gleich, oder wenn der Punkt α sich dem Punkt s nähert, bis er mit ihm zusammenfällt, so fällt die Kreissehne αo mit os zusammen, die Sehne αs aber wird zur Tangente in s.

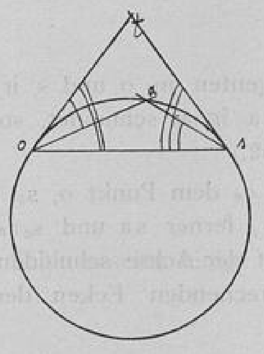
Man kann den Satz auch so aussprechen: zwei projektive Strahlenbüschel erzeugen einen Kreis, wenn drei Schnittpunkte α, β, γ entsprechender Strahlenpaare auf der Peripherie eines Kreises liegen, der auch durch die Mittelpunkte o und s der Büschel geht. In diesem Fall sind nämlich die projektiven Strahlenbüschel kongruent, weil sich die drei Paare entsprechender Strahlen o, $\alpha\beta\gamma$ und s, $\alpha\beta\gamma$ zur Deckung bringen lassen.

Ein besonderer Fall tritt ein, wenn der Kreis die der Geraden os entsprechenden Strahlen beider Büschel in o und s berührt und ausserdem durch den Schnittpunkt α eines Paars entsprechender Strahlen der Büschel geht.

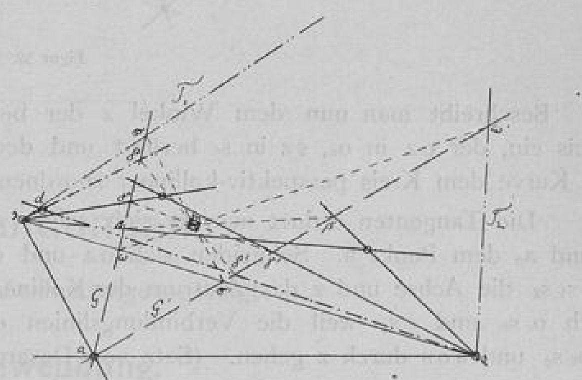
Es ist hier (Fig. 50): $\sphericalangle\, \mathrm{to}\alpha = \sphericalangle\, \mathrm{os}\alpha$

und $\sphericalangle\, \mathrm{tos} = \sphericalangle\, \mathrm{ost}$.

Die entsprechenden Strahlen folgen sich ausserdem in demselben Sinn, somit sind die Büschel o, tαs und s, oαt kongruent, ihr Erzeugnis also der Kreis.



Figur 50.

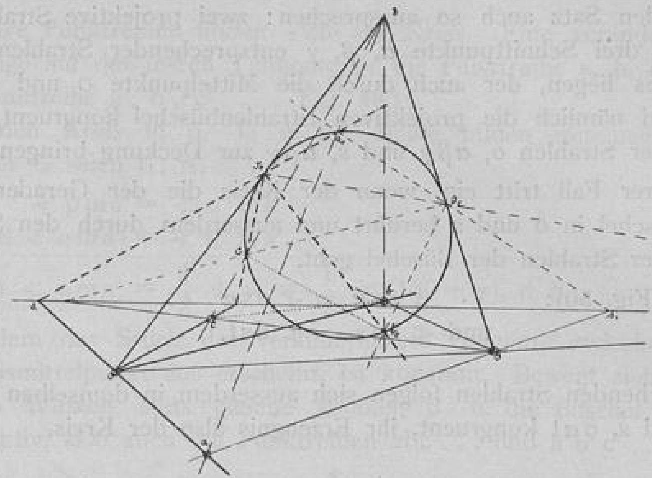


Figur 51.

Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel.

Je zwei entsprechende Strahlen zweier projektiven Büschel o und s schneiden sich in einem Punkt. Da die Strahlen jedes Büschels stetig aufeinander folgen, so erhält man als Erzeugnis der beiden Büschel o und s eine stetige Aufeinanderfolge von Punkten, d. h. eine Kurve. Diese geht durch o und s, und auch hier entspricht dem Strahl os des Büschels o die Tangente der Kurve in s und dem Strahl so des Büschels s die Tangente an die Kurve in o, was sich nachweisen lässt wie oben beim Kreis.

Diese Tangenten lassen sich, wie überhaupt jeder einem gewissen Strahl des einen Büschels zugeordnete Strahl des andern, leicht konstruieren: Legt man (Fig. 51) durch den Schnittpunkt zweier zugeordneten Strahlen, etwa a, zwei Gerade G und G′, so schneidet G den Büschel o in einer Punktreihe a$\beta\gamma$... und G′ den Büschel s in einer projektiven Reihe a$\beta'\gamma'$... Diese Reihen sind perspektiv, da in a entsprechende Punkte vereinigt sind. Es müssen also $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, ... durch einen Punkt (m) gehen. Schneidet nun ein gewisser Strahl od des Büschels o die G in δ, so schneidet δm die G′ in δ', und es ist sδ' der zugeordnete Strahl zu od. Zum Strahl os erhält man so die Tangente T_2 der Kurve in s, zum Strahl so die Tangente T_1 in o.



Figur 52.

Beschreibt man nun dem Winkel z der beiden Tangenten in o und s irgend einen Kreis ein, der oz in o_c, sz in s_c berührt und den Strahl za in a_c schneidet, so lässt sich die Kurve dem Kreis perspektiv-kollinear zuordnen. (Fig. 52.)

Die Tangenten ordnet man je sich selbst zu, ferner o_c dem Punkt o, s_c dem Punkt s und a_c dem Punkt a. Schneiden sich oa und $o_c a_c$ in s_1, ferner sa und $s_c a_c$ in s_2, so ist $s_1 s_2$ die Achse und z das Zentrum der Kollineation. Auf der Achse schneiden sich dann auch $o_c s_c$ und os, weil die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken der Dreiecke $a_c o_c s_c$ und aos durch z gehen. (Satz von Desargues).

Nun sieht man o_c und s_c als Mittelpunkte von Strahlenbüscheln an und ordnet jedem Strahl des Büschels o den Strahl des Büschels o_c zu, der ihm auf der Achse $s_1 s_2$ begegnet, ebenso jedem Strahl des Büschels s einen Strahl des Büschels s_c.

Durchläuft nun der Strahl oa den Büschel o, dann durchläuft sein entsprechender Strahl im Büschel s diesen Büschel. Zum Büschel o ist perspektiv der Büschel o_c, ebenso der Büschel s_c dem Büschel s. Da nun die Büschel o und s projektiv sind, so sind es auch die Büschel o_c und s_c. Einem beliebigen Kurvenpunkt $b = ob \times sb$ entspricht der Schnittpunkt b_c der Strahlen $o_c b_c$ und $s_c b_c$, die den Strahlen ob und sb entsprechen.

Da sich die entsprechenden Seiten der Dreiecke osb und $o_c s_c b_c$ auf $s_1 s_2$ schneiden, so muss $b b_c$ durch z gehen, ebenso $c c_c$, $d d_c$ u. s. w. Ausserdem müssen sich die entsprechenden Geraden, z. B. bc und $b_c c_c$ auf $s_1 s_2$ schneiden, weil die Dreiecke sbc und $s_c b_c c_c$ perspektiv-kollinear sind. Das Erzeugnis der Büschel o und s ist also dem Erzeugnis der Büschel o_c und s_c perspektiv-kollinear zugeordnet.

Zum Büschel o_c gehören nun die Strahlen $o_c z$, $o_c a_c$ und $o_c s_c$, zum Büschel s_c die entsprechenden $s_c o_c$, $s_c a_c$ und $s_c z$. Die beiden Büschel erzeugen also den Kreis. Dieser ist somit das perspektive Bild der Kurve, diese folglich eine (ebene, und räumliche) Zentralprojektion eines Kreises. Das Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel ist also ein **Kegelschnitt**.

In ähnlicher Weise lässt sich beweisen, dass auch das Erzeugnis zweier projektiven Punktreihen die Zentralprojektion eines Kreises, d. h. ein Kegelschnitt ist.

Es lassen sich somit die projektiven Eigenschaften des Kreises, insbesondere auch seine polaren, unmittelbar auf die Erzeugnisse projektiver Strahlenbüschel und Punktreihen übertragen. Zwischen diesen Erzeugnissen und den Zentralprojektionen des Kreises, die als die ebenen Schnitte des geraden Kreiskegels bekannt sind, kann daher kein wesentlicher Unterschied bestehen, d. h. die Erzeugnisse projektiver Strahlenbüschel und Punktreihen sind Kurven II Grads: Kreis Ellipse, Parabel, Hyperbel.

Aus der Uebertragung der projektiven Eigenschaften des Kreises auf die Kegelschnitte seien die folgenden Sätze hervorgehoben:

Die Punkte eines Kegelschnitts werden von 2 festen Punkten desselben durch projektive Strahlenbüschel projiziert.

Die Tangenten eines Kegelschnitts schneiden 2 feste Tangenten desselben in projektiven Punktreihen.

Anwendungen.

Zum Schluss seien einige wertvolle Anwendungen gezeigt:

1. Anwendung.

Von einer Parabel sind zwei Tangenten T_1 und T_2 mit ihren Berührungspunkten b_1 und a_2 gegeben. Man soll die Parabel konstruieren.

Auflösung.

Eine Parabel wird von der unendlich fernen Geraden berührt. Da sämtliche Parabeltangenten auf T_1 und T_2 projektive Punktreihen erzeugen, so müssen diese Punktreihen ähnlich werden, weil ihre unendlich fernen Punkte einander entsprechen, denn es ist dann

$(a_1\, b_1\, c_1\, \infty) = (a_2\, b_2\, c_2\, \infty)$, woraus $\frac{c_1\, a_1}{c_1\, b_1} : \frac{\infty\, a_1}{\infty\, b_1} = \frac{c_2\, a_2}{c_2\, b_2} : \frac{\infty\, a_2}{\infty\, b_2}$, oder

$\frac{a_1\, c_1}{b_1\, c_1} : \frac{a_1\, \infty}{b_1\, \infty} = \frac{a_2\, c_2}{b_2\, c_2} : \frac{a_2\, \infty}{b_2\, \infty}$. Die Strecken $a_1\, \infty$, $b_1\, \infty$, $a_2\, \infty$ und $c_2\, \infty$ sind einander gleich, da sie sich nur durch eine endliche Grösse unterscheiden, somit folgt:

$$\frac{a_1\, c_1}{b_1\, c_1} = \frac{a_2\, c_2}{b_2\, c_2}, \text{ und ebenso: } \frac{a_1\, d_1}{b_1\, d_1} = \frac{a_2\, d_2}{b_2\, d_2}, \text{ u. s. f.}$$

Man erzeugt daher auf T_1 und T_2 ähnliche Punktreihen, in denen a_1 und a_2, b_1 und b_2 einander entsprechen. Dies geschieht durch Einteilen von $a_1\, b_1$ und $a_2\, b_2$ in dieselbe Anzahl gleicher Teile, oder dadurch dass man die Punkte von T_2 durch Parallelen mit T_1