Vorwort.

Die beiden Aufgaben des Apollonius und des Fermat, welche unter dem Namen der Kreis- und der Kugel-Berührungen bekannt sind, bieten noch den unterscheidenden Charakter besonderer Fälle dar, selbst wenn man, nach dem Vorgange des berühmten Verfassers des *Traité des propriétés projectives des figures*, die drei gegebenen Kreise mit beliebigen Kegelschnitten, und die vier gegebenen Kugeln mit beliebigen Flächen des zweiten Grades vertauscht, von denen erstere sämmtlich eine Sekante, und letztere sämmtlich einen ebenen Schnitt gemein haben.

Denn was offenbar schon z. B. den Fall der drei Kreise als einen besonderen bezeichnet, und was vor Allem auffordert, darüber hinauszugehen, dieß nämlich, daß sie nur ein Radikalcentrum, und doch vier Aehnlichkeits- oder Radikal-Achsen besitzen, die bekanntlich diesem Centrum im Sinne des Dualitäts-Prinzipes entsprechen, oder vielmehr, daß von vier Radikalcentris drei in gerader Linie liegen, nämlich auf der unendlich-weit entfernten gemeinschaftlichen Sekante, während die vier Achsen ein wirkliches Vierseit bilden — derselbe Uebelstand stellt sich nicht minder auch noch in dem Falle dreier Kegelschnitte dar, welche eine Sekante in endlicher Entfernung gemein haben; und es wäre leicht zu zeigen, daß aus diesem Grunde von 32 möglichen Auflösungen des betreffenden Problems 24 in Systeme von zwei Geraden ausarten, und daß nur diejenigen 8, welche von dem isolirten Radikalcentrum abhängen, ihre allgemeine Form behalten, ganz so wie es auch bei drei beliebigen Kreisen der Fall ist. Und auf ähnliche Weise gestatten vier Flächen des zweiten Grades mit einem gemeinschaftlichen ebenen Schnitte zwar acht Radikal-Ebenen, aber nicht mehr als ein ordentliches Radikalcentrum, indem die sieben anderen alle in der Ebene des gemeinschaftlichen Schnittes sich befinden; und es gibt daher unter 128 möglichen Auflösungen des betreffenden Problems nur 16, welche den Bedingungen desselben in aller Strenge genügen.

Hiernach also, scheint es, ist noch ein Schritt zu thun übrig, um die Gegenseitigkeit, welche zwischen den Radikalcentris und den Radikal-Achsen oder Ebenen besteht, zur vollkommenen zu erheben; und dieß dürfte zunächst insofern keine besondere Schwierigkeit darbieten, als Herr **Poncelet** im Supplemente zu seinem Werke selbst noch die Möglichkeit nachgewiesen hat, die projektivischen Eigenschaften der Kreise auf das System dreier oder mehrerer Kegelschnitte, welche einen und denselben anderen doppelt berühren, auszudehnen. *) Man hätte nur zu diesem Zwecke den direkten Weg einzuschlagen, und sämmtlichen verschiedenen Arten periodisch-homologer Punkte und Geraden, welche in einem solchen Systeme vorkommen, gleiche Aufmerksamkeit zu widmen. Auf diese Weise würde man dann auch, was wesentlich zu bemerken ist, ohne Mühe dahin gelangen, das Problem des Fermat von der letzten Schranke zu befreien, mit welcher es auch in jenem Supplemente noch behaftet geblieben ist.

---

*) Gleichwohl muß der Verf. gestehen, daß er selbst weder von dieser Stelle noch von der, Seite 10. erwähnten hat Nutzen ziehen können, indem er beide erst entdeckte, als er bereits durch den Versuch, die Eigenschaften der **Centra und Achsen der Homologie** zu verallgemeinern, zu demselben Resultate gekommen war.

In der That wird sich aus dem Folgenden mit hinlänglicher Evidenz ergeben, daß, um die beiden berühmten Aufgaben, von denen hier die Rede ist, in ihrer ganzen Allgemeinheit zu umfassen, man den Wortlaut derselben so wie folgt festzustellen hat:

I.

Wenn ein beliebiger Kegelschnitt gezeichnet vorliegt, und wenn drei andere Kegelschnitte der Bedingung unterworfen sind, ein jeder den ersteren doppelt zu berühren und durch drei Punkte zu gehen oder drei Gerade zu berühren, welche beliebig in seiner Ebene gegeben sind, was also dreimal drei gegebene Punkte oder Gerade macht; einen fünften zu zeichnen, welcher jeden der drei letzteren einfach, und den ersteren ebenfalls doppelt berühre; das Ganze mittels des Lineals allein;

II.

Wenn eine beliebige Fläche des zweiten Grades gezeichnet vorliegt, und wenn vier andere Flächen desselben Grades der Bedingung unterworfen sind, eine jede die erstere zu umhüllen und durch vier Punkte zu gehen oder vier Ebenen zu berühren, welche beliebig im Raume gegeben sind, was also viermal vier gegebene Punkte oder Ebenen macht; eine sechste zu zeichnen, welche jede der vier letzteren berühre und die erstere ebenfalls umhülle; das Ganze mittels des Lineals allein;

zwei Aufgaben, deren Grad von Allgemeinheit man schon darnach wird beurtheilen können, daß sie, genau genommen, einer respektiven Anzahl von $4^3 \times 4^2 \cdot 2$ oder 2048 und von $8^4 \times 8^2 \cdot 2$ oder 524288 Auflösungen fähig sind.

Heiligenstadt, im Januar 1842.