichen Seiten darin werden **Schenkel** und die dritte Seite wird **Grundlinie** oder **Basis** genannt.

Die der letzteren gegenüberliegende Ecke heisst **Spitze**.

Lehrs. Die **Winkel an der Grundlinie** eines gleichschenkligen Dreiecks sind einander gleich.

Lehrs. In einem **Dreieck mit zwei gleichen Winkeln** sind auch die ihnen gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

227. Ein Dreieck mit drei gleichen Seiten heisst **gleichseitig**.

Lehrs. In einem **gleichseitigen Dreieck** ist jeder Winkel gleich 60° .

Lehrs. Ein Dreieck, in welchem **zwei Winkel gleich 60°** sind, ist gleichseitig.

228. Lehrs. Der **grösseren von zwei Seiten** eines Dreiecks liegt auch der grössere Winkel gegenüber.

Lehrs. Dem **grösseren von zwei Winkeln** eines Dreiecks liegt auch die grössere Seite gegenüber.

Unter allen Linien, welche man von einem gegebenen Punkte P nach einem Punkte der gegebenen Geraden L ziehen kann, ist die auf L senkrechte Gerade die kürzeste. Sie heisst die **Entfernung des Punktes P von der Geraden L**.

229. Lehrs. (Dritter Kongruenzsatz). **Dreiecke sind kongruent**, wenn sie in den drei Seiten übereinstimmen.

230. Lehrs. (Vierter Kongruenzsatz). **Dreiecke sind kongruent**, wenn sie in je zwei Seiten und dem der grösseren gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

231. Eine Gerade, welche von einer Ecke eines Dreiecks aus senkrecht zur gegenüberliegenden Seite bis zu dieser gezogen wird, heisst **Höhe**.

Die Seite, auf welcher die Höhe senkrecht steht, heisst die zugehörige **Grundlinie**.

Die Teile, in welche letztere durch den Höhenfusspunkt geteilt wird, heissen **Höhenabschnitte**.

Eine Gerade, welche eine Ecke eines Dreiecks mit der Mitte der gegenüberliegenden Seite verbindet, wird **Mittellinie** oder **Schwerlinie** genannt.

Eine Gerade, welche einen Dreieckswinkel halbiert und bis zur gegenüberliegenden Seite reicht, heisst **Winkelhalbierungslinie**.

232. Lehrs. In einem **gleichschenkligen Dreieck** fallen die Höhe, die Mittellinie und die Winkelhalbierungslinie, welche von der Spitze ausgehen, in eine Gerade zusammen.

233. Lehrs. Haben zwei gleichschenklige Dreiecke gemeinschaftliche Grundlinie, so ist die Verbindungslinie ihrer Spitzen zugleich Höhe, Mittellinie und Winkelhalbierungslinie in beiden Dreiecken.

Die Gerade, welche im Mittelpunkt einer Strecke auf ihr senkrecht steht, wird die **Mittelsenkrechte** der Strecke genannt.

234. Aufgaben.

- a) Ein Dreieck aus den drei Seiten zu zeichnen.
- b) **An** eine gegebene Gerade **in** einem gegebenen Punkte einen gegebenen Winkel **anzutragen**.
- c) Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden **die** Parallele zu ziehen.
- d) Ein Dreieck aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel zu zeichnen.
- e) Ein Dreieck aus zwei Seiten und einem der nicht von ihnen eingeschlossenen Winkel zu zeichnen.
- f) Ein Dreieck aus einer Seite und zwei Winkeln zu zeichnen.
- g) Auf **einer** gegebenen Geraden **in** einem gegebenen Punkte die Senkrechte zu **errichten**.
- h) Auf **eine** gegebene Gerade **von** einem gegebenen Punkte die Senkrechte zu **fällen**.
- i) Eine gegebene Strecke zu halbieren.
- k) Einen gegebenen Winkel zu halbieren.

XVI. Vierecke.

235. Ein Viereck, in welchem zwei gegenüberliegende Seiten einander parallel sind, heisst ein **Trapez**.

Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten einander parallel sind, heisst ein **Parallelogramm**.

236. Lehrs. Ein **Parallelogramm** wird durch eine Diagonale in zwei einander kongruente Dreiecke geteilt.

Lehrs. In einem **Parallelogramm** sind die gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

Lehrs. In einem **Parallelogramm** sind die gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Lehrs. In einem **Parallelogramm** halbieren die Diagonalen einander.

237. Ein **Parallelogramm** mit vier gleichen Seiten heisst ein **Rhombus**.

Ein **Parallelogramm** mit vier gleichen Winkeln heisst ein **Rechteck**.

Ein Viereck mit vier gleichen Seiten und vier gleichen Winkeln heisst ein **Quadrat**.

Lehrs. In einem **Rhombus** stehen die Diagonalen auf einander senkrecht.

Lehrs. In einem Rechteck sind die Diagonalen einander gleich.

238. Lehrs. Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind, ist ein Parallelogramm.

Lehrs. Ein Viereck, in welchem zwei Seiten gleich und parallel sind, ist ein Parallelogramm.

Lehrs. Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich sind, ist ein Parallelogramm.

Lehrs. Ein Viereck, in welchem die Diagonalen einander halbieren, ist ein Parallelogramm.

Aufg. Durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden die Parallele zu ziehen.

239. Lehrs. Schneiden drei oder mehr Parallelen aus einer Geraden gleiche Stücke aus, so schneiden sie auch aus jeder anderen Geraden gleiche Stücke aus.

Aufg. Eine gegebene Strecke in eine gegebene Anzahl von gleichen Teilen zu teilen.

240. Die Senkrechte, welche man von einem Punkte einer von zwei Parallelen auf die andere fällt, heisst die Entfernung der beiden Parallelen von einander.

Aufg. Zu einer gegebenen Geraden in einer gegebenen Entfernung eine Parallele zu ziehen.

241. Ein geometrischer Ort ist die Gesamtheit aller Punkte, welche einer bestimmten Bedingung genügen. Er besteht in der Planimetrie aus einer oder mehreren geraden oder krummen Linien.

Soll ein Punkt einer bestimmten Bedingung genügen, so muss er also auf dem entsprechenden geometrischen Orte liegen.

- a) Der g. O. für einen Punkt, welcher mit zwei anderen gegebenen Punkten auf einer Geraden liegen soll, ist die durch die beiden gegebenen Punkte gehende Gerade.
- b) Der g. O. für einen Punkt, dessen Verbindungslinie mit einem gegebenen Punkte mit einer durch diesen Punkt gehenden gegebenen Geraden einen gegebenen Winkel bilden soll, ist der freie Schenkel des Winkels, wenn derselbe in dem gegebenen Punkte an die gegebene Gerade angetragen wird.
- c) Der g. O. für einen Punkt, welcher von einem gegebenen Punkte P um eine gegebene Strecke x entfernt ist, ist der mit dem Radius x um P geschlagene Kreis.
- d) Der g. O. für einen Punkt, welcher von zwei gegebenen Punkten P_1 und P_2 gleich weit entfernt ist, ist die Mittel senkrechte von $P_1 P_2$.
- e) Der g. O. für einen Punkt, welcher von einer gegebenen Geraden L um eine gegebene Strecke x entfernt ist, wird von den beiden in der Entfernung x zu L gezogenen Parallelen gebildet.
- f) Der g. O. für einen Punkt, welcher von zwei gegebenen Geraden L_1 und L_2 gleich weit entfernt ist, wird von den beiden Geraden gebildet, welche die von L_1 und L_2 gebildeten Winkel halbieren.

XVII. Kreise.

242. Ein Teil eines Kreises, welcher von zwei Radien und dem dazwischenliegenden Bogen begrenzt wird, heisst **Kreisabschnitt** oder **Sektor**.

Ein Teil eines Kreises, welcher von einer Sehne und dem zwischen ihren Endpunkten liegenden Bogen begrenzt wird, heisst **Kreisabschnitt** oder **Segment**.

243. Ein Winkel, dessen Schenkel Radien eines Kreises sind, heisst **Zentriwinkel**.

Ein Winkel, dessen Schenkel Sehnen eines Kreises sind und dessen Scheitel auf der Peripherie desselben liegt, heisst **Peripheriewinkel**.

244. **Lehrs.** Zu **gleichen Zentriwinkeln** eines Kreises gehören kongruente Sektoren, gleiche Sehnen und gleiche Bogen.

245. **Lehrs.** Ein **Zentriwinkel** ist doppelt so gross als ein **Peripheriewinkel**, welcher mit ihm auf demselben Bogen steht.

Lehrs. **Peripheriewinkel** über gleichen Bogen desselben Kreises sind einander gleich.

246. **Lehrs.** Der **Peripheriewinkel** über (oder in) einem **Halbkreise** ist ein **Rechter**.

Geom. Ort. Der g. O. für die Spitze eines rechtwinkligen Dreiecks mit der Hypotenuse AB ist der über dem Durchmesser AB geschlagene Halbkreis.

247. Eine Gerade, welche die Peripherie eines Kreises in zwei Punkten schneidet, heisst **Sekante** des Kreises.

Eine Gerade, welche mit der Peripherie eines Kreises nur einen Punkt gemeinsam hat, heisst **Tangente** des Kreises.

Die Tangente und der Kreis **berühren** einander. Der gemeinsame Punkt beider heisst ihr **Berührungspunkt**.

248. **Lehrs.** Eine **Tangente** steht auf dem nach dem Berührungspunkte gezogenen Radius senkrecht.

Aufg. An einen gegebenen Kreis durch einen gegebenen Punkt eine **Tangente** zu ziehen.

Geom. Ort. Der g. O. für den Mittelpunkt eines Kreises, welcher eine gegebene Gerade in einem gegebenen Punkte berührt, ist die in dem Punkte auf der Geraden errichtete Senkrechte.

Geom. Ort. Der g. O. für den Mittelpunkt eines Kreises mit dem gegebenen Radius r , welcher eine gegebene Gerade berührt, besteht aus den beiden zu der Geraden in der Entfernung r gezogenen Parallelen.

249. **Lehrs.** Zieht man von einem Punkte P ausserhalb eines Kreises die **beiden Tangenten** an denselben, so sind die Abschnitte bis zu den Berührungspunkten einander gleich und so halbiert die von P nach dem Mittelpunkte des Kreises gezogene Gerade den Winkel zwischen den Tangenten und den Winkel zwischen den Berührungsradien.

Lehrs. Die **Halbierungslinie des Winkels**, welchen zwei **Tangenten** eines Kreises mit einander bilden, geht durch den **Mittelpunkt** desselben.

Geom. Ort. Der g. O. für den **Mittelpunkt** eines Kreises, welcher zwei gegebene Gerade berührt, besteht aus den **Halbierungslinien** der Winkel, welche die Geraden mit einander bilden.

Aufg. Einen Kreis zu zeichnen, welcher **drei gegebene Gerade** berührt.

250. Lehrs. Die **Mittelsenkrechte einer Sehne** eines Kreises geht durch den **Mittelpunkt** desselben.

Geom. Ort. Der g. O. für den **Mittelpunkt** eines Kreises, welcher durch zwei gegebene Punkte P_1 und P_2 geht, ist die **Mittelsenkrechte** von $P_1 P_2$.

Aufg. Einen Kreis zu zeichnen, welcher durch **drei gegebene Punkte** geht.

251. Ein Winkel, welcher von einer **Tangente** eines Kreises und einer durch den **Berührungspunkt** gehenden **Sehne** desselben gebildet wird, heisst **Sehnentangentenwinkel**.

Lehrs. Ein **Sehnentangentenwinkel** ist gleich dem **Peripheriewinkel** über dem zwischen seinen Schenkeln liegenden **Bogen**.

Aufg. Einen **Bogen** zu zeichnen, welcher über einer gegebenen **Strecke AB** als **Sehne** einen gegebenen Winkel als **Peripheriewinkel** fasst.

Geom. Ort. Der g. O. für die **Spitze** eines Dreiecks mit der gegebenen Seite **AB** und dem gegebenen gegenüberliegenden Winkel γ ist der **Bogen**, welcher über **AB** als **Sehne** den Winkel γ als **Peripheriewinkel** fasst.

252. Die Gerade, welche die **Mittelpunkte** zweier Kreise mit einander verbindet, heisst **Zentrale**.

Wenn zwei Kreise sich **schneiden**, so haben ihre **Peripherien** **zwei Punkte** gemeinsam.

253. Haben die **Peripherien** zweier Kreise nur **einen Punkt** gemeinsam, so **berühren die Kreise einander**.

Lehrs. Wenn **zwei Kreise einander berühren**, so geht die **Zentrale** durch den **Berührungspunkt**.

Geom. Ort. Der g. O. für den **Mittelpunkt** eines Kreises, welcher einen gegebenen Kreis in einem gegebenen Punkte berührt, ist die Gerade, welche durch den **Mittelpunkt** des gegebenen Kreises und den gegebenen **Berührungspunkt** geht.

Geom. Ort. Der g. O. für den **Mittelpunkt** eines Kreises mit dem **Radius** r , welcher einen gegebenen Kreis mit dem **Mittelpunkt** M_1 und dem **Radius** r_1 berührt, besteht aus den mit den **Radien** $r_1 + r$ und $r_1 - r$ um M_1 geschlagenen Kreisen.

254. Wenn die **Zentrale** zweier Kreise grösser als die **Summe** ihrer **Radien** ist, so haben sie **keinen Punkt** gemeinsam. Es gilt dann **zwei innere** und **zwei äussere gemeinschaftliche Tangenten** beider Kreise.

Aufg. An zwei gegebene Kreise die gemeinschaftlichen Tangenten zu ziehen.

255. Ein Kreis, welcher durch sämtliche Ecken eines Vielecks geht, heisst der **umgeschriebene Kreis** oder der **Umkreis** des Vielecks. Das Vieleck heisst ein **Sehnenvieleck** und ist dem Kreise eingeschrieben.

Ein Kreis, welcher sämtliche Seiten eines Vielecks berührt und innerhalb desselben liegt, heisst der **eingeschriebene Kreis** oder der **Inkreis** des Vielecks. Das Vieleck heisst ein **Tangentenvieleck** und ist dem Kreise umgeschrieben.

256. Lehrs. Die **drei Mittelsenkrechten** der Seiten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem **Mittelpunkte des Umkreises des Dreiecks**.

Lehrs. Die **drei Höhen** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte (dem **Höhenpunkte**).

Lehrs. Die **drei Winkelhalbierungslinien** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte, dem **Mittelpunkte des Inkreises** des Dreiecks.

Lehrs. Die **Halbierungslinie eines Dreieckswinkels** und die Halbierungslinien der an den **beiden** anderen Winkeln liegenden **Aussenwinkel** schneiden sich in einem Punkte, dem **Mittelpunkte eines der drei Ankreise** des Dreiecks.

257. Lehrs. In einem **Sehnenviereck** betragen je zwei einander gegenüberliegende Winkel zusammen zwei Rechte.

Lehrs. In einem **Tangentenviereck** sind die Summen je zweier gegenüberliegender Seiten einander gleich.

258. Ein Vieleck mit lauter gleichen Seiten und lauter gleichen Winkeln heisst ein **regelmässiges Vieleck**.

Lehrs. Um und in ein **regelmässiges Vieleck** lässt sich ein Kreis zeichnen. Die **Mittelpunkte** beider Kreise **fallen zusammen**.

XVIII. Gleichheit von Figuren.

259. Bei einem Parallelogramm kann man eine beliebige Seite als **Grundlinie** und ihre Entfernung von der gegenüberliegenden Seite als **zugehörige Höhe** ansehen.

Lehrs. **Parallelogramme** von gleicher Grundlinie und gleicher zugehöriger Höhe haben gleichen Inhalt (vergl. No. 217).

Lehrs. **Dreiecke** von gleicher Grundlinie und gleicher zugehöriger Höhe haben gleichen Inhalt.

Geom. Ort. Der g. O. für die Spitze eines Dreiecks, welches die Seite AB und mit dem gegebenen Dreieck ABC gleichen Inhalt hat, ist die durch C zu AB gezogene Parallele.

260. Man **verwandelt** eine Figur, indem man eine andere Figur von gleichem Inhalte zeichnet, welche sich von der gegebenen Figur durch ihre Gestalt unterscheidet.

Aufgaben:

- a) Ein gegebenes Vieleck in ein anderes zu verwandeln, welches eine Seite weniger als das gegebene hat.
 - b) Ein gegebenes Dreieck in ein Parallelogramm zu verwandeln.
 - c) Ein gegebenes Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.
- 261. Aufg.** Ein gegebenes **Dreieck** durch Gerade, welche durch eine Ecke gehen, in eine gegebene Anzahl von **gleichen Teilen** zu teilen.

262. Lehrs. Zieht man durch einen Punkt einer Diagonale eines Parallelogramms Parallelen zu den Seiten, so sind die von der Diagonale nicht geschnittenen Parallelogramme einander gleich (**Ergänzungsparallelogramme**).

Aufg. Ein gegebenes Parallelogramm mit Beibehaltung seiner Winkel in ein anderes mit gegebener Seite zu verwandeln.

263. Lehrs. In einem **rechtwinkligen Dreieck** ist das Quadrat über einer Kathete gleich dem Rechteck aus der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Höhenabschnitte.

Lehrs. (des **Pythagoras**, um 550 v. Chr.). In einem **rechtwinkligen Dreieck** ist das Quadrat über der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten.

Lehrs. In einem **rechtwinkligen Dreieck** ist das Quadrat über der (zur Hypotenuse gehörigen) Höhe gleich dem Rechteck aus den beiden Höhenabschnitten.

264. Aufgaben:

- a) Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.
- b) Ein gegebenes Quadrat in ein Rechteck mit gegebener Seite zu verwandeln.
- c) Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich der Summe (oder gleich der Differenz) zweier gegebener Quadrate ist
- d) Ein Quadrat zu zeichnen, welches gleich einem gegebenen Vielfachen eines gegebenen Quadrates ist.

265. Fällt man von den Endpunkten einer Strecke auf eine Gerade die Senkrechten, so heisst die Entfernung der Fusspunkte der Senkrechten von einander die **Projektion der Strecke auf die Gerade**.

Lehrs. Projiziert man zwei **Dreiecksseiten auf einander**, so sind die Rechtecke aus je einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie einander gleich.

Lehrs. Das **Quadrat über einer Dreiecksseite**, welche einem spitzen (oder stumpfen) Winkel gegenüberliegt, ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten vermindert (oder vermehrt) um das doppelte Rechteck aus einer dieser Seiten und der Projektion der anderen auf sie.

XIX. Berechnung des Inhaltes von Figuren.

266. Alle bei der Berechnung des Inhaltes von Figuren zu benutzenden Strecken müssen mit derselben **Längeneinheit** gemessen werden.

Das Quadrat, dessen Seite gleich dieser Längeneinheit ist, ist die **Flächeneinheit**.

Jeder Strecke entspricht dann eine bestimmte Zahl.

Sollen zwei **Strecken** mit einander **multipliziert** werden, so werden die ihnen entsprechenden Zahlen mit einander multipliziert und das Produkt derselben gibt die Anzahl der Flächeneinheiten, welche das **Produkt der Strecken** enthält.

267. Lehrs. Der Inhalt eines **Rechtecks** ist gleich dem Produkt zweier aneinander stossender Seiten.

Lehrs. Der Inhalt eines **Parallelogramms** ist gleich dem Produkt der Grundlinie und der zugehörigen Höhe.

Lehrs. Der Inhalt eines **Dreiecks** ist gleich dem halben Produkt aus der Grundlinie und der zugehörigen Höhe.

XX. Proportionen von Strecken. Ähnlichkeit von Figuren. Stetige Teilung.

268. Gerade Linien, welche sich in einem Punkte schneiden, heissen **Strahlen**. Sie bilden ein **Strahlenbüschel** und ihr Schnittpunkt wird **Scheitelpunkt** desselben genannt.

Lehrs. (Erster Strahlensatz.) Werden **Strahlen von Parallelen** geschnitten, so verhalten sich die Abschnitte eines Strahles wie die entsprechenden eines anderen Strahles und die Abschnitte auf den Parallelen wie die entsprechenden vom Scheitelpunkte begrenzten Abschnitte eines Strahles.

Aufg. Zu drei gegebenen Strecken die **vierte Proportionale** zu konstruieren.

269. Eine Strecke wird durch einen ihrer Punkte **innerlich** geteilt. Jeder der beiden Abschnitte reicht von dem Teilpunkte bis zu einem Endpunkt der Strecke. Die **Summe** der Abschnitte ist gleich der Strecke.

Eine Strecke wird durch einen Punkt ihrer Verlängerung **äusserlich** geteilt. Jeder der beiden Abschnitte reicht von dem Teilpunkt bis zu einem Endpunkt der Strecke. Die **Differenz** der Abschnitte ist gleich der Strecke.

Aufg. Eine gegebene **Strecke** innerlich resp. äusserlich in einem gegebenen **Verhältnis** zu teilen.

270. Figuren heissen **ähnlich**, wenn ihre Seiten proportioniert und die zwischen entsprechenden Seiten liegenden Winkel einander gleich sind.

Aufg. Ein Vieleck mit einer gegebenen Seite zu zeichnen, welches einem gegebenen Vieleck ähnlich ist.

Lehrs. Eine **Parallele zu einer Dreiecksseite** schneidet ein dem gegebenen ähnliches Dreieck ab.

271. Lehrs. (Erster Ähnlichkeitssatz.) **Dreiecke sind ähnlich**, wenn in ihnen je zwei Seiten proportioniert und die eingeschlossenen Winkel einander gleich sind.

Lehrs. (Zweiter Ähnlichkeitssatz.) **Dreiecke sind ähnlich**, wenn in ihnen je zwei Winkel bezüglich gleich sind.

Lehrs. (Dritter Ähnlichkeitssatz.) **Dreiecke sind ähnlich**, wenn in ihnen die drei Seiten proportioniert sind.

Lehrs. (Vierter Ähnlichkeitssatz.) **Dreiecke sind ähnlich**, wenn in ihnen je zwei Seiten proportioniert und die den grösseren gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind.

272. Die Seiten, welche in **ähnlichen** Figuren einander entsprechen (vergl. No. 270), heissen **homologe Seiten**.

Linien, welche man in ähnlichen Figuren durch dieselbe Konstruktion erhält, heissen **homologe Linien**.

Winkel, welche in ähnlichen Figuren zwischen homologen Linien liegen, heissen **homologe Winkel**.

Lehrs. In **ähnlichen Figuren** verhalten sich homologe Linien wie homologe Seiten und sind homologe Winkel einander gleich.

273. Lehrs. Die **drei Mittellinien** eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkte (dem **Schwerpunkte** des Dreiecks) und teilen sich im Verhältnisse 2 : 1.

Lehrs. **Zwei Höhen** eines Dreiecks verhalten sich umgekehrt wie die zugehörigen Grundlinien.

Lehrs. Die **Halbierungslinie** eines **Dreieckswinkels** teilt die gegenüberliegende Seite innerlich im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Lehrs. Die **Halbierungslinie** eines **Aussenwinkels** eines **Dreiecks** teilt die gegenüberliegende Seite äusserlich im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Geom. Ort. Den g. O. für die Ecke C eines Dreiecks mit der gegebenen Seite AB und dem gegebenen Verhältnis der beiden anderen Seiten erhält man, indem man AB innerlich und äusserlich in dem gegebenen Verhältnisse teilt und über der durch die Teilpunkte begrenzten Strecke als Durchmesser den Kreis beschreibt.

274. Lehrs. In einem **rechtwinkligen Dreieck** ist eine Kathete die mittlere Proportionale zu der Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Höhenabschnitte (vergl. No. 263).

Lehrs. In einem **rechtwinkligen Dreieck** ist die zur Hypotenuse gehörige Höhe die mittlere Proportionale zu den beiden Höhenabschnitten (vergl. No. 263).

Aufg. Zu zwei gegebenen Strecken die **mittlere Proportionale** zu konstruieren.

275. Lehrs. Die Inhalte von **Dreiecken mit gleichen Grundlinien** verhalten sich wie die zugehörigen Höhen.

Lehrs. Die Inhalte von **Dreiecken mit gleichen Höhen** verhalten sich wie die zugehörigen Grundlinien.

Lehrs. Die Inhalte von **Dreiecken, welche in einem Winkel übereinstimmen**, verhalten sich wie die Produkte der den Winkel einschliessenden Seiten.

Lehrs. Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Aufg. Ein gegebenes Dreieck durch Parallelen zu einer Seite in eine gegebene Anzahl von gleichen Teilen zu teilen.

276. Lehrs. Die Inhalte ähnlicher Vielecke verhalten sich wie die Quadrate homologer Seiten.

Lehrs. Die Umfänge ähnlicher Vielecke verhalten sich wie homologe Seiten.

277. Lehrs. Regelmässige Vielecke von gleicher Seitenzahl sind einander ähnlich.

Lehrs. Die Umfänge regelmässiger Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Radien ihrer Umkreise.

Lehrs. Die Inhalte regelmässiger Vielecke von gleicher Seitenzahl verhalten sich wie die Quadrate der Radien ihrer Umkreise.

278. Lehrs. Die Umfänge von Kreisen verhalten sich wie ihre Radien.

Lehrs. Die Inhalte von Kreisen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Radien.

Lehrs. Der Umfang eines Kreises mit dem Radius r ist gleich $2r\pi$.

Lehrs. Der Inhalt eines Kreises mit dem Radius r ist gleich $r^2\pi$.

Näherungswerte für π sind folgende: $\frac{22}{7}$; $\frac{355}{113}$; 3,1416.

279. Lehrs. Der Inhalt eines Kreises ist gleich dem eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich der Peripherie des Kreises und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist.

Lehrs. Der Inhalt eines Kreissektors ist gleich dem halben Produkt aus dem zugehörigen Bogen und dem Radius des Kreises.

280. Lehrs. Bogen desselben Kreises verhalten sich wie die zugehörigen Zentriwinkel.

281. Lehrs. (Zweiter Strahlensatz.) Werden Strahlen von einem Kreise geschnitten, so sind die Produkte aus den vom Scheitelpunkt begrenzten Abschnitten je eines Strahles einander gleich.

Der Scheitelpunkt kann dabei sowohl innerhalb als ausserhalb des Kreises liegen.

Fallen die Schnittpunkte eines Strahles mit dem Kreise in einen Punkt zusammen, so ist der Strahl eine Tangente des Kreises.

Aufgaben:

a) Zu drei gegebenen Strecken die vierte Proportionale zu konstruieren (vergl. No. 268).

b) Zu zwei gegebenen Strecken die mittlere Proportionale zu konstruieren (vergl. No. 274).

282. Eine Strecke heisst stetig geteilt, wenn ihr grösserer Abschnitt die mittlere Proportionale zu der ganzen Strecke und ihrem kleineren Abschnitte ist.

Lehrs. Trägt man den kleineren Abschnitt einer stetig geteilten Strecke auf dem grösseren Abschnitte ab, so ist dieser stetig geteilt.

Lehrs. Verlängert man eine stetig geteilte Strecke um ihren grösseren Abschnitt, so entsteht wieder eine stetig geteilte Strecke.

Aufgaben:

- a) Eine stetig geteilte Strecke aus ihrem grösseren Abschnitte zu zeichnen.
b) Eine gegebene Strecke stetig zu teilen.

283. Lehrs. Die Seite eines regelmässigen Zehnecks ist gleich dem grösseren Abschnitte des stetig geteilten Radius des Umkreises des Zehnecks.

XXI. Konstruktion algebraischer Ausdrücke.

284. Aufg. Aus den gegebenen Strecken m , n und p soll die Strecke x nach folgenden Gleichungen konstruiert werden:

a) $x = m + n$ b) $x = m - n$ c) $x = \sqrt{m^2 + n^2}$ d) $x = \sqrt{m^2 - n^2}$
e) $x = \sqrt{mn}$ f) $x = \frac{m^2}{n}$ g) $x = \frac{mn}{p}$ h) $x^2 \pm mx \pm n^2 = 0$.

XXII. Berechnungen bei Dreiecken und regelmässigen Vielecken.

285. Rechtwinkliges Dreieck. Bezeichnen a und b die Katheten, c die Hypotenuse, h die Höhe auf der Hypotenuse, p und q die entsprechenden Höhenabschnitte und \mathcal{A} den Inhalt des Dreiecks, so gelten folgende Gleichungen (vergl. No. 263 und 267).

$$\begin{aligned} a^2 &= cp, & a^2 + b^2 &= c^2, & h^2 &= pq, \\ b^2 &= cq, & p + q &= c, & \mathcal{A} &= \frac{ch}{2} = \frac{ab}{2}. \end{aligned}$$

286. Gleichseitiges Dreieck. Bezeichnet a die Seite, h die Höhe, r den Radius des Umkreises, ρ den Radius des Inkreises und \mathcal{A} den Inhalt des Dreiecks, so lassen sich folgende Gleichungen ableiten:

$$h = \frac{a}{2} \sqrt{3}, \quad r = \frac{a}{3} \sqrt{3}, \quad \rho = \frac{a}{6} \sqrt{3}, \quad \mathcal{A} = \frac{a^2}{4} \sqrt{3}.$$

287. Ungleichseitiges Dreieck mit den Seiten a , b und c . Bezeichnet man $\frac{a+b+c}{2}$ mit s , so erhält man

1. die Abschnitte, in welche die Seiten durch die Berührungspunkte des Inkreises geteilt werden

	auf a	auf b	auf c
an A gelegen		$= s - a$	$= s - a$
an B gelegen	$= s - b$		$= s - b$
an C gelegen	$= s - c$	$= s - c$	

2. die **Abschnitte**, in welche die **Seiten** durch die Berührungspunkte des **Ankreises** geteilt werden, der die Seite a von aussen berührt,

	auf a	auf b	auf c
an A gelegen		$= s$	$= s$
an B gelegen	$= s - c$		$= s - c$
an C gelegen	$= s - b$	$= s - b$	

3. die **Höhenabschnitte**

	auf a	auf b	auf c
an A gelegen		$= \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2b}$	$= \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2c}$
an B gelegen	$= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a}$		$= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2c}$
an C gelegen	$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$	$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$	

4. den **Inhalt** $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,

5. die **Höhen** $h_a = \frac{2\Delta}{a}$, $h_b = \frac{2\Delta}{b}$, $h_c = \frac{2\Delta}{c}$,

6. den **Radius** des **Inkreises** und die **Radien** der drei **Ankreise**

$$\varrho = \frac{\Delta}{s}, \quad \varrho_a = \frac{\Delta}{s-a}, \quad \varrho_b = \frac{\Delta}{s-b}, \quad \varrho_c = \frac{\Delta}{s-c},$$

7. den **Radius** des **Umkreises** $r = \frac{abc}{4\Delta}$.

288. Zwischen den Grössen ϱ , ϱ_a , ϱ_b , ϱ_c , Δ und r bestehen folgende **Beziehungen**:

$$1. \quad \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho}, \quad 2. \quad \Delta = \sqrt{\varrho \varrho_a \varrho_b \varrho_c},$$

$$3. \quad \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r.$$

289. Aus dem **Radius** eines **Kreises** r kann man die **Seite** des dem **Kreise eingeschriebenen regelmässigen n-Ecks** s_n , seinen **Inhalt** i_n , die **Seite** des dem **Kreise umgeschriebenen regelmässigen n-Ecks** S_n und dessen **Inhalt** I_n berechnen. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 s_4 &= r \sqrt{2}, & i_4 &= 2r^2, & S_4 &= 2r, \\
 s_8 &= r \sqrt{2 - \sqrt{2}}, & i_8 &= 2r^2 \sqrt{2}, & S_8 &= 2r (\sqrt{2} - 1), \\
 s_6 &= r, & i_6 &= \frac{3r^2}{2} \sqrt{3}, & S_6 &= \frac{2r}{3} \sqrt{3}, \\
 s_{12} &= r \sqrt{2 - \sqrt{3}}, & i_{12} &= 3r^2, & S_{12} &= 2r (2 - \sqrt{3}), \\
 s_{10} &= \frac{r}{2} (\sqrt{5} - 1), & i_{10} &= \frac{5r^2}{4} \sqrt{2 (5 - \sqrt{5})}, & S_{10} &= \frac{2r}{5} \sqrt{5 (5 - 2 \sqrt{5})}, \\
 I_4 &= 4r^2, \\
 I_8 &= 8r^2 (\sqrt{2} - 1), \\
 I_6 &= 2r^2 \sqrt{3}, \\
 I_{12} &= 12r^2 (2 - \sqrt{3}), \\
 I_{10} &= 2r^2 \sqrt{5 (5 - 2 \sqrt{5})}.
 \end{aligned}$$

290. Durch Berechnung der Umfänge des einem Kreise mit dem Radius r eingeschriebenen regelmässigen 6-Ecks, 12-Ecks, 24-Ecks, 48-Ecks usw. erhält man Werte, welche kleiner als der Umfang des Kreises sind, demselben aber immer näher kommen. Durch Berechnung der Umfänge der entsprechenden dem Kreise umgeschriebenen regelmässigen Vielecke erhält man eine zweite Reihe von Werten, welche sich dem Umfang des Kreises immer mehr nähern, aber beständig grösser als derselbe sind. Dadurch wird der Wert für den **Umfang des Kreises** in immer engere Grenzen eingeschlossen und der **Näherungswert** für π immer genauer bestimmt (vergl. No. 278).

C. Trigonometrie.

XXIII. Trigonometrische Funktionen.

Rechtwinklige Dreiecke.

291. Rechtwinklige Dreiecke, welche in einem ihrer spitzen Winkel übereinstimmen, sind einander ähnlich und haben gleiche Verhältnisse je zweier Seiten. Diese Verhältnisse heissen **trigonometrische Funktionen** des Winkels. Die wichtigsten derselben sind folgende:

Der **Sinus** eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis der gegenüberliegenden Kathete zur Hypotenuse.

Der **Kosinus** eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis der anliegenden Kathete zur Hypotenuse.

Die **Tangente** eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis der gegenüberliegenden zur anliegenden Kathete.

Die **Kotangente** eines spitzen Winkels im rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis der anliegenden zur gegenüberliegenden Kathete.

$$\sin \alpha = a : c, \cos \alpha = b : c, \tan \alpha = a : b, \cot \alpha = b : a.$$

292. Lehrs. Der Sinus eines Winkels ist gleich dem Kosinus seines Komplementwinkels.

Lehrs. Der Kosinus eines Winkels ist gleich dem Sinus seines Komplementwinkels.

Lehrs. Die Tangente eines Winkels ist gleich der Kotangente seines Komplementwinkels.

Lehrs. Die Kotangente eines Winkels ist gleich der Tangente seines Komplementwinkels.

293. Wenn Winkel α von 0 bis 90° wächst, so wächst $\sin \alpha$ von 0 bis 1 und $\tan \alpha$ von 0 bis ∞ (unendlich), dagegen nimmt $\cos \alpha$ von 1 bis 0 und $\cot \alpha$ von ∞ bis 0 ab.

Die Werte dieser Funktionen und ihrer Logarithmen sind in **Tafeln** zusammengestellt und daraus zu entnehmen.

294. Die Funktionen des Winkels α stehen zu einander in folgenden **Beziehungen**:

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha &= 1, & \tan \alpha &= \sin \alpha : \cos \alpha, \\ \tan \alpha \cdot \cot \alpha &= 1, & \cot \alpha &= \cos \alpha : \sin \alpha. \end{aligned}$$

295. Aufg. Berechnung der Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks, wenn gegeben sind

1. a und b,
2. a und c,
3. a und α ,
4. b und α ,
5. c und α .

296. Aufg. Berechnung der Seiten, der Winkel und des Inhaltes von gleichschenkligen Dreiecken, Trapezen und regelmässigen Vielecken aus gegebenen Stücken durch Zerlegung der Figuren in rechtwinklige Dreiecke.

D. Stereometrie.

XXIV. Vielfache (Polyeder). Kugel.

297. Eine Gerade steht auf einer Ebene senkrecht, wenn sie auf zwei in derselben liegenden Geraden senkrecht steht.

Zwei verschiedene Ebenen schneiden sich im allgemeinen in einer Geraden.

Zwei Ebenen heissen **parallel**, wenn sie sich nicht schneiden, wie weit man sie auch ausdehnen mag.

Parallele Ebenen werden durch eine andere Ebene in **parallelen Geraden** geschnitten.

298. Ein Körper, welcher nur von Ebenen begrenzt wird, heisst ein **Vielflach**.

Die das Vielflach begrenzenden Ebenen heissen **Flächen** des Körpers.

Die Summe der Inhalte der Flächen heisst die **Oberfläche** des Körpers.

Die Geraden, in welchen sich zwei benachbarte Flächen schneiden, heissen **Kanten**.

Die Punkte, in welchen drei oder mehr Kanten zusammenstossen, heissen **Ecken**.

Eine Gerade, welche zwei nicht benachbarte Ecken eines Vielflaches verbindet, heisst eine **Körperdiagonale**.

299. Eulersche Beziehung. Die Summe der Anzahl der Ecken und der Anzahl der Flächen eines Vielflaches ist um 2 grösser als die Anzahl seiner Kanten.

300. Eine **Kugel** ist von einer krummen Fläche begrenzt, deren Punkte sämtlich von einem festen Punkte (dem **Mittelpunkte der Kugel**) gleiche Entfernung (**Radius der Kugel**) haben.

Eine **Ebene berührt** eine Kugel, wenn sie nur einen Punkt mit der Kugeloberfläche gemeinsam hat. Der Berührungsradius steht dann senkrecht auf der Ebene.

301. Eine Kugel, welche durch sämtliche Ecken eines Vielflachs geht, heisst die **umgeschriebene Kugel** oder die **Umkugel** des Vielflachs. Das letztere ist der Kugel eingeschrieben.

Eine Kugel, welche sämtliche Flächen eines Vielflachs berührt, und innerhalb desselben liegt, heisst die **eingeschriebene Kugel** oder die **Inkugel** des Vielflachs. Das letztere ist der Kugel umgeschrieben.

XXV. Prismen. Pyramiden.

302. Ein **n-seitiges Prisma** ist von zwei einander parallelen **Grundflächen** (kongruente n-Ecke) und n **Seitenflächen** (Parallelogramme) begrenzt.

Es hat $2n$ **Grundkanten**, n unter einander parallele gleich lange **Seitenkanten** und $2n$ **Ecken**.

Die Senkrechte, welche man von einem Punkte einer der Grundflächen auf die andere fällt, heisst die **Höhe** des Prismas.

Ein Prisma heisst **gerade**, wenn seine Seitenkanten senkrecht auf den Grundflächen stehen. Anderen Falles heisst es **schief**.

Ein Prisma heisst **regelmässig**, wenn es gerade ist und seine Grundflächen regelmässige Vielecke sind.

303. Ein Prisma, dessen Grundfläche ein Parallelogramm ist, heisst ein **Parallelepipedon**.

Stehen in einem Parallelepipedon die drei in einer Ecke zusammenstossenden Kanten auf einander senkrecht, so heisst es ein **Quader**.

Ein Quader, dessen Kanten sämtlich unter einander gleich sind, heisst ein **Würfel**.

Ein Würfel ist von sechs Quadraten begrenzt (erster **regelmässiger Körper**).

304. Eine **n-seitige Pyramide** ist von einer **Grundfläche** (n -Eck) und n **Seitenflächen** (Dreiecke) begrenzt.

Es hat n **Grundkanten**, n durch einen Punkt (**Spitze** der Pyramide) gehende **Seitenkanten** und $n + 1$ **Ecken**.

Die Senkrechte, welche man von der Spitze auf die Grundfläche fällt, heisst die **Höhe** der Pyramide.

Eine Pyramide heisst **gerade**, wenn der Fusspunkt ihrer Höhe mit dem Mittelpunkt des Umkreises ihrer Grundfläche zusammenfällt. Die **Seitenkanten** einer geraden Pyramide sind einander **gleich**.

Eine Pyramide heisst **regelmässig**, wenn sie gerade und ihre Grundfläche ein regelmässiges Vieleck ist.

305. Eine regelmässige dreiseitige Pyramide, deren Kanten sämtlich einander gleich sind, heisst ein **regelmässiges Vierflach** (Tetraeder).

Ein regelmässiges Vierflach ist von vier gleichseitigen Dreiecken begrenzt (zweiter **regelmässiger Körper**).

306. Ein **regelmässiges Achtlach** (Oktaeder) ist von acht gleichseitigen Dreiecken begrenzt (dritter **regelmässiger Körper**). Man kann es aus zwei regelmässigen vierseitigen Pyramiden zusammensetzen, welche man mit ihren Grundflächen aneinander legt.

XXVI. Körperinhalt.

307. Der **Körperinhalt** oder das **Volumen** eines Körpers wird mit der **Körpereinheit** gemessen. Diese ist ein Würfel, dessen Kante gleich der Längeneinheit ist (vergl. No. 266).

Das Produkt der Zahlen, welche die Länge von drei Strecken (in Längeneinheiten) angeben, ist gleich der Anzahl von Körpereinheiten, welche das **Produkt der drei Strecken** enthält.

Das Produkt der Anzahl von Flächeneinheiten, welche eine Fläche, und der Anzahl von Längeneinheiten, welche eine Strecke enthält, ist gleich der Anzahl von Körpereinheiten, welche das **Produkt der Fläche** und der **Strecke** enthält.

308. Grundsatz. (Cavalierisches Prinzip.) Befinden sich zwei Körper zwischen parallelen Ebenen und haben in diesen und allen ihnen parallelen Ebenen die Schnittfiguren gleichen Flächeninhalt, so haben die beiden Körper gleichen Körperinhalt.

309. Lehrs. Der Inhalt eines Quaders ist gleich dem Produkt dreier in einer Ecke zusammenstossender Kanten.

Lehrs. Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Produkt seiner Grundfläche und seiner Höhe.

Lehrs. Pyramiden von gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleichen Inhalt.

Lehrs. Ein dreiseitiges Prisma kann in drei dreiseitige Pyramiden zerlegt werden, deren Inhalte einander gleich sind.

Lehrs. Der Inhalt einer dreiseitigen Pyramide ist gleich dem dritten Teil des Produktes ihrer Grundfläche und ihrer Höhe.

Lehrs. Der Inhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teil des Produktes ihrer Grundfläche und ihrer Höhe.

XXVII. Kreiszyylinder. Kreiskegel. Kugel.

310. Ein Kreiszyylinder ist von zwei einander parallelen Grundflächen (Kreisen mit dem Radius r) und einer krummen Mantelfläche begrenzt, in welcher durch jeden ihrer Punkte eine Gerade (Seite s des Zylinders) gezogen werden kann, die auf den Grundflächen senkrecht steht.

Die Gerade, welche die Mittelpunkte beider Grundflächen mit einander verbindet, steht auf den Grundflächen senkrecht und heisst die Höhe oder die Achse des Kreiszyinders.

Lehrs. Der Flächeninhalt der Mantelfläche eines Kreiszyinders ist gleich $2rs\pi$.

Lehrs. Der Körperinhalt eines Kreiszyinders ist gleich $r^2s\pi$.

311. Ein Kreiskegel ist von einer Grundfläche (Kreis mit dem Radius r) und einer krummen Mantelfläche begrenzt, in welcher durch jeden ihrer Punkte eine Gerade (Seite s des Kegels) gezogen werden kann, welche durch einen festen Punkt (Spitze des Kegels) geht.

Die Gerade, welche die Spitze des Kreiskegels mit dem Mittelpunkte seiner Grundfläche verbindet, steht auf der Grundfläche senkrecht und heisst Höhe oder Achse des Kreiskegels.

Lehrs. Der Flächeninhalt der Mantelfläche eines Kreiskegels ist gleich $rs\pi$.

Lehrs. Der Körperinhalt eines Kreiskegels ist gleich $\frac{1}{3}r^2s\pi$.

312. Lehrs. Die Oberfläche einer Kugel ist gleich $4r^2\pi$.

Lehrs. Der Körperinhalt einer Kugel ist gleich $\frac{4}{3}r^3\pi$.

XXVIII. Parallelprojektion.

313. Alle Senkrechten auf einer Ebene sind einander parallel.

Fällt man von einer Ecke eines Körpers auf eine Ebene (die Ebene der Zeichnung) die Senkrechte, so heisst der Fusspunkt der Senkrechten die Projektion der Ecke auf die Ebene (vergl. No. 265).

Fällt man von sämtlichen Punkten einer Linie auf die Ebene der Zeichnung die Senkrechten, so bildet die Gesamtheit der Fusspunkte der Senkrechten die **Projektion der Linie auf die Ebene**.

Die **Projektion einer ringsum begrenzten Fläche** ist der von der Projektion der Begrenzungslinien eingeschlossene Teil der Zeichnungsebene.

314. Die **Projektion einer Geraden**, welche auf der Zeichnungsebene senkrecht steht, ist ein **Punkt**.

Die **Projektion jeder anderen Geraden** ist eine **Gerade**.

Die Richtung und Länge der Projektion einer Strecke hängt von ihrer Lage zur Zeichnungsebene ab.

Die Projektion einer der Zeichnungsebene parallelen Strecke ist der projizierten Strecke gleich und parallel.

Die Projektionen anderer Geraden sind kürzer als die projizierten Strecken und zwar um so stärker verkürzt, je mehr sich ihre Richtung der Senkrechten auf der Zeichnungsebene nähert.

Gleiche Strecken derselben Geraden sind in der Projektion einander **gleich**.

Parallele Gerade sind in der Projektion einander **parallel**.

Gleiche Strecken auf parallelen Geraden sind in der Projektion einander **gleich**.

315. Die **Projektion eines Kreises** mit dem Radius r ist eine **Strecke** von der Länge $2r$, wenn ein Durchmesser des Kreises senkrecht zur Zeichnungsebene ist. Sie ist ein **Kreis** mit dem Radius r , wenn die Ebene des projizierten Kreises parallel zur Zeichnungsebene ist. In allen anderen Fällen ist sie eine **Ellipse**, deren grosse Achse gleich $2r$ ist.

316. Die Projektion einer ebenen Figur ist eine Strecke, wenn eine in der Ebene der Figur liegende Gerade senkrecht zur Zeichnungsebene ist. Sie ist der projizierten Figur kongruent, wenn beide Ebenen einander parallel sind. In allen anderen Fällen weicht sie je nach dem Winkel zwischen beiden Ebenen mehr oder weniger von der projizierten Figur ab.



Sachverzeichnis.

A.

abgekürzte Division 83.
abgekürzte Multiplikation 82
abkürzen 67.
Achse 310. 311.
addieren 1. 85.
ähnlich 270.
algebraische Grösse 100.
algebraische Summe 95.
Ankreis 256.
auflösen 96. 137.
Ausdehnung 202.
Aussenglied 119.
Aussenwinkel 218.
äussere Winkel 214.
äusserlich teilen 269.

B.

Basis 153. 226.
Benennung 100.
berühren 247. 253. 300.
Bestimmungsgleichung 136.
Beziehungen 198. 288. 294.
299.
Bogen 205.
Bruch 31. 35. 112. 117.
Bruchstrich 34.
Brutto 79.
Buchstabengrössen 84 u. ff.

D.

Dezimalbruch 62.
dezimale Schreibweise 15.
59.
Diagonale 218.
Differenz 2. 86.
Dimension 202.
Dividendus 4. 110.
dividieren 4. 110.
dividiert durch 4. 35.
Divisor 4. 110.
Durchmesser 205.

E.

Ebene 204.
echter Bruch 36.
Ecke 218. 298.
eingeschriebene Kugel 301.
eingeschriebener Kreis 255.
einrichten 40.
Ellipse 315.

endlicher Dezimalbruch 72.
Entfernung 203. 228. 240.
entgegengesetzte Vorzeichen
93.
entgegengesetzte Winkel 214
entwickeln 141.
Ergänzungsparallelogramme
262.
erweitern 41. 177.
Exponent 99. 153. 165.

F.

Faktor 3. 97. 114.
Figur 217.
Fläche 201. 298.
Flächeneinheit 266.
Flächeninhalt 217.
Flächenmasse 10.
Formeln 109.

G.

Gegenwinkel 214.
gemeine Logarithmen 186.
gemischte Zahl 38.
Generalnenner 47.
geometrische Oerter 241.
246. 248. 249. 250. 251.
253. 259. 273.
gerade 203. 302. 304.
gestreckter Winkel 208.
Gewichte 14.
Gewinn 77.
Gläubiger 80.
gleichnamige Brüche 45.
gleichnamig machen 46.
gleichschenkelig 226.
gleichseitig 227.
Gleichung 134.
Glied 1. 85. 119. 134. 139.
Grad 144. 208.
Grundfläche 302. 304. 310.
311.
Grundkante 302. 304.
Grundlinie 226. 231. 259.
Grundsätze 138. 203. 215.
308.
Grundzahl 99. 153. 165. 181.

H.

Halbkreis 205.
Halbmesser 205.

Hauptnenner 47.
heben 42.
Hinterglied 119.
Höhe 231. 259. 302. 304.
310. 311.
Höhenabschnitte 231.
Höhenpunkt 256.
homolog 223. 272.
Hypotenuse 221.

I.

identische Gleichung 135.
Inhalt 217. 307.
Inkreis 255.
Inkugel 301.
Innenglied 119.
innere Winkel 214.
innerlich teilen 269.
irrational 171.

K.

Kante 298.
Kapital 80.
Kathete 221.
Kennziffer 186.
Kettendivision 44.
Klammer 7. 56. 114. 152.
Koeffizient 100.
Komplementwinkel 211.
kongruent 223.
konjugierte Winkel 214.
konkaver Winkel 210.
konvexer Winkel 210.
Körper 201.
Körperdiagonale 298.
Körpereinheit 307.
Körperinhalt 307.
Körpermasse 11.
Kosinus 291.
Kotangente 291.
Kreis 205.
Kreisabschnitt 242.
Kreisausschnitt 242.
Kreiskegel 311.
Kreiszylinder 310.
Kugel 300.
kürzen 42. 178.

L.

Längeneinheit 266.
Längenmasse 9.

laufende Proportion 133.
Linie 201.
Logarithmus 181.
Lot 209.

M.

mal 3.
Mantelfläche 310. 311.
Mantisse 186.
Masse 9—13.
messen 5.
Minuendus 2. 86.
minus 2. 93.
Minute 12. 208.
Mittellinie 231.
Mittelpunkt 205. 300.
Mittelsenkrechte 233.
mittlere Proportionale 129.
Multiplikandus 3. 97.
Multiplikationsmethode 150.
Multiplikationszeichen 3. 98.
Multiplikator 3. 97.
multiplizieren 3. 97.
Münzen 8.

N.

Nebenwinkel 212.
negativ 91. 92.
Nenner 32.
Netto 79.
Normalform 193.
Numerus 181.

O.

Oberfläche 298.
Oktaeder 306.
ordnen 106.

P.

parallel 215. 297.
Parallelepipedon 303.
Parallogramm 235.
periodischer Dezimalbruch
72.
Peripherie 205.
Peripheriewinkel 243.
plus 1. 93.
Polyeder 298.
positiv 92.
Potenz 99. 153. 157. 180.
Potenzexponent 99. 153.
Primzahl 29.
Prisma 302.
Probe 146.
Produkt 3. 97. 266. 307.
Produktgleichung 123.
Projektion 265. 313.
Proportion 119.
Prozent 61. 80.

Punkt 201.
Pyramide 304.

Q.

Quader 303.
Quadrat 237.
quadratische Ergänzung 194.
quadratische Gleichung 190.
Quadratwurzel 163. 189.
Quersumme 27.
Quotient 4. 110.

R.

Rabatt 78.
Radikand 165.
Radius 205. 300.
radizieren 165.
rational 172.
Rechteck 237.
rechter Winkel 208.
rechtwinkliges Dreieck 221.
Regel de tri 60.
regelmässig 258. 302. 304.
regelmässige Körper 303 305
rein quadratische Gleichung
191.
reziprok 156.
Rhombus 237.

S.

Scheitel 206. 268.
Scheitelwinkel 213.
Schenkel 206. 226.
schief 302.
Schluss 23. 24.
schneiden 203. 252. 297.
Schuldner 80.
Schwerlinie 231.
Schwerpunkt 273.
Segment 242.
Sehne 205.
Sehnentangentenwinkel 251
Sehnenvieleck 255.
Seite 134. 218. 310. 311.
Seitenfläche 302. 304.
Seitenkante 302. 304.
Sekante 247.
Sektor 242.
Sekunde 12. 208.
senkrecht 209. 297.
Sinus 291.
Spitze 226. 304. 311.
spitzer Winkel 210.
stetige Proportion 129.
stetig teilen 282.
Strahlen 268.
Strahlenbüschel 268.
Strecke 203.
Stufe 6. 152.
stumpfer Winkel 210.

stumpfwinkliges Dreieck 221
Substitutionsmethode 149.
Subtrahendus 2. 86.
subtrahieren 2. 86.
Summanden 1. 85.
Summe 1. 85.
Supplementwinkel 211.

T.

Tafeln 186. 293.
Tangente 247. 254. 291.
Tangentenvieleck 255.
Tara 79.
Teilbarkeit 25. 26. 28.
teilen 5.
Tetraeder 305.
Trapez 235.
trigonometrische Funktionen
291.

U.

Umfang 217.
umgeschriebene Kugel 301.
umgeschriebener Kreis 255.
umkehren 94.
Umkreis 255.
Umkugel 301.
Unbekannte 137.
unechter Bruch 37.

V.

Verhältnis 118.
Verlust 77.
Verteilungsrechnung 81.
verwandeln 72. 73. 260.
Verzinsungsfaktor 188.
Vieleck 218.
Vielfach 298.
vierte Proportionale 124.
Volumen 307.
Vorderglied 119.
Vorzeichen 93. 100.
Vorzeichenregel 103. 111.

W.

Wechselwinkel 214.
Winkel 206. 207. 218.
Winkelhalbierungslinie 231.
Würfel 303.
Wurzel 137. 165.
Wurzelexponent 165.

Z.

Zähler 33.
Zeitmasse 12.
Zentrale 252.
Zentriwinkel 243.
Zentrum 205.
Zinseszinsrechnung 188.
Zinsfuss 80.
Zinsrechnung 80.

laufende Proport
 Linie 201.
 Logarithmus 181.
 Lot 209.

M.

mal 3.
 Mantelfläche 310.
 Mantisse 186.
 Masse 9-13.
 messen 5.
 Minuendus 2. 86.
 minus 2. 93.
 Minute 12. 208.
 Mittellinie 231.
 Mittelpunkt 205.
 Mittelsenkrechte
 mittlere Proportio
 Multiplikandus 3.
 Multiplikationsmet
 Multiplikationszei
 Multiplikator 3. 9
 multiplizieren 3. 9
 Münzen 8.

N.

Nebenwinkel 212.
 negativ 91. 92.
 Nenner 32.
 Netto 79.
 Normalform 193.
 Numerus 181.

O.

Oberfläche 298.
 Oktaëder 306.
 ordnen 106.

P.

parallel 215. 297.
 Parallelepipedon 30
 Parallelogramm 233
 periodischer Dezim
 72.
 Peripherie 205.
 Peripheriewinkel 24
 plus 1. 93.
 Polyeder 298.
 positiv 92.
 Potenz 99. 153. 157
 Potenzexponent 99.
 Primzahl 29.
 Prisma 302.
 Probe 146.
 Produkt 3. 97. 266.
 Produktgleichung
 Projektion 265. 313.
 Proportion 119.
 Prozent 61. 80.

© The Tiffen Company, 2007

TIFFEN® Gray Scale

M

Y

C

K

G

W

B

R

G

G

R

A 1 2 3 4 5 6 M 8 9 10 11 12 13 14 15 B 17 18 19

pfwinkliges Dreieck 221
 titutionsmethode 149.
 rahendus 2. 86.
 ahieren 2. 86.
 anden 1. 85.
 e 1. 85.
 elementwinkel 211.

T.

n 186. 293.
 ente 247. 254. 291.
 entenvieleck 255.
 79.
 arkeit 25. 26. 28.
 5.
 öder 305.
 z 235.
 ometrische Funktionen

U.

g 217.
 chriebene Kugel 301.
 chriebener Kreis 255.
 ren 94.
 is 255.
 gel 301.
 annte 137.
 er Bruch 37.

V.

tnis 118.
 t 77.
 ungsrechnung 81.
 deln 72. 73. 260.
 ungsfaktor 188.
 218.
 h 298.
 Proportionale 124.
 en 307.
 glied 119.
 hen 93. 100.
 henregel 103. 111.

W.

winkel 214.
 206. 207. 218.
 halbierungslinie 231.
 303.
 137. 165.
 exponent 165.

Z.

33.
 se 12.
 252.
 nkel 243.
 205.
 nsrechnung 188.
 80.
 nung 80.