Wissenschaftliche Beilage zum
Jahresbericht der Neuen Realschule zu Kassel, Ostern 1890.

Zur Reform des planimetrischen Unterrichts

mit besonderer Rücksicht auf Realschulen.

Von

Oberlehrer Dr. Ernst Höbel.

Wenn wir die an unseren höheren Schulen im Gebrauch befindlichen Lehrbücher für Mathematik oder auch die Ansichten der Fachgenossen hinsichtlich der methodischen Behandlung und der Verteilung des Stoffes auf die einzelnen Klassenstufen mit einander vergleichen, so werden uns trotz des Aufschwungs, den die mathematische Disziplin in neuerer Zeit genommen hat, immer noch grosse Verschiedenheiten entgegentreten. Namentlich gilt dies von der Geometrie bezw. Planimetrie in den unteren Klassen Quarta und Tertia, während in den oberen Klassen der mathematische Unterricht im Grossen und Ganzen einer mehr gleichartigen Behandlung sich erfreut. Nun ist zwar zuzugeben, dass auch in der Mathematik, wie auf vielen anderen Gebieten, verschiedene Mittel und Wege unter Umständen gleich leicht und sicher zum erstrebten Ziele führen können; ausserdem hat der Lehrer in seinem Unterrichte auf Charakter und Ziel seiner Anstalt, auf Beanlagung und Individualität seiner Schüler vornehmlich Rücksicht zu nehmen; und schliesslich hängt der Erfolg des Unterrichts nicht nur von der Methode und der Einrichtung des vom Schüler benutzten Lehrbuches, sondern ganz gewiss auch von der Persönlichkeit und den pädagogischen Eigenschaften des betreffenden Lehrers ab. Bei aller Berücksichtigung dieser Umstände und zugestanden, dass heutzutage die Geometrie an unseren höheren Schulen sozusagen praktischer und anschaulicher betrieben wird, dass man sich jetzt nicht etwa in reiner „Verinnerlichung" gefällt und Geometrie nicht ein Auswendiglernen von Lehrsätzen und Beweisen bedeutet, so scheint mir doch der geometrische Unterricht in den unteren Klassen in Bezug auf Form und Ausdrucksweise von Lehrsätzen und Erklärungen, auf Auswahl und Behandlung des Stoffes, sowie Verteilung desselben auf die einzelnen Stufen noch besserungsbedürftig zu sein.

Die Hauptforderung, die der Lehrer in seinem geometrischen Unterrichte zu erfüllen hat, besteht darin, dafür zu sorgen, dass der Schüler von Anfang an richtige Vorstellungen und klare Begriffe der geometrischen Gebilde gewinnt. Zu diesem Zwecke darf die Geometrie nicht nur als Gedächtnissache behandelt werden, sondern der Unterricht muss sich gründen auf Anschauung und

Denkthätigkeit. Die Vorstellung eines geometrischen Bildes muss zu solcher Klarheit gelangt sein, dass der Schüler imstande ist, aus ihr heraus einen Lehrsatz zu konstruieren.

Der Begriff z. B. des „Winkels", der dem Schüler schon in den ersten Stunden seines geometrischen Unterrichts beigebracht werden muss, ist nach meiner Erfahrung dem Quintaner oder Quartaner noch lange nicht klar, wenn er gelernt hat, dass ein Winkel der Richtungsunterschied zweier von einem Punkte aus nach verschiedenen Richtungen gehenden geraden Linien sei. Es wird auch noch nicht genügen, dass der Lehrer einen Winkel BAC an die Tafel zeichnet und nun sagt, dass der Richtungsunterschied der beiden vom Scheitel A ausgehenden Schenkel AB und AC Winkel BAC genannt werde. Schon der Begriff von „Richtungsunterschied" ist bei vielen Schülern anfangs unklar. Der Begriff des Winkels darf nicht an einem starren Winkel, wie den in den Lehrbüchern gezeichneten, erläutert werden, sondern der Lehrer muss, wie auch für andere Fälle zu empfehlen ist, Bewegung hineinbringen. 2 Linien, etwa dünne Stäbchen (Zeiger einer Uhr) sind in einem Punkte befestigt und liegen zunächst aufeinander. Lässt man den einen Schenkel fest liegen und dreht den anderen langsam, etwa links herum, so entsteht eine „Öffnung" — Winkel —, welche grösser und grösser wird, bis zunächst der gedrehte Schenkel mit dem anderen eine gerade Linie bildet, aber entgegengesetzt gerichtet ist; eine solche Öffnung heisst ein gestreckter Winkel. Hat man nun noch einen dritten Schenkel, der um denselben Scheitel drehbar ist und wiederholt mit ihm das vorige Verfahren, bis dieser Schenkel gleiche Öffnung mit den beiden anderen Schenkeln des Gestreckten hat, so erhält man die Hälfte eines gestreckten Winkels und nennt die Hälfte einen rechten Winkel. So würde man weiter auf die Hälfte eines Rechten, $^1/_3$ R., $^1/_4$ R. u. s. w. kommen und erläutern, dass der 90. Teil eines rechten Winkels 1 Grad genannt wird, also $1\ R = 90^0$ hat u. s. w. — Ich will mit der obigen Ausführung selbstverständlich nur ein Beispiel angeführt haben für die Forderung, dass der geometrische Unterricht in erster Linie anschaulich sei. Erfreulicherweise werden nach dieser Richtung hin von Jahr zu Jahr grössere Fortschritte gemacht und nach Einführung eines vorbereitenden Lehrganges in Quinta wird dem Mathematiker der geometrische Anschauungsunterricht wesentlich erleichtert.

In manchen Lehrbüchern ist die Form und Ausdrucksweise bei Erklärungen, Lehrsätzen u. s. w. in den ersten Abschnitten nicht kurz und einfach genug, nicht so, wie es der Fassungskraft und Ausdrucksweise des Quartaners entspricht. Ein verwickelter Satzbau, ein schwer zu behaltender Wortlaut, Fremdwörter, die der junge Schüler bis dahin nicht gehört hat, erschweren ihm, der seine Gedanken nur in einfachen Sätzen auszudrücken versteht, nicht nur das Verständnis der Sache, sondern wirken geradezu abschreckend. Er wird mit der grössten Schwierigkeit zu kämpfen haben, wenn er lernen oder gar begreifen soll, dass „als Maass des Winkels diene der Richtungsunterschied zwischen einem Strahl und seiner Verlängerung, welcher streng genommen das Maximum des Richtungsunterschieds zweier Strahlen ist, oder ein aliquoter Teil, z. B. der 180. desselben." Ausdrücke wie: Axiom, supplementär, komplementär, konvex, konkav, divergent, konvergent, korrespondierend, homolog, fundamental, kommensurabel, inkommensurabel, transversal, polygonal, Perimeter, Diameter und viele andere können recht gut durch leicht verständliche deutsche Bezeichnungen ersetzt werden. Ohne vorhergehende genaue Erklärung versteht wenigstens der Realschüler die angeführten Ausdrücke nicht, und er wird nur veranlasst, eine umfangreiche Gedächtnisarbeit auf Kosten der Denkthätigkeit zu vollziehen.

Die schon in der Einleitung und den ersten Abschnitten mancher Lehrbücher enthaltene Unsumme von Erklärungen, Lehr-, Hülfs-, Zu- und Nebensätzen, werden den jungen Anfänger in der

Geometrie, für den doch das Lehrbuch oder der Leitfaden hauptsächlich bestimmt ist, geradezu zurückschrecken; mit Mistrauen und Vorurteil wird der Schüler an die ihm so schwer vorkommende Geometrie herangehen, wenn er auf der ersten Seite seines Lehrbuches liest, dass die Grenze zweier Raumteile Fläche, die Grenze zweier Flächenteile Linie heisse, dass Kurven eben oder doppelt gekrümmt seien, dass das Verhältnis der Dimensionen eines Körpers seine Gestalt bestimme und dergl. mehr. Derartige in den Lehrgang der Quarta hineingebrachte mathematische Erörterungen sind nicht dazu angethan, die falsche Behauptung zu zerstören, es sei für Mathematik — Elementarmathematik — eine besondere Veranlagung erforderlich und ohne dieselbe würde es dem Schüler nie gelingen, den auf unseren höheren Schulen gestellten Anforderungen in der Mathematik in befriedigender Weise zu genügen.

Die im ersten Abschnitte der Lehrbücher enthaltenen philosophischen Grundsätze sind überflüssig. Ich bin mit dem Herrn Kollegen Pauly-Andernach*) darin vollständig einverstanden, wenn er sagt, dass die in ein mathematisches Gewand eingekleideten Grundsätze aus dem Lehrbuche des Quartaners überhaupt zu entfernen seien. Die Grundsätze wie „jede Grösse ist sich selbst gleich" u. dergl. bilden einen angeborenen Teil der Erkenntnis; dazu komme die Gefahr, dass der Schüler, dem diese Sätze vom Lehrer oder durch das Lehrbuch unter bestimmten sprachlichen Formen mitgeteilt werden, einen ihm angeborenen Teil der Erkenntnis für erlerntes Wissen halte und von demselben eine blos äusserliche schematische Anwendung mache.

Des weiteren finden sich in den auf unseren Schulen eingeführten Lehrbüchern bei weitem zu viel Sätze in Form von Zusätzen, Umkehrungen u. dergl., die der Schüler gar nicht alle lernen soll und kann, die vielleicht der Vollständigkeit wegen mit aufgenommen sind, aber für die Entwicklung des Systems entbehrlich sind. Abgesehen davon, dass der Lehrer nicht Zeit finden wird, den vorhandenen Stoff genügend zu berücksichtigen, sollte die Planimetrie auf die für das System notwendigen Sätze beschränkt bleiben.

Die Lehrsätze müssen so entwickelt und geordnet werden, dass der Schüler die Beziehungen derselben unter einander und den Zusammenhang des Ganzen leicht erkennt, findet und nicht aus dem Auge verliert. Wenn der Lehrer die Schüler mit den Hauptsätzen der Geometrie recht gründlich vertraut macht und dieselben auch durch Anwendungen, Folgerungen, Zusätze u. s. w., die aber nicht in gleicher Weise wie die Hauptsätze im Text sich breit machen dürfen, sondern etwa in einem Anhang Platz finden können, in den Vordergrund stellt und deren Wert und Notwendigkeit für die weitere Entwicklung des Systems darlegt, wird der Schüler neben dem geistigen Gewinn gewiss auch Interesse und Wohlgefallen an der Mathematik finden, während das Zuviel ihn höchstens verwirrt und schwankend macht, welchen unter den vielen gelernten Sätzen eine grosse Bedeutung beizulegen ist oder nicht.

Schon äusserlich muss das Wichtige gegenüber den Folgerungen und den zur Übung dienenden Sätzen hervortreten. Sätze wie: Alle Senkrechten auf einer Graden sind parallel, oder: wenn eine von zwei Parallelen auf einer Graden senkrecht ist, so ist es auch die andere, oder: wenn der eine von 2 gleichen Winkeln an den Nebenwinkel des anderen angefügt ist, so sind die Winkel Scheitelwinkel u. a. m., können dem Schüler wohl zur Übung gegeben werden, aber aus

*) Siehe Programm-Abhandlung des Progymnasiums zu Andernach Ostern 1889, Nr. 397.

dem Leitfaden können sie füglich fortbleiben; jedenfalls dürfen dergleichen Sätze nicht gleichwertig neben den Hauptsätzen erscheinen. —

Wie die Form der Erklärungen und Lehrsätze der Fassungskraft und dem Ausdrucksvermögen des Schülers anzupassen ist, ebenso muss auch die Beweisführung der Sätze, namentlich anfangs, natürlich klar und genau, aber in möglichster Einfachheit erfolgen. Häufig wird ein viel zu umfangreicher schematischer Apparat in Bewegung gesetzt, wo wenige Worte genügten. Um z. B. zu beweisen, dass Scheitelwinkel gleich gross sind — einer der allerersten planimetrischen Lehrsätze — wird dem Quartaner der folgende Beweisapparat vorgeführt:

Voraussetzung: $\sphericalangle\, COD$ ist Scheitelwinkel zu $\sphericalangle\, AOB$.

Behauptung: $\sphericalangle\, COD = \sphericalangle\, AOB$.

Beweis: $\sphericalangle\, COD + \sphericalangle\, COB = 2$ R (nach Voraussetzung und dem Satze, dass Nebenwinkel zusammen 2 R betragen).

$\sphericalangle\, AOB + \sphericalangle\, COB = 2$ R (aus demselben Grunde).

$\sphericalangle\, COD + \sphericalangle\, COB = \sphericalangle\, AOB + \sphericalangle\, COB$ (Grunds.: Sind 2 Grössen u. s. w.)

$\sphericalangle\, COB = \sphericalangle\, COB$

$\sphericalangle\, COD = \sphericalangle\, AOB$ (Gleiches von Gleichem u. s. w.)

Sieht der junge Schüler auch nur einen solchen Beweis, so wird er eine Schwierigkeit finden, wo sie in Wirklichkeit gar nicht vorhanden ist. Dem Anfänger gegenüber würde ich im obigen Falle zunächst auf Voraussetzung und Behauptung ganz verzichten und dann selbst oder durch die Hand des Schülers einen Winkel, sagen wir von 30^0, zeichnen lassen ($\sphericalangle\, AOB = 30^0$); alsdann verschafft man sich dessen Scheitelwinkel, indem man beide Schenkel rückwärts verlängert. Nun ist $\sphericalangle\, AOB = 30^0$, also $BOC = 150^0$ und darum $\sphericalangle\, COD$ auch $= 30^0$.

Der Schüler ist erst nach und nach dahin zu bringen, mathematisch zu denken und Schlüsse zu ziehen, daher sollte die algebraische, schematische Kunstsprache anfangs möglichst vermieden werden. Aber auch dann, wenn man allmählig den Schematismus einführt, erleichtere man dem Schüler den Überblick nach Möglichkeit. Soll bewiesen werden, dass die Winkel eines Dreiecks ABC zusammen genommen 2 R betragen, und hat man hierzu CA verlängert (E) und den Aussenwinkel EAB durch die zu CB durch A gezogene Parallele AD in 2 Teile zerlegt, so wird es genügen, wenn der Lehrer an die Tafel schreibt:

$$\sphericalangle\, BAC + \sphericalangle\, \underset{\underset{ABC}{\|}}{BAD} + \underset{\underset{ACB}{\|}}{DAE} = 2 \text{ R.}$$

Alles Übrige kann mündlich, etwa durch Fragen erledigt werden. Es bedeutet dann das Obige: Die 3 Winkel BAC, BAD und DAE geben zusammen einen Gestreckten $CAE = 2$ R. Nun kann ich für $\sphericalangle\, BAD$ den Wechselwinkel ABC und für $\sphericalangle\, DAE$ den Gegenwinkel ACB an die Stelle setzen, dann erhalte ich das gewünschte Ergebnis.

Nach meiner Meinung kann ein Schüler am besten zeigen, ob er sich richtige Vorstellungen gebildet und den inneren Zusammenhang der mathematischen Sätze erfasst hat, wenn der Lehrer ihn in den stand setzt, nicht etwa nur Lehrsätze und Erklärungen oder mechanisch auswendig gelernte Beweise hersagen und auf eine Frage eine kurze Antwort geben, sondern — wie es der Unterricht in Naturbeschreibung, Physik, Geographie, Geschichte u. s. w. gleichfalls erstrebt — über einen seinem Standpunkte entsprechenden Gegenstand einen kleinen Vortrag zu halten. Nehmen wir z. B. als Gegenstand das „gleichschenklige Dreieck“, so würde der Schüler mit der Entstehung eines solchen zu beginnen haben; dann folgten die Erklärung und die Bezeichnungen der einzelnen Bestandteile: Grundlinie, Schenkel, Scheitel; ferner die hergeleiteten Eigenschaften über die Winkel an der Grundlinie, über die vom Scheitel ausgezogene Linie, welche gleichzeitig 3 Eigenschaften hat, nämlich die, dass sie den Winkel am Scheitel, sowie die Grundlinie halbiert und auf letzterer senkrecht steht, d. h. also, wenn man der Linie eine der 3 genannten Eigenschaften giebt, sie auch gleichzeitig die beiden anderen erhält. Nun könnte der Schüler angeben, wie auf verschiedene Weise gleichschenklige Dreiecke erhalten werden oder entstehen, z. B. wenn man in den Endpunkten einer Strecke an einer Seite derselben in entgegengesetzter Richtung gleiche Winkel anträgt, oder irgend einen Punkt der Senkrechten, welche durch die Mitte einer Strecke geht, mit den Endpunkten derselben verbindet. Solche Übungen würden sich auch zur schriftlichen Bearbeitung eignen. —

Ein Übelstand besteht noch darin, dass ein und dieselbe Sache in verschiedener Weise bezeichnet wird, wie die Winkelpaare an Parallelen, die Reihenfolge der Kongruenz- und Ähnlichkeitssätze u. a. m.

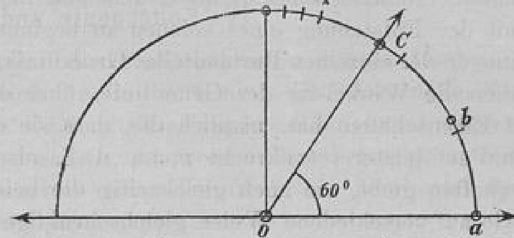
Und nun besteht leider auch noch eine grosse Verschiedenheit in der Anordnung und Verteilung des Stoffes auf die einzelnen Klassenstufen. Wenn auch einzelne Lehrbücher so eingerichtet sind, dass der Lehrer nach eigenem Ermessen diesen oder jenen Abschnitt früher oder später behandeln kann, so sollte doch aus methodischen und praktischen Gründen auf den höheren Schulen mit gleichen Zielen möglichste Übereinstimmung in der Behandlung und Verteilung des geometrischen Unterrichtsstoffes herrschen.

In Folgendem will ich versuchen, eine mir für die 3 Realschulklassen Quarta, Tertia und Secunda am zweckmässigsten erscheinende Anordnung und Verteilung des planimetrischen Stoffes zu geben. Da im Rahmen einer Programmabhandlung eine ausführliche Behandlung dieses Gegenstandes ausgeschlossen bleibt, so beschränke ich mich meistens auf Andeutungen und hebe nur diejenigen Sachen besonders hervor, welche ich für wichtig und unentbehrlich halte, die jedoch von verschiedenen im Gebrauch befindlichen Lehrbüchern entweder gar nicht berücksichtigt sind, oder doch in der Behandlung wesentlich abweichen.

A. Lehrstoff der Quarta.

I. Linien, Winkel, Winkel und Kreis.

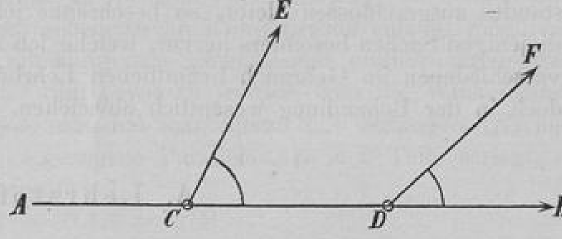
Nach Einführung der geometrischen Formenlehre in Quinta bringen die Schüler schon wertvolle Vorkenntnisse nach Quarta mit, so dass die Vorstellungen von geraden und krummen von gleich-, auseinander- und zusammenlaufenden Linien, von Winkel und von Kreis als bekannt vorausgesetzt werden können. Neben Wiederholung dieser Sachen entwickele man die Beziehungen zwischen einem Winkel und einem Kreise, dessen Mittelpunkt der Scheitel des Winkels ist, zeige also, dass zu einem gestreckten Winkel ein Halbkreis, zu einem rechten Winkel ein Viertelkreis u. s. w., allgemein zu einem bestimmten Winkel auch ein bestimmter Teil des Kreises gehört, damit der Schüler lernt und übt, dass ein Winkel von $^2/_3$ R $= 60^0$, $^1/_5$ R $= 18^0$ u. s. w. erhalten wird, indem man den Viertelkreis in 3, 5 u. s. w. gleiche Teile teilt. Es schadet nicht, wenn der Schüler mechanisch durch Probieren den Viertelkreis z. B. in 3 gleiche Teile teilen



lernt. Stellt sich heraus, dass der Teil $a\,b$ zu klein gewählt ist, so dass von dem Viertelkreisbogen av das Stück xv übrig bleibt, so vergrössert man den Teil $a\,b$ um $\frac{1}{3}$ von vx; nach dem 2., 3. Versuche wird die Teilung des Kreisbogens so genau sein, als man nur wünscht oder wünschen kann. — Man gebe dem Anfänger viel Gelegenheit, auf die angedeutete Weise Winkel von bestimmter Grösse, etwa $\frac{1}{6}$ R, $\frac{1}{4}$ R, $\frac{3}{4}$ R, $1\frac{2}{5}$ R u. s. w. Winkel von 72°, 123° 45′ zeichnen zu lernen, nehme als Beispiele diejenigen Winkel zu Hülfe, welche die Zeiger einer Uhr um 1, 2, $1\frac{1}{2}$ Uhr bilden, damit der Schüler dahin gebracht wird, einen beliebigen, an die Tafel gezeichneten Winkel in Graden oder Teilen eines Rechten annähernd zu schätzen. (Auch bei späteren Aufgaben und Übungen gebe man dem Schüler die Grösse eines Winkels und die Länge einer Strecke möglichst in bestimmten Zahlen, also für die Konstruktion eines Dreiecks etwa 2 Seiten $a = 4^{cm}$ und $b = 5^{cm}$ und den eingeschlossenen Winkel $\gamma = 60°$. Soll die Konstruktion statt auf einem Blatte an der Wandtafel ausgeführt werden, so wähle man den Verhältnissen entsprechend dm anstatt cm.)

II. Winkelpaare.

Neben- und Scheitelwinkel und Winkelpaare an Parallelen, welche von einer Graden durchschnitten werden. Man nenne einen inneren und einen äusseren Winkel an derselben Seite der Durchschneidenden: Gegenwinkel, ein Paar innere (oder ein Paar äussere) Winkel an derselben Seite der Durchschneidenden: Ergänzungswinkel. Es empfiehlt sich, den Schüler nicht dadurch zu verwirren, dass man sich alle 3 zu behandelnden Winkelpaare an einer Durchschneidenden: Gegen-, Wechsel- und Ergänzungswinkel gleichzeitig verschafft, sondern man beginne zunächst mit Gegenwinkeln, indem man an einer Graden AB an derselben Seite in 2 Punkten C und D Winkel anträgt, also $\sphericalangle\, ECB$ und $\sphericalangle\, FDB$, oder indem man von 2 Punkten C und D (nach oben) entweder parallele, oder zusammen- oder auseinanderlaufende Linien zieht und die entstandenen Gegenwinkel $\sphericalangle\, ECB$ nnd $\sphericalangle\, FDB$ untersucht. Wesentlich ist dann im Anschluss hieran zu zeigen, wie man zu einer Graden durch einen Punkt eine Parallele erhält.



III. Winkel und Seiten eines Dreiecks.

Nachdem die Summe der Winkel eines Dreiecks und die Grösse des Aussenwinkels festgestellt, zeige man, dass die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks gleich gross sind, indem man das Dreieck so herumgedreht denkt oder herumdreht, dass die Spitze (Scheitel) wieder auf dieselbe Stelle und die Schenkel auf einander zu liegen kommen.

Aus der Eigenschaft der Gleichheit der Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks entwickelt man ohne Schwierigkeit die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln im gleichseitigen und ungleichseitigen Dreieck.

IV. Kongruente und nicht kongruente Dreiecke.

Man gehe zunächst von der Konstruktion eines Dreiecks versuchsweise aus 3 Seiten und 2 Winkeln aus. Es stellt sich heraus, dass ein Dreieck aus 3 der gegebenen 5 Stücke schon bestimmt ist und man die anderen Stücke nicht mehr wählen kann, wie man will. — Beim 4. Kongruenzsatz kann man sich allenfalls auf rechtwinklige Dreiecke beschränken; mindestens hebe man den häufig zur Anwendung kommenden Fall für rechtwinklige Dreiecke besonders hervor, also: „Zwei rechtwinklige Dreiecke sind kongruent, wenn sie in der Hypotenuse und in einer Kathete übereinstimmen.“ 2 Nichtkongruenzsätze halte ich für das System für notwendig, nämlich: 1) „Sind 2 Seiten eines Dreiecks zweien Seiten eines anderen gleich, die von ihnen eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so sind auch die dritten Seiten beider Dreiecke ungleich und zwar liegt dem grösseren eingeschlossenen Winkel auch die grössere Seite gegenüber“, und 2) die Umkehrung dieses Satzes. Eine häufige Anwendung hat auch der folgende Nichtkongruenzsatz für rechtwinklige Dreiecke: „Stimmen 2 rechtwinklige Dreiecke in der Hypotenuse überein, nicht aber in den einen Katheten, so sind auch die anderen Katheten ungleich und zwar gehört zur grösseren ersteren Kathete die kleinere zweite.“

Aus III und IV lernt der Schüler, wie er es einstweilen anzufangen hat, um zu beweisen, dass ein paar Seiten oder Winkel gleich oder ungleich sind. Entweder liegen die z. B. als ungleich zu beweisenden Winkel in **1** Dreieck, in welchem eine Seite grösser ist als eine andere — oder die betreffenden Winkel liegen in **2** Dreiecken, welche in 2 Seiten übereinstimmen, nicht aber in der dritten Seite. Hierbei ist der Schüler öfters genötigt, durch Hülfslinien oder durch Aufeinanderlegen der Figuren sich solche Dreiecke zu verschaffen.

V. Anwendung der Kongruenzsätze auf symmetrische Figuren.

Das gleichschenklige Dreieck und die von mir schon erwähnte, vom Scheitel des gleichschenkligen Dreiecks aus gezogene Linie, welche gleichzeitig 3 Eigenschaften hat. In diesem Abschnitt ist namentlich der Satz hervorzuheben, dass „die in der Mitte einer Strecke errichtete Senkrechte lauter und alle Punkte enthält, welche von den Endpunkten der Strecke gleich weit entfernt sind“, dass, sobald man einen Punkt hat, der von den Endpunkten einer Strecke gleichweit entfernt ist, derselbe auf der Senkrechten liegt, welche durch die Mitte der Strecke geht und dass durch 2 Punkte dieser Eigenschaft die betreffende Senkrechte bestimmt ist. Ferner zeige man, dass „die Halbierungslinie eines Winkels lauter und alle Punkte enthält, welche von den Schenkeln des Winkels gleichweit entfernt sind“. Von Konstruktionsaufgaben gehören hierher die besonders wichtigen: eine Linie und einen Winkel zu halbieren, in einem Punkte einer Graden hierauf eine Senkrechte zu errichten und von einem Punkte ausserhalb einer Graden auf diese eine Senkrechte herabzulassen.

Sind die Schüler angehalten, im Anschluss an die vorstehenden 5 Abschnitte leichte Konstruktionsaufgaben zu lösen, so würde damit der Unterrichtsstoff der Quarta erledigt sein. —

B. Lehrstoff der Tertia.

VI. Das Parallelogramm.

An die Wiederholung des Unterrichtsstoffes der Quarta schliesst sich die Anwendung der Kongruenz- und Nichtkongruenzsätze auf das Parallelogramm. Die Eigenschaften der gegenüberliegenden Winkel und Seiten und der Diagonalen benutze man, um auf verschiedene Weise Parallelogramme zu erhalten. Von einem Trapez mit den parallelen Seiten a und b ($a > b$) hebe man die Eigenschaft der Mittellinie hervor: Die Mittellinie ist um ebensoviel grösser als b, wie kleiner als a, also das arithmetische Mittel aus den parallelen Seiten des Trapezes.

VII. Linien und Winkel am Kreise.

Mittelpunktswinkel und Sehnen, Entfernungen gleicher und ungleicher Sehnen vom Mittelpunkte. Der Mittelpunkt des Kreises liegt auf der in der Mitte einer Sehne errichteten Senkrechten, wird also gefunden als Schnittpunkt zweier Senkrechten, die man in der Mitte zweier Sehnen errichtet. Ist von einem Kreise ein Bogenstück oder sind 3 Punkte desselben gegeben, so findet man nach dem Vorhergehenden den Mittelpunkt und kann dann den Kreis vervollständigen. — Eine Grade, welche durch den Endpunkt eines Halbmessers geht und schief hierzu steht, schneidet den Kreis noch in einem zweiten Punkte, während die Senkrechte im Endpunkte des Radius eine Berührende (Tangente) ist. — Beziehungen zwischen Peripherie- und Mittelpunktswinkel.

VIII. Figuren in und um einen Kreis.

Dreieck, Viereck, Parallelogramm und Kreis. Das regelmässige Vieleck, Grösse eines Winkels im regelmässigen Vieleck, regelmässiges Vieleck in und um einen Kreis.

Wichtig für die Konstruktion eines regelmässigen Vielecks ist der Satz: „Ist der über einer Sehne stehende Mittelpunktswinkel $\frac{4}{n}$ R, so ist die Sehne die Seite des regelmässigen n-Ecks". — Konstruktion eines regelmässigen Sechs-, Zwölf-, Acht- . . . . -Ecks in und um einen Kreis. Umgekehrt: in und um ein regelmässiges Vieleck einen Kreis zu beschreiben. Beide Kreise haben denselben Mittelpunkt; derselbe liegt sowohl auf der in der Mitte einer Vieleckseite errichteten Senkrechten, als auch auf der Halbierungslinie irgend eines Vieleckswinkels.

In Tertia wie auch in Secunda wird vielleicht wöchentlich eine Stunde ausschliesslich auf Lösungen von Aufgaben (namentlich Dreieckskonstruktionen) verwendet werden können.

C. Lehrstoff der Sekunda.

IX. Flächenvergleichung.

Grundlinie und Höhe im Parallelogramm und Dreieck. Parallelogramme und Dreiecke mit derselben Grundlinie und Höhe. Ergänzungsparallelogramme, Projektionen von Strecken, Projektionssatz und Lehrsatz des Pythagoras. Aufgaben: Eine Linie in n Teile zu teilen, Verwandlungen und Teilungen der Figuren.

X. Flächenberechnung.

Masszahlen, Längen- und Flächeneinheiten. Inhalt eines Rechtecks, wenn die Masszahlen für die anstossenden Seiten a und b sind. 1. Fall: a und b sind ganze Zahlen; 2. Fall: a und b sind gebrochene Zahlen, etwa $a = 2\frac{1}{2}$ (Längeneinheiten), $b = 3\frac{2}{3}$ ($a = \frac{5}{2}$, $b = \frac{11}{3}$). Man teile a in 5 und b in 11 gleiche Teile und ziehe durch die Teilpunkte Parallele zu den Rechteckseiten, dann kommen auf eine Flächeneinheit, d. i. ein Quadrat aus der Längeneinheit, 2×3 der 5×11 entstandenen kongruenten Rechtecke, also enthält das gegebene Rechteck $\frac{5 \times 11}{2 \times 3} = 2\frac{1}{2} . 3\frac{2}{3}$ Flächeneinheiten. — Inhalt des Quadrats, Parallelogramms, Dreiecks, Trapezes und regelmässigen Vielecks.

XI. Proportionale Strecken.

Sind die Masszahlen zweier Strecken $AB = a = 6^{cm}$ und $CD = b = 4^{cm}$, so verhalten sich die Strecken wie 6 zu 4 oder wie 3 zu 2 (der 3. Teil von AB ist gleich der Hälfte von CD) und man schreibt:

$$AB : CD = a : b = 6 : 4, \text{ oder } \frac{AB}{CD} = \frac{a}{b} = \frac{6}{4}$$

Sind zwei andere Strecken gegeben, nämlich $A'B' = a' = 9^{cm}$ und $C'D' = b' = 6^{cm}$, so ist auch $A'B' : C'D' = a' : b' = 9 : 6 = 3 : 2$. Beidemal ergiebt sich dasselbe Verhältnis $\frac{3}{2}$, daher bilden die 4 Strecken eine Proportion:

$$AB : CD = A'B' : C'D' \text{ oder } a : b = a' : b'.$$

Sätze über Proportionen, welche in der Geometrie notwendig sind:

1) In jeder Proportion ist das Produkt der inneren Glieder gleich dem Produkte der äussern; daher kann man die inneren oder die äusseren Glieder mit einander vertauschen.
2) In jeder Proportion verhält sich die Summe (Unterschied) des 1. und 2. Gliedes zum 1. oder 2. Gliede, wie die Summe (Unterschied) des 3. und 4. Gliedes zum 3. oder 4. Gliede.
3) Stimmen 2 Proportionen in 3 gleichgelegenen Gliedern überein, so sind auch die 4. Glieder einander gleich.

Ferner ist auseinander zu setzen, was unter einer fortlaufenden Proportion zu verstehen ist. Ist $a : b = a_1 : b_1$ und $a : c = a_1 : c_1$ — so schreibt man kürzer $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$ (Umgekehrt!). Man erhält proportionale Strecken, wenn man die Schenkel eines Winkels oder zusammenlaufende Linien von Parallelen durchschneidet. Als wichtig ist dann hervorzuheben, dass die zwischen den Schenkeln eines Winkels ausgespannten Parallelen sich verhalten wie die gleichgelegenen Abstände ihrer Endpunkte vom Scheitel des Winkels.

Aufgaben: Eine Strecke nach einem gegebenen Verhältnis ($3 : 5$ oder $a : b$) zu teilen; und zu 3 Strecken a, b und c eine 4. zu finden, so dass $a : b = c : x$.

XII. Ähnliche Figuren.

Erklärung. Zu einem Dreieck und Vieleck ein ähnliches zeichnen (dessen Seiten zu denjenigen des gegebenen sich etwa wie $2 : 3$ verhalten). — Ähnlichkeitssätze und Anwendung derselben auf gleichgezogene Strecken in ähnlichen Dreiecken. Schwerpunkt eines Dreiecks. Verhältnis der durch die Halbierende eines Dreieckswinkels erhaltenen Teile der Gegenseite. Mittlere Proportionale in rechtwinkligen Dreiecken. Stetige Teilung einer Strecke. Das gleichschenklige Dreieck, dessen Grundlinie der grössere Abschnitt des stetig geteilten Schenkels ist.

Das regelmässige Zehneck. Proportionale Strecken am Kreise (Sehnen, Sekanten, Sekante und Tangente).

XIII. Umfang und Inhalt eines Kreises.

Man gehe vom Umfang etwa des ein- und umbeschriebenen Sechs- oder Achtecks aus und bestimme, soweit man will, daraus den Umfang des ein- und umbeschriebenen Zwölf-, Vierundzwanzigecks u. s. w., bezw. Sechzehn-, Zweiunddreissigecks u. s. w., um die Annäherung des Faktors vom Durchmesser $2r$ an $\pi = 3{,}14159\ldots$ zu gewinnen.

Von Konstruktionsaufgaben mögen in Sekunda insbesondere solche Berücksichtigung finden, bei welchen Verhältnisse von Strecken gegeben sind. —

Es ist wohl nicht nötig, den Kollegen gegenüber noch besonders hervorzuheben, dass ich mit den obigen Ausführungen nicht etwa Anspruch erhebe, wesentlich neue Gesichtspunkte dargelegt zu haben; von vielen Fachkollegen weiss ich auch, dass ich mich mit ihnen hinsichtlich der Methode des mathematischen Unterrichts in voller Übereinstimmung befinde. Die Grundsätze, die mich bei Abfassung der vorstehenden kleinen Abhandlung geleitet haben, nach denen auch wohl die meisten Kollegen in ihrem Unterrichte verfahren, fasse ich zum Schluss nochmals in folgenden Worten zusammen:

Der Unterricht muss anschaulich sein und der Lehrstoff zum bleibenden Eigentum des Schülers gemacht werden. Eine weise Beschränkung des gedächtnismässigen Wissens und weniges gründlich erfassen ist besser, als vieles oberflächlich kennen lernen.

Die massenhafte Stoffzuführung hemmt das freie Gemütsleben und drückt es nieder; und dabei gewinnen nur wenige Schüler die Freude eines sicheren Besitzes an dem Gelernten. Fertigkeit und Sicherheit in der Anwendung des Stoffes ist höher zu stellen, als die Mannigfaltigkeit desselben; der Unterricht muss das natürliche Vermögen zu eigenem Urteile und Selbsthätigkeit des Einzelnen entwickeln (vergl. *Wiese,* Paed. Id. u. Prinzip.).