In ähnlicher Weise lässt sich beweisen, dass auch das Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen die Zentralprojektion eines Kreises, d. h. ein Kegelschnitt ist.

Es lassen sich somit die projektiven Eigenschaften des Kreises, insbesondere auch seine polaren, unmittelbar auf die Erzeugnisse projektiver Strahlenbüschel und Punktreihen übertragen. Zwischen diesen Erzeugnissen und den Zentralprojektionen des Kreises, die als die ebenen Schnitte des geraden Kreiskegels bekannt sind, kann daher kein wesentlicher Unterschied bestehen, d. h. die Erzeugnisse projektiver Strahlenbüschel und Punktreihen sind Kurven II Grads: Kreis Ellipse, Parabel, Hyperbel.

Aus der Uebertragung der projektiven Eigenschaften des Kreises auf die Kegelschnitte seien die folgenden Sätze hervorgehoben:

Die Punkte eines Kegelschnitts werden von 2 festen Punkten desselben durch projektive Strahlenbüschel projiziert.

Die Tangenten eines Kegelschnitts schneiden 2 feste Tangenten desselben in projektiven Punktreihen.

Anwendungen.

Zum Schluss seien einige wertvolle Anwendungen gezeigt:

1. Anwendung.

Von einer Parabel sind zwei Tangenten T_1 und T_2 mit ihren Berührungspunkten b_1 und a_2 gegeben. Man soll die Parabel konstruieren.

Auflösung.

Eine Parabel wird von der unendlich fernen Geraden berührt. Da sämtliche Parabeltangenten auf T_1 und T_2 projektive Punktreihen erzeugen, so müssen diese Punktreihen ähnlich werden, weil ihre unendlich fernen Punkte einander entsprechen, denn es ist dann

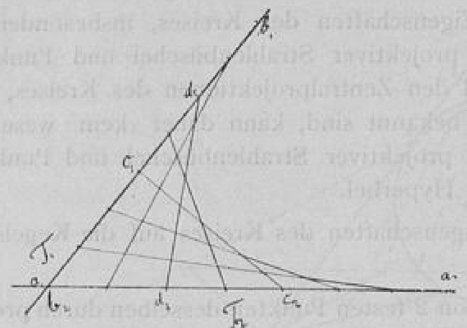
$(a_1\, b_1\, c_1\, \infty) = (a_2\, b_2\, c_2\, \infty)$, woraus $\frac{c_1\, a_1}{c_1\, b_1} : \frac{\infty\, a_1}{\infty\, b_1} = \frac{c_2\, a_2}{c_2\, b_2} : \frac{\infty\, a_2}{\infty\, b_2}$, oder

$\frac{a_1\, c_1}{b_1\, c_1} : \frac{a_1\, \infty}{b_1\, \infty} = \frac{a_2\, c_2}{b_2\, c_2} : \frac{a_2\, \infty}{b_2\, \infty}$. Die Strecken $a_1\, \infty$, $b_1\, \infty$, $a_2\, \infty$ und $c_2\, \infty$ sind einander gleich, da sie sich nur durch eine endliche Grösse unterscheiden, somit folgt:

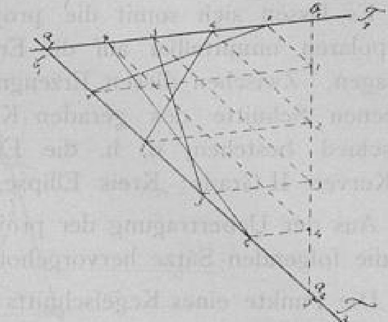
$$\frac{a_1\, c_1}{b_1\, c_1} = \frac{a_2\, c_2}{b_2\, c_2}, \text{ und ebenso: } \frac{a_1\, d_1}{b_1\, d_1} = \frac{a_2\, d_2}{b_2\, d_2}, \text{ u. s. f.}$$

Man erzeugt daher auf T_1 und T_2 ähnliche Punktreihen, in denen a_1 und a_2, b_1 und b_2 einander entsprechen. Dies geschieht durch Einteilen von $a_1\, b_1$ und $a_2\, b_2$ in dieselbe Anzahl gleicher Teile, oder dadurch dass man die Punkte von T_2 durch Parallelen mit T_1

auf $a_2\,b_1$ überträgt und dann von hier wieder durch Parallelen mit T_2 auf T_1. Die Verbindungslinien der entsprechenden Punkte von T_1 und T_2 „umhüllen“ die Parabel.



Figur 53.



Figur 54.

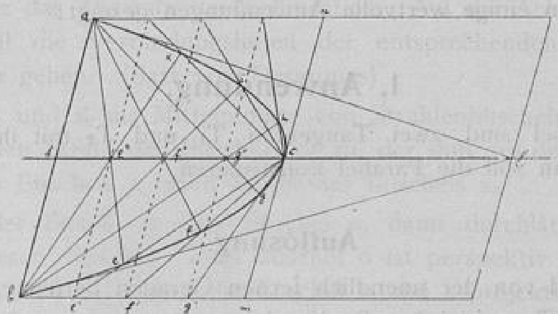
2. Anwendung.

Kegelschnitte aus zugeordneten Durchmessern.

Parabel aus einer Sehne ab und ihrem zugeordneten Durchmesser cd.

Auflösung.

e, f, g, h, i, k seien Punkte der gesuchten Parabel. Die Büschel a, b e f g c und c, b e f g c sind projektiv. Sie werden geschnitten von c d in d, e'', f'', g'' und von der Parallelen durch b zu cd in b, e', f', g'. (Die parallelen Träger gehen durch den unendlich fernen Punkt der Parabel.)



Figur 55.

Die Punktreihen b e' f' g' und d e'' f'' g'' sind somit projektiv, und weil ihre unendlich fernen Punkte einander entsprechen, so sind die Reihen ähnlich. Nun sind aber im Schnittpunkt der Träger entsprechende Punkte vereinigt, folglich sind die Punktreihen perspektiv. Da ferner die Parabel-Tangente in c ∥ a b ist und, wie a b auch, 2 entsprechende Punkte der Reihen verbindet, so sind alle Verbindungslinien entsprechender Punkte der 2 Reihen parallel. Entsprechendes findet man für die Büschel b, h i k a und c, h i k a.

Man braucht demnach nur das Parallellogramm a b m n zu zeichnen und durch Parallelen zu a b zu schneiden, dann die aus der Figur ersichtliche Konstruktion zu vollenden. Dem Strahl c a des Büschels c entspricht die Tangente in a, d. h. der Strahl cl, ebenso dem Strahl c b des Büschels c die Tangente in b, d. h. der Strahl b l, wobei c l = c d.

Für die Ellipse und die Hyperbel erhält man durch ähnliche Ueberlegungen ganz entsprechende Konstruktionen aus zugeordneten Durchmessern.

3. Anwendung.

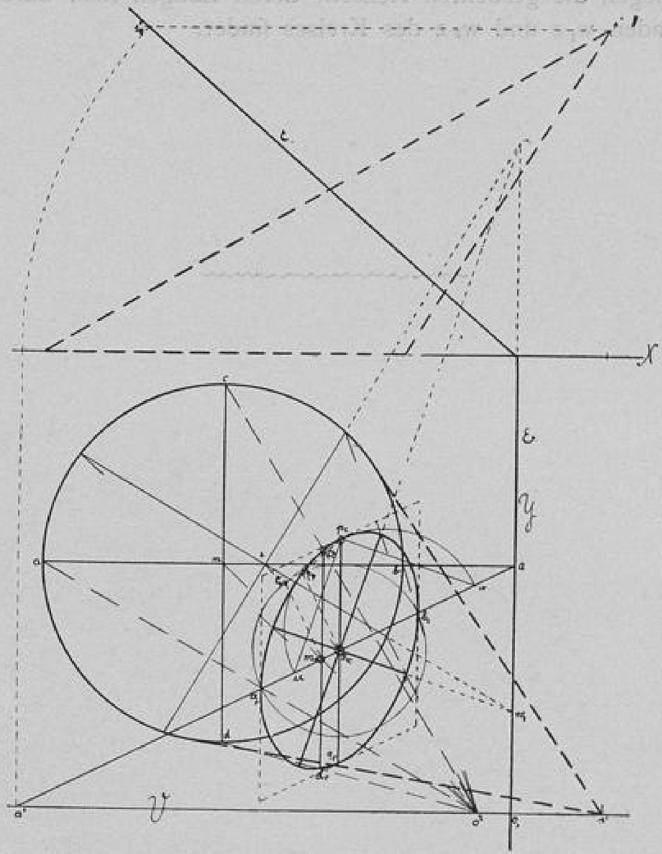
Ebene Schnitte des Kegels (Zylinders) II Grads.

Die Perspektive lässt sich mit Vorteil auch bei den Aufgaben über ebene Schnitte des Kegels II Grads, d. h. des Kegels, dessen Leitlinie ein Kegelschnitt ist, anwenden, insbesondere bei der Bestimmung der wahren Grösse solcher Schnitte. Diese sind als Zentralprojektionen von Kegelschnitten wieder Kegelschnitte, was unmittelbar einleuchtet, wenn man die Kegelschnitte als Erzeugnisse projektiver Strahlenbüschel auffasst.

Gegeben sei ein schiefer Kreiskegel mit der Spitze (s', s'') und dem in P_1 liegenden Kreis m als Grundfläche. Die schneidende Ebene E sei der Einfachheit halber $\perp P_2$ angenommen. Man soll die Schnittlinie in wahrer Grösse konstruieren.

Auflösung.

Man projiziert zunächst s auf die Ebenen E und P_1, und zwar in Richtung ihrer Falllinien in die Punkte s_e und s_h (letzterer ist in der Figur weggelassen) und legt s_e mit der



Figur 56.

Ebene E in P_1 um in die Lage o''. Dann ist $o'' o_x s'$ die Hauptvertikale und E_1 die Achse Y der Perspektive. Trägt man noch $o'' o^I = s'' s_0''$ auf V gegen o_x hin ab, so ist o^I der Mittelpunkt der perspektiven Kollineation, in die der ges. Kegelschnitt mit dem Kreis m kommen muss. Nun zieht man an den Kreis 2 zu Y ∥ Tangenten. Der Berührungsdurchmesser ab hat die Gerade $a_c b_c$ zum Bild. Durch Strahlen aus o^I erhält man auf $a_c b_c$ die Bilder der Punkte a, b, m. Die Bilder der Kreistangenten sind wieder ∥ Y und berühren den gesuchten Kegelschnitt in a_c und b_c, so dass man in $a_c b_c$ einen Durchmesser desselben hat. Das Bild des zu ab zugeordneten Kreisdurchmessers cd ist die Parallele zu Y durch m_c. Seine Länge ist ebenfalls leicht zu bestimmen, wie auch die Bilder und Längen aller zu cd parallelen Sehnen des Kreises, wodurch sich der gesuchte Kegelschnitt vollends leicht und rasch ergibt. Um seine Achsen für den Fall einer Ellipse zu bestimmen, verfährt man folgendermassen:

$c_c d_c$ ist eine dem Durchmesser $a_c b_c$ zugeordnete Sehne, da sie von $a_c b_c$ halbiert wird. Die gesuchte Ellipse betrachtet man nun als Parallelprojektion des über $a_c b_c$ als Durchmesser beschriebenen Kreises z_c. Die der „schiefen Ordinate“ $m_c c_c$ entsprechende senkrechte Kreisordinate ist $m_c c_p \perp a_c b_c$. Die Konstruktion des dem $\Delta c_p m_c c_c$ ähnlichen und ähnlich liegenden $\Delta p_p z_c p_c$ liefert den zugeordneten Durchmesser $p_c q_c$ zu $a_c b_c$ und der Kreis über $p_p p_c$ mit Mittelpunkt auf $a_c b_c$ die Achsenrichtungen up_c und vp_c. Auf den Parallelen durch z_c zu up_c und vp_c liegen die gesuchten Achsen, deren Längen man durch Konstruktion der entsprechenden Geraden $w_1 z$ und $w_2 z$ des Kreises findet.

Ebene E in P_1 um in [illegible] Hauptvertikale und E_1 die Achse
Y der Perspektive. Tr[illegible] gegen o_x hin ab, so ist o^I der
Mittelpunkt der perspe[illegible] Kegelschnitt mit dem Kreis m
kommen muss. Nun z[illegible]angenten. Der Berührungsdurch-
messer ab hat die Ger[illegible] aus o^I erhält man auf $a_c b_c$ die
Bilder der Punkte a, b[illegible] sind wieder ∥ Y und berühren
den gesuchten Kegelsch[illegible] b_c einen Durchmesser desselben
hat. Das Bild des zu a[illegible] ist die Parallele zu Y durch m_c.
Seine Länge ist ebenfa[illegible] Bilder und Längen aller zu cd
parallelen Sehnen des [illegible] Kegelschnitt vollends leicht und
rasch ergibt. Um sein[illegible]se zu bestimmen, verfährt man
folgendermassen:

$c_c d_c$ ist eine dem[illegible]e, da sie von $a_c b_c$ halbiert wird.
Die gesuchte Ellipse [illegible]ktion des über $a_c b_c$ als Durch-
messer beschriebenen K[illegible]" $m_c c_c$ entsprechende senkrechte
Kreisordinate ist $m_c c_p$ [illegible] $\Delta c_p m_c c_c$ ähnlichen und ähnlich
liegenden $\Delta p_p z_c p_c$ liefe[illegible] q_c zu $a_c b_c$ und der Kreis über
$p_p p_c$ mit Mittelpunkt a[illegible]d vp_c. Auf den Parallelen durch
z_c zu up_c und vp_c liege[illegible]gen man durch Konstruktion der
entsprechenden Geraden[illegible]