Ueber mathematische Aufgabensammlungen, ein Sendschreiben des Prof. Müttrich an die Lehrer der Mathematik an höheren Schulanstalten in Deutschland.

Hochgeehrte Herren, liebe Collegen!

Freundlich und mit Zutrauen richte ich folgende Zeilen an Sie und bin dabei überzeugt, dass Sie dieselben auch mit bekannter Freundlichkeit und, wo es nöthig ist, mit Nachsicht lesen werden. Dieselbe Wissenschaft, die Mathematik, verbindet uns schon und macht uns gleichen Sinnes, vielleicht sind nun die Worte, welche an Sie zu richten ich mir erlaube, die Veranlassung, dass ein noch innigeres Band zwischen uns geknüpft wird! Sehr lieb wäre es mir, wenn ich einen auch von Ihnen schon gehegten Wunsch hier zur Sprache brächte, und gewiss hat mancher von Ihnen denselben wohl gehabt aber nicht geäussert, weil ihm gerade die Besprechung eines andern Themas zeitgemässer und darum zweckmässiger erschien, vielleicht auch, weil er noch nicht lange genug im Amte ist, um sich nach den verschiedenen Richtungen des mathematischen Unterrichtes in demselben einheimisch genug zu fühlen, vielleicht — doch was soll ich nichtmathematische Conjecturen cumuliren? Drum kurz und gut, ich wünsche, dass Ihnen das Folgende zusagen möchte und bitte um freundlichste Unterstützung oder um einen bessern Vorschlag, welcher bei leichterer Ausführbarkeit mehr Nutzen verspricht, als der meinige. — An Nutzen denke ich eben, das ist vielleicht nicht streng wissenschaftlich —; es kann sich aber doch einmal die Mathematik von dem Vorwurfe, dass sie nützlich ist, nicht reinigen. Deshalb bitte ich für mich sogleich und auch für die Folge um Verzeihung, wenn ich noch weiter von Nutzen reden sollte.

Ich trete nun der Sache, die ich besprechen will, etwas näher. Es giebt keinen Lehrgegenstand in der Schule, welcher nicht eine Mustersammlung, Beispielsammlung oder dgl. aufzuweisen hätte. Dies würde nicht der Fall sein, wenn solche Sammlungen nicht nützlich und deshalb wünschenswerth wären. Ich erkenne dabei schon denjenigen Nutzen dankbar an, welchen sie dem Lehrer bei seinen Schularbeiten unmittelbar gewähren, denn oft genug vermindern sie seine Mühe. Doch sie greifen auch wirksamer ein und werden von günstigstem Erfolge begleitet, wenn sie im eigentlichen Sinne des Wortes **Musterbeispiele** aufstellen, Beispiele welche nicht nur im Allgemeinen gut gewählt sind, d. h. nach Form und Inhalt genügen, sondern auch gleichzeitig wirklichen pädagogischen Werth besitzen. In gewisser Beziehung wäre noch zu wünschen dass sie entnommen wären ältern oder grössern Werken, Manuscripten und überhaupt solchen Quellen, die nicht jedem leicht zugänglich sind. Sammlungen der Art erfüllen ihren Zweck nicht allein in Betreff der Schüler, sondern nützen auch dem Lehrer, bei welchem sie neue Ideen erwecken.

Auch an mathematischen Beispielsammlungen, Uebungsaufgaben etc. fehlt es nicht. Lassen Sie, hochgeehrte Herren, mich nunmehr diese allein ins Auge fassen, denn der Vorschlag welchen ich Ihnen machen will, hat nur mit diesen zu thun. Zuvor aber noch die Bemerkung, dass ich Monographien, wenn ich mich so ausdrücken darf, wie z. B. Feuerbach, Crelle, Strehlke, Jacobi über das geradlinige Dreieck; Grebe, Jacobi über das Viereck, Neumann über die Tangirung der Kreise etc. geliefert haben, hier nicht betrachten will, wenn gleich sie sich den Aufgabensammlungen gewissermassen anreihen. Ich will vielmehr nur solcher Sammlungen gedenken, welche auch unter diesem Titel erschienen sind.

Erfüllen nun diese wohl vollständig ihren Zweck? Hiezu gehört, dass sie keine Lücken haben. Aber selbst bei der besten Sammlung arithmetischer Aufgaben, welche wir besitzen, die deshalb auch in mehrere fremde Sprachen übersetzt ist, ich meine die von Meier Hirsch, kann man dies nicht behaupten. Denn die Uebungsaufgaben zur Lehre von den Logarithmen sind in diesem Buche nicht ausreichend, eben so wenig die für die Kettenbrüche, für unbestimmte Gleichungen, namentlich des zweiten Grades. Ferner sind manche Reihen und Functionen, die ganze Zahlenlehre etc. etc. eigentlich gar nicht berücksichtigt. Und dies ist anerkannt das beste Buch der Art. Andere Sammlungen haben andere Lücken, obgleich sie, vielleicht für eine bestimmte Schule geschrieben daselbst ihren Zweck erreichen mögen. Leider fehlen aber auch solche Sammlungen nicht, welche ihren vorzüglichsten Werth auf eine möglichst grosse Anzahl von Aufgaben zu legen scheinen, weshalb denn auf dem Titelblatte noch ganz besonders bemerkt zu sein pflegt die Menge derselben nach Hunderten gezählt. Vielleicht aber hat der Verfasser daran weniger Schuld als der Verleger. Auch ist es an und für sich nichts Unrechtes, die Zahl der Aufgaben dem Buche an die Stirne zu schreiben, wenn man nur in demselben eine gute Auswahl anträfe und nicht Aufgaben, die bereits in andere Sammlungen wiederholt enthalten sind. Ja würde jemand den Muth und die Ausdauer haben, aus allen solchen Büchern ein einziges neues zusammenzustellen, indem er die Wiederholungen vermeidet, indem er mit Einsicht die in jedem derselben zu findenden guten Beispiele allein beibehält, und sie leicht übersichtlich ordnet, wir würden ein Buch erhalten von gleichem Werthe mit Meier Hirsch, und wer von uns würde nicht ein solches mit Jubel empfangen!

Noch schlimmer steht es vielleicht mit Sammlungen geometrischer Aufgaben. Selbst diejenigen, welche die Methode der Alten befolgen, und die, welche vorzugsweise der Trigonometrie und sonstiger Rechnung zur Lösung der Aufgaben huldigen, sind noch mancher Vervollständigung mancher Verbesserung fähig. Wie wenig sind aber viele neuere Sammlungen mit der Zeit mitgegangen!

Wie dürftig fallen im Allgemeinen die Aufgaben über analytische Geometrie, über sphärische Geometrie, über die Lehre von den Kegelschnitten, über die von Poncelet, Steiner und andern geführten Untersuchungen aus.

Man könnte uns hier einwenden, dass so eben an manche Abschnitte der Mathematik gedacht worden ist, welche in der Schule mit Stillschweigen übergangen werden dürfen z. B. die Lehre von den Kegelschnitten. Es reicht freilich schon die Antwort hin, sie dürfen gelehrt werden und sind deshalb in vielen Schulen ein Lehrgegenstand. Doch will ich in Bezug auf sie noch zweierlei bemerken. Die Kegelschnitte liefern erstens vorzugsweise schöne Beispiele für die Lehre von der quadratischen Gleichung; sie leben und weben recht eigentlich in dieser und umgekehrt. Es entsteht also ohne die Kegelschnitte zwischen den auf der Schule zu lehrenden Theilen der Mathematik ein Missverhältniss, oder es wird dem Lehrer der Mathematik wenigstens ein unangenehmer Zwang aufgelegt, wenn er die quadratischen Gleichungen lehren soll, der Kegelschnitte aber nicht gedenken darf. (Man lehre einmal das Epos kennen, aber gedenke nicht des Homer's!) Der zweite Uebelstand, der sich bildet, wenn die Kegelschnitte nicht gelehrt werden, besteht darin, dass der Lehrer der Physik in Verlegenheit geräth, wenn er die Lehre vom Falle, die Katoptrik etc. etc. zu besprechen hat. Hier kann ohne die Kenntniss von den Kegelschnitten vieles nur historisch aufgefasst werden, und doch sind ja vorzugsweise die mathematischen Gesetze zu entwickeln.

Nach dieser Episode, welche ich eigentlich für Nichtmathematiker, wenn solche meinen Aufsatz lesen sollten, zugefügt habe, kehre ich wieder zu meinem Gegenstande, den mathematischen Aufgabesammlungen zurück. So viel ist gewiss, dass wir für die Schule keine nach allen Seiten hin vollständige Sammlung besitzen, weder in Deutschland noch in einem andern Lande, welche dem jetzigen Standpunkte der Wissenschaften entspricht. Aus wie vielen Bänden ein solches Werk bestehen würde, lässt sich nicht im Voraus bestimmen, auch kommt's darauf vor der Hand nicht an. Wichtig aber sind die Fragen: Ist eine solche Sammlung überhaupt möglich? Antwort: Ja. Wer soll sie schreiben? Wir selbst. Nicht dieser oder jener von uns, bewahre! Wir alle legen Kopf und Hand an das Werk. — Ich habe hiemit den Hauptgedanken dieses Aufsatzes Ihnen mitgetheilt. Den Inhalt meines Vorschlages, den Inhalt meiner Bitte an Sie um Ihre Zustimmung darf ich nicht weiter angeben, sie liegen auf der Hand. Auch davon darf ich schweigen, dass mein Vorschlag Nützliches, Wünschenswerthes bezweckt. Nur über die Möglichkeit denselben zu realisiren erlauben Sie mir noch einige Worte hinzuzufügen.

Ich nehme an, dass jeder von uns auf ihm eigenthümliche Weise Einen einzigen Abschnitt der Mathematik nach vielen Richtungen hin verfolgt hat. Ich weiss sehr wohl dass dies zu wenig fordern heisst, dass ich jedem von uns dabei Unrecht thäte, wenn ich dies glaubte. Ich nehme es nur an, weil diese Voraussetzung bereits hinreicht, die Sache als leicht ausführbar darzustellen. Nun bitte ich jeden von Ihnen aus Seinem Abschnitte Lehrsätze, oder Aufgaben sammt deren Auflösung und Beweis, sechs Aufgaben wären schon genug, und ein halber Bogen würde sie wohl fassen, niederzuschreiben, drucken zu lassen und bei Versendung der nächsten Programme jedem derselben ein Exemplar beizulegen. Jedes Gymnasium erhält dann eins derselben und dies kann dem Lehrer der Mathematik eingehändigt werden. — Wenn wir dies thun, muss nicht der Erfolg höchst erfreulich sein! Jeder von uns erhält eine reiche Sammlung nie gedruckter Aufgaben, an die vielleicht keiner von uns, den Verfasser ausgenommen, jemals gedacht hätte. Welch ein Schatz von neuen Ideen strömt uns zu! Von wie vielen kleinern Untersuchungen werden die Resultate nie bekannt, und doch ist es viel zu Schade dass sie verloren gehen. Hier nun ist die beste Gelegenheit gegeben sie uns, der Schule, der Welt, vielleicht auch der Wissenschaft zu erhalten. Wir erreichen unsere Absicht eine genügende Aufgabensammlung zusammenzustellen, nicht blos was die leichte Uebersicht betrifft, sondern auch was die Gründlichkeit und Vollständigkeit anlangt, wenn jeder von uns ein möglichst eingeschränktes Thema genau untersucht. In Jahr und Tag besitzt dann jeder von uns den Anfang einer reichen Aufgabensammlung. Den Anfang sage ich, denn warum sollte sie sogleich geschlossen werden? Mehr und minder vollständig werden zum ersten Male die einzelnen Abschnitte bedacht sein, und auch an Lücken wird es nicht fehlen. Aber es ist nichts umsonst da. Einige Aufgaben können sich vielleicht doppelt vorfinden, was schadet das? Wir lernen die Hauptrichtungen kennen, welche der mathematische Unterricht im Vaterlande verfolgt, wir erhalten somit Gelegenheit über dieselben näher nachzudenken und etwanige Schwächen in Zukunft zu vermeiden. Manche Abschnitte werden sich vorläufig als erschöpft betrachten lassen, andererseits aber werden auch die Lücken sich deutlich herausstellen, deren Ausfüllung wir dann gerne übernehmen wollen. Wenige Jahre sind nothwendig ausreichend, den Ruhm, dessen die deutsche Pädagogik sich erfreut, auch in Betreff der Mathematik aufs Neue zu begründen; denn die pädagogische Seite soll ja bei unserer Sammlung vorzugsweise hervortreten.

Sollen wir noch weiter in die Zukunft blicken, so können wir einmal daran denken, unsere Arbeit einem weiteren Kreise zu übergeben. Wer von uns würde sich nicht ein Exemplar zu verschaffen suchen, wenn er hörte, dass ein Werk, wie dasjenige von dem hier die Rede ist, im Vaterlande oder sonst wo existirt, ein Werk geschrieben von Männern der Sache kundig, die zugleich Pädagogen sind, welche also Aufgaben niedergeschrieben haben, für deren Zweckmässigkeit die Erfahrung spricht. Denn keinesweges, wie wohl einige wähnen, reicht es für die Schule hin, mit dem Theile des Wissens, in welchem man zu unterrichten hat, bekannt zu sein, und jeder, der es selbst versucht hat, wird mir beistimmen. Stellen wir nun nach einigen Jahren unser Werk zusammen und veröffentlichen wir es durch den Druck. Wir werden dadurch vielleicht in den Stand gesetzt manchen guten Zweck zu erlangen, z. B. armen oder alten Collegen eine Falte zu glätten, welche die Sorge in ihrem Antlitze gezogen hat. Doch wozu so weit voraus denken. —

Aber, so höre ich einen sprechen — Nein nein, meine lieben Herren Collegen, hier gilt kein aber. Jeder von uns hat viel viel mehr als sechs eigenthümliche Aufgaben in seinem Kopfe, vielleicht schon in seinem Pulte. Diese werden gedruckt, versandt und wie gesagt, in Jahr und Tag ist jeder von uns im Besitze eines beneidenswerthen Schatzes, den wir uns obendrein selbst geschenkt haben, was auch sein Gutes hat. Aber — nun meinetwegen wir wollen einmal die Aber, welche mir die wichtigsten scheinen, näher betrachten. Unsere Höchsten Behörden haben nur befohlen, Programme auf dem von mir angegebenem Wege zu versenden, keineswegs eine solche Beilage. Wer aber, Sie sehen ich habe auch ein Aber, zweifelt von Ihnen, dass auf unsere Bitte wir die Erlaubniss dazu erhalten würden? Die Beilage beträgt einen Bogen allerhöchstens, um so viel wäre das zu versendende Programm stärker geworden, die Mehrkosten können daher nur auf wenige Thaler angeschlagen werden, und wem von uns ist die Liberalität unserer Obersten Behörden unbekannt, wenn es darauf ankommt etwas Gutes zu fördern? Und unser Werk ist gut.

Aber jeder einzelne von uns hat dabei selbst Kosten, die manchem zu gross erscheinen könnten. — Mögen die Kosten 5 Rthlr. betragen, auch sogar noch mehr, wir müssen doch auch bedenken, wie viel wir dafür erhalten. Und hat nicht jeder von uns für weniger brauchbare Bücher schon viel mehr Geld ausgegeben?

Dass wir die beste Sammlung uns schaffen können, bezweifelt wohl Niemand. Ob wir sie erhalten werden? Dies hängt allein von unserm guten Willen ab, und bei wem von uns sollte sich der nicht finden?

Ich will es nur gestehen, dass ich noch mehr im Sinne habe. Ich dachte nemlich anfänglich daran über eine Sammlung von physikalischen Aufgaben zu reden. Mir schien aber das hier Besprochene vorangehen zu müssen, weil es leichter ausführbar ist, weil wir dadurch auf einem leichtern Wege uns einander nähern können. Geht es nun meinem Wunsche gemäss, so können wir ja dies andere Thema später aufnehmen, denn Noth thut es da gar sehr. Freilich hat Dr. Büchner in Hildburghausen mit seinem Buche einen lobenswerthen Anfang gemacht und in einer zweiten Auflage würden viele Fehler wie sie in Aufgabe 18 Pag. 6., in Aufgabe 7 Pag. 237 u. s. w. vorkommen, sich vermeiden lassen, aber der Fleiss und die Kraft Eines Mannes reicht dabei nicht aus: Lassen Sie uns auch diesen Gegenstand, zuerst jeder für sich, in nähere Erwägung ziehen.

Um die Gaben anzudeuten, welche ich wenn Sie meinem Vorschlage beipflichten, zu liefern gesonnen bin, erlauben Sie mir eine Probe Ihnen vorzulegen. Ich würde zum erstenmal stereometrische Aufgaben wählen. Ich lege nemlich auf den Unterricht in der Stereometrie mehr Werth, als es wohl im Allgemeinen zu geschehen pflegt. Sie ist mir Einleitung zur Krystallographie, zur Perspective, zur neuern Geometrie. Es werden für den Unterricht instructive Körper, meistens von den Schülern selbst gefertigt, die gut gerathenen bilden eine dem Gymnasio gehörende jetzt schon bedeutende Sammlung. Zu Aufgaben wähle ich zuerst eine mehr umfassende, z. B. „Von den Würfelschnitten.

Die Theile der Arbeit werden in einer vorläufigen Besprechung ermittelt. In diesem Falle etwa folgendermaasen: Der Schnitt muss wenigstens drei Seitenflächen des Würfels treffen. Geschieht dies, so ist der Schnitt ein Dreieck. Von einer Ecke A des Würfels gehen drei Kanten aus. Schneidet man auf jeder derselben von A aus gerechnet ein gleiches Stück ab, so erhält man drei Punkte. Diejenige Ebene, welche durch sie gelegt werden kann, liefert ein gleichseitiges Dreieck als Würfelschnitt. Sind nur zwei dieser Abstände einander gleich, so erhält man ein gleichschenkliges, und ist keiner dieser Abstände dem andern gleich, ein ungleichseitiges Dreieck. — Die Frage, ob wohl ein rechtwinkliges ein stumpfwinkliges Dreieck als Würfelschnitt erscheinen kann, wird dabei aufgeworfen, bleibt aber für die Arbeit zu beantworten. Eben so ob sich wohl ein gleichseitiges Dreieck durch den Würfel legen lässt, dessen Flächeninhalt gleich einer Seitenfläche des Würfels ist —; welches das grösste gleichseitige Dreieck ist, und ähnliche andere Fragen. — Trifft die durchgelegte Ebene vier Seitenflächen des Würfels, so erhält man als Würfelschnitt ein Viereck. Das Quadrat springt dabei in die Augen; es läuft parallel mit einer Seitenfläche, kann aber auch einer Diagonalebene parallel gehen. — Das Rechteck sieht man leicht — weniger leicht den Rhombus. Man erhält ihn aber so: Vor uns auf dem Tische stehe der Würfel. Die obern vier Kanten heissen der Reihe nach a, b, c, d, die ihnen entsprechenden untern α, β, γ, δ, so dass a und α gegenüberliegende Seiten derselben Seitenfläche des Würfels werden. Die Mittelpunkte von c und α verbinde man durch eine gerade Linie und lege durch sie einen Schnitt, welcher gleichzeitig diejenigen vier Seitenflächen schneidet, in deren Durchschnittslinien die erwähnten zwei Mittelpunkte liegen. Ueber die verschiedenen Rhomben, welche man dabei erhält, lassen sich nun Bemerkungen sammeln, indem man sie nach ihrer Form, nach ihrer Grösse betrachtet. — Trapeze, oder Vierecke mit Einem Paar parallelen Seiten giebt es zweierlei, je nachdem ihre nichtparallelen Seiten einander gleich sind oder nicht. Die Grenzen, zwischen denen ihre Winkel liegen, geben Untersuchungen, ähnlich den bei den Dreiecken oben angedeuteten. Umfang und Inhalt können ebenfalls betrachtet werden. — Vierecke mit lauter nichtparallelen Seiten giebt es nicht, weil unter vier Seitenflächen des Würfels wenigstens Ein Paar einander parallel geht, folglich die Durchschnittslinien dieses Paares mit der durchgelegten Ebene Parallellinien sind, also dem Viereck ein Paar parallele Seiten liefern. — Ein Fünfeck erhält man, wenn fünf von den Seitenflächen des Würfels von der durchgelegten Ebene gleichzeitig geschnitten werden. Man denke sich eine Diagonalebene des Würfels, zwei ihrer gegenüberstehenden Ecken heissen A und B, von B aus schneide man auf der längern Seite eine Linie BC ab, die kleiner ist als die Hälfte dieser Seite. Durch die Linie AC lege man endlich einen Schnitt senkrecht auf der Diagonalebene, so liefert er ein Fünfeck und zwar ein symmetrisches d. h. ein solches, das sich durch eine gerade Linie in zwei congruente Hälften zerlegen lässt. — Dreht man diesen Schnitt etwas, so dass er mit der Diagonalebene nicht mehr einen rechten Neigungswinkel bildet, so kann man ein ganz ungleichseitiges Fünfeck schaffen. — Kann den Punkt A jeder Punkt in der kürzern Seite der Diagonalebene in Bezug auf die Erzeugung eines Fünfecks ersetzen? Ein regelmässiges Fünfeck erhält man nicht. Warum? — Das Sechseck endlich wird erhalten, wenn alle sechs Seitenflächen gleichzeitig von dem Schnitte getroffen werden. Man lege senkrecht auf einer Diagonale durch deren Mitte einen Schnitt, er liefert ein Sechseck, und zwar das regelmässige. Diesem parallel gehen andere Sechsecke in deren jedem die erste, dritte, fünfte Seite einander gleich sind, und eben so die zweite, vierte, sechste. Geneigt zu diesem liegen die anders geformten Sechsecke. — Hiebei kann man nun untersuchen, welche Form derjenige Theil des Würfels hat, in welchem die Sechsecke liegen. Auch kann man sich die Möglichkeit der bekannten Aufgabe anschaulich machen, welche verlangt durch den einen von zwei einander congruenten Würfeln ein Loch zu schneiden, durch welches sich der andere Würfel durchschieben lässt u. s. w. Hiemit kann die Besprechung über die Würfelschnitte geschlossen werden; denn ein Polygon von mehr als sechs Seiten kann man nicht erhalten, weil man nicht mehr als sechs Seitenflächen beim Würfel zu schneiden vorfindet —

Hier ist schon Stoff genug zu einer grössern freien Arbeit. Scheint die Aufgabe zu viel umfassend, so kann man sie ja theilen, oder nur einen Abschnitt derselben weiter ausführen lassen. Bei der Besprechung der Aufgabe wähle ich den heuristischen Weg. Bei Lebendigkeit in der Unterhaltung finden die Schüler sehr leicht Interesse an Aufgaben dieser Art. Auch halte ich dieselben für sehr nützlich, weil sie die Phantasie, das Vermögen sich räumliche Grössen mit Leichtigkeit vorzustellen in hohem Grade üben, und welchem Menschen sollte wohl beides nicht zu wünschen sein!

Noch ein Paar einzelne Aufgaben erlauben Sie mir zuzuschreiben. Ich wähle solche, die an das Vorige anklingen.

Aufgabe: Wenn man durch ein regelmässiges Tetraeder eine Ebene legt, welche (nur) zweien Kanten desselben parallel läuft, wie gross ist dann der Umfang der Figur, welche den Durchschnitt bildet? Die Kante des Tetraeders wird = a gesetzt.

Auflösung: Das Tetraeder hat sechs Kanten. Eine derselben heisse b. Aus jedem Endpunkte von b gehen zwei andere Kanten aus. Die bis jetzt noch nicht erwähnte sechste Kante liegt der Kante b gegenüber. Sie heisse c. Man verbinde die Mittelpunkte von b und c durch eine gerade Linie (Axe des Tetraeders) und lege endlich durch einen beliebigen Punkt der Axe senkrecht auf derselben eine Ebene durch das Tetraeder. Sie liefert den zu besprechenden Durchschnitt. Er ist ein Rechteck und sein Umfang gleich der doppelten Kante vom Tetraeder = 2a.

Beweis: Die Summe zweier zusammenstossender Seiten des Rechtecks ist immer gleich der Kante des Tetraeders.

Zusatz: Geht der Schnitt durch den Mittelpunkt der Axe, so ist er ein Quadrat, dessen Flächeninhalt $= \frac{a^2}{4}$.

Zusatz: Das Quadrat ist von allen Schnitten das Maximum, denn $\frac{a^2}{4} > \left(\frac{a}{2} + \frac{x}{2}\right)\left(\frac{a}{2} - \frac{x}{2}\right)$, wo x den Unterschied zweier zusammenstossenden Seiten des Rechtecks bedeutet.

Aufgabe: Wenn man durch ein regelmässiges Octaeder zweien seiner Seitenflächen parallel eine Ebene legt, welche Figur bildet der Durchschnitt und wie viel mal grösser ist der Umfang als die Kante a vom Octaeder?

Antwort: Der Durchschnitt ist ein Sechseck in dem die erste, dritte, fünfte Seite einander gleich sind, und eben so die zweite, vierte, sechste. Der Umfang des Sechsecks beträgt 3a.

Zusatz: Das mittelste Sechseck ist gleichseitig und unter allen das grösste. Seine Fläche verhält sich zur Seitenfläche des Octaeders wie 3 : 2, es lässt sich nemlich in 6 solcher gleichseitigen Dreiecke zerlegen, von denen in 4 die Seitenfläche des Octaeders zerfällt werden kann.

Aufgabe: Wenn man in einem regulairen Ikosaeder zwei einander diametral gegenüberliegende Ecken durch eine gerade Linie verbindet und auf dieser senkrecht einen Schnitt durch den Körper legt, welcher ein Zehneck ist, wie viel mal grösser ist sein Umfang als a, die Kante des Körpers?

Antwort: Der Umfang des Zehnecks ist fünf mal so gross als a.

Zusatz: Das mittelste Zehneck ist regelmässig und das Maximum $= \frac{5a^2}{8}\sqrt{5 + 2\sqrt{5}}$.

Zusatz: Von der Mitte des Körpers nimmt natürlich das Zehneck nach beiden Seiten hin gleichförmig ab bis es mit der Grösse $\frac{a^2}{4}\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}$ in ein regulaires Fünfeck übergeht, so dass das grösste Zehneck zum grössten Fünfeck sich verhält wie $\sqrt{5} : 2$.

So viel für diesmal. Indem ich noch um Ihr gütiges Wohlwollen bitte, habe ich die Ehre mich ganz gehorsamst zu empfehlen.

Müttrich.