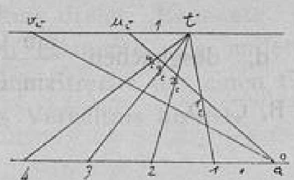
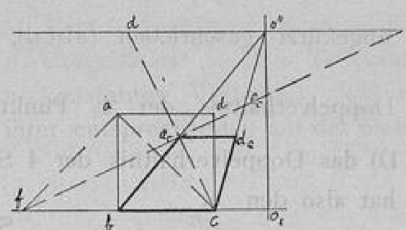
Übergang zur projektiven Geometrie.

Die Einteilung einer schrägen Linie $a u_c$ der Grundebene in perspektiv gleiche Teile nennt man einen „Verschwindungsmassstab.“ Steht dabei (Fig. 33) der Teilpunkt t um eine Einheit von u_c ab, so ist $1_c u_c$ die Hälfte von $a u_c$, $2_c u_c$ das Drittel, $3_c u_c$ das Viertel, $4_c u_c$ das Fünftel u. s. f. Die Teilung von $a u_c$ ist demnach eine „harmonische, dieselbe wie bei einer Saite, wenn sie in Tönen klingen soll, die zu ihrem Grundton harmonisch sind. Auf einer andern Geraden $a v_c$ erzeugen die Strahlen aus t gleichfalls eine harmonische Punktreihe. Alle diese Verhältnisse sind rein unabhängig von der Lage des Augpunkts (Hauptpunkts), sowie von der Grösse des Augenabstands (von der Bildebene), ungefähr so wie die Harmonie von Terz und Quint mit dem Grundton unabhängig ist von der absoluten Höhe und Tiefe dieses Grundtons. Auch wird man leicht begreifen, wie eine nicht motivierte Unregelmässigkeit in solcher Einteilung auf das gebildete Auge fast ebenso verletzend wirken muss als eine unaufgelöste Dissonanz auf das musikalisch gebildete Ohr.“ (Schreiber, Lehrbuch der Perspektive, 3. Auflage S. 79).



Figur 33.



Figur 34.

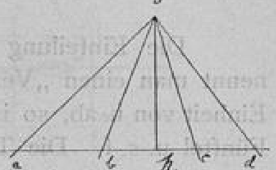
Aber nicht nur bei Punktreihen auf Geraden, sondern auch bei Strahlen eines Strahlenbüschels zeigen sich solche merkwürdigen Eigenschaften. Es werden z. B. auch zwischen den Seiten und Diagonalen eines perspektiven Quadrats merkwürdige Lagenbeziehungen herrschen müssen. Ist abcd (Fig. 34) ein in der Grundebene auf der Achse stehendes Quadrat, und zieht man durch a eine Parallele af zu bd, so bilden die Strahlen af, ab, ac, ad einen harmonischen Vierstrahl, wobei von den Strahlenpaaren ab, ad und af, ac je das eine die Winkel des andern halbiert. Ausserdem ist bf $=$ bc.

Schneidet nun das Bild $a_c f$ von af das der Geraden cd in e_c, so erkennt man den Verschwindungsmassstab auf der Geraden co″. Die 4 Punkte c, d_c, e_c, o″ sind also 4 harmonische Punkte, somit a_c, $b\,c\,d_c\,e_c$ ein harmonischer Vierstrahl. Dies geht auch daraus hervor, dass die Strahlen $a_c b$, $a_c c$ und $a_c e_c$ aus der Parallelen o″d zu $a_c d_c$ gleiche Strecken ausschneiden.

Perspektive Punktreihen und Strahlenbüschel.

Auch für beliebige Punktreihen und Strahlenbüschel lassen sich „metrische“ Beziehungen nachweisen, die durch Zentralprojektion nicht verloren gehen. Projiziert man die Punktgruppe a, b, c, d aus s durch den Vierstrahl s, a b c d oder A,B,C,D und fällt von s das Lot sh auf den „Träger“ ad, so lässt sich der doppelte Inhalt des Δ a s c in doppelter Weise ausdrücken, nämlich

$$2\Delta asc = sh \,.\, ca = sa \,.\, sc \,.\, \sin \hat{CA}. \quad \text{Entsprechend}$$
$$2\Delta bsc = sh \,.\, cb = sb \,.\, sc \,.\, \sin \hat{CB},$$
$$2\Delta asd = sh \,.\, da = sa \,.\, sd \,.\, \sin \hat{DA},$$
$$2\Delta bsd = sh \,.\, db = sb \,.\, sd \,.\, \sin \hat{DB}.$$



Figur 35.

Hieraus folgt: $\frac{ca}{cb} = \frac{sa \,.\, \sin \hat{CA}}{sb \,.\, \sin \hat{CB}}$, und $\frac{da}{db} = \frac{sa \,.\, \sin \hat{DA}}{sb \,.\, \sin \hat{DB}}$,

somit $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{\sin \hat{CA}}{\sin \hat{CB}} : \frac{\sin \hat{DA}}{\sin \hat{DB}}$.

$\frac{ca}{cb}$ ist das Teilverhältnis des Punkts c i. B. auf die Punkte a und b, desgleichen $\frac{da}{db}$ das des Punkts d i. B. auf dieselben Punkte. Entsprechend ist $\frac{\sin \hat{CA}}{\sin \hat{CB}}$ das Teilverhältnis des Strahls C i. B. auf die Strahlen A und B, und ebenso $\frac{\sin \hat{DA}}{\sin \hat{DB}}$ das des Strahls D i. B. auf dieselben Strahlen.

$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}$, abgekürzt geschrieben (abcd), ist das Verhältnis der beiden Teilverhältnisse oder das Doppelverhältnis der 4 Punkte a, b, c, d, desgleichen $\frac{\sin \hat{CA}}{\sin \hat{CB}} : \frac{\sin \hat{DA}}{\sin \hat{DB}}$ oder (ABCD) das Doppelverhältnis der 4 Strahlen A, B, C, D.

Man hat also den

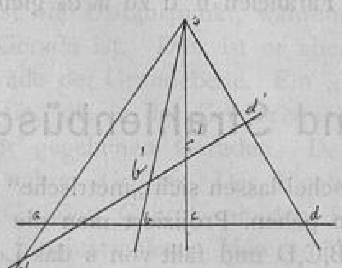
Satz:

Vier Strahlen eines Strahlenbüschels haben dasselbe Doppelverhältnis wie die entsprechenden 4 Punkte einer zu ihm „perspektiv gelegenen" Punktreihe.

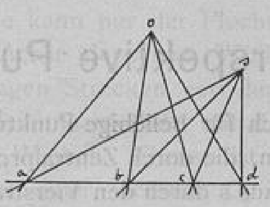
Diese Doppelverhältnisse stimmen auch in den Vorzeichen überein. Sie sind nur dann negativ, wenn das eine Paar (c und d) der 4 „Elemente" das andere (a und b) „trennt".

Anmerkung: Behufs eindeutiger Bestimmung des Winkels zweier Geraden kann man zuerst nach Döhlemann, Projektive Geometrie (Göschen, Band 72), einen „Trennungsstrahl" einführen, von dem übrigens obiger Satz unabhängig ist, wenn Winkel über 180° ausgeschlossen bleiben.

Erzeugt nun ein Strahlenbüschel s auf 2 Geraden die Punktreihen a b c d e . . . . und a' b' c' d' e' . . . ., so ist $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'}$, oder (abcd) = (a' b' c' d'), ebenso (acde) = (a' c' d' e') u. s. f.



Figur 36.



Figur 37.

In perspektiven Punktreihen (Schnitten desselben Büschels) haben somit irgend 4 entsprechende Punkte dasselbe Doppelverhältnis. Dasselbe gilt für 4 entsprechende Strahlen perspektiver Strahlenbüschel (Scheinen derselben Punktreihe).

Fällt der Mittelpunkt des Büschels s ins Unendliche, so wird der Büschel zum Parallelstrahlenbüschel, und die Punktreihen werden ähnlich. Ebenso erhält man einen besonderen Fall perspektiver Strahlenbüschel, wenn die gemeinsame Punktreihe ins Unendliche rückt. In beiden Büscheln sind dann entsprechende Strahlen parallel, die Büschel somit kongruent.

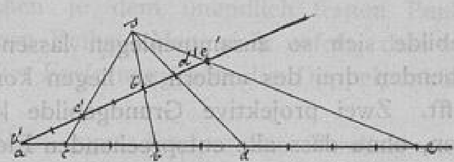
Doppelverhältnisse in Zahlenwerten.

In Figur 38 ist: $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = -\frac{1}{2} : \frac{5}{2} = -\frac{1}{5}$, und $\frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'} = -\frac{2}{2} : \frac{5}{1} = -\frac{1}{5}$.

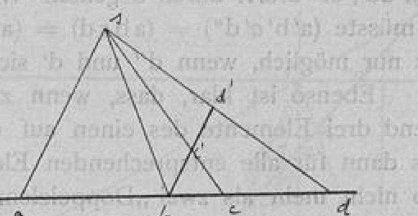
Es ist aber auch $\frac{ca}{cb} : \frac{c'a'}{c'b'} = -\frac{1}{2} : -\frac{2}{2} = \frac{1}{2}$, und $\frac{da}{db} : \frac{d'a'}{d'b'} = \frac{5}{2} : \frac{5}{1} = \frac{1}{2}$.

Ebenso ist $\frac{ea}{eb} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}, \frac{e'a'}{e'b'} = \frac{6}{2} = 3$, dhr. $\frac{ea}{eb} : \frac{c'a'}{c'b'} = \frac{1}{2}$, u. s. f.

Man kann also auch sagen, in perspektiven Punktreihen (und Strahlenbüscheln) steht das Teilverhältnis dreier „Elemente" des einen „Grundgebildes" zu dem Teilverhältnis dreier entsprechenden Elemente des andern in einem konstanten Verhältnis, wie in ähnlichen Punktreihen eine Strecke der einen Geraden zu ihrer entsprechenden auf der andern Geraden ein konstantes Verhältnis besitzt.



Figur 38.



Figur 39.

Zurückführung des Doppelverhältnisses auf ein einfaches Linienverhältnis.

Zieht man (Fig. 39) durch a und b einer Punktreihe abcde... zwei Parallelen und die Strahlen von b, c, d, nach einem beliebigen Punkt s der ersten Parallelen, die auf der andern die Strecken bc' und c'd' ausschneiden, so ist ca : cb = sa : bc' und da : db = sa : bd', woraus (abcd) = bd' : bc'. c' und d' liegen auf derselben Seite von ad, wenn (abcd) pos., auf verschiedenen Seiten, wenn (abcd) negativ, wie z. B. bei 4 harmonischen Punkten, bei welchen (abcd) = − 1.

Sind a, b, c als fest gedacht, und durchläuft d die ganze Reihe von a über b nach c und in derselben Richtung weiter bis a, so nimmt (abcd), wie sich aus obiger Figur unmittelbar ergibt, alle möglichen Werte von $-\infty$ bis o und von o bis $+\infty$ an. Liegt d im Unendlichen, so ist sein Teilungsverhältnis

$$da : db = (db + ba) : db = 1 + \frac{ba}{db} = 1, \text{ also } (abcd) = ca : cb.$$

Sind nun in einer Punktreihe 3 Elemente und das Doppelverhältnis geg., das bei geg. Reihenfolge ein 4. mit jenen bildet, so ist das 4. eindeutig bestimmt.

Ist z. B. $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \lambda$ gegeben, so ist $\frac{da}{db} = \frac{1}{\lambda} \frac{ca}{cb}$. Es ist somit das Teilverhältnis des Punkts d i. B. auf die Punkte a und b nach Grösse und Vorzeichen bekannt, d also eindeutig bestimmt. Die Konstruktion von d folgt aus obiger Figur.

Projektive Grundgebilde.

Nimmt man perspektive Grundgebilde auseinander, so sind entsprechende Doppelverhältnisse immer noch gleich, die Grundgebilde heissen aber dann nicht mehr perspektiv, sondern „projektiv".

Projektive Grundgebilde sind also solche, bei denen die Doppelverhältnisse von je 4 entsprechenden Elementen gleich sind. Sind z. B. a, b, c, d . . . und a', b', c', d', . . . projektive Punktreihen (auf verschiedenen Trägern), so ist

$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{c'a'}{c'b'} : \frac{d'a'}{d'b'}$, oder (abcd) = (a'b'c'd'), ebenso (bcde) = (b'c'd'e') u. s. f.

Zwei projektive Grundgebilde können nun immer auch in perspektive Lage gebracht, gleichartige Grundgebilde somit durch Zentralprojektion auseinander erzeugt werden.

Bringt man z. B. (Fig. 38) zwei projektive Punktreihen so zusammen, dass irgend zwei entsprechende Punkte a und a' zusammenfallen, und schneiden sich bb' und cc' in s, so müssen auch dd', ee' u. s. f. durch s gehen. Würde etwa sd den Träger a'b' in d'' statt in d' schneiden, so müsste (a'b'c'd'') = (abcd) = (a'b'c'd') sein, woraus folgt, dass d''a : d''b = d'a : d'b, was nur möglich, wenn d'' und d' sich decken.

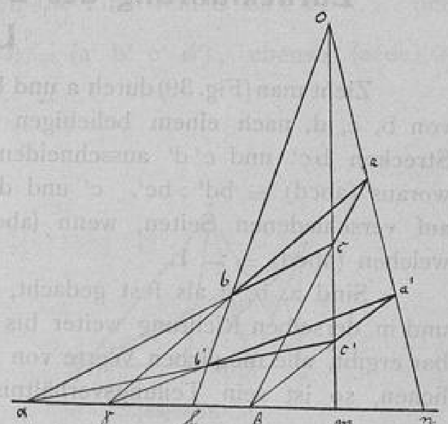
Ebenso ist klar, dass, wenn zwei Grundgebilde sich so zusammenlegen lassen, dass irgend drei Elemente des einen auf die entsprechenden drei des andern zu liegen kommen, dies dann für alle entsprechenden Elemente zutrifft. Zwei projektive Grundgebilde können also nicht mehr als zwei „Doppelelemente" besitzen, ohne dass alle entsprechenden Elemente ineinander fallen. Eine hübsche Anwendung hiezu liefert der

Satz von Desargues.

(Fundamentalsatz der Kollineationstheorie.)

Haben zwei Dreiecke abc und a'b'c' in einer Ebene eine solche Lage, dass die Linien aa', bb' und cc' durch einen Punkt (o) gehen, so liegen die Schnittpunkte γ, β, α der Geraden ab, a'b' und bc, b'c' und ca, c'a' in einer Geraden.

Schneiden nämlich die Strahlen aus o die Gerade $\alpha\ \beta$ in n, l, m, so wird die Punktgruppe obb'l auf ol aus α in die Punktgruppe occ'm auf om projiziert und diese wieder aus β in die Gruppe oaa'n auf on. Die Punktreihen obb'l und oaa'n sind also projektiv und in perspektiver Lage, weil o sich selbst entspricht. Es müssen somit die Linien ab, a'b' und nl durch einen Punkt gehen, d. h. ab und a'b' schneiden sich auf $\alpha\beta$.



Figur 40.