Zur Integration der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

§ 1. Angabe des Problems.

Dem Probleme, den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers zu bestimmen, wenn die Temperatur seiner Oberfläche eine gegebene und unveränderliche ist, lässt sich in analytischer Auffassung ein anderes an die Seite stellen, welches dieselbe Behandlung in Bezug auf die Ebene erfordert, wie jenes in Bezug auf den Raum. Dasselbe lautet:

„Es ist die Function V so zu bestimmen, dass

I. a) in jedem Punkte innerhalb einer begrenzten ebenen Fläche $\Delta^{xy}V^* = 0$,

I. b) daselbst V nebst den ersten Differentialquotienten $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ stetig, endlich und eindeutig ist;**)

II. dass die Function V in jedem Punkte des Randes einen gegebenen und unveränderlichen Werth besitzt."

Die Gleichungen unter I sollen im Folgenden, weil sie nur von der Gestalt der vorliegenden Fläche abhängen, Hauptbedingungen, diejenigen unter II, weil sie ausserdem von gewissen Grenzwerthen abhängig sind, Nebenbedingungen genannt

---

*) Unter $\Delta^{xy}V$ soll im Folgenden stets der Ausdruck $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}$ verstanden werden.

**) Für den Fall, der hier nicht in Betracht kommt, dass die gegebene Fläche sich bis in's Unendliche erstreckt tritt noch hinzu die Bedingung,

I. c) dass für einen unendlich fernen Punkt V: log r endlich bleibt, wenn unter r die Entfernung des Punktes x y vom Anfangspunkte verstanden wird.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

werden. Es ist somit klar, dass für eine und dieselbe Fläche unzählig viele Lösungen existiren je nach Festsetzung der Werthe, welche die Function V in den Punkten des Randes annehmen soll. Dieselben lassen sich jedoch sämmtlich auf eine einzige zurückführen, nämlich auf folgende Aufgabe:

„Es ist die Function G so zu bestimmen, dass sie I. den Hauptbedingungen Genüge leistet,

II. in einem beliebigen Punkte (o) des Randes den Werth L_{10} erlangt, wenn man unter L_{10} den Werth des log. nat. der Entfernung des Punktes (o) von einem beliebigen, aber festen Punkte (1) innerhalb der Fläche versteht."

Ist nämlich die Function G für irgend eine Fläche ermittelt und versteht man unter J^1_0 die Grösse

$$J^1_0 = \frac{dL_{10}}{dn} - \frac{dG^1_0}{dn},$$

wo n die Richtung der im Punkte (o) nach Aussen errichteten Normale andeutet, so findet man den Werth der gesuchten Function V im Punkte (1) durch folgende Gleichung:

$$2\pi V_1 = \int J^1_0 \; V_0 \; do,$$

in welcher do das Linienelement im Punkte (o) darstellt und die Integration über alle Elemente des Randes auszudehnen ist.

Diese Beziehungen sollen angewendet werden, um den Werth der Function V zunächst für eine von zwei concentrischen Kreisen oder im speciellen Falle von zwei parallelen Geraden begrenzte Fläche zu ermitteln. Das erhaltene Resultat wird sodann auf eine Gruppe von Curven übertragen werden, von denen nicht wenige zu den wichtigsten und bekanntesten gehören.

§ 2. Lösung des Problems für eine von zwei concentrischen Kreisen begrenzte Fläche.

Bezeichnet man mit σ einen Punkt des äusseren, mit τ einen Punkt des inneren Randes, ferner mit $d\sigma$ und $d\tau$ die Linienelemente in den Punkten σ und τ, so ist die Gleichung, durch welche die Function V bestimmt ist

$$2\pi V_1 = \int J^1_\sigma V_\sigma \; d\sigma + \int J^1_\tau V_\tau \; d\tau,$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

in welcher die Grössen J die Werthe besitzen:

$$J^1_\sigma = \frac{dL_{1\sigma}}{dn} - \frac{dG^1_\sigma}{dn}$$

$$J^1_\tau = \frac{dL_{1\tau}}{dn} - \frac{dG^1_\tau}{dn}.$$

Berücksichtigt man, dass die in $d\sigma$ errichtete Normale dieselbe Richtung hat, wie der Radius vector ϱ, die in $d\tau$ errichtete aber eine der letzteren entgegengesetzte, so lassen sich die obigen Werthe auch folgendermaassen darstellen:

$$J^1_\sigma = + \frac{dL_{1\sigma}}{d\varrho} - \frac{dG^1_\sigma}{d\varrho}$$

$$J^1_\tau = - \frac{dL_{1\tau}}{d\varrho} + \frac{dG^1_\tau}{d\varrho}.$$

Da in denselben $L_{1\sigma}$ und $L_{1\tau}$ bekannte Functionen sind, so handelt es sich darum die Function G zu ermitteln.

Es sei (1) ein in der gegebenen Fläche beliebig angenommener, aber fester Punkt, dagegen (0) ein variabeler Punkt; es seien ferner $\varrho\ \omega$ und $\varrho_1\ \omega_1$ ihre Polarcoordinaten. Dann ist, wenn der Abkürzung halber $\omega - \omega_1 = \varphi$ gesetzt wird,

$$L_{10} = \tfrac{1}{2} \log\left[\varrho^2 - 2\varrho\varrho_1 \cos\varphi + \varrho_1^2\right].$$

Dieser Ausdruck lässt sich auf doppelte Weise in eine nach den Cosinus der Vielfachen von φ fortschreitende Reihe entwickeln.

Bezeichnet man nämlich mit K einen ächten Bruch, so hat man

$$\log\left(1 - Ke^{i\varphi}\right) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} K^n e^{in\varphi}$$

$$\log\left(1 - Ke^{-i\varphi}\right) = - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} K^n e^{-in\varphi},$$

mithin durch Addition

$$\log\left(1 - 2K\cos\varphi + K^2\right) = -2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} K^n \cos n\varphi.$$

Jenachdem man in dieser Formel $K = \frac{\varrho_1}{\varrho}$ oder $K = \frac{\varrho}{\varrho_1}$ setzt, erhält man

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$L_{1o} = \begin{cases} \log \varrho - \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \frac{\varrho_1{}^n}{\varrho^n} \cos n\varphi & \varrho > \varrho_1 \\ & \text{für} \\ \log \varrho_1 - \sum\limits_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \frac{\varrho^n}{\varrho_1{}^n} \cos n\varphi & \varrho < \varrho_1. \end{cases}$$

Es lässt sich nun leicht zeigen, dass jedes Glied der obigen Reihen

$$\log \varrho_1 \,,\; \varrho^n \cos n\varphi \;,\; \frac{1}{\varrho^n} \cos n\varphi$$

der Gleichung genügt

$$\Delta \log \varrho = 0,\; \Delta\, \varrho^n \cos n\varphi = 0,\; \Delta \frac{1}{\varrho^n} \cos n\varphi = 0.$$

Aus einfacher geometrischer Anschauung erhellt ferner, dass jede von diesen Grössen sammt ihrem ersten Differentialquotienten, so lange der Punkt (o) innerhalb der ringförmigen Fläche bleibt, stetig, endlich und eindeutig ist. Es folgt daraus, dass jede von ihnen den Hauptbedingungen Genüge leistet. Dasselbe gilt auch von jedem aus ihnen beliebig zusammengesetzten Ausdrucke

$$H = M + N \log \varrho + \Sigma \left(A\varrho^n + B\frac{1}{\varrho^n} \right) \cos n\varphi.$$

Da diese Function ebenso, wie die Function G den Hauptbedingungen genügt, so wirh sie mit derselben identisch sein, wenn beide auch denselben Nebenbedingungen genügen; es ist demnach zu untersuchen, ob sich die bisher willkürlichen Constanten M, N, A, B so bestimmen lassen, dass die Functionen H und G, oder was dasselbe ist, die Functionen H und L dieselben Randwerthe besitzen, d. h. dass die Gleichungen statt finden

$$H_\sigma = L_{1\sigma} \text{ und } H_\tau = L_{1\tau}.$$

Nach der obigen Entwickelung hat man aber

$$L_{1\sigma} = \log \varrho_\sigma - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \frac{\varrho_1^n}{\varrho_\sigma^n} \cos n\varphi_{1\sigma}$$

$$L_{1\tau} = \log \varrho_1 - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \frac{\varrho_\tau{}^n}{\varrho_1{}^n} \cos n\varphi_{1\tau},$$

sowie

$$H_\sigma = M + N \log\varrho_\sigma + \sum\left(A\varrho_\sigma^n + B\frac{1}{\varrho_\sigma^n}\right)\cos n\varphi_{1\sigma}$$

$$H_\tau = M + N \log\varrho_\tau + \sum\left(A\varrho_\tau^n + B\frac{1}{\varrho_\tau^n}\right)\cos n\varphi_{1\tau}.$$

Daraus geht hervor, dass, wenn die Functionen H und G identisch sein sollen, einerseits die für H entwickelte Reihe von $n = 1$ bis $n = \infty$ summirt werden muss, andererseits, dass die willkürlichen Constanten M, N, A, B so bestimmt werden müssen, dass

$$M + N \log\varrho_\sigma = \log\varrho_\sigma$$

$$M + N \log\varrho_\tau = \log\varrho_1$$

$$A\varrho_\sigma^n + B\frac{1}{\varrho_\sigma^n} = -\frac{1}{n}\frac{\varrho_1^n}{\varrho_\sigma^n}$$

$$A\varrho_\tau^n + B\frac{1}{\varrho_\tau^n} = -\frac{1}{n}\frac{\varrho_\tau^n}{\varrho_1^n}$$

Aus diesen Gleichungen ergiebt sich

$$M = \frac{\log\varrho_\tau - \log\varrho_1}{\log\varrho_\tau - \log\varrho_\sigma}.\log\varrho_\sigma$$

$$N = \frac{\log\varrho_\tau - \log\varrho_1}{\log\varrho_\sigma - \log\varrho_\tau}$$

$$A = -\frac{1}{n}.\frac{1}{\varrho_1^n}.\frac{\varrho_\tau^{2n} - \varrho_1^{2n}}{\varrho_\tau^{2n} - \varrho_\sigma^{2n}}$$

$$B = -\frac{1}{n}.\frac{\varrho_\tau^{2n}}{\varrho_1^n}.\frac{\varrho_\sigma^{2n} - \varrho_1^{2n}}{\varrho_\sigma^{2n} - \varrho_\tau^{2n}}.$$

Versteht man unter M, N, A, B die genannten Grössen, so stellt sich die gesuchte Function dar:

$$G_0^1 = M + N\log\varrho + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(A\,\varrho^n + B\,\frac{1}{\varrho^n}\right)\cos n\varphi.$$

Es sind gegenwärtig die Grössen J selbst zu bestimmen. Da die Function L bekannt, die Function G soeben ermittelt ist, hat man beider Differentialquotienten zu bilden. Man erhält

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\frac{d\,L_{10}}{d\varrho} = \begin{cases} \dfrac{1}{\varrho} + \displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varrho_1^n}{\varrho^{n+1}} \cos n\varphi & \varrho > \varrho_1 \\ & \text{für} \\ -\displaystyle\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varrho^{n-1}}{\varrho_1^n} \cos n\varphi & \varrho < \varrho_1 \end{cases}$$

desgleichen

$$\frac{d\,G_0^1}{d\,\varrho} = \frac{N}{\varrho} + \sum_{n=1}^{n=\infty} n \left(A\varrho^{n-1} - B\frac{1}{\varrho^{n+1}} \right) \cos n\varphi.$$

Setzt man diese Werthe der Differentialquotienten in die Gleichungen, durch welche die Grössen J bestimmt werden, ein, so erhält man

$$J_\sigma^1 = \frac{1-N}{\varrho_\sigma} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\varrho_1^n}{\varrho_\sigma^{n+1}} - n\,A\,\varrho_\sigma{}^{n-1} + n\,B\frac{1}{\varrho_\sigma^{n+1}} \right) \cos n\varphi_{1\sigma}$$

$$J_\tau^1 = \frac{N}{\varrho_\tau} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{\varrho_\tau{}^{n-1}}{\varrho_1^n} + n\,A\,\varrho_\tau{}^{n-1} - n\,B\frac{1}{\varrho_\tau^{n+1}} \right) \cos n\varphi_{1\tau}.$$

Werden jetzt für die Grössen N, A, B ihre Werthe substituirt, so ergiebt sich nach einigen Reductionen

$$J_\sigma^1 = \frac{1}{\varrho_\sigma} \cdot \frac{\log\varrho_\tau - \log\varrho_1}{\log\varrho_\tau - \log\varrho_\sigma} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varrho_\sigma^{n-1}}{\varrho_1^n} \cdot \frac{\varrho_\tau^{2n} - \varrho_1^{2n}}{\varrho_\tau^{2n} - \varrho_\sigma^{2n}} \cos n\varphi_{1\sigma}$$

$$J_\tau^1 = \frac{1}{\varrho_\tau} \cdot \frac{\log\varrho_\sigma - \log\varrho_1}{\log\varrho_\sigma - \log\varrho_\tau} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varrho_\tau{}^{n-1}}{\varrho_1^n} \cdot \frac{\varrho_\sigma^{2n} - \varrho_1^{2n}}{\varrho_\sigma^{2n} - \varrho_\tau^{2n}} \cos n\varphi_{1\tau}.$$

Bedeuten J_σ^1 und J_τ^1 die oben aufgestellten Ausdrücke, so ist der Werth der Function V im Punkte (1) bestimmt durch die Gleichung

$$2\pi V_1 = \int J_\sigma^1\, V_\sigma\, d\sigma + \int J_\tau^1\, V_\tau\, d\tau.$$

Setzt man hierin $d\sigma = \varrho_\sigma d\omega_\sigma$ und $d\tau = \varrho_\tau d\omega_\tau$, so geht dieselbe über in

$$2\pi V_1 = \int K_\sigma^1\, V_\sigma\, d\omega_\sigma + \int K_\tau^1\, V_\tau\, d\omega_\tau,$$

wenn unter K_σ^1 und K_τ^1 die folgenden Ausdrücke verstanden werden:

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

$$\mathbf{K}_{\sigma}^{1} = \frac{\log\varrho_{\tau} - \log\varrho_{1}}{\log\varrho_{\tau} - \log\varrho_{\sigma}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varrho_{\sigma}^{n}}{\varrho_{1}^{n}} \cdot \frac{\varrho_{\tau}^{2n} - \varrho_{1}^{2n}}{\varrho_{\tau}^{n2} - \varrho_{\sigma}^{2n}} \cdot \cos n\,(\omega_{\sigma} - \omega_{1}).$$

$$\mathbf{K}_{\tau}^{1} = \frac{\log\varrho_{\sigma} - \log\varrho_{1}}{\log\varrho_{\sigma} - \log\varrho_{\tau}} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varrho_{\tau}^{n}}{\varrho_{1}^{n}} \cdot \frac{\varrho_{\sigma}^{2n} - \varrho_{1}^{2n}}{\varrho_{\sigma}^{2n} - \varrho_{\tau}^{2n}} \cdot \cos n\,(\omega_{\tau} - \omega_{1}).$$

§ 3. Uebergang auf eine Fläche, welche von zwei parallelen Geraden begrenzt wird.

Man denke sich um den gemeinschaftlichen Mittelpunkt M der beiden Grenzkreise einen dritten Kreis U mit beliebigen Radius construirt. Es sei O irgend ein Punkt desselben und O Ξ die Richtung der Centralen, es seien ferner Q^{σ} und Q_{τ} diejenigen Durchschnittspunkte der Centralen mit den Kreisen Σ und T, welche dem Punkte O am nächsten liegen. Lässt man nun während die Punkte O, Q_{σ} und Q_{τ} festgehalten werden, das Centrum M sich in der Richtung der Centralen bis in's Unendliche fortbewegen, so gehen die 3 Kreise U, Σ, T in Gerade über, welche auf der Richtung O Ξ senkrecht stehen, mithin parallel sind. Es ist hieraus ersichtlich, dass die Untersuchung einer von zwei parallelen Geraden eingeschlossenen Fläche nur ein specieller Fall derjenigen ist, welche sich auf einen concentrischen Kreisring bezieht.

Um dies analytisch durchzuführen, sei u der Radius des Kreises U, sowie ξ der kleinste centrale Abstand irgend eines Punktes (o) von ihm. Dann ist

$$\varrho = u - \xi.$$

Ist ferner (1) ein beliebiger anderer Punkt, und bezeichnet man den Bogen des Kreises U, der zwischen den centralen Projectionen der Punkte (0) und (1) auf den Kreis U liegt, mit η_{1o}, so ist

$$\varphi_{1o} = \frac{\eta_{1}{}^{o}}{u}.$$

Durch Substitution dieser Werthe gehen die Bestimmungsgleichungen für J_{σ}^{1} und J_{τ}^{1} über in

$$\mathbf{J}^1_\sigma = \frac{1}{u-\xi_\sigma}\left\{\frac{\log(u-\xi_0)-\log(u-\xi_1)}{\log(u-\xi_\tau)-\log(u-\xi_\sigma)}+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{u-\xi_\sigma}{u-\xi_1}\right)^n\cdot\frac{(u-\xi_\tau)^{2n}-(u-\xi_1)^{2n}}{(u-\xi_\tau)^{2n}-(u-\xi_\sigma)^{2n}}\cdot\cos n\frac{\eta_{1\sigma}}{u}\right\}$$

$$\mathbf{J}^1_\tau = \frac{1}{u-\xi_\tau}\left\{\frac{\log(u-\xi_\sigma)-\log(u-\xi_1)}{\log(u-\xi_\sigma)-\log(u-\xi_\tau)}+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{u-\xi_\tau}{u-\xi_1}\right)^n\cdot\frac{(u-\xi_\sigma)^{2n}-(u-\xi_1)^{2n}}{(u-\xi_\sigma)^{2n}-(u-\xi_\tau)^{2n}}\cdot\cos n\frac{\eta_{1\tau}}{u}\right\}$$

oder in anderer Form

$$\mathbf{J}^1_\sigma = \frac{1}{u-\xi_\sigma}\left\{\frac{\log\dfrac{u-\xi_1}{u-\xi_\tau}}{\log\dfrac{u-\xi_\sigma}{u-\xi_\tau}}+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{u-\xi_\sigma}{u-\xi_1}\right)^n\cdot\frac{\left(\dfrac{u-\xi_1}{u-\xi_\tau}\right)^{2n}-1}{\left(\dfrac{u-\xi_\sigma}{u-\xi_\tau}\right)^{2n}-1}\cdot\cos n\frac{\eta_{1\sigma}}{u}\right\}$$

$$\mathbf{J}^1_\tau = \frac{1}{u-\xi_\tau}\left\{\frac{\log\dfrac{u-\xi_1}{u-\xi_\sigma}}{\log\dfrac{u-\xi_\tau}{u-\xi_\sigma}}+2\sum_{n=1}^{n=\infty}\left(\frac{u-\xi_\tau}{u-\xi_1}\right)^n\cdot\frac{\left(\dfrac{u-\xi_1}{u-\xi_\sigma}\right)^{2n}-1}{\left(\dfrac{u-\xi_1}{u-\xi_\sigma}\right)^{2n}-1}\cdot\cos n\frac{\eta_{1\tau}}{u}\right\}$$

Lässt man nun u bis in's Unendliche wachsen, so bleiben die Grössen ξ und η selbst endlich und zwar gehen dieselben über in die gewöhnlichen rechtwinkligen Coordinaten.

Es ist nun zu untersuchen, welchen Werth die obigen Ausdrücke für $u = \infty$ annehmen. Zunächst ist klar, dass

$$\frac{u-\xi_a}{u-\xi_b} = \frac{1-\dfrac{\xi_a}{u}}{1-\dfrac{\xi_b}{u}}$$

für $u = \infty$ gegen 1 convergirt. Dementsprechend stellt sich der Ausdruck

$$\left(\frac{u-\xi_a}{u-\xi_b}\right)^u$$

in der Form 1^∞ dar. Indem man ihn nach den Regeln der Differentialrechnung auswerthet, erhält man

$$\left(\frac{u-\xi_a}{u-\xi_b}\right)^u = e^{\xi_b-\xi_a},$$

mithin auch

$$\log \frac{u - \xi_a}{u - \xi_b} = \frac{\xi_b - \xi_a}{u}$$

und

$$\frac{u - \xi_a}{u - \xi_b} = e^{\frac{\xi_b - \xi_a}{u}}.$$

Mit Rücksicht hierauf gehen die obigen Gleichungen über in

$$J^1_\sigma = \frac{1}{u - \xi_\sigma}\left\{\frac{\xi_\tau - \xi_1}{\xi_\tau - \xi_\sigma} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{n\frac{\xi_1 - \xi_\sigma}{u}} \cdot \frac{e^{2n\frac{\xi_\tau - \xi_1}{u}} - 1}{e^{2n\frac{\xi_\tau - \xi_\sigma}{u}} - 1} \cdot \cos n\frac{\eta_{1\sigma}}{u}\right\}$$

$$J^1_\tau = \frac{1}{u - \xi_\tau}\left\{\frac{\xi_\sigma - \xi_1}{\xi_\sigma - \xi_\tau} + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{n\frac{\xi_1 - \xi_\tau}{u}} \cdot \frac{e^{2n\frac{\xi_\sigma - \xi_1}{u}} - 1}{e^{2n\frac{\xi_\sigma - \xi_\tau}{u}} - 1} \cdot \cos n\frac{\eta_{1\tau}}{n}\right\}$$

oder, da das erste Glied der obigen Summen für $u = \infty$ verschwindet,

$$J^1_\sigma = \frac{2}{u - \xi_\sigma}\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{n\frac{\xi_1 - \xi_\sigma}{u}} \cdot \frac{e^{2n\frac{\xi_\tau - \xi_1}{u}} - 1}{e^{2n\frac{\xi_\tau - \xi_\sigma}{u}} - 1} \cdot \cos n\frac{\eta_{1\sigma}}{u}\Big\}$$

$$J^1_\tau = \frac{2}{u - \xi_\tau}\sum_{n=1}^{n=\infty} e^{n\frac{\xi_1 - \xi_\tau}{u}} \cdot \frac{e^{2n\frac{\xi_\sigma - \xi_1}{u}} - 1}{e^{2n\frac{\xi_\sigma - \xi_\tau}{u}} - 1} \cdot \cos n\frac{\eta_{1\tau}}{u}\Big\}.$$

Eine jede der Grössen J^1_σ und J^1_τ ist mithin als Summe einer unendlichen Reihe zu betrachten, in welcher jedes Glied eine Function von u ist; sie hat also die Form

$$s = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n + f_{n+1} + \ldots \text{ in inf.}$$

Lässt man in einer solchen Reihe u bis ins Unendliche wachsen, so stellt sich ihre

Summe als ein bestimmtes Integral dar. Setzt man nämlich in dem allgemeinen Gliede f_n $n = up$, so wird $n + 1 = u\left(p - \frac{1}{u}\right)$. Betrachtet man daher dasselbe als eine Function von p, so entsteht aus ihm das folgende Glied dadurch, dass man p um die Grösse $\frac{1}{u}$ wachsen lässt. Man erhält somit, wenn man noch mit $\frac{1}{u}$ multiplicirt,

$$\frac{s}{u} = f\left(\frac{1}{u}\right) + f\left(\frac{2}{u}\right)\frac{1}{u} + \ldots + f(p)\,\frac{1}{u} + f\left(p + \frac{1}{u}\right)\frac{1}{u} + \ldots \text{ in inf.}$$

Lässt man nun u bis in's Unendliche wachsen, so wird $\frac{1}{u}$ unendlich klein und die Reihe geht über in das bestimmte Integral

$$\frac{s}{u} = \int_0^\infty f(p)\, dp.$$

Man erhält somit

$$s = \int_0^\infty \Big[u\, f(p)\Big] dp$$

und hat nur nöthig zu untersuchen, welchen Werth der Ausdruck unter dem Integralzeichen bei unendlich wachsendem u annimmt.

Wendet man das so eben gefundene Resultat zur Ermittelung der Werthe für J_τ^1 an, so ergiebt sich

$$\mathbf{J}_\sigma^1 = 2\int_0^\infty \frac{u}{u - \xi_\sigma} \cdot e^{p(\xi_1 - \xi_\sigma)} \cdot \frac{e^{2p(\xi_\tau - \xi_1)} - 1}{e^{2p(\xi_\tau - \xi_\sigma)} - 1} \cdot \cos p\eta_{1\sigma} \cdot dp$$

$$\mathbf{J}_\tau^1 = 2\int_0^\infty \frac{u}{u - \xi_\tau} \cdot e^{p(\xi_1 - \xi_\tau)} \cdot \frac{e^{2p(\xi_\sigma - \xi_1)} - 1}{e^{2p(\xi_\sigma - \xi_\tau)} - 1} \cdot \cos p\eta_{1\tau} \cdot dp.$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Lässt man jetzt $u = \infty$ werden, so convergiren die Quotienten $\frac{u}{u - \xi_\sigma}$ und $\frac{u}{u - \xi_\tau}$ gegen 1, und man erhält in veränderter Form

$$J^1_\sigma = 2\int_0^\infty \frac{e^{p(\xi_1 - \xi_\tau)} - e^{p(\xi_\tau - \xi_1)}}{e^{p(\xi_\sigma - \xi_\tau)} - e^{p(\xi_\tau - \xi_\sigma)}} \cdot \cos p\eta_{1\sigma} \cdot dp$$

$$J^1_\tau = 2\int_0^\infty \frac{e^{p(\xi_1 - \xi_\sigma)} - e^{p(\xi_\sigma - \xi_1)}}{e^{p(\xi_\tau - \xi_\sigma)} - e^{p(\xi_\sigma - \xi_\tau)}} \cdot \cos p\eta_{1\tau} \cdot dp.$$

Man erhält daher schliesslich das Resultat:

Bedeuten die Grössen J^1_σ und J^1_τ die so eben entwickelten Ausdrücke, so ist für die in Rede stehende Fläche der Werth der Function V

$$2\pi\, V_1 = \int J^1_\sigma\, V_\sigma\, d\sigma + \int J^1_\tau\, V_\tau\, d\tau,$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass $do = d\eta$ ist, und dass η von $-\infty$ bis $+\infty$ wachsen muss, damit der Randpunkt o den ganzen Rand durchläuft,

$$2\pi\, V_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} J^1_\sigma\, V_\sigma\, d\eta_\sigma + \int_{-\infty}^{+\infty} J^1_\tau\, V_\tau\, d\eta_\tau.$$

§ 4. Uebertragung des in § 2. und § 3. erhaltenen Resultates auf eine gewisse Gruppe von Curven.

Es seien $x\, y$ und $\xi\, \eta$ die Coordinaten zweier Punkte in der Ebene und zwischen ihnen finde die Beziehung statt

$$\xi + i\eta = f\,(x + iy),$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

eine Gleichung, die durch Gleichsetzung des Reellen und Imaginären in zwei andere zerfällt. Es sei hierin $f(x + iy)$ eine homogene Function von $x + iy$ und so beschaffen, dass, wenigstens unter gewissen Einschränkungen, jedem Punkte $x\,y$ im Allgemeinen nur ein einziger Punht $\xi\eta$ entspricht und umgekehrt. Nennt man nun, der bequemeren Ausdrucksweise wegen, den Punkt xy das Bild des Punktes $\xi\eta$, so ist klar, dass, wie das Bild eines Punktes wiederum ein Punkt, so auch dasjenige einer Linie, einer Fläche wiederum eine Linie, eine Fläche ist, deren Gleichungen durch die obige Transformationsformel gefunden werden. Bevor indess hierauf näher eingegangen werden soll, ist erst eine weitere Untersuchung nothwendig.

Betrachtet man in der obigen Formel die Grössen $\xi\eta$ als constante Parameter, so stellen die Gleichungen

$$\xi = \text{Const. und } \eta = \text{Const.}$$

zwei Systeme von Curven dar. Durch Differentiation nach x und y ergiebt sich aber

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + i\frac{\partial y}{\partial x} = f^1$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} + i\,\frac{\partial \eta}{\partial y} = i\;f^1.$$

Eliminirt man jetzt f^1 und trennt das Reelle vom Imaginären, so erhält man

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial y} \text{ und } \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x} + o.$$

Hieraus ergiebt sich durch nochmalige Differentiation

$$\Delta^{xy}\xi = o \text{ und } \Delta^{xy}\;\eta = o,$$

sowie durch geeignete Multiplication

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y} = o.$$

Die letzte Gleichung drückt nun aus, dass sich die beiden Systeme der ξ - und η - Curven gegenseitig rechtwinklig durchsetzen.

Es sollen nun in der Gleichung $\Delta^{xy}\;W = o$ an Stelle der Coordinaten xy die Coordinaten $\xi\eta$ eingeführt werden. Betrachtet man die ersteren als Functionen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der letzteren, so erhält man durch zweimalige Differentiation der Function W nach x und y

$$\Delta^{xy} W = \left[\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2} + \left[\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2\right]\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}$$

$$+ 2\left[\frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\frac{\partial \eta}{\partial y}\right]\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta} + \Delta^{xy}\xi . \frac{\partial W}{\partial \xi} + \Delta^{xy}\eta . \frac{\partial W}{\partial \eta}.$$

Da nun, wie eben erwiesen, die Coefficienten von $\frac{\partial^2 W}{\partial \xi \partial \eta}, \frac{\partial W}{\partial \xi}, \frac{\partial W}{\partial \eta}$ verschwinden, diejenigen aber von $\frac{\partial^2 W}{\partial \xi^2}$ und $\frac{\partial^2 W}{\partial \eta^2}$ einander gleich sind und einen im Allgemeinen von o verschiedenen Werth besitzen, so folgt, dass für $\Delta^{xy} W = o$ auch $\Delta \xi \eta \, W = o$ ist.

Bezeichnen nun ϑ und ω zwei Functionen von x und y, die mit ihnen durch die Doppelgleichung

$$e^{\vartheta + i\omega} = f(x + iy)$$

verbunden sind, so stellen die Gleichungen

$$\vartheta = \text{Const. und } \omega = \text{Const.}$$

zwei orthogonale Curvensysteme dar. Von diesen lässt sich eine Eigenschaft sofort erkennen. Aus der letzten Gleichung folgt nämlich

$$e^{\vartheta - i\omega} = f(x - iy),$$

sowie durch Multiplication beider

$$e^{2\vartheta} = f(x + iy) . f(x - iy).$$

Da sich hierin ohne Aenderung $+\eta$ mit $-\eta$ vertauschen lässt, so ist ersichtlich, dass die ϑ - Curven eine zur X - Axe symmetrische Lage besitzen. Es werden ferner zufolge der in Betreff der Function f gemachten Voraussetzung die ϑ - Curven einander nicht schneiden, sondern ähnlich wie ein System confocaler Ellipsen einander umschliessen.

Ganz dieselbe Betrachtung lässt sich in Betreff zweier anderen Curven-

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

systeme anstellen. Setzt man nämlich

$$\lambda + is = f(x + iy),$$

so stellen die Gleichungen

$$\lambda = \text{Const. und } s = \text{Const.}$$

ebenfalls zwei orthogonale Curvensysteme dar, von denen die λ - Curven zur X - Axe symmetrisch sind und einander umschliessen.

Es soll nun die im Eingang gestellte Aufgabe für eine Fläche gelöst werden, die entweder von zwei ϑ - Curven oder zwei λ - Curven begrenzt ist und zwar durch die schon besprochene Transformation

$$\xi + i\eta = f(x + iy).$$

Durch Anwendung derselben ergiebt sich einerseits

$$e^{\vartheta + i\omega} = \xi + i\eta,$$

oder durch Trennung des Reellen vom Imaginären

$$e^{\vartheta} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} = \varrho$$

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{\eta}{\xi},$$

woraus ersichtlich ist, dass die ϑ - Curven in ein System concentrischer Kreise übergehen und die Variabele ω mit der früher angewendeten Polarcoordinate identisch wird.

Andererseits ergiebtsich

$$\lambda + i\,s = \xi + i\eta,$$

d. h. die λ - und s - Curven gehen über in die beiden Systeme der mit den Ξ- und H - Axen parallel laufenden Parallelen.

Es folgt hieraus, dass eine Fläche, welche von zwei ϑ - Curven begrenzt wird, in einen concentrischen Kreisring, eine solche dagegen, welche von zwei λ-Curven begrenzt wird, in eine von zwei Parallelen eingeschlossene Fläche transformirt wird. Es ist daher von Wichtigkeit zu untersuchen, wie sich die Bedingungsgleichungen

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

der gesuchten Function W transformiren. Nun ist früher gezeigt worden, dass die Bedingungsgleichung $\Delta^{xy}W = o$ übergeht in die analoge $\Delta^{\xi\eta}W = o$. Da ferner innerhalb der ursprünglichen Fläche W nebst ihren ersten Differentialquotienten endlich, stetig und eindeutig bleibt, so muss dies offenbar auch innerhalb der transformirten Fläche der Fall sein. Es geht hieraus hervor, dass innerhalb der letzteren die Function W den Hauptbedingungen Genüge leistet. Da endlich jedem Randpunkte s und t der ursprünglichen Fläche ein Randpunkt σ und τ der transformirten entspricht, so ist $W_s = W_\sigma$ und $W_t = W_\tau$.

Dies zusammengefasst ergiebt:

„Die Function W genügt I. innerhalb der transformirten Fläche den Hauptbedingungen; sie nimmt II. auf dem Rande die unveränderlichen Werthe W_σ und W_τ an."

Es war aber in § 2. und § 3. die Aufgabe gelöst worden, eine Function V zu finden, welche I. innerhalb derselben Fläche den Hauptbedingungen genügt, II. auf dem Rande die festen Werthe V_σ und V_τ annimmt.

Da durch diese Angaben die Functionen V und W vollständig bestimmt sind, so muss, wenn $V_\sigma = W_\sigma$ und $V_\tau = W_\tau$ gesetzt wird, auch $V_1 = W_1$ sein.

Man erhält daher schliesslich das Resultat:

I. Für eine Fläche, welche von zwei ϑ - Curven begrenzt wird, ist der Werth der Function W im Punkte (1)

$$2\pi\, W_1 = \int_0^{2\pi} K_s^1\, W_s\, d\, w_s + \int_0^{2\pi} K_t^1 W_t\, dw_t,$$

wenn unter K_s^1 und K_t^1 die folgenden Ausdrücke verstanden werden

$$K_s^1 = \frac{\vartheta_\tau - \vartheta_1}{\vartheta_\tau - \vartheta_\sigma} + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{n(\vartheta_1 - \vartheta_\tau)} - e^{n(\vartheta_\tau - \vartheta_1)}}{e^{n(\vartheta_\sigma - \vartheta_\tau)} - e^{n(\vartheta_\tau - \vartheta_\sigma)}} . \cos n\, (\omega_\sigma - \omega_1)$$

$$K_t^1 = \frac{\vartheta_\sigma - \vartheta_1}{\vartheta_\sigma - \vartheta_\tau} + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{e^{n(\vartheta_1 - \vartheta_\sigma)} - e^{n(\vartheta_\sigma - \vartheta_1)}}{e^{n(\vartheta_\tau - \vartheta_\sigma)} - e^{n(\vartheta_\sigma - \vartheta_\tau)}} . \cos n\, (\omega_\tau - \omega_1).$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

II. Für eine Fläche, welche von zwei λ - Curven begrenzt wird, ist der Werth der Function W im Punkte (1)

$$2\pi W_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} K_s^1 V_s \, d s_s + \int_{-\infty}^{+\infty} K_t^1 W_t \, d s_t \,;$$

wenn K_s^1 und K_t^1 die folgenden Ausdrücke darstellen

$$K_s^1 = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{p(\lambda_1 - \lambda_\tau)} - e^{p(\lambda_\tau - \lambda_1)}}{e^{p(\lambda_\sigma - \lambda_\tau)} - e^{p(\lambda_\tau - \lambda_\sigma)}} \cdot \cos p(s_\sigma - s_1) . dp$$

$$K_t^1 = 2 \int_0^{\infty} \frac{e^{p(\lambda_1 - \lambda_\sigma)} - e^{p(\lambda_\sigma - \lambda_1)}}{e^{p(\lambda_\tau - \lambda_\sigma)} - e^{p(\lambda_\sigma - \lambda_\tau)}} \cdot \cos p(s_\tau - s_1) . dp.$$

Es bleibt mithin in jedem einzelnen Falle nur übrig, zu untersuchen, welche Bedeutung die Variabeln ϑ und ω, resp. λ und s besitzen. Es soll dies an einigen Beispielen erläutert werden.

Die bisher noch willkürliche Tranformationsformel

$$\zeta = f(z),$$

in welcher zur Abkürzung $\xi + i\eta = \zeta$ und $x + iy = z$ gesetzt ist, sei jetzt

$$\zeta = \frac{z - a}{z + a}.$$

Da diese Gleichung sowohl in Bezug auf z, als auch auf ζ linear ist, so ist ersichtlich, dass jedem Punkte xy nur ein einziger Punkt $\xi\eta$ entspricht und umgekehrt; die Function f(z) ist demnach von der oben vorausgesetzten Beschaffenheit.

Es sei nun

$$e^{\vartheta + i\omega} = \frac{z - a}{z + a}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

Um die geometrische Bedeutung der Grössen ϑ und ω zu erkennen, nehme man auf der X - Axe zwei Punkte A und A_1 im Abstande $+$ a und $-$ a vom Anfangspunkte an und bezeichne die Entfernungen des Punktes xy von ihnen mit α und α_1, sowie die Winkel, welche diese letzteren mit der X - Axe bilden mit γ und γ_1, so ist

$$z - a = \alpha e^{i\gamma}$$

$$z + a = \alpha_1 e^{i\gamma_1},$$

mithin

$$e^{\vartheta + i\omega} = \frac{\alpha}{\alpha_1} \cdot e^{i(\gamma - \gamma_1)}$$

Trennt man jetzt das Reelle vom Imaginären, so erhält man

$$e^{\vartheta} = \frac{\alpha}{\alpha_1}$$

$$\omega = \gamma - \gamma_1.$$

Es ist nun bekannt, dass der geometrische Ort aller Punkte, deren Entfernungen von A und A_1 ein constantes Verhältniss haben, ein System von Kreisen ist, deren Mittelpunkte auf der X - Axe liegen. Die Formeln unter I. enthalten demnach die Lösung des Problemes für einen excentrischen Kreisring. Die Grösse ω stellt hierbei den Winkel dar, den die beiden Radii vectores α und α_1 mit einander bilden.

Es werde ferner an Stelle der allgemeinen Gleichung

$$\zeta = f(z)$$

die folgende zu Grunde gelegt

$$\zeta = -\frac{1}{z},$$

aus welcher ebenfalls sofort hervorgeht, dass die Function f (z) die vorausgesetzte Beschaffenheit hat. Setzt man nun

$$\lambda + i\varkappa = -\frac{1}{z}$$

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf

und trennt das Reelle vom Imaginären, so erhält man

$$\lambda = -\frac{x}{r^2}$$

$$s = \frac{y}{r^2}.$$

Hieraus ergiebt sich, dass die λ- und s - Curven zwei Systeme von Kreisen darstellen, welche sämmtlich durch den Anfangspunkt hindurchgehen und von denen die λ - Curven einander und die Y - Axe, die s - Curven dagegen einander und die X - Axe berühren. Die Grössen λ und s selbst repräsentiren die reciproken Werthe der Durchmesser dieser Kreise und zwar ist λ negativ für Kreise auf der rechten Seite der Y - Axe. Die Formeln unter II. enthalten mithin die Lösung des Problems für eine von zwei sich berührenden Kreisen eingeschlossene Fläche.

Universitäts- und
Landesbibliothek Düsseldorf