Theoretische und praktische Untersuchungen über die Verteilung der Elektricität beim Durchgehen durch eine Metallplatte von der Form einer Lemniscate.

Einige Untersuchungen über die drei verschiedenen Formen und über die Konstruktion der Lemniscate.

Punkte, die so beschaffen sind, dass das Produkt ihrer Entfernungen von zwei festen Punkten konstant ist, bilden die Lemniscate. Es ist also $FP . F_1P = \text{Const.}$ (Siehe Figur 1.) Es ergiebt sich hieraus die Gleichung der Lemniscate, wenn wir die Entfernung vom Mittelpunkte bis zum Brennpunkte, also $MF = l$ setzen:

$$\sqrt{(l+x)^2+y^2} \cdot \sqrt{(l-x)^2+y^2} = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1.$$

und in Polarkoordinaten: $\sqrt{l^2+r^2+2lr\cos p} \cdot \sqrt{l^2+r^2-2lr\cos p} = a^2$

oder: $$\sqrt{l^4-2l^2r^2\cos 2p+r^4} = a^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 2.$$

Aus Gleichung 1 folgt, dass die Kurve in Bezug auf ihre Achsen symmetrisch gebaut ist. Setzen wir nun $x = 0$, so folgt weiter aus Gleichung 1: $l^2+y^2 = a^2$, $y = \pm\sqrt{a^2-l^2}$

Ist nun:
1. $a < l$, so ist y imaginär.
2. $a = l$, so ist $y = o$.
3. $a > l$, so ist y reell.

Setzen wir ferner $y = 0$ in dieselbe Gleichung ein, so erhalten wir:

$$l^2-x^2 = \pm a^2 \quad x_1 = \pm\sqrt{l^2-a^2}$$
$$x_2 = \pm\sqrt{l^2+a^2}$$

Von diesen beiden Werten ist x_2 immer reell, dagegen x_1 nicht immer. Ist:

1. $a < l$, so ist x_1 reell.
2. $a = l$, so ist $x_1 = 0$.
3. $a > l$, so ist x_1 imaginär.

Hieraus folgen nun die drei verschiedenen Formen der Lemniscate:

Ist 1. $a < l$, so erhalten wir zwei getrennte, symmetrisch liegende geschlossene Kurven. (Siehe Fig. 3.)

2. $a = l$, so erhalten wir eine geschlossene Kurve, die im Punkte $x = 0 \quad y = 0$ einen Doppelpunkt hat. (Siehe Fig. 2.)

3. $a > l$, so erhalten wir eine einfache geschlossene Kurve. (Siehe Fig. 4, 5, 6.)

Aus Gleichung 1 ergiebt sich durch Differentiation:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{[(l+x)^2+y^2][l-x]-[(l-x)^2+y^2][l+x]}{y[(l+x)^2+2y^2+(l-x)^2]}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(l^2-x^2-y^2)}{y(l^2+x^2+y^2)},$$

und durch nochmalige Differentiation:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y(l^2+x^2+y^2)\left(l^2-3x^2-y^2-2xy\frac{dy}{dx}\right)}{N^2} - \frac{x(l^2-x^2-y^2)\left[(l^2+x^2+y^2)\frac{dy}{dx}+2y\left(x+y\frac{dy}{dx}\right)\right]}{N^2}$$

Unter N verstehe ich hier der Kürze halber den Nenner.

Es folgt nun, dass $\frac{dy}{dx} = 0$ wird für $x = 0$ und für $x^2+y^2 = l^2$

Untersuchen wir nun zunächst den Fall $x^2+y^2 = l^2$, indem wir dieses zunächst in die Gleichung der Lemniscate einführen. Es folgt dann:

$$(2l^2-2lx)(2l^2+2lx) = a^4 \text{ und daraus } x = \pm\frac{\sqrt{4l^4-a^4}}{2l}$$

und

$$y = \pm\frac{a^2}{2l}$$

Führen wir diese Werte in $\frac{d^2y}{dx^2}$ ein, so erhalten wir:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2yl^2 \cdot 2x^2}{N^2}$$

Demnach erhalten wir für positive y ein Maximum, für negative y ein Minimum. Damit nun aber der Wert von x reell ist, muss $a < l\sqrt{2}$ sein. Es hat demnach die Lemniscate immer ein Maximum, wenn $a < l\sqrt{2}$. Dieses ist immer der Fall bei den Formen 1 und 2, aber nicht immer bei der Form 3. Dieses Maximum ist leicht zu finden, denn die Bedingung $x^2+y^2 = l^2$ bedeutet einen Kreis mit dem Radius l. Es werden demnach die Schnittpunkte dieses Kreises und der Lemniscate die Punkte sein, in denen ein Maximum stattfindet.

Es ist nun weiter $\frac{dy}{dx} = 0$, wenn $x = 0$ ist. Hier kann nur die Lemniscate von der Form 3 in Betracht kommen, also nur wenn $a > l$ ist.

Es ist nun für $x = 0 \quad y = \pm\sqrt{a^2-l^2}$ und

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y(l^2+y^2)(l^2-y^2)}{N^2}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2-l^2} \cdot a^2(2l^2-a^2)}{N^2}$$

Hieraus folgt nun:

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ist positiv, wenn $a < l\sqrt{2}$ ist,

und negativ, wenn $a > l\sqrt{2}$ ist.

Es wird dann im ersten Falle für $x = 0 \quad y = \sqrt{a^2-l^2}$ ein Minimum und im zweiten Falle ein Maximum stattfinden. Demnach hat die Lemniscate 3 auf jeder Seite der x Achse, wenn $a < l\sqrt{2}$ ist, zwei Maxima, respektive zwei Minima, nämlich für $x = \pm\frac{\sqrt{4l^4-a^4}}{2l} \quad y = \frac{a^2}{2l}$ und ein Minimum, respektive ein Maximum, nämlich für (Siehe Fig. 4): $x = 0$ und $y = \sqrt{a^2-l^2}$. Ist $a > l\sqrt{2}$, so hat diese Kurve nur ein Maximum, respektive ein Minimum, nämlich für $x = 0$ und $y = \sqrt{a^2-l^2}$. (Siehe Fig. 5.)

Ist schliesslich noch $a = l\sqrt{2}$, so fallen die beiden Maxima und das Minimum zusammen, wir erhalten den Punkt $x = 0 \quad y = l$. Es ist dann auch weiter $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. Untersuchen wir nun an dieser Stelle den Krümmungsradius $\varrho = \frac{\sqrt{(1+y')^3}}{y''}$. Wir finden dann, da $y' = 0$ und $y'' = 0$ ist, $\varrho = \infty$, d. h. in diesem Punkte ist der Krümmungskreis eine der x Achse parallel laufende Linie. (Siehe Fig. 6.)

Wir wollen nun zur Konstruktion der Lemniscate übergehen und hier immer der Einfachheit halber $l = 1$ annehmen. Behandeln wir zunächst die Form 2 $a = l = 1$. Hierbei werde ich die Gleichung der Lemniscate in Polarkoordinaten benutzen: $\sqrt{1-2r^2\cos 2p+r^4} = a^2$, in unserem Falle also $2r^2\cos 2p = r^4$, $r^2 = 2\cos 2p$.

Für $r = 0$ ist $\cos 2p = 0$, also $p = \frac{\pi}{4}$ d. h. die Lemniscate schneidet im 0 Punkte die x Achse unter einem Winkel von 45^0; für $p = 0$ ist $r = \sqrt{2}$. Es folgt nun aus der Gleichung $r^2 = 2\cos 2p$ folgende Konstruktion:

Über der horizontalen Halbachse M A (siehe Figur 2), welche $= \sqrt{2}$ ist, ist ein Halbkreis und mit M A von M aus ein Kreis geschlagen. Dann ist durch einen Punkt R des Halbkreises die Linie S R Q senkrecht auf die Achse gezogen, und es sind die Punkte Q und R mit M verbunden. So ist:

$$MR^2 = \sqrt{2} \cdot MS \text{ und } MS = \sqrt{2} \cdot \cos QMA, \text{ daher } MR^2 = 2\cos QMA.$$

Wird nun $QMA = 2p$ gemacht, so ist $MR = r$, und man kann so zu jedem p den zugehörigen Radiusvektor r bestimmen. Halbiert man demnach Q M A und schlägt auf dieser Winkelhalbierungslinie $MR = MP$ ab, so ist P ein Punkt der gesuchten Lemniscate.

Die Konstruktion für die Lemniscate von der Form 1 und 3 ergiebt sich aus folgender Gleichung: $a^4 = 1 + r^4 - 2r^2 \cos 2p$. Sind hier a^2, r^2 und 1 die Seiten eines Dreiecks, so drückt diese Gleichung direkt den cosinus Satz aus, und man kann zu r und a dann φ konstruieren. Man kann also auch hier zu jedem Wert von r den zugehörigen Winkel p finden. Schlagen wir demnach vom Brennpunkte aus einen Kreis mit der Länge a^2 und vom Mittelpunkt M aus mit den verschiedenen r^2 Kreise, so bilden die Verbindungslinien der Schnittpunkte, die durch die Kreise entstehen, mit M und die x Achse die gesuchten Winkel 2p. Halbiert man dann einen solchen Winkel und trägt auf der Winkelhalbierungslinie r ab, so erhält man einen Punkt der gesuchten Lemniscate. (Siehe die Figuren 3, 4, 5, 6.)

Gehen wir nun zur theoretischen Behandlung unserer Arbeit über.

Die Wechselwirkung zwischen zwei auf einander anziehend oder abstossend wirkenden materiellen Punkten kann man leicht aus einer Funktion, dem Potential, bestimmen. Sie ist nämlich gleich dem negativen partiellen Differentialquotienten des Potentials genommen nach der Richtung, in der die wirkende Kraft ausgeübt wird.

Bei den elektrischen Strömungen durch Flächen gilt das logarithmische Potential, daher ist das Potential des mit der Elektricitätsmenge m behafteten Punktes auf einen die Einheit der Elektricitätsmenge enthaltenden Punkt in der Entfernung r, $V = m \lg r$. Dann ist die zwischen den Punkten wirkende Kraft $= -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{m}{r}$.

Führen wir nun Polarkoordinaten ein, indem wir die Entfernung des Punktes m vom Anfangspunkte 0 mit r und diejenige des andern Punktes von 0 mit ϱ bezeichnen, und den Winkel, den diese beiden Linien bilden, ψ nennen. Dann ergeben sich für das Potential zwei Werte, je nachdem $\varrho \gtrless r$ ist:

$$\varrho > r \qquad V = m\left[\lg \varrho - \sum^{h} \frac{1}{h}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^{h} \cos h\psi\right]$$

$$\varrho < r \qquad V = m\left[\lg r - \sum^{h} \frac{1}{h}\left(\frac{\varrho}{r}\right)^{h} \cos h\psi\right]$$

Haben wir nun eine geschlossene Fläche und lassen durch diese durch zwei Zuleitungsstellen β und γ einen konstanten elektrischen Strom hindurchgehen, so muss auch die Verteilung der Elektricität für jeden Punkt eine bestimmte sein, und ebenso muss auch das Potential der Fläche auf jeden Punkt ein bestimmtes sein. Demnach ist das Potential eine Funktion der Stelle $= f(x, y)$. Suchen wir nun diejenigen Punkte auf, für welche $f(x, y) = \text{Const.}$ ist, so erhalten wir die Kurven konstanten Potentials, die Niveaukurven. Durch diese erhalten wir dann ein Bild von der Verteilung der Elektricität in der Fläche, und da die Richtung des Stromes auf diesen Kurven senkrecht ist (d. h. die Strömungskurven oder Trajektoren schneiden die Niveaukurven senkrecht), so erhalten wir auch ein klares Bild für das Durchströmen der Elektricität durch die Fläche.

Es bestehen nun für das Potential folgende Bedingungen: Für alle Punkte der Fläche mit Ausnahme der Zuleitungsstellen β und γ ist:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Für die Stellen β und γ und ihre unmittelbare Umgebung ist das Potential V in folgender Weise zu bestimmen. Denken wir uns um β und γ kleine Kreise q mit dem Radius r ausgeschnitten, so wird nach den Ohmschen Gesetzen durch eine dieser Flächen q die Elektricitätsmenge $-q\frac{\partial V}{\partial n}\varepsilon$ in die Fläche hineinfliessen, wo ε die für diese kleinen Kreise konstante Dichtigkeit der Elektricität bedeutet. Bezeichnet Δ die Dicke der Fläche, so ist $q = \Delta\int r d\varphi = \Delta . 2r\pi$. Demnach wird durch die Zuleitungsstelle β die Elektricitätsmenge $J = -\Delta\varepsilon . 2r\pi\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_\beta$ hineinfliessen, und es ist:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_\beta = \frac{J}{-2\pi r\varepsilon\Delta} \quad \text{und} \quad V = -\frac{J}{2\pi\varepsilon\Delta}\lg r + C$$

Ferner muss senkrecht zur Begrenzung der Fläche keine Strömung stattfinden, woraus sich dann noch die letzte Bedingung für die Bestimmung des Potentials der Fläche ergiebt, es muss $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$ sein.

Hier ist die geschlossene Fläche eine Lemniscate, durch welche ein konstanter elektrischer Strom durch zwei Drähte hindurch geleitet wird, wobei sich die Zuleitungsstellen β und γ ganz nahe am Rande befinden. Es wäre nun für die Lemniscate das Potential zu bestimmen und dann die Kurven konstanten Potentials zu untersuchen. Ich gehe aber hier nicht diesen direkten Weg, sondern nehme die Theorie der konformen Abbildung zu Hilfe. Man kann nämlich durch eine komplexe Substitution den Kreis so auf die Lemniscate abbilden, dass einem jeden Punkt der einen Fläche ein Punkt der anderen entspricht. So werden denn auch die Kurven konstanten Potentials des Kreises denselben Kurven der Lemniscate entsprechen,*) und durch Abbildung des Kreises auf die Lemniscate werden sich dann auch die Niveaukurven der Lemniscate ergeben.

So ist nun zunächst das von Kirchhoff gefundene Potential des Kreises in Bezug auf einen seiner Punkte aufzusuchen, wozu bereits die Bedingungen vorher im allgemeinen aufgestellt sind. Es muss eine Funktion V gefunden werden, welche allen jenen Bedingungen genügt. Dieses leistet folgende Funktion:

$$V = m_\beta . \lg E_{\beta x} - m_\gamma . \lg E_{\gamma x} + m_{\beta_1} . \lg E_{\beta_1 x} - m_{\gamma_1} . \lg E_{\gamma_1 x}$$

$E_{\beta x}$ und $E_{\gamma x}$ sind hier die Entfernungen der Zuleitungsstellen β und γ von einem Punkte (x, y) des Kreises, und $E_{\beta_1 x}$, $E_{\gamma_1 x}$ sind die Entfernungen äusserer Massenpunkte von demselben Punkte (x, y).

Unter Benutzung der vorher in Polarkoordinaten gefundenen Werte für V folgt nun:

$$V = m_\beta\left[\lg\varrho - \sum^h \frac{1}{h}\left(\frac{r_\beta}{\varrho}\right)^h \cos h(\varphi - \vartheta_\beta)\right] - m_\gamma\left[\lg\varrho - \sum^h \frac{1}{h}\left(\frac{r_\gamma}{\varrho}\right)^h \cos h(\varphi - \vartheta_\gamma)\right]$$
$$+ m_{\beta_1}\left[\lg r_{\beta_1} - \sum^h \frac{1}{h}\left(\frac{\varrho}{r_{\beta_1}}\right)^h \cos h(\varphi - \vartheta_{\beta_1})\right] - m_{\gamma_1}\left[\lg r_{\gamma_1} - \sum^h \frac{1}{h}\left(\frac{\varrho}{r_{\gamma_1}}\right)^h \cos h(\varphi - \vartheta_{\gamma_1})\right]$$

φ ist hier der Winkel, den ϱ mit einem festen Radius bildet, und die verschiedenen ϑ sind die Winkel, welche die verschiedenen r mit demselben Radius bilden.

*) Es wäre noch nachzuweisen, dass bei der konformen Abbildung die Niveaukurven auch dieselben bleiben.

Nun soll $\frac{\partial V}{\partial n} = 0$, also $\left[\frac{\partial V}{\partial \varrho}\right]_{\varrho = R} = 0$

$$\frac{\partial V}{\partial \varrho} = m_\beta\left[\frac{1}{\varrho} + \sum^h \frac{r^h_\beta}{\varrho^{h+1}} \cos h(\varphi - \vartheta_\beta)\right] - m_\gamma\left[\frac{1}{\varrho} + \sum^h \frac{r^h_\gamma}{\varrho^{h+1}} \cos h(\varphi - \vartheta_\gamma)\right]$$
$$- m_{\beta_1} \sum^h \frac{\varrho^{h-1}}{r^h_{\beta_1}} \cos h(\varphi - \vartheta_{\beta_1}) + m_{\gamma_1} \sum^h \frac{\varrho^{h-1}}{r^h_{\gamma_1}} \cos h(\varphi - \vartheta_{\gamma_1})$$

Nun ist $\cos h(\varphi - \vartheta_\beta) = \sin h\varphi \sin \vartheta_\beta + \cos h\varphi \cos h\vartheta_\beta$. Damit nun dieser Ausdruck $\frac{\partial V}{\partial \varrho}$ für $\varrho = R$ verschwindet, muss sein:

$$m_\beta \frac{r^h_\beta}{R^h} \sin h\vartheta_\beta = m_{\beta_1} \frac{R^h}{r^h_{\beta_1}} \sin h\vartheta_{\beta_1}$$

$$m_\beta \frac{r^h_\beta}{R^h} \cos h\vartheta_\beta = m_{\beta_1} \frac{R^h}{r^h_{\beta_1}} \cos h\vartheta_{\beta_1}$$

Gleiche Beziehungen folgen auch für die Punkte γ.

Durch Division der beiden Gleichungen ist: $\operatorname{tgh} \vartheta_\beta = \operatorname{tgh} \vartheta_{\beta_1}$, also $\vartheta_\beta = \vartheta_{\beta_1}$, d. h. die Punkte β, β_1 und der Mittelpunkt des Kreises liegen auf einer geraden Linie. Dann folgt weiter: $m_\beta \frac{r^h_\beta}{R^h} = m_{\beta_1} \frac{R^h}{r^h_{\beta_1}}$. Nun kann h jeden beliebigen Wert von 0 bis ∞ annehmen, daher $m_\beta \frac{r_\beta}{R} = m_{\beta_1} \frac{R}{r_{\beta_1}}$. Daraus folgt $m_\beta = m_{\beta_1}$ und $r_{\beta_1} = \frac{R^2}{r_\beta}$. Also sind die zu Hilfe genommenen Massenpunkte β_1 und γ_1 die Spiegelpunkte von den Zuleitungsstellen β und γ.

Demnach ergiebt sich für das Potential der Kreisfläche auf einen ihrer Punkte $V = m \lg \frac{E_{\beta x} \cdot E_{\gamma x}}{E_{\beta_1 x} \cdot E_{\gamma_1 x}}$ und für die Kurven konstanten Potentials: $\frac{E_{\beta x} \cdot E_{\gamma x}}{E_{\beta_1 x} \cdot E_{\gamma_1 x}} = \text{Const.}$

Lassen wir eine der Einströmungsstellen z. B. γ auf den Rand der Scheibe rücken, so dass $M\gamma = R$ wird, so erhalten wir $M\gamma_1 = M\gamma = R$ und $E_{\gamma x} = E_{\gamma_1 x} = r_1$. Fällt weiter die andere Zuleitungsstelle in die Mitte der Scheibe, so dass der zugehörige Spiegelpunkt in der Unendlichkeit liegt, und setzen wir $M\beta_x = r$, so erhalten wir die Gleichung konstanten Potentials für die Kreisscheibe in folgender Form $\frac{r_1^{\,2}}{r} = C$.

Hieraus folgt denn die Gleichung der Niveaukurven, in rechtwinkligen Koordinaten ausgedrückt: (Siehe Figur 8)

$$\frac{(R - x)^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = C.$$

Und in Polarkoordinaten ausgedrückt:

$$\frac{r^2 + R^2 - 2rR\cos p}{r} = C$$

Rücken wir nun ebenso wie γ auch β auf die Peripherie der Kreisscheibe, so dass $E_{\beta x} = E_{\beta_1 x} = r_2$ ist, so lautet in diesem Falle die Gleichung der Kurven konstanten Potentiales: $\frac{r_2^2}{r_1^2} = C$. Diese Gleichung gilt also, wenn die beiden Zuleitungstellen auf der Peripherie liegen; und zwar sind diese Kurven Kreise.

Wir wollen nun die Gleichung dieses Kreises für den Fall ableiten, dass die beiden Zuleitungsstellen in den Enden α, β eines Durchmessers liegen. (Siehe Fig. 8.) In Polarkoordinaten lautet dann die Gleichung:

$$\frac{r^2 + R^2 - 2rR\cos p}{r^2 + R^2 + 2rR\cos p} = C$$

oder:
$$r^2(C-1) + 2rR\cos p(C+1) + R^2(C-1) = 0$$

$$r^2 + 2rR\cos p\frac{C+1}{C-1} + R^2 = 0$$

Für $C = 1$ erhalten wir $r\cos p = 0$, d. h. $x = o$, also ist die Niveaukurve für diesen besonderen Wert von C eine grade Linie und zwar die y Achse.

Mit Hilfe folgender Substitution lässt sich nun die Lemniscate auf den Kreis abbilden

$$z = \sqrt{\frac{c^2 w}{R} + l^2}$$

$z = \xi + i\eta$ ist hier die Ebene der Lemniscate mit den Koordinaten ξ und η und $w = x + iy$ ist die Ebene des Kreises mit den Koordinaten x und y. Diese Formel gilt aber nur für den Fall, dass $a \leq 1$ ist, also nur für die Lemniscate von den Formen 1 und 2. In der Formel bedeutet ferner R den Radius des Kreises, l die Entfernung des Mittelpunktes vom Brennpunkte in der Lemniscate und c eine Konstante. Diese Konstante werden wir nun dadurch bestimmen, dass wir mit Hilfe der Substitution aus der Gleichung des Kreises die der Lemniscate ableiten werden. Zunächst folgt aus der obigen Formel:

$$z^2 = \frac{c^2 w}{R} + l^2 \text{ und}$$

$$(\xi + i\eta)^2 = \frac{c^2(x+iy)}{R} + l^2 \text{ hieraus nun weiter:}$$

$$\xi^2 - \eta^2 + 2i\xi\eta = \frac{c^2}{R}x + l^2 + i\frac{c^2}{R}y \text{ und}$$

$$\xi^2 - \eta^2 = \frac{c^2}{R}x + l^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 3.$$

$$2\xi\eta = \frac{c^2}{R}y \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4.$$

$$\text{und hieraus: } x = \frac{R}{c^2}(\xi^2 - \eta^2 - l^2)$$

$$y = \frac{2R}{c^2}\xi\eta$$

Setzen wir diese beiden Resultate in die Gleichung des Kreises ein, in:

$x^2 + y^2 = R^2$, so erhalten wir:

$$\frac{R^2}{c^4}(\xi^2 - \eta^2 - l^2)^2 + \frac{4R^2\xi^2\eta^2}{c^4} = R^2$$

$$(\xi^2 - \eta^2)^2 - 2l^2(\xi^2 - \eta^2) + l^4 + 4\xi^2\eta^2 = c^4$$

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2l^2(\xi^2 - \eta^2) + l^4 = c^4$$

$$(\xi^2 + \eta^2 + l^2)^2 - 4l^2\xi^2 = c^4$$

$$(\xi^2 + \eta^2 + l^2 + 2l\xi)(\xi^2 + \eta^2 + l^2 - 2l\xi) = c^4$$

$$\sqrt{(\xi + l)^2 + \eta^2}\ \sqrt{(\xi - l)^2 + \eta^2} = c^2$$

Wir haben hier so genau die Gleichung 1 der Lemniscate erhalten, wenn wir noch $c = a$ setzen. Wir haben demnach die Substitutionen 3 und 4 so zu schreiben:

3. . . . . $\xi^2 - \eta^2 = \frac{a^2}{R}x + l^2$

4. . . . . $2\xi\eta = \frac{a^2}{R}y$

Aus 3 und 4 folgt nun weiter:

Ist $x = 0$ und $y = 0$, so ist $\xi^2 - \eta^2 = l^2$

$2\xi\eta = e$ demnach $\xi = \pm l \quad \eta = 0$.

Es entspricht demnach der Mittelpunkt des Kreises M dem Brennpunkt F der Lemniscate. (Siehe Figur 9.)

Für $R = x$ und $y = 0$ ist $\xi^2 + \eta^2 = a^2 + l^2$, $2\xi\eta = 0$, also $\xi = \sqrt{a^2 + l^2}$, $\eta = 0$. Demnach entspricht der Randpunkt B des Kreises dem Randpunkt B^1 der Lemniscate.

Ist $x = -R$, $y = 0$, dann erhalten wir $\xi^2 + \eta^2 = -a^2 + l^2$

$2\xi\eta = 0$ also $\xi = \sqrt{-a^2 + l^2}$ und $\eta = 0$,

demnach entspricht der Randpunkt A dem Randpunkt A_1 der Lemniscate. Es bildet sich also der Kreis nur auf einen Zweig der Lemniscate ab, daher brauchen wir auch nur einen solchen zu behandeln. Dieses ist auch physikalisch klar, auch in dem Falle, wo wir die Lemniscate mit dem Doppelpunkt haben, denn durch diesen Punkt würde keine Elektricität hindurchfliessen können.

Wir wollen nun die Formel 3 und 4 in Polarkoordinaten ausdrücken:

$x = r\cos p \qquad \xi = \varrho\cos\varphi$

$y = r\sin p \qquad \eta = \varrho\sin\varphi$; dieses eingesetzt in 3 und 4

$$\varrho^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = \frac{a^2}{R} r\cos p + l^2$$

$2\varrho^2\cos\varphi\sin\varphi = \frac{a^2}{R} r\sin p$ oder, indem wir noch den Radius

5. . . . . . . $R = 1$ setzen: $\varrho^2\cos 2\varphi = a^2 r\cos p + l^2$

6. . . . . $\varrho^2\sin 2\varphi = a^2 r\sin p$

Wir wollen nun die Gleichung der Kurven konstanten Potentials für die Lemniscate 1 und 2 ableiten. Die Zuleitungsstellen befinden sich im Brennpunkte und in dem Randpunkte, welcher dem Mittelpunkt am nächsten liegt, also bei der Lemniscate von der Form 2 im Mittelpunkt selbst, bei der anderen Lemniscate in dem Anfangspunkt eines Zweiges. Diesen beiden Zuleitungsstellen entsprechen auf dem Kreise der Mittelpunkt und der Randpunkt auf der negativen Seite des Kreises. Wir werden demnach in die Gleichung der Niveaukurven des Kreises: $\frac{r^2+1-2r\cos p}{r} = C$ folgende Substitutionen einführen:

$$\varrho^2\cos 2\varphi = -a^2 r\cos p + l^2$$
$$\varrho^2\sin 2\varphi = a^2 r\sin p.$$

Hieraus folgt:

$$r^2 = \frac{(\varrho^2\cos 2\varphi - l^2)^2 + \varrho^4\sin^2 2\varphi}{a^4}$$
$$= \frac{\varrho^4 - 2l^2\varrho^2\cos 2\varphi + l^4}{a^4}$$

und weiter:

$$r\cos p = \frac{l^2 - \varrho^2\cos 2\varphi}{a^2}$$

Wir erhalten daraus die Gleichung für die Niveaukurven der Lemniscate $a \leqq 1$

$$\frac{\frac{\varrho^4 - 2l^2\varrho^2\cos 2\varphi + l^4}{a^4} + 1 - 2\frac{l^2 - \varrho^2\cos 2\varphi}{a^2}}{\sqrt{\frac{\varrho^4 - 2l^2\varrho^2\cos 2\varphi + l^4}{a^4}}} = C$$

$$\frac{\varrho^4 - 2\varrho^2(l^2 - a^2)\cos 2\varphi + (l^2 - a^2)^2}{\sqrt{\varrho^4 - 2l^2\varrho^2\cos 2\varphi + l^4}} = a^2 C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7.$$

Diese Gleichung 7 gilt also für den Fall, dass $a < 1$ ist.

Ist $a = 1$, so erhalten wir folgendes Resultat:

$$\frac{\varrho^4}{\sqrt{\varrho^4 - 2l^2\varrho^2\cos 2\varphi + l^4}} = a^2 C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8.$$

Um dieselben Gleichungen in rechtwinkligen Koordinaten zu erhalten, haben wir in folgende Gleichung: $\frac{(1-x)^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = C$ die Substitutionen 3 und 4

$$x = \frac{l^2 + \eta^2 - \xi^2}{a^2} \quad \text{und} \quad y = \frac{2\xi\eta}{a^2}$$

einzuführen und erhalten dann folgende Gleichungen:

wenn $a < 1$

$$\frac{(a^2 - l^2 + \xi^2 - \eta^2)^2 + 4\xi^2\eta^2}{\sqrt{(l^2 + \eta^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2\eta^2}} = a^2 C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 9.$$

wenn $a = 1$

$$\frac{(\xi^2 + \eta^2)^2}{\sqrt{(l^2 + \eta^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2\eta^2}} = a^2 C \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 10.$$

Wir erhalten also für die Kurven konstanten Potentials Gleichungen achten Grades, die wir nun weiter diskutieren und berechnen wollen. Zunächst ergiebt sich aus der Form der Gleichung, dass die Kurven in Bezug auf ihre Achsen symmetrisch liegen. Für $\varphi = 0$ erhalten wir aus Gleichung 7 diejenigen Punkte, in denen die Kurven die ξAchse schneiden, es ist:

$$\frac{\varrho^4 - 2\varrho^2(l^2 - a^2) + (l^2 - a^2)^2}{\sqrt{\varrho^4 - 2l^2\varrho^2 + l^4}} = a^2 . C$$

$$\varrho^4 - 2\varrho^2(l^2 - a^2) + (l^2 - a^2)^2 = \pm C a^2 (l^2 - \varrho^2)$$

Es folgt hieraus die quadratische Gleichung zur Bestimmung von ϱ:

$$\varrho^4 + \varrho^2[\pm a^2 C - 2(l^2 - a^2)] = \pm a^2 C - (l^2 - a^2)^2$$

$$\varrho^2 = \frac{1}{2}\left[\pm a^2\sqrt{C(C \pm 4)} - [\pm a^2 C - 2(l^2 - a^2)]\right]$$

Behandeln wir zunächst den Wert, in dem C das $+$Zeichen hat, also

$$\varrho_1^{\,2} = \frac{1}{2}\left[\pm a^2\sqrt{C(C+4)} - a^2 C + 2(l^2 - a^2)\right]$$

Ist hier $\sqrt{C(C+4)}$ positiv, dann giebt es für $\varrho_1^{\,2}$ immer einen reellen positiven Wert, denn $a^2\sqrt{C(C+4)} > a^2 C$, daher wird auch $\varrho_1^{\,2} > l^2 - a^2$ sein. Wir erhalten also in diesem Falle immer einen brauchbaren Wert; es ist auch leicht einzusehen, dass $\sqrt{C(C+4)} - C < 4$ ist, also $\varrho_1^{\,2} < a^2 + l^2$. Ist dagegen die Wurzel negativ, so erhalten wir einen Wert für $\varrho_1^{\,2}$, der $< l^2 - a^2$ ist, der also nicht zu brauchen ist. Es bleibt demnach nur:

wenn $a < 1$ $$\varrho_1^{\,2} = \frac{1}{2}\left[a^2\sqrt{C(C+4)} - a^2 C + 2(l^2 - a^2)\right]$$

wenn $a = 1$ $$\varrho_1^{\,2} = \frac{l^2}{2}\left[\sqrt{C(C+4)} - C\right]$$

Hat C das negative Zeichen, so erhalten wir:

$$\varrho_2^{\,2} = \frac{1}{2}\left[\pm a^2\sqrt{C(C-4)} + a^2 C + 2(l^2 - a^2)\right]$$

Es kann nun $\varrho_2^{\,2}$ nur dann reell sein, wenn $C > 4$ ist. Ist dann weiter die Wurzel $a^2\sqrt{C(C-4)}$ positiv, so muss $\varrho_2^{\,2}$ immer $> l^2 + a^2$ sein, giebt uns also einen unbrauchbaren Wert. Ist diese Wurzel dagegen negativ, so erhalten wir immer einen positiven brauchbaren Wert für ϱ_2^2, nämlich:

wenn $a < 1$ $$\varrho_2^{\,2} = \frac{1}{2}\left[-a^2\sqrt{C(C-4)} + a^2 C + 2(l^2 - a^2)\right]$$

Demnach muss die Kurve, wenn die Konstante $C > 4$ ist, immer zweimal die ξAchse schneiden. Ist nun $C = 4$, so erhalten wir:

$$\varrho_2 = \sqrt{a^2 + l^2}$$

Die Kurve muss also für den Fall $C = 4$ durch den Endpunkt der Lemniscate gehen. Ist $a = l$, so erhalten wir:

$$\varrho_2{}^2 = \frac{l^2}{2}\left[-\sqrt{C(C-4)}+C\right]$$

Wir wollen nun diejenigen Werte von ϱ aufsuchen, für welche die Niveaukurven die Lemniscate schneiden. Es geschieht dieses unter einem rechten Winkel, da der elektrische Strom am Rande parallel dem Rande geht, und die Lemniscate selbst einer der Trajektoren ist. Wir werden diese Werte durch Elimination von φ aus folgenden beiden Gleichungen (2 und 7) finden:

$$\frac{(l^2-a^2)^2+\varrho^4-2\varrho^2\cos 2\varphi\,(l^2-a^2)}{\sqrt{l^4-2\varrho^2 l^2\cos 2\varphi+\varrho^4}} = a^2 C \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 7.$$

$$\sqrt{l^4-2l^2\varrho^2\cos 2\varphi+\varrho^4} = a^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2.$$

Aus der letzten Gleichung ergiebt sich:

$$-2\varrho^2\cos 2\varphi = \frac{a^4-l^4-\varrho^4}{l^2}$$

Führen wir nun diese Werte in Gleichung 7 ein, so ist:

$$(l^2-a^2)^2+\varrho^4+\frac{a^4-l^4-\varrho^4}{l^2}(l^2-a^2) = a^4 C$$

$$a^2\varrho^4 = a^4 Cl^2-(l^2-a^2)^2 l^2+(l^4-a^4)(l^2-a^2)$$

wenn $a < l$ $\qquad \varrho = \sqrt[4]{a^2 Cl^2-(l^2-a^2)^2}$

wenn $a = l$ $\qquad \varrho = l\sqrt[4]{C}$

Ist ferner $C = 4$, so erhalten wir $\varrho = \sqrt{a^2+l^2}$, dasselbe Resultat haben wir schon vorher gefunden.

Bilden wir nun den Differentialquotienten aus folgender Gleichung 9:

$$\frac{[(a^2-l^2+\xi^2-\eta^2)^2+4\xi^2\eta^2]^2}{(l^2-\xi^2+\eta^2)^2+4\xi^2\eta^2} = a^4 C^2$$

Wir setzen hier: $(a^2-l^2)^2+2(a^2-l^2)(\xi^2-\eta^2)+(\xi^2+\eta^2)^2 = u$ und

$$\xi^2+\eta^2 = v \quad \ldots \ldots \quad 11.$$

$$\text{Daraus folgt:}\quad \xi^2-\eta^2 = \frac{u-v^2-(a^2-l^2)^2}{2(a^2-l^2)} \quad \ldots \quad 12.$$

Führen wir diese Substitution in die Gleichung ein, so erhalten wir:

$$u^2 = a^4C^2\left[l^4-l^2\frac{u-v^2-(a^2-l^2)^2}{a^2-l^2}+v^2\right]$$

oder:

$$u^2(l^2-a^2)+v^2a^6C^2-u\,a^4l^2C^2-a^6l^2C^2(l^2-a^2) = 0 \quad \ldots \ldots \quad 13.$$

Diese Gleichung zweiten Grades stellt die Gleichung einer Ellipse dar. Differenzieren wir Gleichungen 11 und 12:

$$2\xi d\xi + 2\eta d\eta = dv$$

$$2\xi d\xi - 2\eta d\eta = \frac{du - 2v\,dv}{2(a^2-l^2)}$$

und durch Division:

$$\frac{\xi d\xi - \eta d\eta}{\xi d\xi + \eta d\eta} = \frac{du - 2v\,dv}{2(a^2-l^2)\,dv}$$

$$\frac{\eta d\eta}{\xi d\xi} = \frac{2(a^2-l^2)\,dv - du + 2v\,dv}{2(a^2-l^2)\,dv + du - 2v\,dv}$$

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\xi}{\eta} \cdot \frac{2(a^2-l^2) - \frac{du}{dv} + 2v}{2(a^2-l^2) + \frac{du}{dv} - 2v}$$

Hieraus folgt nun, dass für $\eta = 0$ $\frac{d\eta}{d\xi} = \infty$ wird, d. h. die Niveaukurven schneiden die ξ Achse senkrecht, was auch schon aus der Symmetrie der Kurven zu erwarten war. Ferner wird $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$ für $\xi = 0$. Dieses giebt aber nichts, da einmal die Lemniscate von der Form 1 diesen Punkt garnicht hat und die andere von der Form 2 in diesem Punkte $\xi = 0$ $\eta = 0$ eine Zuleitungsstelle besitzt.

Nun wird $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$, wenn $2(a^2-l^2) - \frac{du}{dv} + 2v = 0$ wird.

Wir bilden nun $\frac{du}{dv}$ aus Gleichung 13; es ist:

$$2u\,du(a^2-l^2) - 2v\,dv\,a^6C^2 + du\,a^4l^2C^2 = 0$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{2va^6C^2}{2u(a^2-l^2) + a^4l^2C^2}$$

Diesen Wert setzen wir in die vorhergehende Gleichung ein, so ist:

$$a^2 - l^2 - \frac{va^6C^2}{2u(a^2-l^2) + a^4l^2C^2} + v = 0$$

$$2uv - 2u(l^2 - a^2) - va^4C^2 + a^4l^2C^2 = 0. \qquad 14.$$

Diese Gleichung zweiten Grades stellt die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel dar. Aus Gleichungen 13 und 14 werden wir nun diejenigen Werte von u und v erhalten, für die unsere Niveaukurven Maxima oder Minima haben; es sind also die Schnittpunkte der Ellipse und der Hyperbel. Aus Gleichungen 11 und 12 finden wir dann die entsprechenden Werte für ξ und η.

Aus Gleichungen 11 und 12 folgt für $\eta = 0$:

$$v^2 = \xi^2 \text{ und}$$

$$u = (\xi^2 + a^2 - l^2)^2$$

Aus Gleichung 13, welcher wir folgende Form geben wollen:

$$\frac{u^2(a^2-l^2)}{a^2l^2(a^2-l^2)-l^2u+v^2a^2} = a^4C^2 \text{ folgt}$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{2uva^2}{2a^2l^2(a^2-l^2)-l^2u+2v^2a^2}$$

Setzen wir nun diese Resultate in die Gleichung $2(a^2-l^2)-\frac{du}{dv}+2v = 0$ ein, so erhalten wir:

$$2(a^2\xi^2+a^2-l^2)-\frac{2\xi^2a^2(\xi^2+a^2-l^2)^2}{2a^2l^2(a^2-l^2)-l^2(\xi^2+a^2-l^2)^2+2\xi^4a^2} = 0$$

oder

$$\xi^4-\xi^2(a^2+2l^2) = -l^2(a^2+l^2)$$

$$\xi = \sqrt{a^2+l^2} \quad \text{und} \quad \xi = 1$$

$\eta = 0$ und $\xi = 1$ ist der Brennpunkt der einen Zuleitungsstelle. Es ist aber weiter $\frac{d\eta}{d\xi} = 0$ für $\eta = 0$ und $\xi = \sqrt{a^2+l^2}$, daher muss diese Kurve, deren Konstante $C = 4$ ist, die ξAchse in diesem Punkte, im Endpunkte der Lemniscate, berühren; sie wird also hier eine Spitze bilden müssen.

Für die Lemniscate von der Form 2, wo $a = 1$ ist, nehmen die Gleichungen 13 und 14 folgende einfachere Formen an:

$$v^2-u = 0$$

$$\text{und } 2uv-vl^4C^2+l^6C^2 = 0$$

Hieraus folgt zur Bestimmung von v folgende kubische Gleichung:

$$v^3-v\frac{l^4C^2}{2}+\frac{l^6C^2}{2} = 0$$

Diese kubische Gleichung hat nur eine reelle Wurzel, wenn $\frac{l^{12}C^4}{16} > \frac{l^{12}C^6}{6^3}$ oder $C < \frac{3}{2}\sqrt{6}$, sonst drei reelle Wurzeln.

Aus Gleichung 11, $\xi^2+\eta^2 = v$, welche einen Kreis bedeutet, ergiebt sich dann, dass da, wo dieser Kreis die Niveaukurven schneidet, dieselben Maxima oder Minima haben.

Um nun einen Vergleich mit der praktischen Beobachtung aufstellen zu können, ist es notwendig, dass wir einige Kurven numerisch berechnen, um dann ihre Lage auf der Lemniscate genau bestimmen zu können. Zur Bestimmung der Lage der Kurvenpunkte benutzte ich ein Polarkoordinatennetz, indem ich die Strecke vom 0 Punkt bis zum Brennpunkt in zehn gleiche Teile teilte und in dem Abstande eines solchen Teiles vom 0 Punkt aus konzentrische Kreise, richtiger Kreisbogen, auf die Lemniscate zeichnete. Dann trug ich zu beiden Seiten der ξAchse unter gleichen Winkeln Radiivektoren an (siehe Tafel) und berechnete nun die Schnittpunkte der zu berechnenden Kurven mit diesem Koordinatennetz. Die Rechnung ergab sich aus den Gleichungen 7 und 8, und zwar ergab sich, wenn φ gegeben war, eine Gleichung vierten Grades für ϱ, die sich durch Annäherung lösen liess, und war ϱ gegeben, so folgte eine quadratische Gleichung zur Bestimmung von φ.

Gehen wir nun zur Beobachtung dieser Niveaukurven über.

Als Metallplatte benutzte ich eine sehr dünn gewalzte Bleiplatte, welche den Vorteil gewährte, dass ich derselben leicht die Form einer Lemniscate geben konnte, und dass sich auf ihr leicht ein Koordinatennetz aufzeichnen liess.

Diese wurde auf eine Glasplatte g (siehe Fig. 10) geklebt und dann das Ganze in einen Zinkkasten gelegt, der mit Petroleum gefüllt war. Das Petroleum als schlechter Wärmeleiter sollte die Platte möglichst gut von der umgebenden Luft isolieren und den Einfluss der Temperaturveränderung fernhalten. Zwei Messingfedern, m_1 und m_2, die isoliert auf zwei Holzplatten h angebracht waren, drückten die Enden zweier Kupferdrähte auf die Punkte A und F der Lemniscate, durch welche der elektrische Strom eingeführt werden sollte. Ich verband dann die freien Enden der Drähte mit einer Daniellschen Kette und führte so den elektrischen Strom durch die bewussten Punkte in die Lemniscate ein. In dieser Leitung stellte ich noch einen Kommutator ein, um jederzeit den Strom schliessen und öffnen zu können.

Es waren nur die Kurven konstanten Potentials zu beobachten, d. h. solche Kurven, in denen der elektrische Strom überall gleich stark ist. Wenn nun auf unserer Bleiplatte in irgend zwei Punkten einer solchen Kurve die Enden eines Drahtes befestigt werden, der durch einen Multiplikator geführt ist, so wird, wenn der Kommutator geschlossen ist, ein Strom durch diese Schliessung hindurchgehen, der aber keine Ablenkung der Magnetnadel hervorbringen wird. Verbindet man dagegen zwei beliebige Punkte der Platte in der eben beschriebenen Weise, so wird eine Ablenkung der Nadel stattfinden. Mit Hilfe dieser Thatsache beobachtete ich diese Kurven.

Bevor wir noch weiter zur Beobachtung übergehen, wollen wir noch ein einfaches Hilfsmittel beschreiben, das von Kirchhoff und Quincke angewendet ist, um bequem irgend zwei Punkte der Lemniscate mit dem Multiplikator verbinden zu können. Eine kleine Bleiplatte A ruht auf drei Füssen, von denen zwei, nämlich b und c, von Glas, der dritte a von Kupferdraht ist. (Siehe Fig. 11.) Dieser Draht führt durch die Platte hindurch, so dass man an seinem oberen Ende einen anderen Draht befestigen kann. Zwei solche Bänkchen stelle ich nun auf zwei zu beobachtende Punkte auf und bringe dann diese mit einem Draht durch den Multiplikator in Verbindung.

Zur Beobachtung des Multiplikators benutzte ich Fernrohr und Skala.

Um nun eine bestimmte Niveaukurve zu beobachten, verfuhr ich so: Das eine der Bänkchen stellte ich auf einen Punkt der Kurve, den ich am Rande wählte, weil dadurch die Beobachtung genauer wurde, denn nach der Mitte zu drängen sich die Kurven zusammen, während sie nach dem Rande zu mehr auseinandergehen. Dieser Punkt sei z. B. a (Siehe Fig. 12). Das andere Bänkchen stellte ich der Reihe nach auf zwei benachbarte Punkte des Koordinatennetzes, zwischen denen nach der Berechnung die Kurve durchgehen sollte, z. B. auf die beiden Punkte b und c. Dann beobachtete ich für jeden dieser Punkte, während der Strom hindurchging, die Ablenkung der Magnetnadel des Multiplikators. Diese seien definiert durch die beiden Zahlen β und γ der Skala. Zwischen diesen beiden Beobachtungen beobachtete ich die Ruhelage der Nadel, sie sei durch die Zahl α bestimmt. Liegt nun die Zahl α zwischen β und γ, so muss auch der Kurvenpunkt zwischen b und c liegen. Wenn wir nun die Entfernung der beiden Punkte b und c, die ja auf dem ganzen Koordinatennetz nach Graden gleich ist, mit

1 bezeichnen und die Entfernung des Kurvenpunktes P von dem der ξAchse nächst liegenden Punkt b mit x, so ergiebt sich folgende Proportion:

$$x : 1 = \alpha - \beta : \gamma - \beta.$$

Hieraus finden wir nun x und können dann die Beobachtung und die Rechnung vergleichen. Ich führte nun jede Beobachtung doppelt aus, indem ich das feste Bänkchen einmal über der Achse auf den bestimmten Punkt am Rande stellte und dann eine Reihe Kurvenpunkte beobachtete und das andere Mal auf den entsprechenden Punkt unterhalb der Achse stellte und wieder dieselbe Reihe Kurvenpunkte beobachtete.

Die Form und Grösse der aus der Bleiplatte geschnittenen Lemniscate habe ich nach dem vorhandenen Material eingerichtet, indem ich eine möglichst grosse Fläche zu erhalten suchte. So habe ich den Parameter der Lemniscate von der Form 1 $a = 0{,}9$ gemacht $l = 1 = 32$ cm, daraus folgt dann: $MA = 0{,}436 = 13{,}95$ cm $MB = 1{,}345 = 34{,}04$ cm (siehe die Tafel). Bei der Lemniscate von der Form 2 ist $l = 1 = 22$ cm, daraus folgt: $MB = 1{,}1414 = 31{,}108$ cm.

Von den Niveaukurven habe ich diejenigen zur Untersuchung herausgewählt, die in ihrer Form am meisten verschieden waren.

In der nun folgenden Tabelle ist immer die schon vorher bestimmte Entfernung x, wie sie sich aus der theoretischen Behandlung und wie sie sich aus der Beobachtung ergiebt, angegeben, wobei die Entfernung zweier benachbarten Punkte = 1 gesetzt ist. Und zwar ist dabei immer nur der Punkt b als Bezeichnung aufgeführt, dessen Lage ich durch seine Koordinaten bestimme. Ich habe nämlich die Koordinaten vom 0 Punkt aus mit den Zahlen 1,2 ... bezeichnet (die Radiivektoren sind mit 0,1 0,2 ... bezeichnet). Wenn da also steht (α, β), so heisst das, der Punkt hat den Radiusvektor α und den Winkel β. Ob ich nun den Schnittpunkt der Kurve mit einem Radiusvektor oder mit einem Kreise untersuche, ist jedesmal angegeben. Ferner habe ich diejenigen Punkte, welche oberhalb der Achse liegen, in der Tabelle durch ein oben herübergeschriebenes + und diejenigen, welche unterhalb liegen, durch ein — unterschieden. In der ersten Horizontalreihe jeder Tabelle ist immer die Lage des Schnittpunktes und der ξAchse behandelt.

Zur folgenden Tabelle siehe Tafel 1.

Bei der ersten Kurve sind die Schnittpunkte mit Radiivektoren, in allen übrigen mit Kreisen angegeben.

Unter „beobachtet" sind in den Tabellen in den beiden ersten Vertikalreihen, welche durch einen horizontalen Strich über den Reihen, mit einem + Zeichen versehen, zusammengefasst sind, diejenigen Beobachtungen zusammengestellt, bei denen das feste Bänkchen auf der positiven Seite der ξAchse steht. In der dritten und vierten Reihe, die wieder ein Strich mit dem — Zeichen zusammenfasst, sind die Beobachtungen, bei denen das feste Bänkchen auf der negativen Seite steht. In der fünften und sechsten Reihe sind diese beiden Beobachtungen eines jeden Punktes zu einer zusammengestellt, indem ich zwischen den beiden das arithmetische Mittel nahm.

Lemniscate 1.

Kurve I. C = 0,5.

	berechnet	beobachtet					
		+		—		+	—
		+	—	+	—		
[0,75. 0]	0,2136	0,23		0,23		0,23	
[0,75. 2]	0,243	0,256	0,26	0,25	0,27	0,253	0,265
[0,75. 4]	0,3261	0,341	0,34	0,341	0,37	0,341	0,355
[0,75. 6]	0,4476	0,43	0,45	0,44	0,449	0,435	0,449
[0,80. 8]	0,0842	0,06	0,06	0,069	0,055	0,064	0,057
[0,80. 10]	0,1199		0,155	0,14		0,14	0,155

Kurve II. C = 1.

Bei dieser Kurve sind die Schnittpunkte mit Kreisen angegeben, ebenso wie bei allen folgenden. Es ist deshalb die Fntfernung FM in 20 Teile, für die Kurve II sogar in 40 Teile geteilt und dann die nötigen Kreise gezogen:

	berechnet	beobachtet					
		+		—		+	—
		+	—	+	—		
[0,80. 0]	0,31	0,31		0,297		0,302	
[0,85. 3]	0,16	0,246	0,03	0,259	0,043	0,252	0,036
[0,875. 4]	0,97	0,99	0,88	0,96	0,89	0,98	0,885
[0,90. 6]	0,42	0,98	0,34	0,53	0,42	0,53	0,38
[0,925. 7]	0,84		0,84	0,91		0,91	0,84
[0,95. 9]	0,57	0,38	0,33	0,52	0,40	0,45	0,37

Kurve III. C = 3.

[0,90. 0]	0,116	0,101		0,102		0,102	
[0,95. 2]	0,27	0,344	0,226	0,327	0,21	0,327	0,22
[1,00. 3]	0,17	0,24	0,176	0,25	0,14	0,25	0,158
[1,05. 3]	0,68	0,73	0,69	0,74	0,70	0,74	0,695
[1,10. 4]	0,04	0,058	0,04	0,069	0,07	0,069	0,05
[1,15. 4]	0,37	0,435	0,35	0,437	0,41	0,437	0,38
[1,20. 4]	0,68		0,75	0,87		0,87	0,75

Kurve IV. C = 4.

[0,90. 0]	0,28	0,237		0,24		0,238	
[0,95. 1]	0,50	0,57	0,54	0,59	0,56	0,58	0,55
[1,00. 2]	0,36	0,446	0,45	0,46	0,45	0,45	0,45
[1,05. 2]	0,61	0,73	0,7	0,71	0,7	0,72	0,7
[1,10. 2]	0,58	0,65	0,69	0,65	0,66	0,65	0,67
[1,15. 2]	0,35	0,39	0,46	0,42	0,41	0,40	0,43

	berechnet	beobachtet +		beobachtet −		+	−
		+	−	+	−		
[1,20. 1]	0,94	1,06	1	1	1,1	1,03	1,05
[1,25. 1]	0,396		0,62	0,51		0,51	0,62
[1,30. 0]	0,72	1,35	1,3	1,3	1,3	1,3	1,3

Kurve V. C = 5.

[0,90. 0]	0,391	0,37		0,36		0,365	
[0,95. 0]	0,91	0,99	0,83	0,96	0,91	0,97	0,87
[1,00. 1]	0,84	0,94	0,91	0,97	0,94	0,95	0,92
[1,05. 1]	0,97	1,0	0,99	1,0	1,0	1,0	1,0
[1,10. 1]	0,56		0,53	0,59		0,59	0,53
[1,10. 0]	0,443	0,449		0,46		0,454	

Lemniscate 2.

Bei den beiden ersten Kurven sind die Schnittpunkte derselben mit den Radiivektoren, bei allen andern mit den Kreisen behandelt. (Siehe Tafel 2.)

Kurve I. C = 0,01.

[0,3. 0]	0,08	0,109		0,13		0,119	0,107
[0,3. 4]	0,09	0,11	0,123	0,13	0,09	0,12	0,121
[0,3. 8]	0,107	0,101	0,126	0,130	0,117	0,116	0,147
[0,3. 12]	0,130	0,142	0,156	0,145	0,137	0,144	0,19
[0,3. 16]	0,15	0,19			0,19	0,19	0,19

Kurve II. C = 0,1.

[0,5. 0]	0,2	0,19		0,224		0,207	
[0,5. 3]	0,22	0,21	0,21	0,239	0,23	0,224	0,22
[0,5. 6]	0,27	0,266	0,25	0,296	0,258	0,28	0,254
[0,5. 9]	0,35	0,355	0,306	0,369	0,33	0,362	0,318
[0,5. 12]	0,46	0,438	0,42	0,48	0,45	0,459	0,435
[0,55. 15]	0,07		0,021	0,097		0,097	0,021

Kurve III. C = 1.

[0,75. 0]	0,35	0,386		0,383		0,384	
[0,80. 2]	0,63	0,7	0,6	0,75	0,85	0,73	0,73
[0,85. 6]	0,03	— 0,3	— 0,1	0,00	— 0,1	— 0,15	— 0,1
[0,90. 8]	0,18	0,01	0,03	0,17	0,02	0,09	0,03
[0,95. 10]	0,08		— 0,06	— 0,02		— 0,02	— 0,06
[1,00. 11]	1,00	1,1	0,8	1,1	1,0	1,1	0,9

Kurve IV. C = 3.

[0,85. 0]	0,39	0,39		0,39		0,39	
[0,90. 1]	0,38	0,24	0,32	0,34	0,31	0,29	0,315

		berechnet	beobachtet + (+)	beobachtet + (—)	beobachtet — (+)	beobachtet — (—)	+	—
[0,95.	3]	0,066	0,06	0,12	0,1	0,15	0,08	0,135
[1,00.	3]	0,83	0,86	0,87	0,87	0,91	0,865	0,89
[1,05.	4]	0,3	0,29	0,39	0,33	0,32	0,31	0,355
[1,10.	4]	0,62	0,61	0,59	0,66	0,61	0,635	0,60
[1,15.	4]	0,87	0,85	0,79	0,97	0,82	0,82	0,805
[1,20.	5]	0,13	0,09	0,15	0,22	0,1	0,155	0,125
[1,25.	5]	0,44		0,32	0,4		0,4	0,32
[1,30.	5]	0,84	0,92	0,71	0,95	0,83	0,935	0,77

Kurve V. $C = 4$.

[0,90.	0]	0,1	0,1		0,08		0,09	
[0,95.	2]	0,16	0,13	0,21	0,26	0,21	0,19	0,21
[1,00.	2]	0,88	0,86	0,89	0,9	0,91	0,88	0,90
[1,05.	3]	0,13	0,12	0,1	0,18	0,13	0,15	0,12
[1,10.	3]	0,13	0,1	0,07	0,19	0,1	0,14	0,09
[1,15.	2]	0,95	0,89	0,93	0,97	0,91	0,93	0,92
[1,20.	2]	0,62	0,58	0,53	0,49	0,53	0,50	0,53
[1,25.	2]	0,18	0,07	0,07	0,11	0,07	0,09	0,07
[1,30.	1]	0,62	0,5	0,4	0,49	0,43	0,5	0,42
[1,35.	0]	0,96		0,47	0,62		0,62	0,47
[1,40.	0]	0,14		— 0,44	— 0,06		— 0,06	— 0,44

Kurve VI. $C = 5$.

[0,90.	0]	0,24	0,24		0,25		0,245	
[0,95.	1]	0,58	0,50	0,45	0,49	0,50	0,495	0,475
[1,00.	2]	0,29	0,23	0,25	0,28	0,29	0,256	0,27
[1,05.	2]	0,45	0,37	0,36	0,40	0,37	0,385	0,365
[1,10.	2]	0,13	0,02	— 0,01	0,1	0,03	0,06	0,01
[1,15.	1]	0,12		0,03	0,15		0,15	0,03
[1,15.	0]	0,26	0,18		0,17		0,175	

Wir wollen nun zur Behandlung der dritten Form der Lemniscate übergehen, wo also $a > l$ ist.

Um hier den Kreis auf die Lemniscate abzubilden und die Niveaukurven zu bestimmen, müssen wir folgende Substitution benutzen:

$$z^2 = w^2 \frac{c^4 - l^4}{R^2 c^2 - l^2 w^2}$$

Setzen wir hier $z = \xi + i\eta = \varrho e^{i\varphi}$ und $w = x + iy = re^{ip}$, so ist:

$$\varrho^2 e^{2i\varphi} = r^2 e^{2ip} \frac{c^4 - l^4}{R^2 c^2 - l^2 w^2}$$

$$\frac{e^{-2i\varphi}}{\varrho^2} = \frac{R^2c^2 - l^2r^2e^{2ip}}{r^2e^{2ip}(c^4-l^4)}$$

$$(c^4-l^4)\frac{e^{-2i\varphi}}{\varrho^2} = \frac{R^2c^2}{r^2}e^{2ip} - l^2$$

$$\frac{c^4-l^4}{\varrho^2}(\cos 2\varphi - i\sin 2\varphi) = \frac{R^2c^2}{r^2}(\cos 2p - i\sin 2p) - l^2 \quad \ldots\ldots$$

hieraus folgt nun:

$$\frac{c^4-l^4}{\varrho^2}\sin 2\varphi = \frac{R^2c^2}{r^2}\sin 2p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15.$$

$$\frac{c^4-l^4}{\varrho^2}\cos 2\varphi = \frac{R^2c^2}{r^2}\cos 2p - l^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 16.$$

Mit Hilfe dieser Substitutionen wollen wir nun aus der Gleichung des Kreises die der Lemniscate ableiten, um die Konstante c zu bestimmen. Dazu wollen wir aber noch die Gleichung der Lemniscate etwas umformen. Diese lautet in Polarkoordinaten:

$$\sqrt{l^4 - 2l^2\varrho^2\cos 2\varphi + \varrho^4} = a^2 \quad \text{hieraus folgt nun:}$$

$$\varrho^4 - 2l^2\varrho^2\cos 2\varphi + l^4 - a^4 = 0$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $a^4 - l^4$, so ist:

$$\varrho^4(a^4-l^4) - 2l^2\varrho^2(a^4-l^4) - (a^4-l^4)^2 = 0$$

$$\varrho^4l^4 + 2l^2\varrho^2(a^4-l^4) + (a^4-l^4)^2 = \varrho^4a^4$$

$$l^4 + \frac{2l^2(a^4-l^4)}{\varrho^2} + \frac{(a^4-l^4)^2}{\varrho^4} = a^4$$

Quadrieren und addieren wir nun Gleichungen 15 und 16, so erhalten wir:

$$\frac{(c^4-l^4)^2}{\varrho^4} + \frac{2l^2(c^4-l^4)}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^4 = \frac{R^4c^4}{r^4}$$

Nun lautet die Gleichung des Kreises in Polarkoordinaten $r = R$. Es folgt nun hieraus die Gleichung der Lemniscate:

$$l^4 + 2l^2\frac{c^4-l^4}{\varrho^2}\cos 2\varphi + \frac{(c^4-l^4)^2}{\varrho^4} = c^4$$

Dieses ist dieselbe Gleichung, die wir vorher hatten, es ist nur zu setzen $c = a$. Es ergeben sich demnach folgende Substitutionen für die konforme Abbildung des Kreises auf die Lemniscate aus Gleichungen 15 und 16, wenn wir noch $R = 1$ setzen:

$$\frac{a^2}{r^2}\cos 2p = l^2 + \frac{a^4-l^4}{\varrho^2}\cos 2\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 17.$$

$$\frac{a^2}{r^2}\sin 2p = \frac{a^4-l^4}{\varrho^2}\sin 2\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 18.$$

Aus Gleichungen 17 und 18 folgt: (Siehe Fig. 13), indem die beiden Gleichungen quadriert und dann addiert werden:

19. . . . . $$\frac{a^4}{r^4} = l^4 + 2l^2\frac{a^4-l^4}{\varrho^2}\cos 2\varphi + \frac{(a^4-l^4)^2}{\varrho^4}$$

und durch Division der beiden:

20. . . . . $$\operatorname{tg} 2p = \frac{(a^4-l^4)\sin 2\varphi}{l^2\varrho^2 + (a^4-l^4)\cos 2\varphi}$$

Hieraus folgt nun: Ist $p = 0$ und $r = 1$, so ist auch $\varphi = 0$ und $\varrho = \sqrt{a^2+l^2}$ d. h. der Punkt B entspricht dem Punkt B_1. Ist $p = 0$ und $r = 0$, so ist auch $\varphi = 0$ und $\varrho = 0$, daher entspricht der Mittelpunkt M dem Mittelpunkt M_1.

Wählen wir nun auf der Lemniscate als Einströmungsstellen den Mittelpunkt M_1 und den Randpunkt B_1, so entspricht dieses auf dem Kreise auch dem Mittelpunkt M und dem Randpunkt B. In diesem Falle lautet die Gleichung der Niveaukurven auf dem Kreise $r + \frac{1}{r} - 2\cos p = C$. Hierin haben wir einzusetzen aus Gleichung 19:

$$r = \frac{a\varrho}{\sqrt[4]{l^4\varrho^4 + 2\varrho^2 l^2\cos 2\varphi\,(a^4-l^4) + (a^4-l^4)^2}}$$

Ferner ist $$\cos p = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2p}}\right)}$$

Unter Benutzung von Gleichung 20 ist dann:

$$\cos p = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{l^2\varrho^2 + (a^4-l^4)\cos 2\varphi}{\sqrt{l^4\varrho^4 + 2l^2\varrho^2(a^4-l^4)\cos 2\varphi + (a^4-l^4)^2}}\right)}$$

Setzen wir nun statt r und cos p diese Werte in die obige Gleichung ein, so erhalten wir die Gleichung der Niveaukurven für die Lemniscate. Es lässt sich aber auch sofort übersehen, dass diese Gleichung eine sehr komplizierte Form annehmen wird, mit der sich wenig machen lässt.

Wir wollen daher andere Einströmungsstellen nehmen, um zu einfacheren Gleichungen zu gelangen, und zwar wollen wir dazu die beiden Endpunkte der Achse A_1 und B_1 nehmen. Im Kreise entsprechen diese beiden Punkte auch den beiden Endpunkten A und B des Durchmessers. Es ist in diesem Falle die Gleichung der Niveaukurven für den Kreis (siehe Seite 7):

$$r^2 + 2rR\cos p\,\frac{C+1}{C-1} + R^2 = 0$$

Wir setzen hier R wieder $= 1$ und erhalten dann, indem wir noch der Gleichung eine andere Form geben:

. . . $$(r^2+1)^2\left(\frac{C-1}{C+1}\right)^2 a^2 = 4a^2 r^2 \cos^2 p$$

Aus Gleichung 17 folgt nun weiter:

$$\frac{a^4-l^4}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^2 = \frac{a^2}{r^2}(2\cos^2 p - 1) \text{ und hieraus}$$

$$\frac{a^4-l^4}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^2 + \frac{a^2}{r^2} = \frac{2a^2}{r^2}\cos^2 p, \text{ mit } 2r^4 \text{ multipliziert}$$

$$2r^4\left(\frac{a^4-l^4}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^2 + \frac{a^2}{r^2}\right) = 4a^2r^2\cos^2 p$$

Nun können wir p eliminieren und erhalten:

$$2r^4\left(\frac{a^4-l^4}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^2 + \frac{a^2}{r^2}\right) = (r^2+1)^2\left(\frac{C-1}{C+1}\right)a^2$$

Hierin führen wir den auf voriger Seite angegebenen Wert von r ein, wobei wir noch folgende Abkürzung einführen wollen, wir setzen

$$\sqrt[4]{\frac{(a^4-l^4)^2}{\varrho^4} + 2\frac{l^2(a^4-l^4)}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^4} = u, \text{ so ist}$$

$$r = \frac{a}{u}$$

Dann erhalten wir:

$$\frac{2a^4}{u^4}\left(\frac{a^4-l^4}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^2 + u^2\right) = \left(\frac{C-1}{C+1}\right)^2 a^2\left(\frac{a^2}{u^2}+1\right)^2$$

und hieraus:

$$2a^2\left(\frac{a^4-l^4}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^2 + u^2\right) = \left(\frac{C-1}{C+1}\right)^2\left(a^2+u^2\right)^2$$

Setzen wir nun wieder den Wert von u ein, so erhalten wir:

$$2a^2\left(\frac{a^4-l^4}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^2 + \sqrt{\frac{(a^4-l^4)^2}{\varrho^4} + 2l^2\frac{(a^4-l^4)}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^4}\right)$$

$$= \left(\frac{C-1}{C+1}\right)^2\left(a^2 + \sqrt{\frac{(a^4-l^4)^2}{\varrho^4} + 2l^2\frac{(a^4-l^4)}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^4}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 21.$$

als Gleichung der Niveaukurven der Lemniscate.

Aus dieser Gleichung 21 folgt nun für $C = 1$:

$$\left(\frac{a^4-l^4}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^4\right)^2 = \frac{(a^4-l^4)^2}{\varrho^4} + \frac{2l^2(a^4-l^4)}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^4$$

und $\qquad \cos^2 2\varphi = 1 \qquad \cos 2\varphi = \pm 1.$

Daraus folgt $2\varphi = 0$ und $2\varphi = \pi$. Nun haben wir schon gefunden, dass für $C = 1 \quad p = \frac{\pi}{2}$ ist. Aus Gleichung 18 und aus den gemachten Annahmen folgt, dass für $p = \frac{\pi}{2}$ auch $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ist, und wir finden als Niveaukurve für diesen Fall die ηAchse der Lemniscate, dasselbe, was wir auch beim Kreise gefunden haben. Es entspricht demnach die yAchse des Kreises der ηAchse der Lemniscate.

Es folgt nun weiter aus der Form der Gleichung 21, dass die Kurve symmetrisch zu den beiden Achsen liegen muss, es muss daher die ηAchse das ganze Kurvensystem der Lemniscate in zwei kongruente Teile teilen.

Für $\varphi = 0$ wird aus Gleichung 21, wenn wir noch setzen:

$$\frac{a^4-l^4}{\varrho^2}+l^2 = x \quad \text{und} \quad \frac{C-1}{C+1} = m$$

$$\frac{1}{m^2}(a^2 \pm x)^2 = 2a^2x \pm 2a^2x$$

Nun folgt aus Gleichung 19:

$$\sqrt{\frac{(a^4-l^4)^2}{\varrho^4}+2\frac{l^2(a^4-l^4)}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^4} = \frac{a^2}{r^2},$$

dass die Wurzel nicht negativ genommen werden kann, da wir sonst ein imaginäres r erhalten. Demnach können wir nur folgende Gleichung haben:

$$(a^2+x)^2 = 4a^2m^2x$$

$$x = a^2[2m^2-1 \pm \sqrt{-1+(2m^2-1)^2}]$$

Setzen wir für m seinen Wert ein, so erhalten wir:

$$x = a^2\left[2\left(\frac{C+1}{C-1}\right)^2 - 1 \pm 4\frac{C+1}{(C-1)^2}\sqrt{C}\right]$$

$$= \frac{a^2}{(C-1)^2}[C+1 \pm 2\sqrt{C}]^2$$

Nun ist

$$\varrho^2 = \frac{a^4-l^4}{x-l^2} \quad \text{und}$$

$$\varrho^2 = \frac{(a^4-l^4)(C-1)^2}{a^2(C+1 \pm 2\sqrt{C})^2 - l^2(C-1)^2}$$

Es darf nun $\varrho^2 \leqq a^2+l^2$ sein, daraus folgt:

$$(a^2-l^2)(C-1)^2 \leqq a^2(C+1 \pm 2\sqrt{C})^2 - l^2(C-1)^2$$

$$C-1 \leqq C+1 \pm 2\sqrt{C}$$

$$-1 \leqq \pm\sqrt{C}$$

Ist $\sqrt{C}$ negativ, so erhalten wir $\sqrt{C} < 1$. Dieses geht aber nicht, da $C = 1$ der Grenzfall ist. Wir erhalten daher zur Bestimmung derjenigen Punkte, in welchen die Niveaukurven die ξAchse schneiden:

$$\varrho = \sqrt{\frac{(a^4-l^4)(C-1)^2}{a^2(C+1+2\sqrt{C})^2 - l^2(C-1)^2}}$$

Wir wollen nun denjenigen Wert von C bestimmen, für den die Kurve durch den Brennpunkt geht, also $\varrho^2 = l^2$, dann haben wir:

$$l^2a^2(C+1+2\sqrt{C})^2 - l^2(C-1)^2 = (a^4-l^4)(C-1)^2$$

$$l(C+1+2\sqrt{C}) = a(C-1)$$

$$C^2 - 2C\frac{l^2+a^2}{(l-a)^2} = -\frac{(l+a)^2}{(l-a)^2}$$

$$C = \left(\frac{a+l}{a-l}\right)^2$$

Wir wollen nun diejenigen Punkte bestimmen, in denen die Niveaukurven die Lemniscate schneiden. Aus der Gleichung der Lemniscate, wie wir sie vorher umgeformt haben, folgt:

$$l^4 + 2l^2\cos 2\varphi\frac{a^4-l^4}{\varrho^2} + \frac{(a^4-l^4)^2}{\varrho^4} = a^4$$

$$\cos 2\varphi\frac{a^4-l^4}{\varrho^2} + l^2 = \frac{l^4+a^4-\frac{(a^4-l^4)^2}{\varrho^4}}{2l^2}$$

Führen wir diese beiden Werte in die Gleichung 21 der Niveaukurven ein:

$$4a^4\left(\frac{C-1}{C+1}\right)^2 = a^2\frac{l^4+a^4-\frac{(a^4-l^4)^2}{\varrho^4}}{l^2} + 2a^4$$

$$\frac{(a^4-l^4)^2}{\varrho^4} = (l^2+a^2)^2 - 4a^2l^2\left(\frac{C-1}{C+1}\right)^2$$

$$\varrho = \sqrt[4]{\frac{(a^4-l^4)^2}{(l^2+a^2)^2-4a^2l^2\left(\frac{C-1}{C+2}\right)^2}}$$

Ist $C = 1$, so erhalten wir $\varrho = \sqrt{a^2-l^2}$, was mit dem früher Gefundenen stimmt.

Bei der Berechnung der numerischen Werte der Kurve verfahre ich ebenso wie vorbin, indem ich zuerst aus den oben abgeleiteten Formeln die Werte finde, in denen die Kurven die ξAchse und die Lemniscate schneiden. Die übrigen Werte bestimme ich unter Benutzung der auf Seite 21 abgeleiteten Substitutionen:

$$\frac{(a^4-l^4)^2}{\varrho^4} + 2\cos 2\varphi l^2\frac{a^4-l^4}{\varrho^2} + l^4 = u^2, \text{ hieraus folgte}$$

$$2a^2\left(\frac{a^4-l^4}{\varrho^2}\cos 2\varphi + l^2 + u^2\right) = \left(\frac{C-1}{C+1}\right)^2(a^2+u^2)^2$$

Ist nun ϱ gegeben, so lässt sich aus den beiden Gleichungen leicht u und φ bestimmen und ebenso, wenn φ gegeben ist, der Radius ϱ.

Die Beobachtung führte ich genau so aus wie bei den anderen beiden Lemniscaten. Es kommt nur noch hier hinzu, dass ich auch Punkte auf beiden Seiten der ηAchse untersuchen musste. Alle übrigen Bezeichnungen sind auch so geblieben wie vorher.*)

Der leichteren Berechnung wegen wählte ich von den drei Formen der Lemniscate 3. diejenige, bei der $a = \sqrt{2}$ ist. (Siehe Tafel 3.) $MF = 1 = 1 = 10$ cm. $MA = 17{,}3205$ cm. und $MB = 10$ cm.

Kurve I. $C = 1$.

	berechnet	beobachtet +		beobachtet —		+	—
		+	—	+	—		
[0,1. 0]	0,1	0,1		0,106		0,103	
[0,2. 10]	2	2,08	1,88	2,16	2,08	2,12	1,98
[0,4. 11]	1	1	1,14	1,08	1,14	1,04	1,07
[0,6. 11]	1	1,04	0,94	1,02	0,94	1,03	1,00
[0,8. 11,5]	0,5	0,53	0,43	0,66	0,43	0,59	0,46
[1,0. 11,5]	0,5	0,52	0,46	0,59	0,46	0,55	0,47

Kurve II. $C = 2$.

linke Seite der ηAchse.

[0,2. 0]	0,12	0,10		0,18		0,14	
[0,3. 5]	0,96	0,88	0,88	0,63	0,52	0,755	0,69
[0,4. 7]	0,65	0,40	0,70	0,44	0,47	0,42	0,585
[0,6. 9]	0,11	0,10	0,17	0,06	0,15	0,08	0,16
[0,8. 9]	0,78	0,74	0,80	0,75	0,75	0,745	0,775
[1,0. 10]	0,21		0,28	0,24		0,24	0,28

rechte Seite der ηAchse.

[0,2. 0]	0,12	0,19		0,17		0,18	
[0,3. 5]	0,96	0,61	0,50	1,14	0,91	0,875	0,705
[0,4. 7]	0,65	0,58	0,43	0,84	0,71	0,71	0,57
[0,6. 9]	0,11	0,09	— 0,07	0,22	0,15	0,155	0,04
[0,8. 9]	0,78	0,80	0,67	0,92	0,80	0,86	0,735
[1,0. 10]	0,21		0,08	0,29		0,29	0,08

Kurve III. $C = 4$.

linke Seite der ηAchse.

[0,4. 0]	0,20	0,10		0,18		0,14	
[0,5. 4]	0,22	0,32	0,48	0,2	0,32	0,26	0,40

*) Es ist hier jeder Quadrant in 12 gleiche Teile geteilt, welche vom 0Punkt aus die Zahlen 1, 2, .. führen, so dass ein solcher Teil auch Einheit der Bogenlänge ist. Dann habe ich noch jeden dieser Teile halbiert und diesen Halbierungsradius so bezeichnet, dass ich zu der Bezeichnung des nächst niedrigsten Radius noch 0,5 hinzufügte. Diese Teilung ist nötig bei den Kurven, die am Ende der Lemniscate liegen. Ferner sind für alle Kurven die Schnittpunkte derselben mit Kreisen betrachtet. Bei der Kurve I ist auf jeder Seite der ηAchse in gleicher Entfernung von ihr ein Punkt beobachtet worden.

	berechnet	beobachtet +		beobachtet —		+	—
		+	—	+	—		
[0,6. 5]	0,83	0,92	1,0	0,81	0,92	0,865	0,96
[0,7. 6]	0,76	0,80	0,92	0,77	0,84	0,785	0,88
[0,8. 7]	0,43	0,54	0,63	0,41	0,57	0,475	0,60
[0,9. 7]	0,91	0,96	1,0	0,89	0,98	0,925	0,99
[1,0. 8]	0,29		0,38	0,27		0,27	0,38

rechte Seite der ηAchse

[0,4. 0]	0,20	0,12	0	0,19		0,155	
[0,5. 4]	0,22	0,39	0,43	0,36	0,28	0,375	0,355
[0,6. 5]	0,83	0,86	0,88	0,81	0,85	0,835	0,865
[0,7. 6]	0,76	0,88	0,87	0,84	0,84	0,86	0,855
[0,8. 7]	0,43	0,54	0,52	0,47	0,42	0,5	0,47
[0,9. 7]	0,91	0,94	0,95	0,94	0,91	0,94	0,93
[1,0. 8]	0,29		0,29	0,33		0,33	0,29

Kurve IV. C = 9

linke Seite der ηAchse.

[0,6. 0]	0,5466	0,57		0,50		0,535	
[0,7. 2]	0,52	0,36	0,42	0,50	0,65	0,43	0,535
[0,8. 4]	0,21	0,2	0,17	0,25	0,22	0,225	0,195
[0,9. 5]	0,17	0,12	0,15	0,15	0,21	0,135	0,18
[1,0. 5]	0,84	0,78	0,83	0,80	0,86	0,79	0,845
[1,1. 6]	0,34	0,29	0,34	0,31	0,4	0,30	0,37
[1,2. 6]	0,74		0,73	0,70		0,70	0,73

rechte Seite der ηAchse.

[0,60. 0]	0,5466	0,44		0,51		0,475	
[0,7. 2]	0,52	0,77	0,77	0,51	0,54	0,64	0,655
[0,8. 4]	0,21	0,39	0,4	0,25	0,24	0,32	0,32
[0,9. 5]	0,17	0,23	0,32	0,19	0,2	0,21	0,26
[1,0. 5]	0,84	0,92	0,95	0,8	0,83	0,86	0,89
[1,1. 6]	0,34	0,4	0,44	0,26	0,34	0,33	0,39
[1,2. 6]	0,74		0,84	0,83		0,83	0,83

Kurve V. C = 33,96

linke Seite der ηAchse.

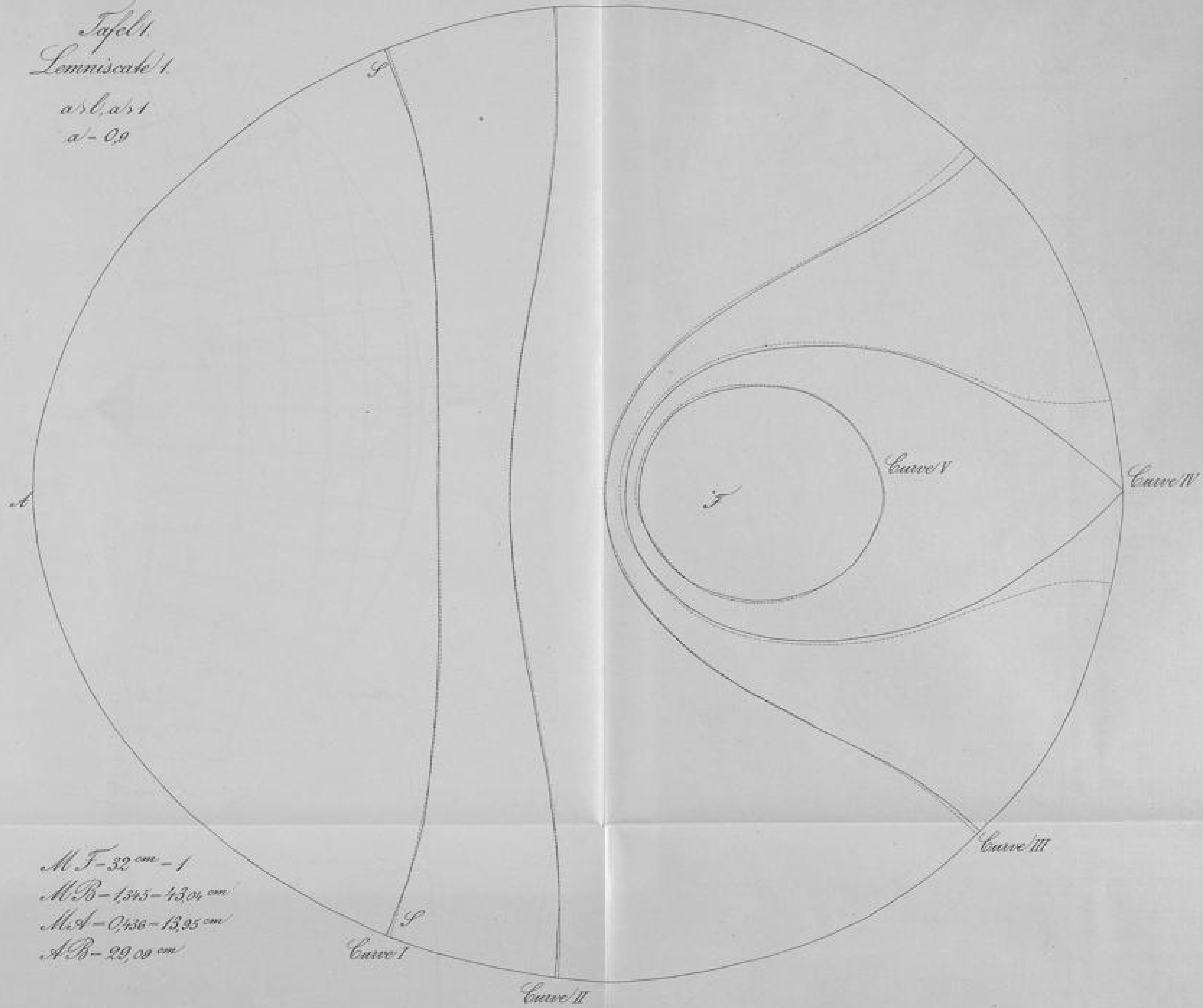
[1,0. 0]	0	— 0,06		— 0,075		— 0,067	
[1,1. 2]	0,44	0,42	0,4	0,49	0,49	0,455	0,445
[1,2. 3]	0,26	0,34	0,26	0,33	0,33	0,335	0,295
[1,3. 3]	0,79		0,77	0,83	0,82	0,83	0,795
[1,4. 4]	0,18	0,21	0,16	0,25		0,23	0,16

	berechnet	+		—			
		+	—	+	—	+	—
				beobachtet			
		rechte Seite der ηAchse.					
[1,0. 0]	0	— 0,09		— 0,015		— 0,052	
[1,1. 2]	0,44	0,49	0,56	0,32	0,39	0,40	0,47
[1,2. 3]	0,26	0,28	0,38	0,16	0,25	0,22	0,31
[1,3. 3]	0,79	0,79	0,88	0,7	0,78	0,74	0,83
[1,4. 4]	0,18		0,28	0,09		0,09	0,28
		Kurve VI. C = 100					
		rechte Seite.					
[1,2. 0]	0,286	0,29		0,25		0,275	
[1,3. 0]	0,51	0,52	0,57	0,42	0,43	0,47	0,48
[1,4. 2]	0,19	0,24	0,23	0,17	0,12	0,205	0,175
[1,5. 2]	0,57	0,62	0,59	0,58	0,56	0,60	0,575
[1,6. 2]	0,81		0,91	0,80		0,80	0,91
		linke Seite der ηAchse.					
[1,2. 0]	0,286	0,18		0,35		0,265	
[1,3. 0]	0,51	0,56	0,55	0,54	0,56	0,55	0,555
[1,4. 2]	0,19	0,26	0,27	0,22	0,23	0,24	0,25
[1,5. 2]	0,57	0,64	0,62	0,61	0,58	0,625	0,60
[1,6. 2]	0,81		0,90	0,78		0,78	0,90

In den Tafeln bedeuten die ausgezogenen Linien die berechneten, die punktierten die beobachteten Kurven.

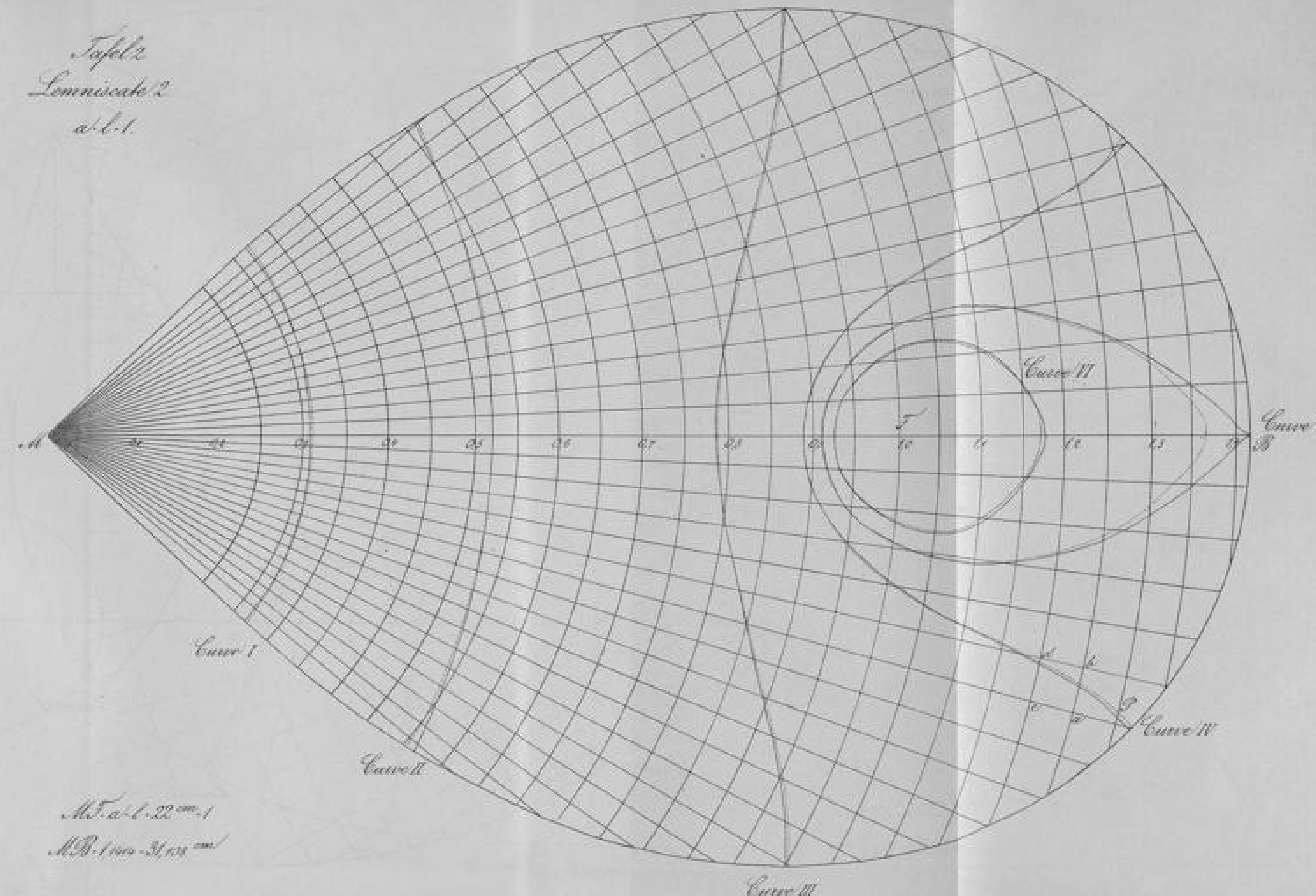
Tafel 1.
Lemniscate 1.

a > b, a > 1
a/ – 0,9



MF – 32 cm – 1
MB – 1,345 – 43,04 cm
MA – 0,436 – 13,95 cm
AB – 29,09 cm

Tafel 2
Lemniscate 2
a = l = 1



MT = a = l = 22 cm = 1
MB = 1,414 = 31,108 cm

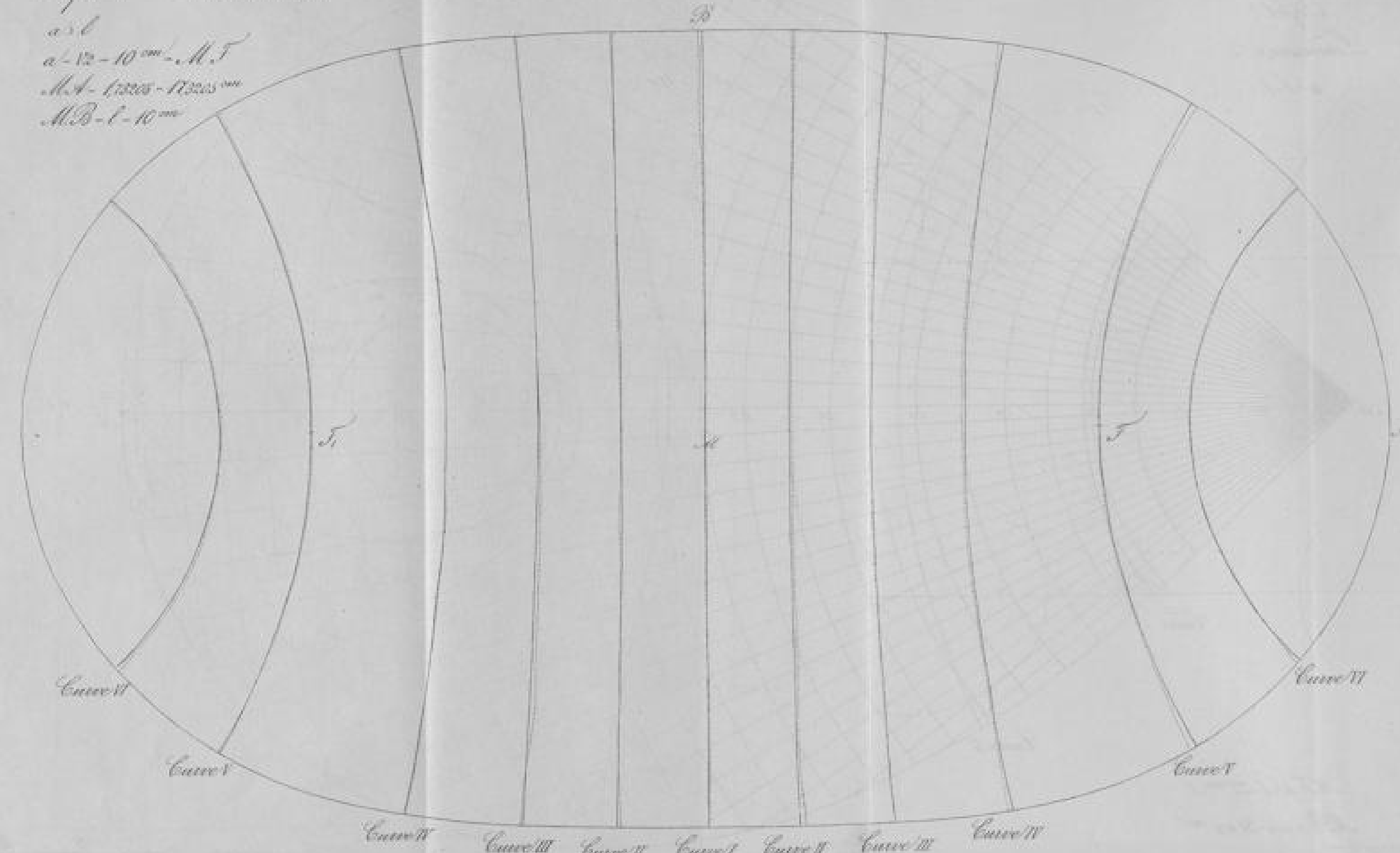
Tafel 3. Lemniscate 3.

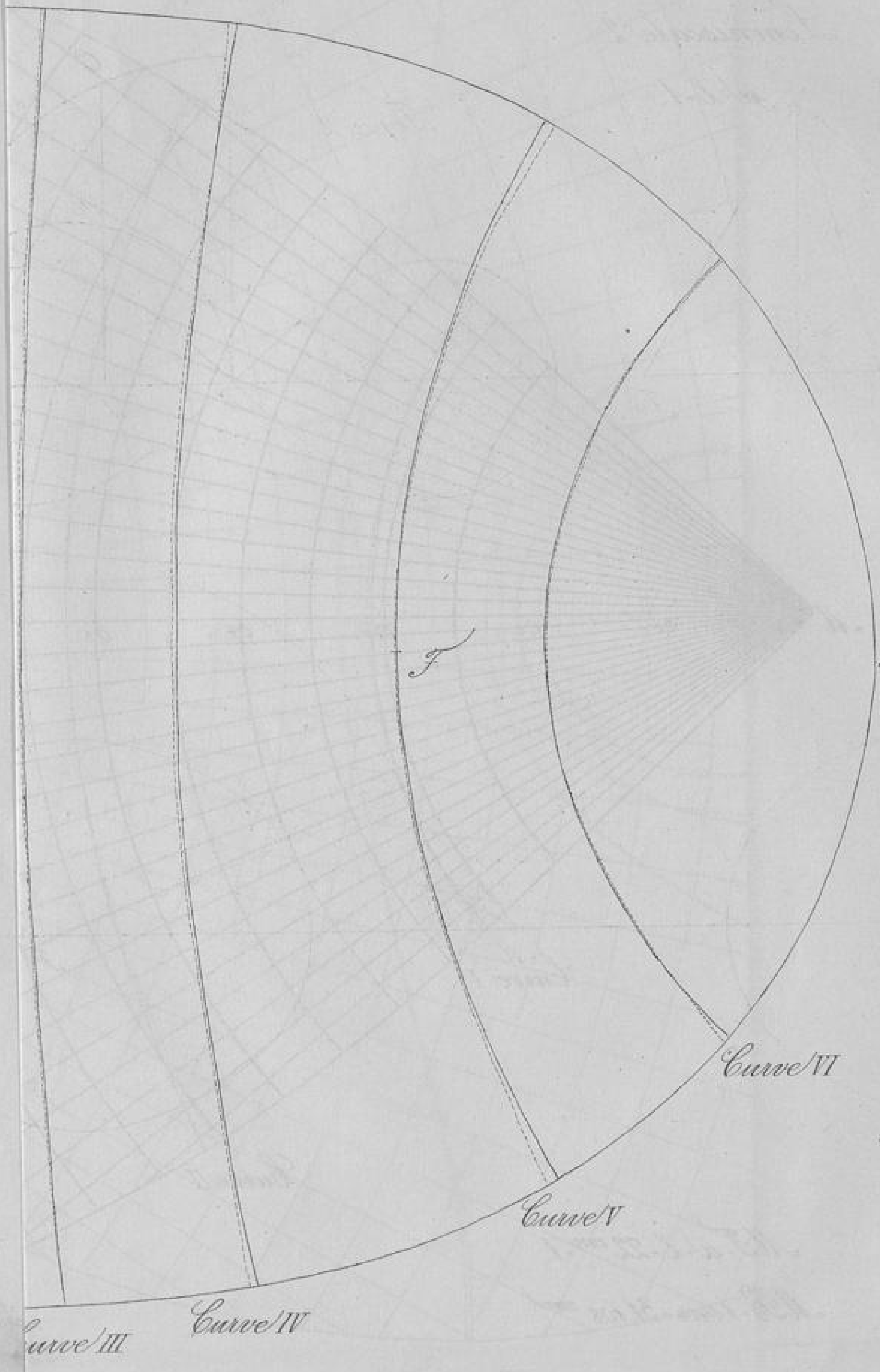
a > b

a - 12 - 10 cm - M T

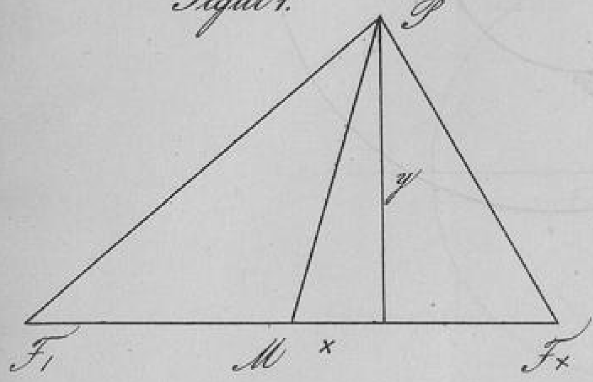
M A - 1,7205 - 17,205 cm

M B - b - 10 cm

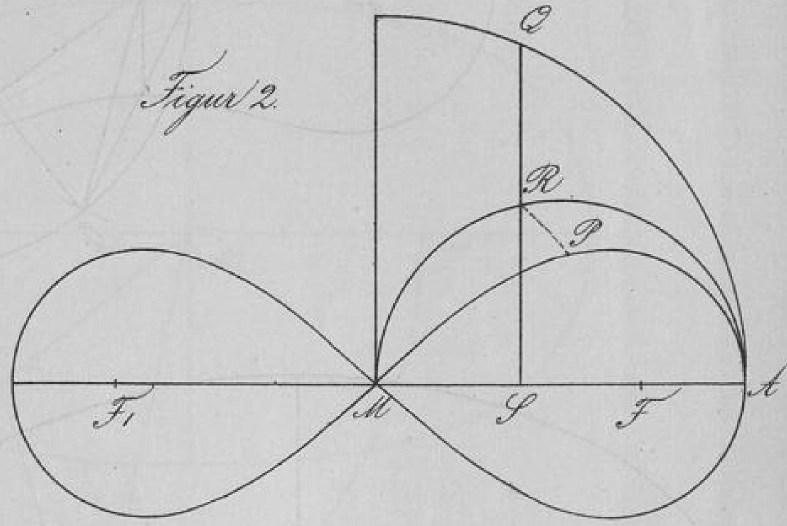



F
A
Curve VI
Curve V
Curve IV
Curve III

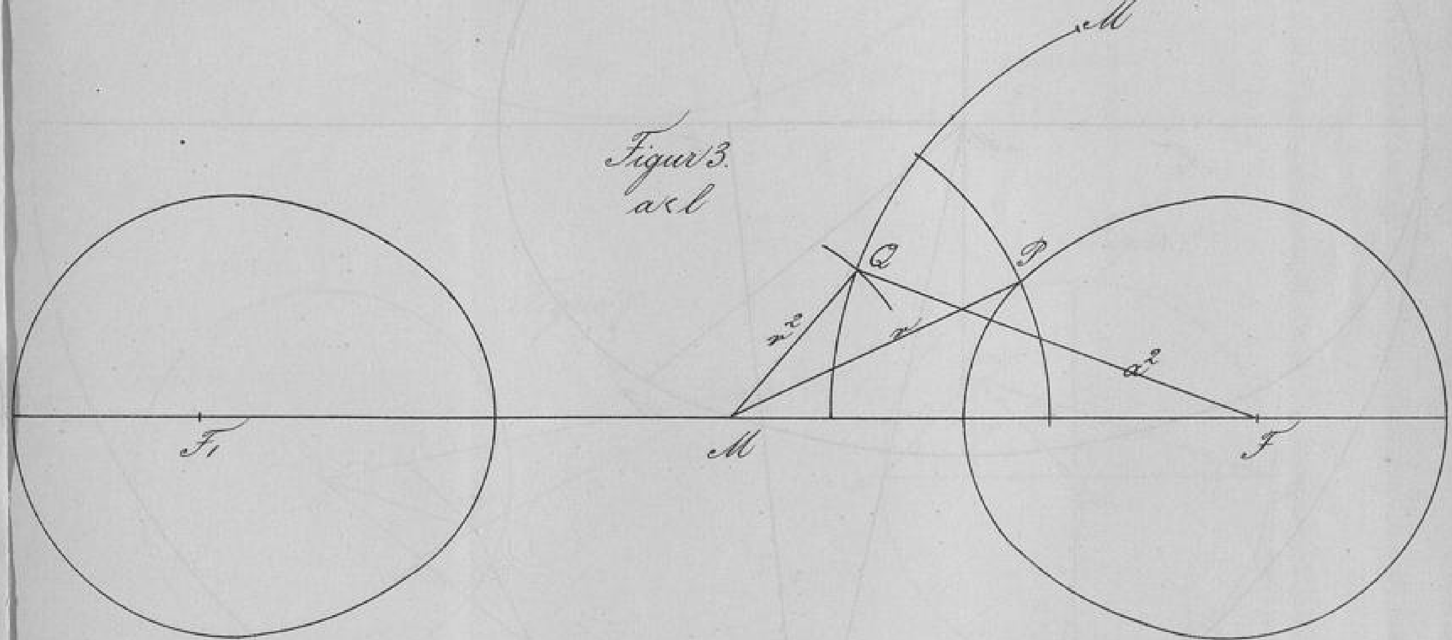
Figur 1.



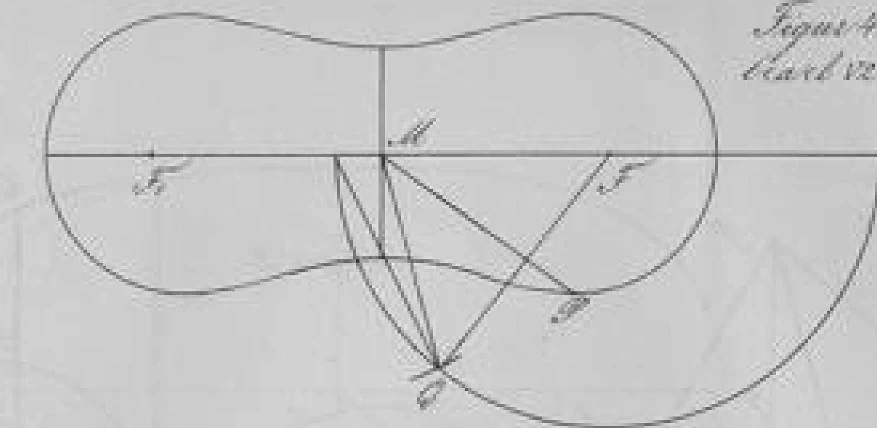
Figur 2.



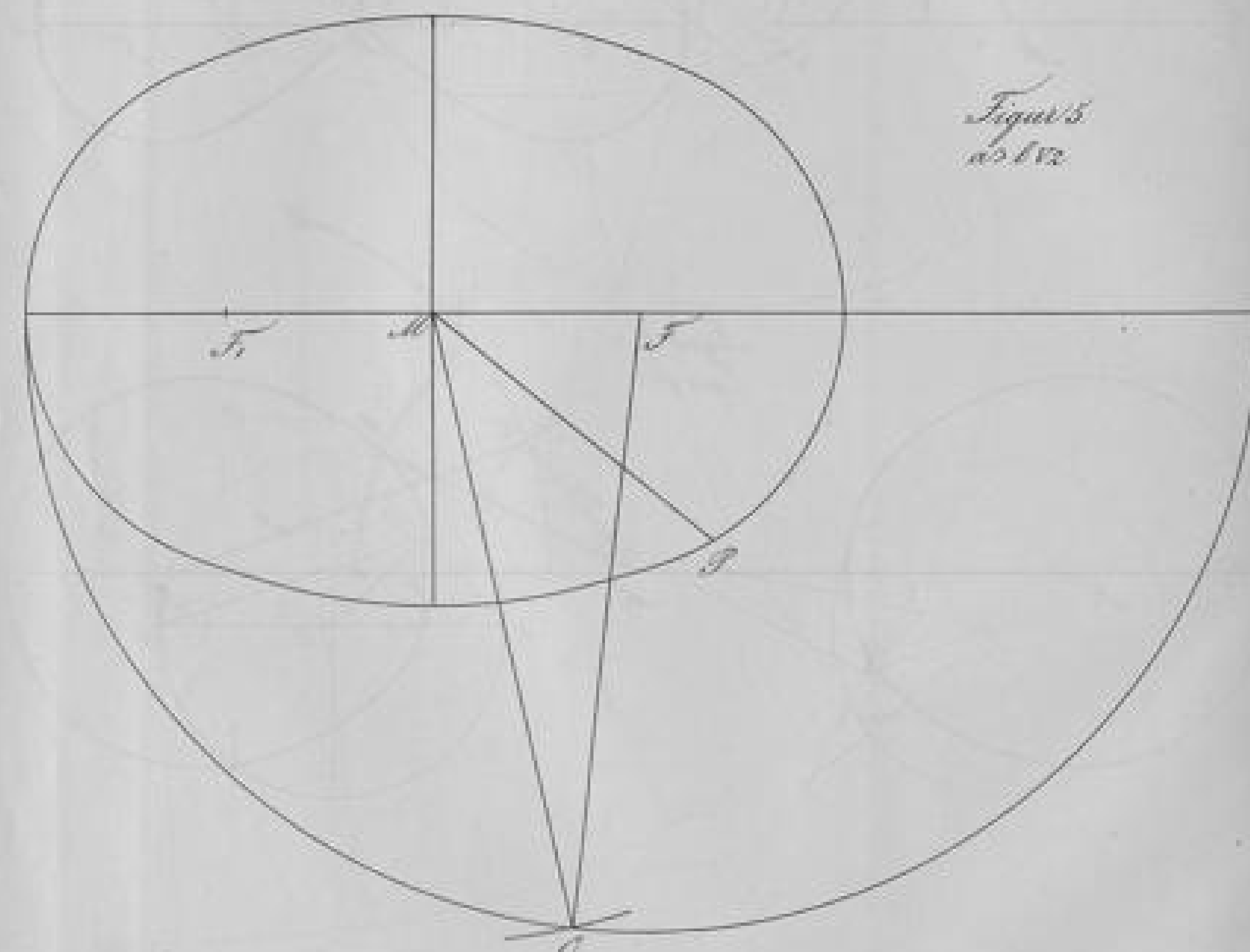
Figur 3.
$a < b$



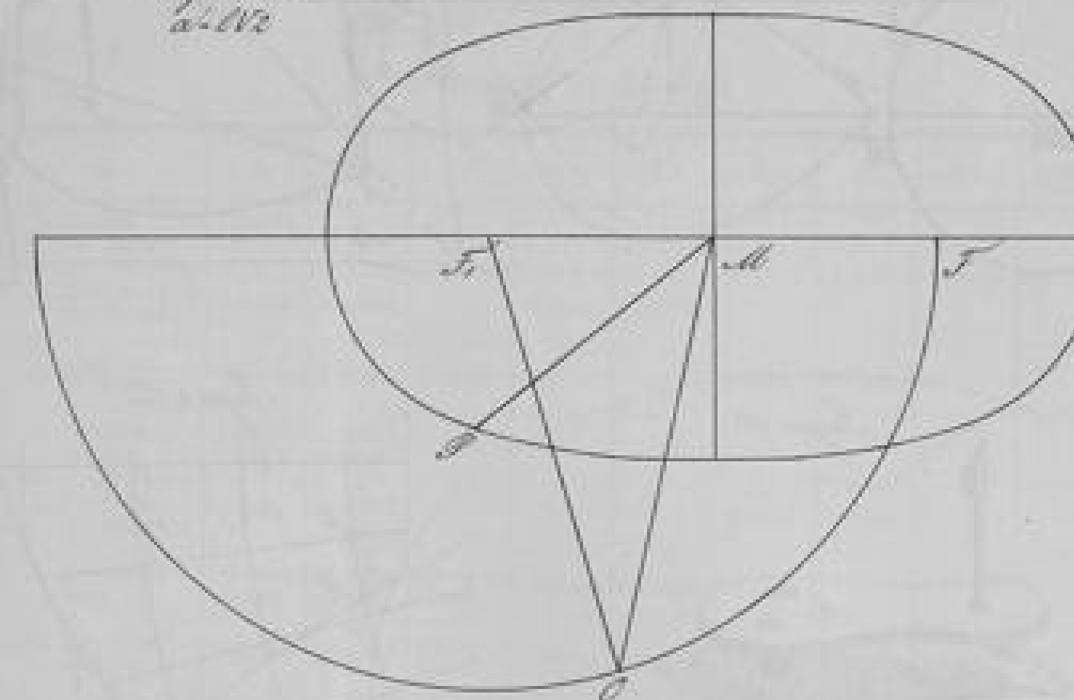
Figur 4
b<a<b√2



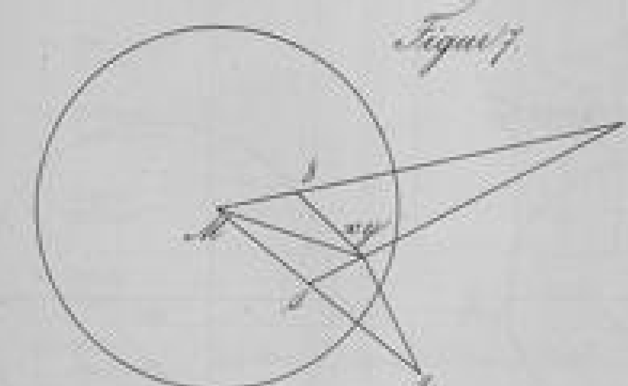
Figur 5
a>b√2



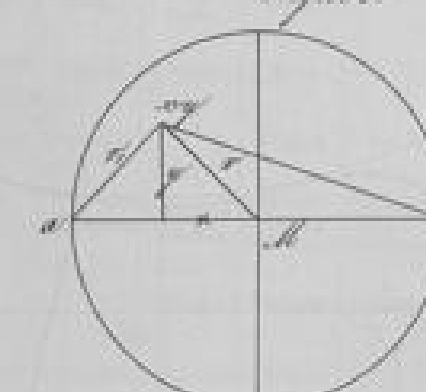
Figur 6.
a=b√2



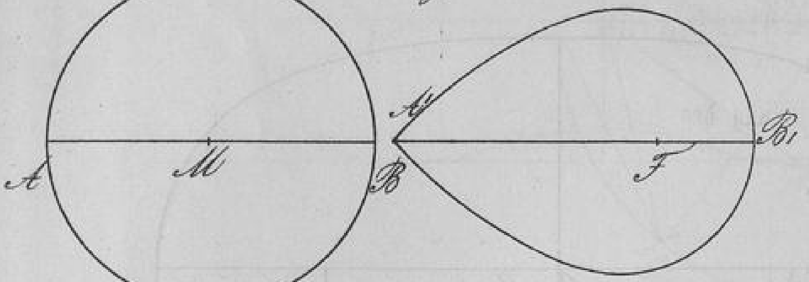
Figur 7.



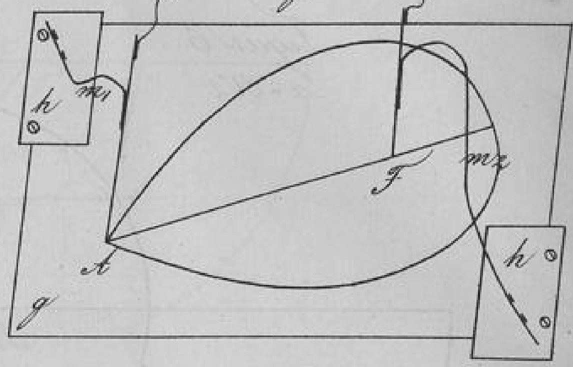
Figur 8.



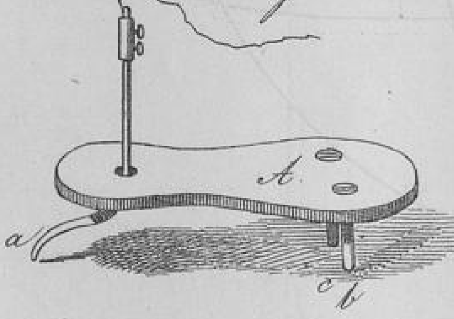
Figur 9.



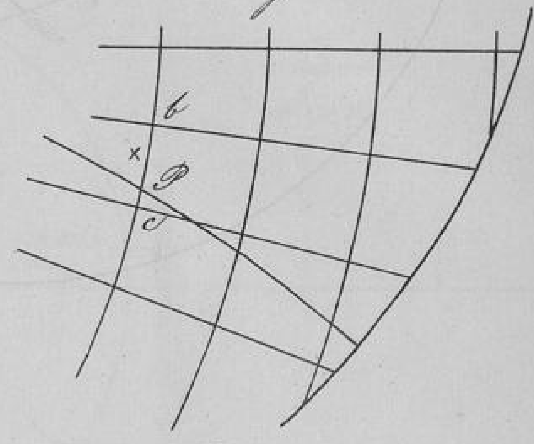
Figur 10.



Figur 11.



Figur 12.



Figur 13.