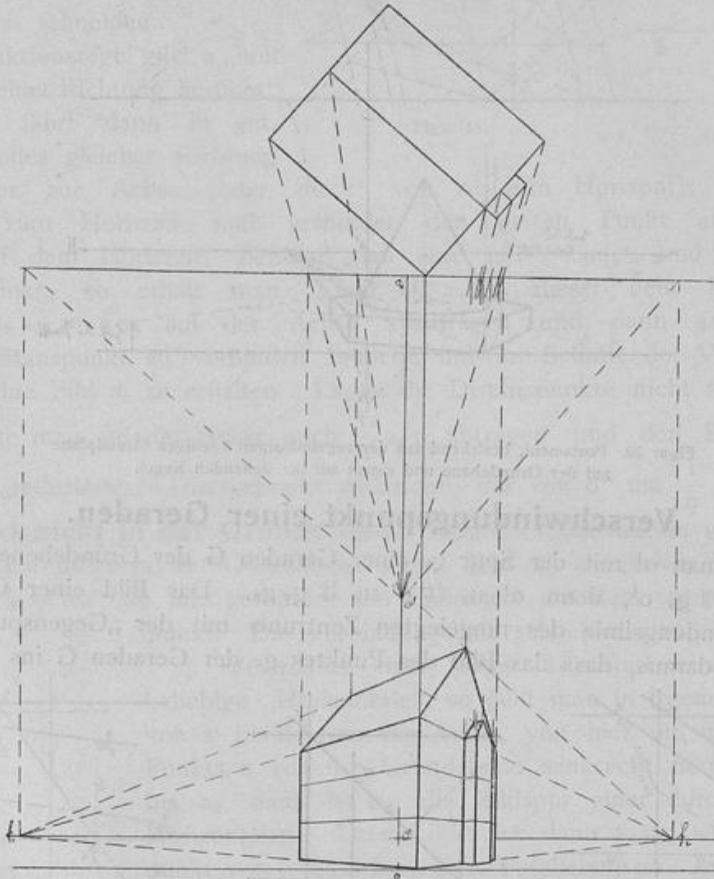


ist  $g_v u_o$ . Zieht man durch  $o^I$  die Parallele zu  $G_e$ , und schneidet sie das Grundlot durch  $g_v$  in  $g_g$ , so ist offenbar  $g_v g_g = \varepsilon$ . Also auch hier ist das Bild der Geraden parallel zur Linie von  $o$  nach ihrem Verschwindungspunkt, wenn dieser als der um  $\varepsilon \perp$  über  $g_v$  gelegene Punkt eingeführt wird.

### Praktische Methode:



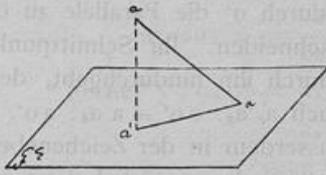
Figur 24.

Unter Benützung von Flucht- und Verschwindungspunkt ist in Figur 24 das Bild eines Hauses gezeichnet. Bezüglich der besten Anordnung ist zu bemerken: Die Distanz  $o' o_x$  wählt man gleich dem  $1\frac{1}{2}$ —2fachen der grössten Längenausdehnung, die man dem Bild geben will, und  $o'$  nimmt man in der „perspektiven Mitte“ vor dem Grundriss des Hauses, d. h. so, dass das Lot  $o' o_x$  den Winkel der äussersten Sehstrahlen von  $o'$  nach dem Grundriss halbiert. (Die Bildebene ist wieder als nachträglich um eine genügende Länge vorgerückt zu denken).

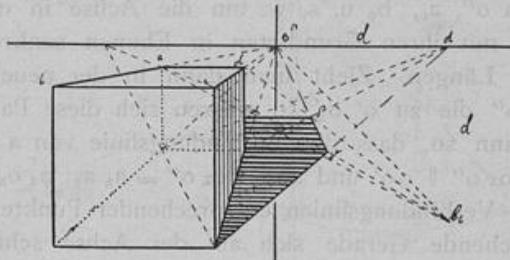
### Schattenkonstruktion bei Parallelbeleuchtung.

Den Schatten eines Punkts auf die Grundebene findet man dadurch, dass man den Schatten zunächst nach der Methode der Orthogonalprojektion konstruiert und dann den Schattenpunkt vermittelt einer der bisherigen Methoden ins Bild überträgt. Man kann ihn

aber auch direkt konstruieren. Er ist der Schnittpunkt des Lichtstrahls durch  $a$  mit dessen Grundriss, der durch  $a'$  geht.



Figur 25 a.

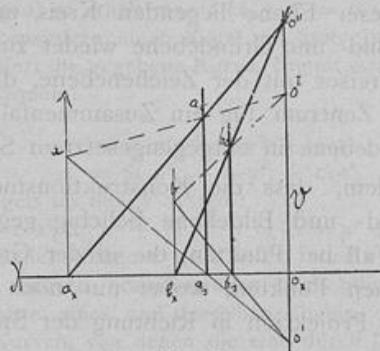


Figur 25 b.

Da die Lichtstrahlen parallel sind, so gehen ihre Bilder alle durch ihren Fluchtpunkt. Dies wiederholt sich bei den Grundrissen der Lichtstrahlen. Bei der allgemein angenommenen Lichtrichtung sind diese Grundrisse horizontale  $45^\circ$  Linien, ihr Fluchtpunkt also der Distanzpunkt rechts. Senkrecht unter ihm liegt der der Lichtstrahlen selbst, nämlich  $l_0$  in der Figur 25b, und zwar um  $d$  tiefer, denn er muss auch auf der  $45^\circ$  Linie  $o''l_0$  liegen als V-Spur des Lichtstrahls aus  $o$ , wobei die Bildebene die V-Ebene ist. Darnach ist der Schatten eines Würfels auf der Grundebene konstruiert.

### Zurückdrehung der Bildebene.

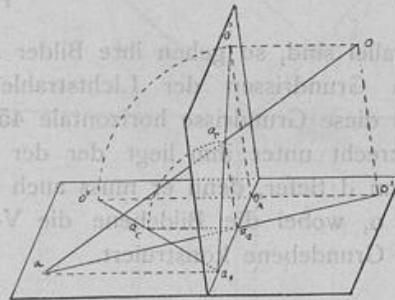
Das Bild einer in der Grundebene gelegenen Figur ist vor und nach dem Zusammenlegen von Bild- und Grundebene in perspektiv-kollinear Lage zum Original. Umgekehrt lässt sich nachweisen, dass beim Zurückdrehen der Bildebene um die Achse die Figur und ihr Bild in jeder Lage der Bildebene perspektiv-kollinear sind.



Figur 26.

Ist  $o^I$  das Zentrum und  $X$  die Achse der ebenen perspektiven Kollineation, ist ferner  $a_e$  das Bild eines Punkts  $a$ , und fällt man  $a a_x \perp X$ , so ist  $a_x a_e$  das Bild des Lots  $a a_x$ , denn  $a_x$  ist sein eigenes Bild. Der unendlich ferne Punkt  $o_\infty$  von  $a a_x$  muss mit seinem Bild auf einem Strahl durch  $o^I$  liegen. Zieht man daher durch  $o$  die Parallele zu  $a a_x$ , so ist ihr Schnittpunkt  $o''$  mit  $a_x a_e$  das Bild des Punkts  $o_\infty$ . Bei einem andern Paar entsprechender Punkte  $b$  und  $b_e$  geht das Lot  $b b_x$  zur Achse ebenfalls durch  $o_\infty$ , daher muss das Bild  $b_x b_e$  dieses Lots auch den Punkt  $o''$  enthalten. Fällt man umgekehrt aus  $a_e$  und  $b_e$  die Lote  $a_e a_s$  und  $b_e b_s$  auf die Achse, dann müssen  $a_s, b_s$  und  $V$  sich in einem Punkt  $o'$  schneiden, nämlich dem Punkt, dessen Bild der unendlich ferne Punkt der Geraden

$a_c a_s$ ,  $b_c b_s$  und  $V$  ist. Auch ist wieder  $o' o'' = o' o_x$ . Dreht man nun die Bildebene mit den Punkten  $o''$ ,  $a_c$ ,  $b_c$  u. s. w. um die Achse in eine beliebige Lage, so bewegen sich diese Punkte mit ihren Grundloten in Ebenen senkrecht zur Achse, und die Lote behalten ihre wahren Längen. Zieht man dann in der neuen Lage durch  $o'$  die Parallele zu  $o'' o_x$  und durch  $o''$  die zu  $o' o_x$ , so müssen sich diese Parallelen schneiden. Ihr Schnittpunkt  $o$  liegt aber dann so, dass die Verbindungslinie von  $a$  mit  $a_c$  durch ihn hindurchgeht, denn es ist  $a_s a_c \parallel o_x o'' \parallel o o'$  und  $a_c a_s : o_x o'' = a_x a_s : a_x o_x$ , also auch  $a_c a_s : o o' = a_s a_c : a o'$ . Dies gilt für alle Verbindungslinien entsprechender Punkte. Da ausserdem in der Zeichenebene schon entsprechende Gerade sich auf der Achse schneiden, so ist dies natürlich jetzt auch noch



Figur 27.

der Fall. Man sieht nun, dass die eine Figur das perspektive Bild der andern ist unter Annahme des Punkts  $o$  als Zentrum. Ferner ist klar, dass man für jede Lage der Bildebene ein Zentrum konstruieren kann. Da dasselbe aber immer in der Normalebene durch  $o_x$  zur Achse sich bewegt und seinen Abstand von  $o'$  beibehält, so ist leicht einzusehen, dass man das Zentrum auf einem in dieser Ebene liegenden Kreis um  $o'$  mit  $o o'$  als Halbmesser beliebig wählen kann. Fallen Bild- und Grundebene wieder zusammen, dann ist das Zentrum der eine Schnittpunkt dieses Kreises mit der Zeichenebene, d. h. wieder der Punkt  $o'$ . Der zweite Schnittpunkt wäre das Zentrum für ein Zusammenfallen von Bild- und Grundebene nach der Herabdrehung der Bildebene in entgegengesetztem Sinn.

Die Figur zeigt ausserdem, dass die Konstruktionsmethoden der Perspektive auch dann noch gelten, wenn Grund- und Bildebene beliebig gegeneinander geneigt sind. Und zwar ist dies nicht nur der Fall bei Punkten, die in der Grundebene liegen, sondern auch bei beliebig im Raum gegebenen Punkten, wobei nur noch zu bemerken ist, dass Grund- und Aufriss der Punkte durch Projektion in Richtung der Spurnormalen  $o_x o''$  und  $o_x o'$  zu bestimmen sind.

### Perspektive und lineare Transformation.

Durchläuft der Punkt  $a$  in der Grundebene irgend eine Kurve, so beschreibt sein Bild ebenfalls eine Kurve. Es lässt sich nun leicht nachweisen, dass die durch Zentralprojektion aus einer gegebenen Kurve hervorgegangene neue Kurve analytisch-geometrisch durch eine lineare Transformation der gegebenen erhalten wird, dass also perspektive Kollineation gleichbedeutend ist mit linearer Transformation.

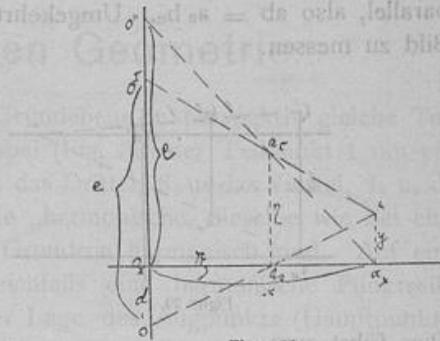
Sei  $a_c$  das Bild eines Punkts  $a$  der Grundebene. Nun führt man ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein, wobei die Achse die X-Achse und die Hauptvertikale die Y-Achse ist.

Die Koordinaten des Punkts  $a$  seien  $x$  und  $y$ , die seines Bildes  $a_0$  dagegen  $\xi$  und  $\eta$ . Man findet nun:

$$\begin{aligned} x : \xi &= O_x O'' : O_x O'' - a_0 a_s \\ &= e : e - \eta, \\ \text{woraus } x &= \frac{e\xi}{e - \eta}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ferner } y : O_x O' &= a_x a_s : a_s O_x \\ &= a_s a_e : O_x O'' - a_s a_e \\ &= \eta : e - \eta, \end{aligned}$$

$$\text{woraus } y = \frac{d\eta}{e - \eta}.$$



Figur 28.

Die Gleichheit der Nenner ist charakteristisch für die lineare Transformation.

Setzt man nun diese Werte für  $x$  und  $y$  etwa in die allgemeine Kegelschnittsgleichung  $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$  ein, so erhält man:

$$a_{11} \cdot \frac{e^2 \xi^2}{(e - \eta)^2} + 2a_{12} \frac{e\xi d\eta}{(e - \eta)^2} + a_{22} \frac{d^2 \eta^2}{(e - \eta)^2} + 2a_{13} \frac{e\xi}{e - \eta} + 2a_{23} \frac{d\eta}{e - \eta} + a_{33} = 0.$$

Multipliziert man die ganze Gleichung mit  $(e - \eta)^2$  durch, so folgt:

$$a_{11} \cdot e^2 \cdot \xi^2 + 2a_{12} e\xi \cdot d\eta + a_{22} d^2 \eta^2 + 2a_{13} e\xi (e - \eta) + 2a_{23} d\eta (e - \eta) + a_{33} (e - \eta)^2 = 0.$$

Man sieht, dass die Gleichung der neuen Kurve vom selben Grad ist wie die der alten. Dies gilt offenbar ganz allgemein. Durch Zentralprojektion wird also der Grad der Kurve nicht geändert, d. h. Zentralprojektion ist gleichbedeutend mit linearer Transformation. Aus einem Kegelschnitt geht daher durch Zentralprojektion wieder ein Kegelschnitt hervor.

Anmerkung: Auch die Umkehrung lässt sich sehr einfach beweisen:

Ist irgend eine Kurve gegeben durch die Gleichung  $f(x, y) = 0$ , und macht man die Gleichung durch Einführung von  $z$  homogen, so erhält man  $f(x, y, z) = 0$ . Diese Gleichung stellt in einem rechtwinkligen räumlichen Koordinatensystem einen Kegel mit Spitze im Ursprung vor. Der Schnitt dieses Kegels mit der Ebene  $z = 1$  liefert die gegebene Kurve. Nimmt man nun eine Koordinatentransformation vor mit Zugrundelegung der Formeln:

$$\begin{aligned} x &= a x' + b y' + c z', \\ y &= a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', \\ z &= a_2 x' + b_2 y' + c_2 z', \end{aligned}$$

so heisst die Gleichung des Kegels im neuen System:

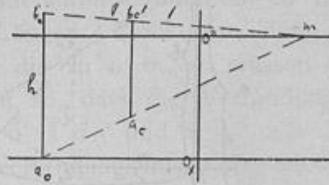
$$f(a x' + b y' + c z', a_1 x' + b_1 y' + c_1 z', a_2 x' + b_2 y' + c_2 z') = 0.$$

Der Schnitt dieses Kegels mit der Ebene  $z' = 1$  liefert aber offenbar nichts anderes als die Kurve, die aus der gegebenen durch lineare Transformation nach obigen Formeln hervorgeht. Die beiden Kurven sind also ebene Schnitte eines und desselben Kegels, d. h. die eine Kurve ist eine Zentralprojektion der andern. Zwei Kurven, von denen die eine durch lineare Transformation aus der andern hervorgegangen ist, lassen sich somit in perspektivkollineare Lage zu einander bringen. Dies lässt sich an einfachen Beispielen auch geometrisch leicht nachweisen.

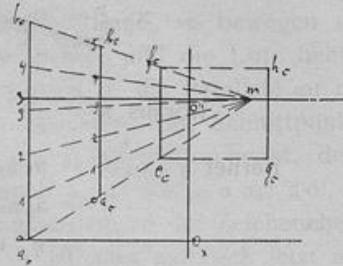
### Perspektive Massstäbe.

Mehrfach schon wurde die Aufgabe gelöst, einer vertikalen Geraden, deren Bild bekannt ist, eine vorgeschriebene Länge zu geben. So z. B. einer auf der Grundebene aufstehenden Vertikalen  $a_e b_e$  die wahre Länge  $h$ . Man verbindet  $a_e$  mit einem beliebigen Punkt  $m$  des Horizonts, errichtet im Schnittpunkt  $a_0$  der Verbindungslinie mit der Achse ein Grundlot, schneidet darauf  $a_0 b_0 = h$  ab und zieht  $b_0 m$ . Diese Linie wird dann von der Vertikalen

$a_c$  in dem gesuchten Endpunkt  $b_o$  geschnitten. Die Linien  $a_o m$  und  $b_o m$  sind in Wirklichkeit parallel, also  $ab = a_c b_o$ . Umgekehrt dient diese Konstruktion dazu, eine vertikale Strecke im Bild zu messen.



Figur 29.



Figur 30.

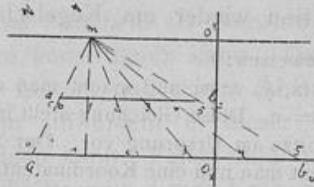
Dies führt zum

### Höhenmassstab. (Figur 30.)

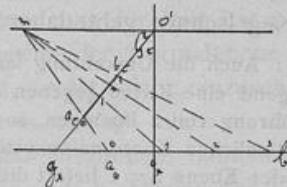
Die parallelen Linien  $a_o m, 1 m, \dots$  von den Teilpunkten des Massstabs  $a_o b_o$  übertragen diesen in wahrer Grösse auf die Geraden  $a b, e f$ . Strecken, die zwischen denselben Strahlen aus  $m$  liegen, sind also gleich lang. So ist auch  $gh$  den andern Strecken gleich. Ein aufrechter Gegenstand erscheint somit umso kleiner, je näher er dem „Horizont“ ist.

### Breitenmassstab. (Figur 31.)

Für Linien der Grundebene in der Breitenrichtung dient auch wieder jeder Punkt  $m$  des Horizonts als „Messpunkt“. Damit kann man sich einen „Breitenmassstab“ verschaffen. Die wahren Längen müssen hierbei auf der Achse abgemessen werden.



Figur 31.



Figur 32.

### Tiefenmassstab. (Figur 32.)

Wollte man für Strecken der Grundebene in der Tiefenrichtung dieselbe Konstruktion vornehmen, so würde man kein wirkliches Mass für sie erhalten, wohl aber eine Einteilung der Strecken in gleiche Teile. Die Strahlen aus  $m$  sind allerdings parallel, aber sie schneiden auf der Geraden  $G$  nicht die gleichen Stücke ab wie auf der Achse. Dies ist nur der Fall, wenn die Parallelen mit der Achse  $45^\circ$  einschliessen, d. h. der „Messpunkt“ beim „Tiefenmassstab“ ist ein Distanzpunkt, während jeder andere Punkt des Horizonts ein „Teilungspunkt“ für solche Gerade ist. Dies ist er aber nicht nur für Linien in der Tiefenrichtung, sondern für alle Gerade der Grundebene. Ein „Messpunkt“ für solche kann nur der Fluchtpunkt von Parallelen sein, die in der Grundebene liegen und mit der Achse denselben Winkel machen wie mit der gegebenen Geraden. Denn nur solche übertragen Strecken von der einen zur andern in wahrer Grösse. Der Fluchtstrahl dieser Parallelen macht dann mit dem Fluchtstrahl der Geraden  $G$  und mit dem Horizont auch gleiche Winkel. Ebenso ist es bei den umgelegten Fluchtstrahlen. Man erhält also den Messpunkt einer Geraden  $G$ , indem man um ihren Fluchtpunkt  $u_c$  einen Kreis mit  $u_c o'$  bis zum Horizont beschreibt.