

Sind nun in einer Punktreihe 3 Elemente und das Doppelverhältnis geg., das bei geg. Reihenfolge ein 4. mit jenen bildet, so ist das 4. eindeutig bestimmt.

Ist z. B. $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \lambda$ gegeben, so ist $\frac{da}{db} = \frac{1}{\lambda} \frac{ca}{cb}$. Es ist somit das Teilverhältnis des Punkts d i. B. auf die Punkte a und b nach Grösse und Vorzeichen bekannt, d also eindeutig bestimmt. Die Konstruktion von d folgt aus obiger Figur.

Projektive Grundgebilde.

Nimmt man perspektive Grundgebilde auseinander, so sind entsprechende Doppelverhältnisse immer noch gleich, die Grundgebilde heissen aber dann nicht mehr perspektiv, sondern „projektiv“.

Projektive Grundgebilde sind also solche, bei denen die Doppelverhältnisse von je 4 entsprechenden Elementen gleich sind. Sind z. B. a, b, c, d . . . und a', b', c', d', . . . projektive Punktreihen (auf verschiedenen Trägern), so ist

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'}, \text{ oder } (abcd) = (a'b'c'd'), \text{ ebenso } (bcde) = (b'c'd'e') \text{ u. s. f.}$$

Zwei projektive Grundgebilde können nun immer auch in perspektive Lage gebracht, gleichartige Grundgebilde somit durch Zentralprojektion auseinander erzeugt werden.

Bringt man z. B. (Fig. 38) zwei projektive Punktreihen so zusammen, dass irgend zwei entsprechende Punkte a und a' zusammenfallen, und schneiden sich bb' und cc' in s, so müssen auch dd', ee' u. s. f. durch s gehen. Würde etwa sd den Träger a'b' in d'' statt in d' schneiden, so müsste $(a'b'c'd'') = (abcd) = (a'b'c'd')$ sein, woraus folgt, dass $d''a : d''b = d'a : d'b$, was nur möglich, wenn d'' und d' sich decken.

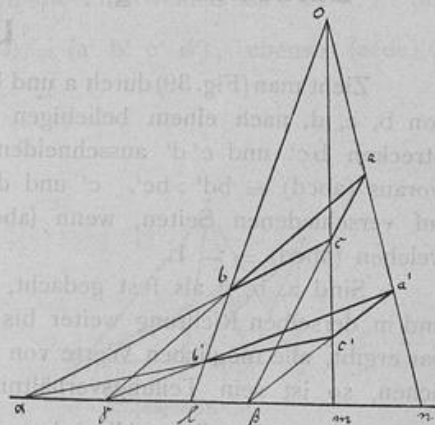
Ebenso ist klar, dass, wenn zwei Grundgebilde sich so zusammenlegen lassen, dass irgend drei Elemente des einen auf die entsprechenden drei des andern zu liegen kommen, dies dann für alle entsprechenden Elemente zutrifft. Zwei projektive Grundgebilde können also nicht mehr als zwei „Doppelemente“ besitzen, ohne dass alle entsprechenden Elemente ineinander fallen. Eine hübsche Anwendung hierzu liefert der

Satz von Desargues.

(Fundamentalsatz der Kollineationstheorie.)

Haben zwei Dreiecke abc und a'b'c' in einer Ebene eine solche Lage, dass die Linien aa', bb' und cc' durch einen Punkt (o) gehen, so liegen die Schnittpunkte γ , β , α der Geraden ab, a'b' und bc, b'c' und ca, c'a' in einer Geraden.

Schneiden nämlich die Strahlen aus o die Gerade $\alpha\beta$ in n, l, m, so wird die Punktgruppe obb'l auf ol aus α in die Punktgruppe occ'm auf om projiziert und diese wieder aus β in die Gruppe oaa'n auf on. Die Punktreihen obb'l und oaa'n sind also projektiv und in perspektiver Lage, weil o sich selbst entspricht. Es müssen somit die Linien ab, a'b' und nl durch einen Punkt gehen, d. h. ab und a'b' schneiden sich auf $\alpha\beta$.



Figur 40.

Ähnlich lässt sich die Umkehrung beweisen:

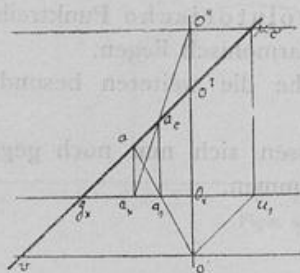
Haben 2 Dreiecke abc und $a'b'c'$ in einer Ebene eine solche Lage, dass die Schnittpunkte γ, α, β der Seitenpaare ab und $a'b'$, bc und $b'c'$, ca und $c'a'$ in einer Geraden liegen, so gehen die Verbindungslinien der entsprechenden Ecken a und a' , b und b' , c und c' durch einen Punkt.

Schneiden sich nämlich bb' und cc' in o , und schneiden die Geraden aa' , bb' , cc' die Gerade $\alpha\beta$ bzw. in n, l, m , so sind die Punktgruppen $obb'l$ und $occ'm$ als Schnitte derselben Strahlengruppe α , $obb'l$ perspektiv. Somit sind die Strahlengruppen $\gamma, obb'l$ und $\beta, occ'm$ projektiv, und da die entsprechenden Strahlen γl und βm zusammenfallen, auch perspektiv. Sie müssen also eine Punktgruppe gemein haben, d. h. die Punkte o, a, a' und n müssen in einer Geraden liegen, aa' muss somit durch o gehen.

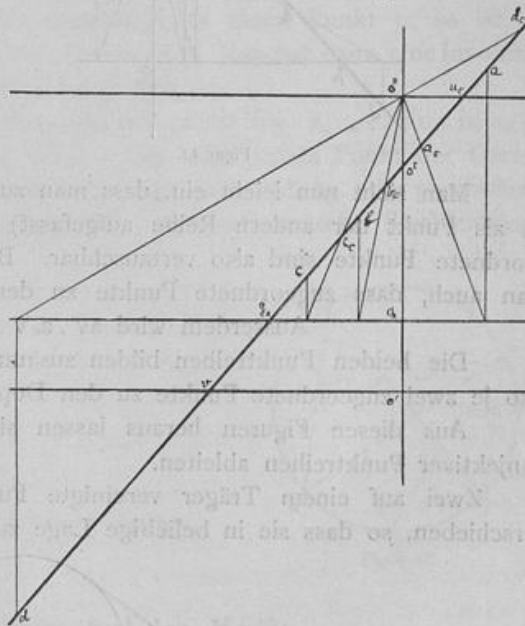
Konjektive Punktreihen. Involution.

Fällt (Fig. 41) bei der Zentralprojektion eine Gerade der Grundebene mit ihrem Bild zusammen, so müssen beide durch o^l gehen, weil alle Verbindungslinien von Punkten der Grundebene mit ihren Bildern sich in o^l schneiden. Man hat dann zwei perspektive Punktreihen auf demselben Träger oder „konjektive“ Punktreihen. Der Spurpunkt g_x des Trägers auf der Achse ist wie o^l ein „Doppelpunkt“, weil er mit seinem Bild zusammenfällt. Einen weiteren Doppelpunkt kann es nicht geben, denn zu dem Punkt a findet man den entsprechenden a_e durch das Grundlot aa_x und die Linie $a_x o''$. Die Schnittpunkte des Trägers mit dem Horizont und mit der Gegenachse, die Punkte u_e und v , nennt man die „Gegenpunkte“. Sie entsprechen je dem unendlich fernen Punkt der andern Reihe. Man sieht sofort, dass sie in gleicher Entfernung von den Doppelpunkten liegen.

Zieht man durch o' die Parallele zum Träger bis zum Schnitt mit der Achse in u_s , so ist $u_s u_e$ Grundlot, und man hat:



Figur 41.



Figur 42.

$$av : g_x v = a o' : a_s o',$$

$$a_e u_e : g_x u_e = a_s u_s : g_x u_s, \text{ woraus durch Multiplikation:}$$

$$av \cdot a_e u_e : g_x v \cdot g_x u_e = a o' \cdot a_s u_s : a_s o' : g_x u_s.$$

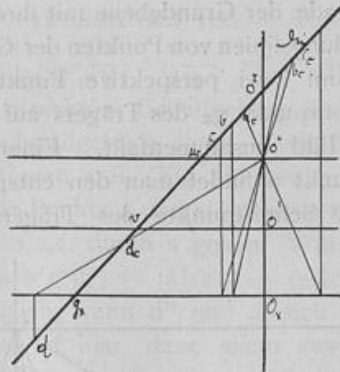
Da aber auch $a_s o' : a_s u_s = a o' : g_x u_s$ und damit
 $a o' \cdot a_s u_s = a_s o' \cdot g_x u_s$, so folgt
 $a v \cdot a_e u_e = g_x v \cdot g_x u_e = o^I u_e \cdot o^I v$ (denn $g_x v = o^I u_e$).

Es ist also das Produkt aus den Entfernungen zugeordneter Punkte von den Gegenpunkten ihrer eigenen Reihe konstant.

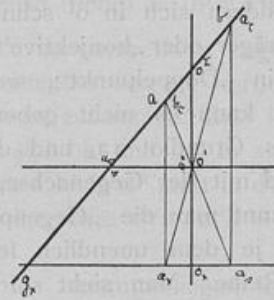
Konstruiert man (Fig. 42) die Bilder mehrerer Punkte $a, b, c, d \dots$, so zeigt sich, dass man es mit „gleichläufigen“ Reihen zu tun hat.

Rückt das Projektionszentrum hinter die Bildebene, wobei allerdings von Perspektive im eigentlichen Sinn nicht mehr die Rede sein kann, so erhält man die in folgender Figur 43 dargestellte Sachlage. Die Punktreihen sind „gegenläufig“. Die Doppelpunkte liegen auf der unendlichen Strecke $v u_e$, während sie im vorhergehenden Fall auf der endlichen Strecke lagen.

Fallen nun noch die Punkte o' und o'' zusammen, d. h. liegt das Projektionszentrum in der zweiten Medianebene des Grundsystems, so rücken auch die Gegenpunkte v und u_e zusammen in die Mitte zwischen den beiden Doppelpunkten.



Figur 43.



Figur 44.

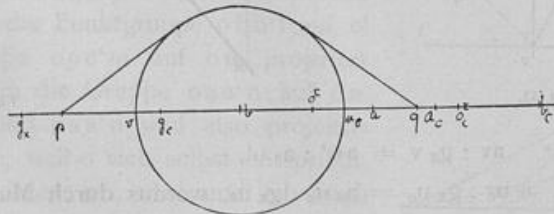
Man sieht nun leicht ein, dass man zum Punkt a das Bild a_e , aber auch zum Punkt b (a_e als Punkt der andern Reihe aufgefasst) als Bild den Punkt $b_e = a$ erhält. Je zwei zugeordnete Punkte sind also vertauschbar. Betrachtet man das Trapez $a a_x a_s a_c$, so erkennt man auch, dass zugeordnete Punkte zu den Doppelpunkten g_x und o^I harmonisch liegen.

$$\text{Ausserdem wird } a v \cdot a_e v = b v \cdot b_e v = (g_x v)^2 = (o^I v)^2.$$

Die beiden Punktreihen bilden zusammen eine involutorische Punktreihe, bei der also je zwei zugeordnete Punkte zu den Doppelpunkten harmonisch liegen.

Aus diesen Figuren heraus lassen sich ohne Mühe die weiteren besonderen Fälle konjektiver Punktreihen ableiten.

Zwei auf einem Träger vereinigte Punktreihen lassen sich nun noch gegeneinander verschieben, so dass sie in beliebige Lage zu einander kommen.



Figur 45.

Beschreibt man dann im Fall der gegenläufigen Punktreihen über der Strecke der beiden Gegenpunkte v, u_c als Durchmesser einen Kreis, so lassen sich auf beiden Seiten von ihm immer zwei Punkte p und q finden, für welche die von ihnen an den Kreis gezogenen Tangenten $= \sqrt{av \cdot a_c u_c} = \sqrt{bv \cdot b_c u_c}$. Diese Punkte sind dann Doppelpunkte, denn es ist $p v \cdot p_c u_c = q v \cdot q_c u_c = av \cdot a_c u_c$, wobei p_c mit p und q_c mit q identisch sind. p und q können nicht im Kreis liegen, da die Produkte positiv sein müssen.

Zwei gegenläufige Punktreihen auf demselben Träger haben somit immer zwei (reelle) Doppelpunkte.

Verschiebt man die Reihen so, dass ihre Gegenpunkte zusammenfallen, so kommen die Doppelpunkte in gleiche Entfernung zu beiden Seiten des betreffenden Punkts. Die Reihen bilden zusammen eine Involution, und zwar eine ungleichlaufende oder hyperbolische, die also immer zwei Doppelpunkte besitzt.

Verschiebt man nun auch zwei gleichlaufende Punktreihen desselben Trägers gegeneinander und beschreibt über $v u_c$ den Halbkreis, so gibt es, wie eine einfache algebraisch-geometrische Untersuchung zeigt, auf seinem Durchmesser zwei

reelle getrennte	}	Punkte
reelle zus.-fallende		
imaginär-konjugierte		

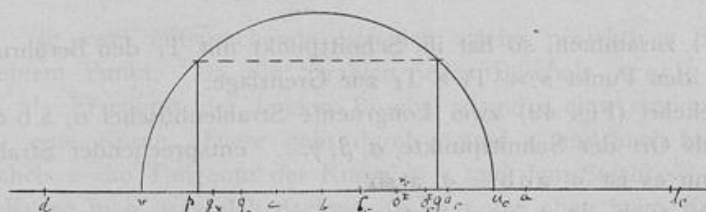
p und q , für die $p v \cdot p_c u_c = q v \cdot q_c u_c = av \cdot a_c u_c = bv \cdot b_c u_c$, wobei wieder p und q mit ihren entsprechenden Punkten p_c und q_c zusammenfallen.

p und q müssen hier in den Kreis fallen, da die Produkte $av \cdot a_c u_c = bv \cdot b_c u_c$ negativ sind.

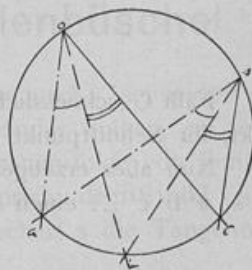
Rücken wieder die beiden Gegenpunkte zusammen in einen Punkt u , so ist kein Doppelpunkt möglich, wohl aber ist $au \cdot a_c u = bu \cdot b_c u$, u. s. f. Man hat dann eine Involution, und zwar eine gleichlaufende oder elliptische ohne Doppelpunkte.

Der Punkt u ist nur dann zugleich Doppelpunkt, wenn $au \cdot a_c u = bu \cdot b_c u = 0$, d. h. wenn in jedem Produkt eine Strecke den Wert 0 hat, oder jedem Punkt der Geraden der Punkt u zugeordnet ist. Eine solche Involution heisst eine uneigentliche oder parabolische.

Die aufgefundenen Sätze lassen sich unmittelbar auf konzentrische Strahlenbüschel übertragen.



Figur 46.



Figur 47.

Projektive Strahlenbüschel im Kreis.

Projektive Strahlenbüschel erhält man z. B. dadurch, dass man zwei Punkte o und s der Peripherie eines Kreises mit allen andern Punkten des Umrisses verbindet. Denn wenn man die Strahlen einander zuordnet, die sich auf der Peripherie schneiden, so schliessen entsprechende Strahlenpaare nach dem Satz vom Peripheriewinkel gleiche Winkel ein, auch

folgen die Strahlen einander im gleichen Sinn, die Büschel sind also kongruent und deshalb projektiv.

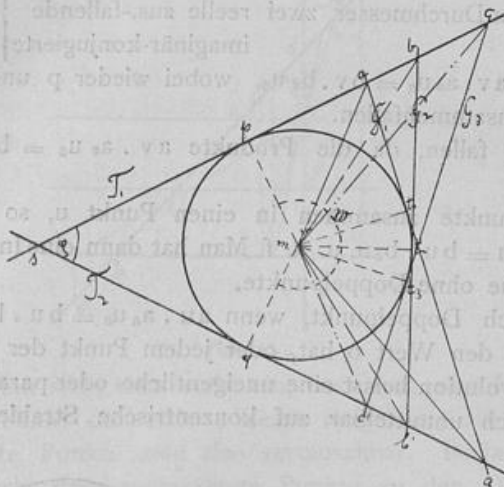
Auch projektive Punktreihen finden sich am Kreis. Eine veränderliche Tangente G des Kreises m erzeuge auf der festen Tangente T_1 die Punktreihe a, b, c, \dots , auf der festen Tangente T_2 die Punktreihe a', b', c', \dots (Fig. 48.)

T_1 berühre den Kreis in p , T_2 in q . Beide bilden miteinander den $\sphericalangle \varphi$. Die Berührungspunkte der G seien t_1, t_2, \dots .

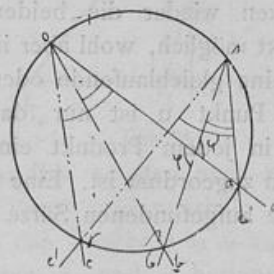
$$\begin{aligned} \text{Nun ist} \quad & \sphericalangle pma = \sphericalangle t_1 ma \\ & \text{und } \sphericalangle qma' = \sphericalangle t_1 ma' \end{aligned}$$

$$\text{somit } \sphericalangle ama' = \frac{1}{2} \sphericalangle w = \frac{1}{2} \sphericalangle (180 + \varphi), \text{ d. h.}$$

der Winkel, unter dem das Stück der veränderlichen Tangente zwischen den zwei festen Tangenten vom Kreismittelpunkt aus erscheint, ist konstant. Bewegt sich G , so beschreiben die Schenkel dieses Winkels stets gleiche Winkel, d. h. die Büschel m, abc, \dots und $m, a'b'c', \dots$ sind projektiv, also auch die Punktreihen abc, \dots und $a'b'c', \dots$



Figur 48.



Figur 49.

Fällt G schliesslich mit T_1 zusammen, so hat ihr Schnittpunkt mit T_1 den Berührungspunkt, ihr Schnittpunkt mit T_2 den Punkt $s = T_1 \times T_2$ zur Grenzlage.

Nun aber erzeugen umgekehrt (Fig. 49) zwei kongruente Strahlenbüschel o, abc, \dots und $s, a'b'c', \dots$ einen Kreis als Ort der Schnittpunkte $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ entsprechender Strahlen,

$$\text{denn es ist } \sphericalangle aob = \sphericalangle a'sb',$$

$$\text{also auch, da } \sphericalangle \varphi = \sphericalangle \psi,$$

$$\sphericalangle o\beta s = \sphericalangle o\alpha s,$$

$$\text{ebenso } = \sphericalangle o\gamma s, \text{ u. s. f.}$$

d. h. die Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ liegen alle auf einem Kreis über os .

Das Erzeugnis zweier kongruenten Strahlenbüschel ist also ein Kreis, der auch durch die Mittelpunkte der Büschel geht. Der Geraden os als Strahl des Büschels o entspricht im Büschel s die Tangente in s und umgekehrt, denn wenn man die entsprechenden Winkel zeichnet, so sind dieselben nach dem Satz vom Tangentensehnenwinkel einander

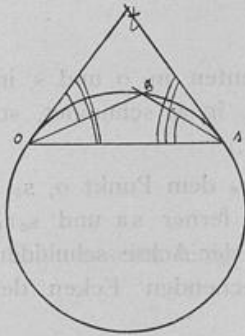
gleich, oder wenn der Punkt a sich dem Punkt s nähert, bis er mit ihm zusammenfällt, so fällt die Kreissehne ao mit os zusammen, die Sehne as aber wird zur Tangente in s .

Man kann den Satz auch so aussprechen: zwei projektive Strahlenbüschel erzeugen einen Kreis, wenn drei Schnittpunkte α, β, γ entsprechender Strahlenpaare auf der Peripherie eines Kreises liegen, der auch durch die Mittelpunkte o und s der Büschel geht. In diesem Fall sind nämlich die projektiven Strahlenbüschel kongruent, weil sich die drei Paare entsprechender Strahlen $o, \alpha\beta\gamma$ und $s, \alpha\beta\gamma$ zur Deckung bringen lassen.

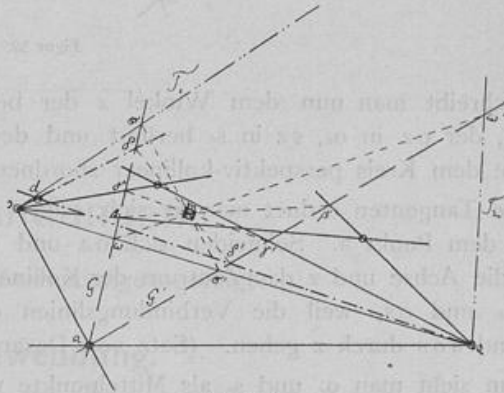
Ein besonderer Fall tritt ein, wenn der Kreis die der Geraden os entsprechenden Strahlen beider Büschel in o und s berührt und ausserdem durch den Schnittpunkt a eines Paares entsprechender Strahlen der Büschel geht.

Es ist hier (Fig. 50): $\sphericalangle toa = \sphericalangle osa$
und $\sphericalangle tos = \sphericalangle ost$.

Die entsprechenden Strahlen folgen sich ausserdem in demselben Sinn, somit sind die Büschel o, tas und s, oat kongruent, ihr Erzeugnis also der Kreis.



Figur 50.



Figur 51.

Erzeugnis zweier projektiven Strahlenbüschel.

Je zwei entsprechende Strahlen zweier projektiven Büschel o und s schneiden sich in einem Punkt. Da die Strahlen jedes Büschels stetig aufeinander folgen, so erhält man als Erzeugnis der beiden Büschel o und s eine stetige Aufeinanderfolge von Punkten, d. h. eine Kurve. Diese geht durch o und s , und auch hier entspricht dem Strahl os des Büschels o die Tangente der Kurve in s und dem Strahl so des Büschels s die Tangente an die Kurve in o , was sich nachweisen lässt wie oben beim Kreis.

Diese Tangenten lassen sich, wie überhaupt jeder einem gewissen Strahl des einen Büschels zugeordnete Strahl des andern, leicht konstruieren: Legt man (Fig. 51) durch den Schnittpunkt zweier zugeordneten Strahlen, etwa a , zwei Gerade G und G' , so schneidet G den Büschel o in einer Punktreihe $\alpha\beta\gamma\dots$ und G' den Büschel s in einer projektiven Reihe $\alpha'\beta'\gamma'\dots$. Diese Reihen sind perspektiv, da in a entsprechende Punkte vereinigt sind. Es müssen also $\beta\beta', \gamma\gamma', \dots$ durch einen Punkt (m) gehen. Schneidet nun ein gewisser Strahl od des Büschels o die G in δ , so schneidet δm die G' in δ' , und es ist $s\delta'$ der zu-