Construire die Polaren des gegebenen Radikalcentrums, in Bezug auf A°, B°, C°, und sodann die Durchschnittspunkte derselben mit den entsprechenden Curven. Diese sechs Punkte, welche das Radikalsystem bilden, geben durch ihre Verbindungslinien in Einem zugleich die sechs Centra der Homologie, die vier Radikal-Achsen und die Pole α_0, β_0, γ_0 der festen Geraden, welche sich auf das gegebene Radikalcentrum beziehen. Sucht man also diese Geraden selbst und verfährt sonst wie oben, so erhält man fast auf einmal vier Paare der gesuchten Kegelschnitte; und dann werden sich die übrigen mit leichterer Mühe ergeben, indem man zu diesem Behuf nicht nöthig hat, die Durchschnitte der Polaren der anderen Radikalcentra mit den entsprechenden Curven zu suchen.

Wenn endlich zweitens die neun gegebenen Punkte sich innerhalb des gezeichnet vorliegenden Kegelschnittes befinden, so daß man von ihnen keine Tangenten an letztere ziehen könnte, so muß man zuvörderst die Punkte a, a′, a″; b, b′, b″; c, c′, c″ mit den Tangenten in diesen Punkten vertauschen, was sich immer mit Hülfe der Berührungssehnen und Berührungspole ausführen läßt, welche auch dann noch construirbar sind; und sonach ganz wie vorhin, aber im reciproken Sinne verfahren; sowie man auch umgekehrt, wenn man sich, statt neun Punkte, neun Tangenten gäbe, welche die gezeichnet vorliegende Curve nicht schnitten, zuvörderst sich die Berührungspunkte derselben verschaffen und somit die Aufgabe auf die so eben behandelte zurückführen müßte.

Anwendung
der vorhergehenden Theorie auf Gebilde im Raume.

Kommen wir jetzt zu dem interessantesten Theile dieser Untersuchungen, nämlich zur Betrachtung derjenigen Eigenschaften der Flächen zweiter Ordnung und zweiter Klasse, welche mit dem Problem des Fermat in demselben Grade, als die vorhin behandelten mit dem des Apollonius, verwandt sind. Diese Eigenschaften bieten sich, sozusagen, von selber dar, wenn wir den Nerv des ganzen vorigen Ideenganges, der in (IV, 1) zu suchen ist, fortwährend im Auge behalten. Hierbei setzen wir, um an Raum zu sparen und den der Geometrie kundigen Leser nicht zu ermüden, die Grundbegriffe und einige leichte Sätze als bekannt voraus. Auch fallen jetzt die Zeichnungen, welche zum Theil schon oben durch zweckmäßige Bezeichnungen ersetzt wurden, ganz hinweg, indem dieselben, wie einer unserer namhaftesten Geometer sehr treffend bemerkt, die Gebilde im Raume und deren verschiedene Verbindungen nicht leicht vorstellig machen könnten. *)

I.

Wenn zwei beliebige Flächen der zweiten Ordnung eine und dieselbe dritte Fläche dieser Ordnung umhüllen **), so haben sie immer zwei reelle oder ideale ebene Schnitte gemein, deren Ebenen durch dieselbe Gerade gehen, als die Umhüllungsebenen dieser Flächen (Monge und Chasles); und diese vier Ebenen bilden einen harmonischen Büschel.

Wenn zwei beliebige Flächen der zweiten Klasse eine und dieselbe dritte Fläche dieser Klasse umhüllen **), so haben sie immer zwei reelle oder ideale Berührungskegel gemein, deren Scheitel in derselben Geraden liegen, als die Umhüllungspole dieser Flächen; und diese vier Punkte bilden eine harmonische Schaar.

---

*) „Ueberhaupt," sagt Herr Steiner, „sind stereometrische Betrachtungen, meiner Meinung „nach, nur dann richtig aufgefaßt, wenn sie rein, ohne alle Versinnlichungsmittel, nur „durch die innere Vorstellungskraft angeschaut werden. Wenigstens ist dieses für die „synthetische Betrachtungsweise erforderlich, und vorzugsweise für Denjenigen, der darin „erfinderisch zu Werke gehen will; denn nur auf diesem Wege kann er seinen Gegenstand „selbst gewähren lassen, kann er den ganzen Umfang der Eigenschaften einer Figuren-Ver„bindung in allen ihren einzelnen Fällen und nach allen ihren Grenzen hin leicht und „richtig durchschauen, und alle diese Fälle zusammen als ein in einander fließendes oder „aus sich selber heraustretendes Ganzes erkennen. Wenn auch im Anfange diese freie „Vorstellung einige Mühe macht, so wird man doch bald eine gewisse Fertigkeit darin „erlangen, und sich dann für die überstandene Anstrengung hinlänglich entschädiget finden. „Wer bemüht wäre, durch andere Mittel diese Anstrengung zu umgehen, der dürfte nicht „wohl thuen, indem er das Vorstellungsvermögen, statt gesund, kräftig und lebensthätig „zu machen, dasselbe vielmehr in dunkler, schwerfälliger Auffassung erhalten würde." Diese Worte gehen ganz besonders auch den Lehrer der Geometrie am Gymnasium an, dem es vor Allem um Erhöhung der geistigen Spannkraft zu thun sein muß.

**) d. h. links: äußerlich oder innerlich längs ebenen Schnitten berühren, und rechts, was in der Sache einerlei ist: sämmtliche Ebenen eines Kegels der 2. Kl. in denselben Punkten als jene Fläche berühren. Wir bedienen uns hier des Ausdruckes umhüllen (envelopper)

Denn eine Transversal-Ebene, die sich um einen beliebigen, den beiden Flächen der 2. O. gem. Punkt dreht, erzeugt mit den drei Flächen drei Kegelschnitte, deren zwei den dritten doppelt berühren. Daher geht die Gerade, welche jenen Punkt mit dem Durchschnitte der beiden Berührungssehnen verbindet, nach einem zweiten, den beiden Flächen gem. Punkte, und erzeugt, durch ihre Bewegung längs der Durchschnittslinie der Umhüllungsebenen, eine der beiden Ebenen, um die es sich handelt. Ferner schneiden alle vier Ebenen jede Transversal-Ebene in vier harmonischen Strahlen.

Und von einem Punkte als Scheitel, der sich auf einer beliebigen festen, den beiden Flächen d. 2. Kl. **A** und **B** gemeinschaftlichen Berührungsebene bewegt, gehen an die drei Flächen **A**, **B**, **K** drei Kegel derselben Klasse A_1, B_1, K_1, wovon die beiden ersten den dritten doppelt berühren. (Nämlich die zwei Ebenen, die durch jenen Punkt und z. B. durch den zu **A** gehörigen Umhüllungspol gehen und die Fläche **K** berühren, berühren auch **A**, und zwar in demselben Punkte; daher berührt jede K_1 und A_1 längs demselben Strahle. Die Durchschnittslinien dieser beiden Ebenen und die der zu B_1 gehörigen, d. h. die beiden Berührungspolaren — gehen also durch die entsprechenden Umhüllungspole. Sie liegen außerdem mit den Durchschnittslinien zweier Paare, dem A_1 und B_1, und folglich der **A** und **B**, gemeinschaftlicher Berührungsebenen in einerlei Ebene, was aus (I, 1 rechts) mittels einer Transversal-Ebene erhellt.) Daher liegt die Gerade, wo die feste Berührnngsebene die von den Berührungspolaren gebildete schneidet, auf einer zweiten, den Flächen **A** und **B** gemeinschaftlichen Berührungsebene, und erzeugt, da sie durch einen festen Punkt auf der Verbindungslinie der Umhüllungspole geht, durch ihre Bewegung sämmtliche Berührungsebenen eines der beiden Kegel, um die es sich handelt; u. s. w.

Zusätze.

1.

Ist eine beliebige Fläche der zweiten Ordnung und ein beliebiger Ke-

Ist eine beliebige Fläche der zweiten Klasse und ein beliebiger Kegel

statt des unbequemen umschrieben sein (être circonscrit), und nennen demgemäß links Umhüllungsschnitt und Umhüllungsebene den Schnitt und dessen Ebene, längs welchen die Berührung geschieht, und rechts Umhüllungskegel und Umhüllungspol den in der Erklärung gemeinten Kegel und dessen Scheitel; zum Unterschiede dagegen Berührungskegel jeden anderen, welcher eine oder mehrere Flächen ringsum, aber die letzteren in verschiedenen Punkten berührt.

gelschnitt, welcher dieselbe in zwei Punkten berührt, gegeben, so gibt es immer unzählige Flächen dieser Ordnung, welche jene und diesen umhüllen; aber es gibt deren keine drei, welche außerdem noch einen Punkt gemein haben.

dieser Klasse, welcher dieselbe längs zwei Ebenen berührt, gegeben, so gibt es immer unzählige Flächen dieser Klasse, welche jene und diesen umhüllen; aber es gibt deren keine drei, welche außerdem noch eine Berührungsebene gemein haben.

Denn nimmt man auf dem Umfange des Kegelschnitts einen beliebigen Punkt an, so kann man sich durch die Berührungssehne unzählige Ebenen gelegt denken, und sofort unzählige Flächen d. 2. O., welche die gegebene längs diesen Ebenen umhüllen und durch den angenommenen Punkt gehen. Da nun ein Kegelschnitt, der einen gegebenen doppelt berührt, durch die beiden Berührungspunkte und einen beliebigen dritten Punkt vollkommen bestimmt ist, so ist der gegebene allen diesen Flächen gemeinsam; hätten nun drei der letzteren einen Punkt, der nicht auf dieser Curve läge, gemein, und man legte durch ihn und die Berührungssehne eine Ebene, so würde diese die vierte harmonische zu der des Kegelschnitts, als ihr zugeordneten, und zu jedem Paare der Umhüllungsebenen dieser drei Flächen sein, was unmöglich ist.

Und nimmt man eine beliebige Berührungsebene des Kegels an, so kann man jeden Punkt auf der Durchschnittslinie der beiden Ebenen des Satzes rechts als den Umhüllungspol einer Fläche d. 2. Kl., in Bezug auf die gegebene, betrachten, welche zugleich die beliebig angenommene Ebene berührt. Der Kegel, welcher vom Scheitel des gegebenen an die geg. Fläche geht, wird von allen denjenigen, die von demselben Scheitel an die übrigen Flächen gehen, und zugleich von dem geg. Kegel doppelt berührt. Sie haben aber sämmtlich auch noch die beliebig angenommene Berührungsebene gemein; also fallen alle mit dem gegebenen zusammen. Gehörte nun dreien jener Flächen eine Berührungsebene gemeinschaftlich, und nicht zugleich dem geg. Kegel an, so würde sie die Durchschnittslinie der beiden Ebenen des Satzes in einem Punkte schneiden, der der vierte harmonische zum Scheitel des geg. Kegels, als ihm zugeordnetem Punkte, und zu jedem Paare der Umhüllungspole dieser drei Flächen wäre, was unmöglich ist.

2.

Ist eine Fläche der zweiten Ordnung, und sind vier Punkte beliebig im Raume gegeben, so gibt es im

Ist eine Fläche der zweiten Klasse, und sind vier Ebenen beliebig im Raume gegeben, so gibt es im All-

Allgemeinen acht Flächen dieser Ordnung, welche jene umhüllen und durch diese vier Punkte gehen.

gemeinen acht Flächen dieser Klasse, welche jene umhüllen und diese vier Ebenen berühren.

Denn in der Ebene von dreien der vier Punkte gibt es im Allgemeinen vier Kegelschnitte, welche den Durchschnitt dieser Ebene mit der geg. Fläche doppelt berühren und durch die drei Punkte gehen; und unter allen Flächen d. 2. O., welche die gegebene und einen dieser Kegelschnitte umhüllen, gibt es höchstens zwei, welche zugleich auch durch den vierten geg. Punkt gehen.

Und legt man vom Durchschnittspunkte dreier der vier Ebenen, als Scheitel, einen Kegel d. 2. Kl. an die geg. Fläche, und schneidet ihn und die drei Ebenen durch eine beliebige andere, so gibt es im Allgemeinen vier Kegelschnitte, welche den so entstehenden doppelt und die drei Durchschnittslinien einfach berühren. Also gibt es im Allg. auch vier Kegel der 2. Kl., welche die geg. Fläche längs zwei Ebenen, und jede der drei gegebenen Ebenen berühren. Unter allen Flächen d. 2. Kl. aber, welche die gegebene und einen dieser vier Kegel umhüllen, befinden sich höchstens zwei, welche zugleich auch die vierte geg. Ebene berühren.

II.

Drei beliebige Flächen der zweiten Ordnung, welche eine und dieselbe vierte umhüllen, haben paarweise sechs ebene Schnitte gemein, welche ein **vollständiges Vierkant** im Strahlbüschel bilden d. h. drei zu drei sich in vier Geraden schneiden.

Drei beliebige Flächen der zweiten Klasse, welche eine und dieselbe vierte umhüllen, haben paarweise sechs Berührungskegel gemein, deren Scheitel ein **vollständiges Vierseit** in der Ebene bilden, d. h. drei zu drei in vier Geraden liegen.

Denn eine beliebige Transversal-Ebene erzeugt die Fig. des obigen Satzes (II. 1) links; und diejenige, welche (rechts) durch die drei Umhüllungspole geht, erzeugt die Figur desselben Satzes rechts.

Anmerkung. Aehnlich wie oben wird hier einerseits von drei inneren und drei äußeren gemeinschaftlichen ebenen Schnitten, und demzufolge von einer inneren und drei äußeren Radikal-Achsen, andrerseits von drei äußeren und drei inneren Scheiteln gemeinschaftlicher Berührungskegel, und von einer äußeren und drei inneren Radikal-Achsen der erwähnten drei Flächen die Rede sein; und zwar kommen die einen sowohl, als die anderen denselben drei Flächen des zweiten Grades zu, weil eine Fläche der zweiten Ordnung zugleich auch eine der zweiten Klasse ist.

Zusätze.

1.

(Die Sätze des Brianchon und des Pascal für Gebilde im Raume.)

Drei beliebige Kegel, welche einer und derselben Fläche der zweiten Ordnung umschrieben sind, schneiden sich paarweise in sechs Ebenen, welche drei zu drei durch vier Gerade gehen.

Drei beliebige Kegelschnitte, welche einer und derselben Fläche der zweiten Klasse eingeschrieben sind, haben paarweise sechs Berührungskegel gemein, deren Scheitel drei zu drei in vier Geraden liegen.

2.

Wenn zwei beliebige Flächen der zweiten Ordnung einen Berührungskegel und folglich zwei reelle oder ideale ebene Schnitte mit einander gemein haben, so schneidet jeder andere Kegel der zweiten Ordnung, der mit dem ersteren einerlei Scheitel und eine reelle oder ideale doppelte Berührung hat, im Allgemeinen jede dieser beiden Flächen längs zwei Ebenen, und diese vier Ebenen begegnen sich paarweise auf denen der, den beiden Flächen gemeinschaftlichen Schnitte;

Wenn zwei beliebige Flächen der zweiten Klasse einen Kegelschnitt und folglich zwei reelle oder ideale Berührungskegel mit einander gemein haben, so gehen von jedem anderen Kegelschnitte, der mit dem ersteren in einerlei Ebene liegt und eine reelle oder ideale doppelte Berührung hat, im Allgemeinen an jede dieser beiden Flächen zwei Kegel; und die Scheitel dieser vier Kegel liegen paarweise mit denen der, den beiden Flächen gemeinschaftlichen Berührungskegel in gerader Linie;

und verbindet man mit den Ausdrücken: homologe Punkte, Ebenen, Pole, Centra und Ebenen der Homologie ähnliche Begriffe, wie oben, so muß man für den Fall zweier Flächen des zweiten Grades, die höchstens nur einen reellen Schnitt gemein haben, hinzufügen, daß die einander zugeordneten Centra und Ebenen der Homologie immer **gleich-** oder **ungleichnamig** sind, je nachdem sie durch **direkt-** oder **indirekt-**homologe Ebenen und Pole auf einander bezogen werden.

Und umgekehrt:

3.

Schneiden sich die Ebenen zweier Kegelschnitte, welche zweien Flächen der zweiten Ordnung mit gemeinschaftlichem Berührungskegel eingeschrieben sind, auf einer Ebene der Homologie, und ist ein einziger Punkt des einen einem Punkte des anderen homolog, in Bezug auf dasjenige Centrum, welches jener Ebene der Homologie und der Art der homologen Punkte entspricht, so sind alle anderen Punkte dieser Kegelschnitte ebenfalls homolog.

Liegen die Scheitel zweier Kegel, welche zweien Flächen der zweiten Klasse mit gemeinschaftlichem ebenen Schnitt umschrieben sind, mit einem Centrum der Homologie in gerader Linie, und ist eine einzige Ebene des einen einer des andern homolog, in Bezug auf diejenige Ebene der Homologie, welche jenem Centrum und der Art der homologen Ebenen entspricht, so sind alle anderen Ebenen dieser Kegel ebenfalls homolog.

4.

Alle Ebenen, welche durch einerlei Gerade gehen, sind solchen Ebenen homolog, welche ihrerseits durch die, der ersteren homologe Gerade gehen.

Alle Punkte, welche in einerlei gerader Linie liegen, sind solchen Punkten homolog, welche ihrerseits in der, der ersteren homologen geraden Linie liegen.

III.

Vier beliebige Flächen des zweiten Grades, welche eine und dieselbe fünfte umhüllen, haben paarweise

zwölf reelle oder ideale ebene Schnitte gemein, deren Ebenen drei zu drei durch sechszehn Gerade oder Radikal-Achsen, und sechs zu sechs durch acht Punkte oder Radikalcentra gehen.

zwölf reelle oder ideale Berührungs-Kegel gemein, deren Scheitel drei zu drei in sechszehn Geraden oder Radikal-Achsen, und sechs zu sechs in acht Ebenen oder Radikal-Ebenen liegen.

Denn bezeichnet man sowohl die äußeren und inneren gem. ebenen Schnitte, als die inneren und äußeren Scheitel der gem. Berührungskegel der Flächenpaare **A** u. **B**, **A** u. **C**, **A** u. **D**, **B** u. **C**, **B** u. **D**, **C** u. **D** resp. mit ab u. $\overline{ab}$, ac u. $\overline{ac}$, ad u. $\overline{ad}$, bc u. $\overline{bc}$, bd u. $\overline{bd}$, cd u. $\overline{cd}$, so wird der Satz kraft des vorhergehenden unmittelbar durch folgende tabellarische Uebersicht einleuchtend:

Radikalcentra
vier innerlich = äußere

Radikal- Centra	Radikal- Achsen		V.	VI.	VII.	VIII.		Radikal- Achsen	Radikal- Ebenen
drei	zwölf	IV.	1. ab, ac, $\overline{bc}$	2. ba, bd, $\overline{ad}$	3. cd, ca, $\overline{da}$	4. dc, db, $\overline{cb}$	VIII.	zwölf	drei
äußere . . .		III.	5. ac, ad, $\overline{cd}$	6. bd, bc, $\overline{dc}$	7. ca, cb, $\overline{ab}$	8. db, da, $\overline{ba}$	VII.	. . innere,	
ein	vier	II.	9. ad, ab, $\overline{db}$	10. bc, ba, $\overline{ca}$	11. cb, cd, $\overline{bd}$	12. da, dc, $\overline{ac}$	VI.	vier	eine
innere(s) . .		I.	13. $\overline{bc}$, $\overline{bd}$, $\overline{cd}$	14. $\overline{cd}$, $\overline{ca}$, $\overline{da}$	15. $\overline{da}$, $\overline{db}$, $\overline{ab}$	16. $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$	V.	. . äußere.	
			I.	II.	III.	IV.			

vier äußerlich = innere
Radikal = Ebenen.

IV.

Wenn fünf beliebige Flächen des zweiten Grades eine und dieselbe sechste umhüllen, und man betrachtet die acht

ebenen Schnitte, welche irgend eine dieser fünf Flächen mit den vier übrigen gemein hat, so kann man daraus auf achtfache Weise ein Paar einfache Vierecke im Raume bilden, deren Ecken auf den vier Achsen eines, den vier übrigen Flächen zugehörigen Radikalcentrums liegen; und diese acht Paar Vierecke sind an sämmtliche acht Radikalcentra vertheilt.

Scheitel der Berührungskegel, welche irgend eine dieser fünf Flächen mit den vier übrigen gemein hat, so kann man daraus auf achtfache Weise ein Paar einfache Vierflache im Raume bilden, deren Flächen durch die vier Achsen einer, den vier übrigen Flächen zugehörigen Radikal-Ebene gehen; und diese acht Paar Vierflache sind an sämmtliche acht Radikal-Ebenen vertheilt.

V.

Es seien **A**, **B**, **C**, **D** vier beliebige Flächen des zweiten Grades, welche eine und dieselbe fünfte **K** umhüllen, und es seien auf denselben nach Belieben vier resp. Punkte α, β, γ, δ, die nicht in einerlei Ebene liegen, angenommen, um durch dieselben eine Fläche $\mathbf{K}_1$ desselben Grades zu legen, welche ebenfalls **K** umhülle; so existiren nach (I, 2) im Allgemeinen acht dergleichen Flächen K_1, und nach (IV) bilden die vier ebenen Schnitte, welche irgend eine dieser acht Flächen mit A, B, C, D gemein hat, und welche durch die vier Punkte α, β, γ, δ gehen, ein einfaches Viereck im Raume, dessen Ecken auf den vier Achsen eines der acht Radikalcentra von A, B, C, D liegen. Aber von den so bestimmten acht Vierecken, welche den besonderen acht Flächen K_1 entsprechen, können keine zwei einem und demselben Radikalcentrum angehören, weil die Flächen irgend zweier einfachen Vierecke im Raume, deren Ecken paarweise auf vier, in einem Punkte convergirenden Geraden liegen, sich paarweise auf einer und derselben Ebene schneiden müssen —, während die Flächenpaare der hier betrachteten Vierecke vier Punkte α, β, γ, δ gemein haben, welche nicht in einerlei Ebene liegen. Hat man also ein bestimmtes Radikalcentrum im Auge, so ist die Fläche K_1 auf einzige Weise bestimmt.

Nehmen wir also für den Augenblick an, daß die Flächen A, B, C, D paarweise höchstens nur einen einzigen reellen ebenen Schnitt gemein haben, und wählen nach Belieben eine der acht Radikal-Ebenen und eines der acht Radikalcentra, z. B. diejenige R.-Ebene, welche die Centra der Homologie ab, ac, bd, cd (innere) und $\overline{ad}$, $\overline{bc}$ (äußere), und dasjenige R.-Centrum, welches die Ebenen der Homologie ab, bc, bd (äußere) und $\overline{ac}$, $\overline{ad}$, $\overline{cd}$ (innere) enthält, so können wir, nach diesen Centris und Ebenen der Homologie uns richtend, zu einem auf A beliebig angenommenen Punkte α den indirekt-homologen Punkt β, zu β den direkt-homologen γ, und zu γ den direkt-homologen δ suchen, und durch diese vier Punkte eine Fläche des zweiten Grades K_1 legen, welche K umhüllt und außerdem die Eigenschaft hat, daß das von ihr bestimmte Viereck dem gewählten Radikalcentrum angehöre.

Dieses vorausgesetzt, so sind nach (II, 3) die vier ebenen Schnitte, welche K_1 mit A, B, C, D gemein hat, und die durch die Punkte α, β, γ, δ gehen, nacheinander homolog, d. h. zunächst nur im Uebergange von A zu B, von B zu C und von C zu D; und betrachtet man die vier Kegelschnitte, welche auf diesen vier Flächen durch die Radikal-Ebene erzeugt werden, so sieht man sogleich, weil dieselben einen und denselben fünften, auf K liegenden doppelt berühren, daß sie drei zu drei vier Systeme von sechs periodisch-homologen Punkten enthalten. Dieses versteht sich nämlich unmittelbar von den zu A, B, C und von den zu B, C, D gehörigen, in Folge dessen aber sodann auch von denen, welche zu A, C, D oder zu A, B, D gehören. Hieraus folgt nach demselben Satze, daß jene vier ebenen Schnitte nicht nur in der so eben angedeuteten, sondern in jeder beliebigen Aufeinanderfolge homolog sind, d. h. mit andern Worten, daß die Scheitel der sechs Kegel, welche diese vier Schnitte paarweise umhüllen, mit den sechs Centris der Homologie ab, ac, bd, cd, $\overline{ad}$, $\overline{bc}$ zusammenfallen.

Geht man also von einem beliebigen Punkte auf einer der Flächen **A**, **B**, **C**, **D**, z. B. auf **A** aus, und bestimmt, indem man fortwährend die Art der Homologie den Benennungen der zusammentreffenden Centra und Ebenen der Homologie anpaßt, in beliebiger Aufeinanderfolge die nacheinander homologen Punkte des ersteren, so wird man im Allgemeinen zwar nicht auf den Ausgangspunkt zurückfallen, aber die unzählig vielen Punkte welche man so auf jeder der vier Flächen erhält, müssen vier Kegelschnitten, und diese selber wieder einer und derselben Fläche d. 2. G. angehören, welche **K** umhüllt.

Wir erhalten somit für jeden beliebigen Punkt α der Fläche **A** ein System von vier periodisch-homologen Ebenen oder ebenen Schnitten. Jede der acht Radikal-Ebenen gewährt eine besondere Familie, und jede dieser Familien zerfällt in Ansehung der verschiedenen Radikalcentra in acht besondere Arten solcher Systeme. Um eines derselben zu construiren, braucht man nur 4×3 nacheinander homologe Punkte zu suchen, und kann sich hierzu entweder aller sechs Centra der Homologie oder vier allein, wovon keine drei in einer Geraden liegen, bedienen, d. h. entweder in der Ordnung **ABCDACBDCABD** u. dergl. oder **ABCD ABCDABCD** fortschreitend. Uebrigens läßt sich, ähnlich wie oben, auch hier das Gesetz, wonach die Konstruktion dieser Systeme von der inneren und äußeren Lage der Centra und Ebenen der Homologie abhängt, mit einem einfacheren und bequemeren vertauschen, wodurch zugleich die vorhin gemachte Einschränkung auf Flächen mit nur einem oder keinem reellen ebenen Schnitte wieder aufgehoben wird. Denn welche Radikal-Ebene auch man nacheinander mit den acht Radikalcentris verbinden möge, immer wird man ein Centrum mit einer ungleichnamigen Ebene der Homologie in vier dieser Verbindungen dreimal zwischen drei Flächen, in drei anderen zweimal zwischen vier Flächen, und in der achten durchweg zusammentreffen sehen, nämlich für den Fall, wenn man alle sechs Centra und Ebenen der Homologie berücksichtigt; wogegen für den einfacheren Fall das Nämliche in sechs Verbindungen zweimal zwischen beliebigen Flächen, in einer durchweg, und in der achten keinmal stattfinden würde. Hieraus kann man sich folgende Regel bilden:

Ist eine beliebige Radikal-Ebene mit ihren Centris der Homologie gegeben, so findet man immer ein System von vier periodisch-homologen Ebenen, wenn man die indirekte Lage der Punkte

1° für den Fall der Aufeinanderfolge ABCDACBDCABD entweder dreimal zwischen drei Flächen, oder zweimal zwischen vier Flächen, oder durchweg; und

2° für den Fall der Aufeinanderfolge ABCDABCDABCD entweder keinmal, oder zweimal zwischen beliebigen Flächen, oder durchweg,

und zwischen einerlei Flächen immer einerlei Lage der Punkte beobachtet.

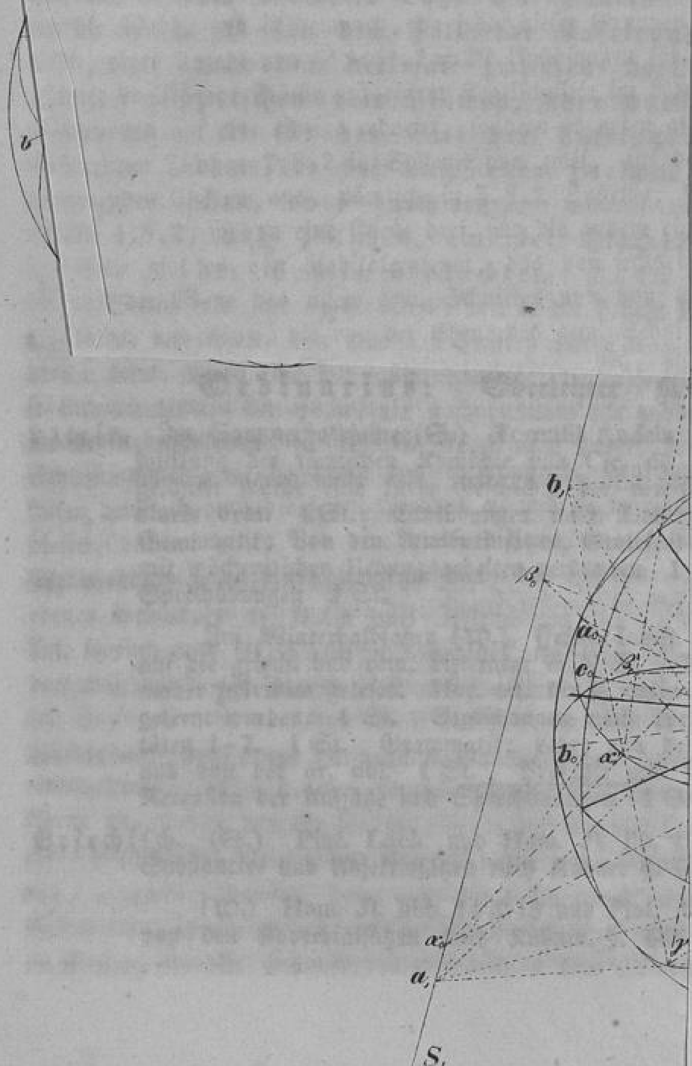
Setzen wir jetzt an die Stelle von **K** die Fläche K_1 und an die Stelle von **A**, **B**, **C**, **D** die betrachteten vier ebenen Schnitte, welche man offenbar als Flächen des 2. Gr. ansehn kann, deren eine Dimension unendlich klein ist, und die die Fläche K_1 umhüllen; so sind die Centra der Homologie noch dieselben als zuvor, und somit ist man berechtigt, gerade so, wie oben, zu schließen, daß jeder Punkt, der in der Ebene eines dieser vier Schnitte beliebig angenommen wird, und die unzählig vielen Punkte, welche demselben in Bezug auf diese Centra nach einander homolog sind, auf den vier Ebenen vier neue Kegelschnitte bilden, welche einer neuen, die K_1 umhüllenden Fläche d. 2. Gr. angehören und folglich die vier ersteren doppelt berühren.

Betrachten wir ferner zwei Systeme von vier periodisch-homologen Ebenen einerlei Art, so sind nach (II, 4) die vier Geraden, in denen sich diese Ebenen paarweise schneiden, homolog und liegen folglich paarweise in Ebenen, welche durch die entsprechenden Centra der Homologie gehen. Aber diese Geraden sind auch die gegenseitigen Durchschnitte der Flächenpaare von zwei Vierecken im Raume, deren Ecken paarweise auf vier, in einem Punkte convergirenden Geraden liegen; also gehören alle vier einer und derselben Ebene an, welche mit der Radikal-Ebene zusammenfällt. Hieraus folgt, daß die Ebenen eines solchen Systems, indem man es variirt, die Radikal-Ebene in vier festen Geraden α_0, β_0, γ_0, δ_0 schneiden. Legt man also z. B. durch α_0 zwei Ebenen, welche **A** in a^0 und a_0 berühren, so stellen diese Punkte und die entsprechenden b^0 und b_0, c^0 und c_0, d^0 und d_0 eben so viele Kegelschnitte mit unendlich-kleinen Dimensionen vor, welche zu zwei besonderen Flächen K_1 gehören d. h. sie bilden zwei Systeme von vier periodisch-homologen Punkten und sind die Berührungspunkte zweier, die Fläche **K** umhüllenden und die **A**, **B**, **C**, **D** berührenden Flächen des zweiten Grades.

Ziehen wir jetzt die Sehnen a^0a_0, b^0b_0, c^0c_0, d^0d_0, so sind dieselben periodisch-homolog und liegen also paarweise in sechs Ebenen. Folglich gehen sowohl diese Ebenen, als die vier Sehnen durch einen und denselben Punkt. Aber als homologe Linien schneiden sich die letzteren paarweise auf den entsprechenden Ebenen der Homologie; folglich ist das Radikalcentrum ihr gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt. Denkt man sich nun die Geraden a^0a_0 und b^0b_0 in Ansehung der entsprechenden Punkte a^0, a_0, a_1, a_2 ... und b^0, b_0, b_1, b_2 ... und sofort die Geraden b^0b_0 und c^0c_0, c^0c_0 und d^0d_0 in Ansehung der entspr. Punkte b^0, b_0, b_1, b_2 ... und c^0, c_0, c_1, c_2 ...; c^0, c_0, c_1, c_2 ... und d^0, d_0, d_1, d_2 ... perspektivisch, so sind alle diese Geraden paarweise projektivisch, und zwar perspektivisch; d. h. jeder Punkt einer beliebigen von ihnen begründet ein System von vier periodisch-homologen Punkten a_1, b_1, c_1, d_1 u. s. w. Und auch umgekehrt kann man behaupten, daß alle Punkte von dieser letzteren Eigenschaft den vier Sehnen a^0a_0, b^0b_0, c^0c_0, d^0d_0 angehören. Denn wären vier Punkte a_1, b_1, c_1, d_1 periodisch-homolog, ohne jenen vier Sehnen anzugehören, so könnte man sie mit a^0, b^0, c^0, d^0 verbinden und auf die Geraden a^0a_1, b^0b_1, c^0c_1, d^0d_1 dieselben Schlüsse, als vorhin anwenden. Also müßten sie durch das Radikalcentrum gehn und somit der Richtung nach mit a^0a_0, b^0b_0, c^0c_0, d^0d_0 zusammenfallen.

Endlich unterliegt es keiner Schwierigkeit, daß diese vier Sehnen die Polaren der entsprechenden festen Geraden α_0, β_0, γ_0, δ_0, in Bezug auf **A**, **B**, **C**, **D** sind; daß folglich die Polar-Ebenen aller Punkte der einen durch die anderen gehen müssen; daß insbesondere die Polar-Ebenen des Radikalcentrums durch die entsprechenden Geraden α_0, β_0, γ_0, δ_0 gehen; daß jene Sehnen die Pole der Radikal-Ebene enthalten u. s. w., und ähnlich, wie oben, wird man beweisen können, daß alle Flächen K_1 von einerlei Art die entsprechende Radikal-Ebene zur gemeinschaftlichen Schnittsebene haben u. s. w. u. s. w.

Der Mangel an Raum gestattet uns nicht, und es wird wohl auch kaum nöthig sein, den bündigen Wortlaut der von Neuem entwickelten Eigenschaften, an welche sich die reciproken über periodisch-homologe Berührungskegel oder deren Scheitel anschließen, hier noch folgen zu lassen. Auch müssen wir die Auflösung der im Vorworte aufgestellten Aufgabe II, welche nach dem über die erste Gesagten keine besondere Schwierigkeit mehr darbietet, dem Scharfsinne des Lesers überlassen. Nur Eines wollen wir noch rechtfertigen: Durch vier gegebene Punkte, sowie an vier gegebene Ebenen, lassen sich im Allgemeinen acht Flächen des 2. Gr. legen, welche die gezeichnet vorliegende Fläche umhüllen. Die Aufgabe **II** läßt uns also zwischen 8.8.8.8 Gruppen von vier gegebenen Flächen d. 2. Gr. die Wahl, und ist demnach, da jeder dieser Gruppen 8.8.2 berührende Flächen angehören, einer Anzahl von $8^4 \times 8^2 . 2 = 2^{19}$ Auflösungen fähig. Vertauscht man aber die gezeichnet vorliegende Fläche mit einem Kegelschnitte im Raume, so werden nicht nur jene 8^4 Gruppen auf eine einzige reducirt, sondern es arten auch von den ihr zugehörigen $8^2.2$ berührenden Flächen 7.8.2 in Systeme von zwei, auf der Ebene des Kegelschnittes sich begegnenden Ebenen aus, nämlich in 3.8.2 Systeme, wovon jede Ebene zwei Flächen, und in 4.8.2, wovon eine Ebene drei, und die andere eine Fläche berührt. Denn in diesem Falle gibt es ein Radikalcentrum, das von sechs besondern Ebenen, drei andere, die von der Ebene des allen gem. Schnittes und von zwei besonderen, zu vier Flächen gehörigen, und vier, die von der Ebene des gem. Schnittes und von drei besonderen, zu drei Flächen gehörigen Ebenen gebildet werden. Aber die Polar-Ebenen eines, auf der Ebene des gem. Schnittes gelegenen Radikalcentrums, in Bezug auf zwei Flächen **A** und **B**, deren besondere gem. Schnittsebene es enthält, fallen der Richtung nach in eine einzige zusammen, welche durch das entsprechende Centrum der Homologie geht; und es fallen demnach auch die festen Geraden α_0 und β_0 in eine einzige zusammen, welche durch dieses Centrum geht, und eine durch dieselbe gelegte Ebene berührt **A** und **B** zugleich. Wenn endlich jenes Radikalcentrum drei, den Flächen **A**, **B**, **C** paarweise gem. Schnittsebenen enthält, so fallen seine drei Polar-Ebenen in Bezug auf diese Flächen in eine einzige Ebene, und die drei festen Geraden α_0, β_0, γ_0 mit der Radikal-Achse zusammen, so daß man durch letztere eine Ebene legen kann, welche **A**, **B** und **C** zugleich berührt.


b
b_1
β_0
a_0
c_0
b_0
α_0
a_1
γ
S_1