

Geht man ferner den Asymptotenrichtungen auf der Fläche nach, so erhält man eine doppelt unendliche Schar von Kurven, die wir „Asymptotenlinien“ nennen: ihre Differentialgleichung ist nach § 4, (4)

$$(7) \quad edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = 0.$$

Ist für einen Punkt  $(u, v)$

$$(8) \quad eg - f^2 = 0,$$

so fallen die Asymptotenrichtungen zusammen, die Charakteristik ist eine Parabel, und ein Hauptkrümmungshalbmesser ist unendlich (parabolischer Punkt). Die Gleichung (8) definiert daher eine Linie auf der Fläche, welche sämtliche parabolische Punkte verbindet, man wird diese passend die *parabolische Linie* nennen. Wie für die Flächen im  $R_3$  ist die parabolische Linie im allgemeinen der Ort der Spitzen, in singulären Fällen ganz oder teilweise die Einhüllende der Asymptotenlinien.

Endlich kann man ebenso wie für die Flächen des  $R_3$  kürzeste Linien — geodätische Linien — auf den Flächen im  $R_4$  definieren (vgl. Diss. § 10). Da wir von den entsprechenden Formeln keinen Gebrauch machen, so unterlassen wir es, sie hier aufzustellen. Nur mag noch bemerkt werden, daß auch für die geodätischen Linien auf Flächen im  $R_4$  die Schmiegeebene der Linie stets senkrecht auf der Tangentialebene der Fläche steht.

## II. Kapitel.

### *R*-Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen.

#### § 9.

#### Definition der *R*-Flächen.

Es sei durch die Gleichung

$$(1) \quad z + it = F(x + iy)$$

$z + it$  in einem bestimmten Bereich der  $XY$ -Ebene als analytische Funktion der komplexen Variablen  $x + iy$  definiert. Wir denken uns nun im  $R_4$  ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $X, Y, Z, T$  und stellen in diesem die komplexe Variable  $x + iy$  in der üblichen Weise durch einen bestimmten Punkt  $P_2$  der  $XY$ -Ebene dar. Sei  $z + it$  einer der Werte der Funktion  $F$  im Punkte  $P_2$ , so gehe man in der  $Z$ -Richtung um  $z$  vorwärts bis zum Punkt  $P_1$ , hierauf von  $P_1$  in der  $T$ -Richtung um  $t$  bis zum Punkt  $P$ . Der Punkt  $P$  hat dann die Koordinaten  $x, y, z, t$  und ist der Repräsentant des Funktionswerts  $z + it$ . Hat die Funktion in  $P_2$  noch andere Werte, so wiederhole man für jeden dieser die angegebene Konstruktion: man erhält so die Punkte  $P', P'', \dots$  etc. Für alle diese

Punkte  $P^{(i)}$  ist  $P_2$  die Projektion auf die  $XY$ -Ebene. Durchläuft nun  $P_2$  den Definitionsbereich der Funktion  $F$  in der  $XY$ -Ebene, so wird der Punkt  $P$  eine Fläche im vierdimensionalen Raum beschreiben; dieselbe wird, falls mehrere Punkte  $P$  vorhanden waren, aus mehreren Blättern bestehen. Sind die einzelnen Werte von  $F$  in jedem Punkt  $x + iy$  des Definitionsbereichs durch analytische Fortsetzung alle ineinander überführbar, so werden die einzelnen Blätter der Fläche nicht getrennt voneinander verlaufen, sondern eine einzige zusammenhängende Fläche bilden. Diese Fläche stellt uns offenbar den gesamten Wertevorrat der Funktion  $F$  dar: Wir nennen sie eine *Riemannsche Fläche* im  $R_4$  oder kurz eine *R-Fläche*, weil die Projektion dieser Fläche auf die  $XY$ -Ebene gerade die Riemannsche Fläche der Funktion  $F$  im gewöhnlichen Sinne gibt. Jedem Blatt der letzteren entspricht ein bestimmtes Blatt der *R-Fläche* oder genauer: die beiden Flächen sind eineindeutig aufeinander bezogen. Es wird sich in § 10 zeigen, daß diese Abbildung eine konforme ist. Die Bezeichnung „*R-Fläche*“ scheint gerechtfertigt, weil die Fläche für die Funktionentheorie genau dasselbe leistet, wie die gewöhnliche Riemannsche Fläche. Nimmt man z. B. einen Punkt  $P$  der *R-Fläche* in der Nähe eines Verzweigungspunkts von der Ordnung  $n$ , so wird, wenn die Projektion  $P_2$  von  $P$  auf die  $XY$ -Ebene in dieser den Verzweigungspunkt umläuft,  $P$  in ein zweites, drittes etc. Blatt der *R-Fläche* gelangen. Hat der Punkt  $P_2$  nach  $n$  Umläufen seine Ausgangsstelle wieder erreicht, so ist auch der Punkt  $P$  auf seinen ursprünglichen Platz gerückt: Die  $n$  Blätter der *R-Fläche* hängen in dem Verzweigungspunkt in einem Zyklus zusammen.

Durch diese geometrische Deutung von (1) hat man noch den Vorteil, daß dieselbe *R-Fläche* auch den gesamten Wertevorrat der Umkehrfunktion von (1) darstellt; denn stellt man den Funktionswert  $z + it$  durch den Punkt  $Q_2$  mit den Koordinaten  $(z, t)$  in der  $ZT$ -Ebene dar und geht man von  $Q_2$  in der  $X$ -Richtung um  $x$  vorwärts bis  $Q_1$  und dann von  $Q_1$  in der  $Y$ -Richtung um  $y$ , so hat man wieder den Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $x, y, z, t$  erreicht. Der Punkt  $Q_2$  wird die Projektion von mehreren Flächenpunkten auf die  $ZT$ -Ebene sein können. Sucht man alle diese auf, so erhält man eine gewisse Anzahl Werte  $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2$  etc., welche offenbar die Werte der Umkehrfunktion von (1) für den Wert  $z + it$  repräsentieren. Projiziert man also die *R-Fläche* von (1) auf die  $ZT$ -Ebene, so wird dadurch über der  $ZT$ -Ebene die Riemannsche Fläche (im gewöhnlichen Sinne) der Umkehrfunktion von (1) ausgebreitet. Da demnach die *R-Fläche* in Beziehung auf die  $XY$ -Ebene und  $ZT$ -Ebene dieselbe Rolle spielt, so müssen die Flächensätze, die sich auf die eine Ebene beziehen, in analoger Weise für die andere gelten.

Die Projektion der *R-Fläche* in den Raum  $t = 0$  ist die Fläche der

Punkte  $P_1$ , wir nennen sie kurz die  $t$ -Projektionsfläche: diese stellt die *reellen* Werte von  $F$  dar. Analog nennen wir die Projektion der  $R$ -Fläche in den Raum  $z = 0$  die  $z$ -Projektionsfläche: sie ist das Bild für die *imaginären* Werte von  $F$ . Dreht man nun nach der Methode der darstellenden Geometrie den Raum  $z = 0$  und mit ihm die  $z$ -Projektionsfläche um die  $XY$ -Ebene, bis die  $T$ -Achse mit der  $Z$ -Achse zusammenfällt, so hat man zwei gewöhnliche im Raum  $(XYZ)$  gelegene Flächen, welche die reellen bzw. imaginären Werte von  $F(x + iy)$  repräsentieren: dieselben stellen zwei konjugierte logarithmische Potentiale dar. Dini\*) hat diese untersucht, Dyck\*\*) hat einige von ihnen modellieren lassen. Wir kommen in § 12 auf sie ausführlich zu sprechen.

Schneidet man die Fläche mit dem Raum  $y = 0$ , so erhält man eine in dem Raum  $XZT$  gelegene Kurve, welche das Bild der Funktion  $F$  für *reelle* Werte der Variablen  $x + iy$  darstellt. Die Teile der Kurve, welche in der  $XZ$ -Ebene ( $y = 0, t = 0$ ) liegen, stellen dann die reellen Züge der Kurve  $\zeta = F(\xi)$  dar, wenn  $\zeta = z + it, \xi = x + iy$  gesetzt wird. Ebenso sind die Teile der Kurve, die in der  $XT$ -Ebene ( $y = 0, z = 0$ ) liegen, Repräsentanten der imaginären Kurvenzüge von  $\zeta = F(\xi)$  für reelle Werte von  $\xi$ . So erhält man z. B. für die Gleichung  $\zeta = \sqrt{a^2 - \xi^2}$  als reellen Kurvenzug ( $\xi < a$ ) einen Kreis in der  $XZ$ -Ebene und als imaginären ( $\xi > a$ ) eine gleichseitige Hyperbel in der  $XT$ -Ebene: ihre unendlich fernen Punkte stellen die zwei unendlich fernen Kreispunkte dar. Ebenso gibt die Gleichung  $\zeta = b \sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} - 1}$  für  $\xi > a$  in der  $XZ$ -Ebene eine Hyperbel, für  $\xi < a$  die zu dieser konjugierte Hyperbel in der  $XT$ -Ebene. Diese letztere ist die in der analytischen Geometrie hie und da benutzte „Stellvertreterhyperbel“\*\*\*).

Der Schnitt der Fläche mit der Ebene  $z = 0, t = 0$  gibt in der  $XY$ -Ebene eine gewisse Anzahl Punkte; diese repräsentieren die Werte von  $x + iy$ , für die  $F = 0$  ist, und zwar alle, die reellen und die komplexen. Hat man zwei Gleichungen von der Form (1), so hat man zwei  $R$ -Flächen; die Schnittpunkte dieser stellen die gemeinsamen Werte der beiden Gleichungen dar. Diese Anschauungen dürften namentlich für die algebraischen  $R$ -Flächen von Nutzen sein: statt von Schnittpunkten zweier algebraischer Kurven zu reden, müßte man von den Schnittpunkten der zugehörigen  $R$ -Flächen sprechen. Sind  $m$  und  $n$  die Ordnungen der beiden Kurven, so existieren immer  $mn$  *reelle* derartige Schnittpunkte. Als geometrisches

\*) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 78.

\*\*) Modelle zur Funktionentheorie, Verlag von M. Schilling Ser. XIV.

\*\*\*) Vgl. etwa Salmon-Fiedler, analyt. Geom. der Kegelschnitte, 5. Aufl. I, p. 319.

Bild der algebraischen Gleichung  $f(\xi, \zeta) = 0$  benützt man bald die Riemannsche Verzweigungsfläche, bald nach dem Vorgang von Clebsch\*) eine ebene algebraische Kurve, deren Ebene jedoch, wenn man  $\xi$  und  $\zeta$  auch komplexe Werte beilegt, keine reelle Existenz hat. An die Stelle dieser Kurve tritt nun die *reelle R-Fläche* und man kann sagen: Die Kurve in der Theorie der algebraischen Kurven (als *R-Fläche* dargestellt) und die zugehörige Riemannsche Verzweigungsfläche in der Funktionentheorie sind identische Gebilde.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen gehen wir über zu der Aufstellung der Gleichungen der *R-Flächen*. Dieselben lauten

$$(2) \quad x = x; \quad y = y; \quad z = u(x, y); \quad t = v(x, y),$$

wobei die Funktionen  $u$  und  $v$  den Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

und den hieraus folgenden

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

genügen. In der Tat stellen die Gleichungen (2) eine Fläche im  $R_4$  dar, wobei  $x, y$  die Parameter sind, und wegen (3) ist

$$(5) \quad z + it = u + iv = F(x + iy).$$

Die Gleichungen (2) und (3) geben somit die *allgemeinste R-Fläche*.\*\*)

## § 10.

### Das Linienelement und die Tangentialebene.

Für die Fundamentalgrößen erster Ordnung des § 1 erhält man nach § 9, (2) und (3)

$$(1) \quad F = 0, \quad E = G = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

und für das Linienelement der Fläche

$$(2) \quad ds^2 = \lambda(dx^2 + dy^2),$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$(3) \quad \lambda = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Aus der Gleichung (2) ergibt sich sofort der wichtige Satz: *Die Projektionen der R-Fläche auf die XY-Ebene und (weil die ZT-Ebene dieselbe Rolle wie die XY-Ebene spielt) auf die ZT-Ebene sind konforme Bilder der R-Fläche.* Die beiden Ebenen sind daher auch konform aufeinander

\*) Clebsch, Journ. für Math., Bd. 63 (1863), S. 189 ff.

\*\*\*) Vgl. auch Kwietniewski, a. a. O. § 5.

bezogen, wie dies ja bekannt ist. Entsprechende Punkte der beiden Ebenen sind die beiden Projektionen eines Punktes der  $R$ -Fläche. Aus (2) folgt weiter, daß die Kurven  $x + iy = \text{const.}$  und  $x - iy = \text{const.}$  die *Minimallinien* der  $R$ -Fläche sind. Für manche Fragen ist es nun geschickt, statt der reellen Parameter  $x, y$  die komplexen Parameter der Minimallinien zu benutzen; wir setzen daher

$$(4) \quad x + iy = \sigma; \quad x - iy = \sigma_1.$$

Ist weiter  $\Phi$  die zu  $F$  konjugierte Funktion, so erhalten wir als Flächengleichungen

$$(5) \quad x = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}; \quad y = -\frac{i(\sigma - \sigma_1)}{2}; \quad z = \frac{1}{2}(F(\sigma) + \Phi(\sigma_1)); \quad t = -\frac{i}{2}(F(\sigma) - \Phi(\sigma_1)),$$

und für das Linienelement der Fläche

$$(6) \quad ds^2 = \{1 + F'(\sigma)\Phi'(\sigma_1)\}d\sigma d\sigma_1.$$

Setzt man

$$(7) \quad \xi = \sigma; \quad \eta = -i\sigma; \quad \zeta = F(\sigma); \quad \vartheta = -iF(\sigma);$$

$$(8) \quad \xi_1 = \sigma_1; \quad \eta_1 = i\sigma_1; \quad \zeta_1 = F(\sigma_1); \quad \vartheta_1 = i\Phi(\sigma_1),$$

so stellen die Gleichungen (7) und ebenso (8), da

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + d\vartheta^2 = d\xi_1^2 + d\eta_1^2 + d\zeta_1^2 + d\vartheta_1^2 = 0$$

ist, *Minimallinien* im  $R_4$  dar. Aus (5) folgt nun

$$(9) \quad x = \frac{\xi + \xi_1}{2}; \quad y = \frac{\eta + \eta_1}{2}; \quad z = \frac{\zeta + \zeta_1}{2}; \quad t = \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2}.$$

Die  $R$ -Fläche ist daher der Ort der Mitten aller Sehnen, welche einen beliebigen Punkt der Minimalkurve (7) mit einem beliebigen Punkt der Minimalkurve (8) verbindet. Diese Erzeugungsweise der  $R$ -Flächen erinnert an die der Minimalflächen des  $R_3$ . Es wird sich in § 13 zeigen, daß die  $R$ -Flächen ebenfalls Minimalflächen sind.

Aus § 2, (4) erhält man als *Gleichungen der Tangentialebene* im Punkt  $(x, y, z, t)$

$$(10) \quad Z - z = (X - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$T - t = -(\dot{X} - x) \frac{\partial u}{\partial y} + (Y - y) \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Statt dieser zwei Gleichungen kann man auch die einzige

$$(11) \quad \frac{(z + it) - (Z + iT)}{(x + iy) - (X + iY)} = F'(x + iy)$$

setzen, wobei  $F'$  die Ableitung von  $F$  bedeutet. Aus dieser Gleichung folgt, daß die Aussage: „ $F$  hat eine Ableitung im Punkt  $x + iy$ “ identisch ist mit der Aussage: „Die  $R$ -Fläche besitzt im entsprechenden Punkte eine Tangentialebene“. Ist für einen Wert  $x + iy$  die Ableitung  $F'(x + iy) = 0$ ,

so geht die Tangentialebene parallel mit der  $XY$ -Ebene oder steht senkrecht auf der  $ZT$ -Ebene. Die Umkehrfunktion von  $F$  hat dann bekanntlich im Punkt  $z + it$  einen Verzweigungspunkt. Analog wird  $F$  selbst im Punkt  $x + iy$  einen Verzweigungspunkt haben, wenn die Tangentialebene im entsprechenden Punkt der  $R$ -Fläche senkrecht zur  $XY$ -Ebene steht. Die Fläche wird in diesen Punkten im allgemeinen keine Singularität besitzen: man vergleiche hierzu den Fall einer ebenen Kurve an den Stellen, wo die Tangente parallel einer der Achsen läuft.

Als Gleichungen der Normalebene erhält man nach § 2

$$(12) \quad \begin{aligned} X - x &= - (Z - z) \frac{\partial u}{\partial x} + (T - t) \frac{\partial u}{\partial y}, \\ Y - y &= - (Z - z) \frac{\partial u}{\partial y} - (T - t) \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Die Tangentialebenen und Normalebene der  $R$ -Flächen sind nun eigentümlich im  $R_4$  orientierte Ebenen, indem der Satz gilt: *Die Projektionen einer Tangentialebene oder Normalebene in die  $XY$ - und  $ZT$ -Ebene sind ähnliche Bilder jener Ebenen.* Zum Beweise verschiebe man die Ebenen parallel mit sich in den Nullpunkt und erhält dann für beide Ebenen Gleichungen von der Form

$$(13) \quad Z = aX + bY; \quad T = -bX + aY$$

wo  $a$  und  $b$  zwei beliebige Konstante sind. Diese Gleichungen stellen aber eine spezielle  $R$ -Fläche mit der Gleichung  $Z + iT = (a - ib)(X + iY)$  dar mit dem Linienelement  $ds^2 = (1 + a^2 + b^2)(dx^2 + dy^2)$ . Da das Vergrößerungsverhältnis der konformen Abbildung auf die  $XY$ -Ebene konstant ist, so ist der Beweis des Satzes erbracht. Steht jedoch die Ebene (13) senkrecht auf der  $XY$ -Ebene, so projiziert sie sich auf diese in einen einzigen Punkt und der Satz gilt für diese Ebene nicht. Analog, wenn die Ebene senkrecht zur  $ZT$ -Ebene steht. Die Tangentialebenen und Normalebene der  $R$ -Flächen bilden einen Komplex, den wir mit späterer Begründung (s. § 15) den *Komplex der Nullebenen*\*) nennen. Die Gleichungen des Komplexes lauten

$$(14) \quad Z = aX + bY + c; \quad T = -bX + aY + d$$

wo  $a, b, c, d$  vier beliebige reelle Konstante bedeuten. Zu dem Komplex gehören auch die  $XY$ -Ebene und die  $ZT$ -Ebene, sowie die zu diesen parallelen Ebenen.

\*) Veronese (Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen, übersetzt von Schepp, Leipzig 1894) nennt die Ebenen dieses Komplexes „gleichwinklige Ebenen“, weil jede Gerade in einer von zwei Ebenen des Systems mit ihrer senkrechten Projektion auf die andere Ebene einen und denselben Winkel bildet. Vgl. auch Kwietniewski, a. a. O. § 3. Es erscheint Herrn Kwietniewski entgangen zu sein, daß auch die Normalebene der  $R$ -Flächen dem Komplex angehören.

## § 11.

Deformation der  $R$ -Flächen.

Wir nennen zwei Flächen des  $R_4$  aufeinander abwickelbar, wenn sie punktweise aufeinander bezogen sind und in entsprechenden Punkten dasselbe Linienelement haben. Es entsteht nun die Frage: *Gibt es zu einer gegebenen  $R$ -Fläche andere  $R$ -Flächen, die auf dieselbe abwickelbar sind?*

Zur Beantwortung dieser Frage seien

$$(1) \quad x = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}; \quad y = -\frac{i(\sigma - \sigma_1)}{2}; \quad z = \frac{1}{2}(F(\sigma) + \Phi(\sigma_1)); \quad t = -\frac{i}{2}(F(\sigma) - \Phi(\sigma_1))$$

die Gleichungen der gegebenen Fläche bezogen auf ihre Minimallinien und

$$(2) \quad ds^2 = \{1 + F'(\sigma)\Phi'(\sigma_1)\} d\sigma d\sigma_1$$

ihr Linienelement, vgl. § 10, (5) und (6). Seien weiter  $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$  die Koordinaten eines Punktes einer anderen Fläche in Beziehung auf dasselbe Koordinatensystem,  $\omega$  und  $\omega_1$  die Parameter ihrer Minimallinien,  $f_1$  und  $\varphi_1$  konjugierte Funktionen, so sind die Gleichungen dieser Fläche

$$(3) \quad \xi = \frac{\omega + \omega_1}{2}; \quad \eta = -\frac{i(\omega - \omega_1)}{2}; \quad \zeta = \frac{1}{2}(f_1(\omega) + \varphi_1(\omega_1)); \quad \vartheta = \frac{i}{2}(f_1(\omega) - \varphi_1(\omega_1)),$$

und ihr Linienelement  $dS$  ist bestimmt durch

$$(4) \quad dS^2 = \{1 + f_1'(\omega)\varphi_1'(\omega_1)\} d\omega d\omega_1.$$

Sind nun die beiden Flächen aufeinander abwickelbar, so müssen sich  $\omega$  und  $\omega_1$  als Funktionen von  $\sigma$  und  $\sigma_1$  so bestimmen lassen, daß

$$(5) \quad ds^2 = dS^2$$

ist. Sind aber die Flächen aufeinander abwickelbar, so sind sie insbesondere auch konform aufeinander abgebildet und darum ist nach dem Satz in § 10 die Projektion der einen Fläche auf die  $XY$ -Ebene ein konformes Bild der Projektion der andern Fläche auf die  $XY$ -Ebene. Die Parameter der Minimallinien der Flächen sind nun aber auch Parameter der Minimallinien der  $XY$ -Ebene und es muß daher  $\omega$  eine Funktion von  $\sigma$ , und  $\omega_1$  die konjugierte Funktion von  $\sigma_1$ ; oder  $\omega$  Funktion von  $\sigma_1$ , und  $\omega_1$  die konjugierte Funktion von  $\sigma$  sein. Die letzte Alternative findet statt, wenn die durch die Projektion beider Flächen auf die  $XY$ -Ebene vermittelte konforme Abbildung der  $XY$ -Ebene auf sich selbst eine Abbildung mit Umlegung der Winkel wäre: dann trage man aber die  $\eta$ -Koordinate der zweiten Fläche auf die Seite der negativen  $y$  ab, man erhält dann das Spiegelbild der zweiten Fläche in Beziehung auf den Raum  $y = 0$ . Dieses Spiegelbild müßte offenbar auch auf die erste Fläche abwickelbar sein und die konforme Abbildung der  $XY$ -Ebene

auf sich selbst wäre jetzt eine Abbildung *ohne* Umlegung der Winkel. Ohne der Allgemeinheit zu schaden, dürfen wir also

$$(6) \quad \omega = \psi(\sigma); \quad \omega_1 = \chi(\sigma_1)$$

setzen, wo  $\psi$  und  $\chi$  konjugierte Funktionen sind. Nach der Bestimmung aller auf die erste abwickelbaren Flächen dürfen wir diese letzteren dann natürlich noch einer Spiegelung an dem Raum  $y = 0$  unterwerfen.

Aus (2), (4) und (5) folgt nun

$$(7) \quad 1 + F'(\sigma) \Phi'(\sigma_1) = \{1 + f'_1(\omega) \varphi'_1(\omega_1)\} \frac{d\omega}{d\sigma} \frac{d\omega_1}{d\sigma_1}.$$

Denkt man sich nun in  $f_1(\omega)$  und  $\varphi_1(\omega_1)$  mit Hilfe von (6) die Parameter  $\sigma$  und  $\sigma_1$  eingeführt, so geht  $f_1(\omega)$  über in eine Funktion von  $\sigma$ ,  $\varphi_1(\omega_1)$  in eine Funktion von  $\sigma_1$ , die wir bezüglich mit  $f(\sigma)$  und  $\varphi(\sigma_1)$  bezeichnen, wobei  $f$  und  $\varphi$  konjugierte Funktionen sind: es ist also

$$(8) \quad f_1(\omega) = f(\sigma); \quad \varphi_1(\omega_1) = \varphi(\sigma_1).$$

Hieraus folgt

$$(9) \quad f'_1(\omega) \frac{d\omega}{d\sigma} = f'(\sigma); \quad \varphi'_1(\omega_1) \frac{d\omega_1}{d\sigma_1} = \varphi'(\sigma_1).$$

Man erhält nun aus (6), (7) und (9) die Funktionalgleichung

$$(10) \quad 1 + F'(\sigma) \Phi'(\sigma_1) = \psi'(\sigma) \chi'(\sigma_1) + f'(\sigma) \varphi'(\sigma_1),$$

welche zur Bestimmung der Funktionen  $f, \varphi, \psi, \chi$  dient. Statt (10) schreiben wir

$$(11) \quad \frac{1}{\varphi'(\sigma_1)} + \frac{F'(\sigma) \Phi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} - \frac{\psi'(\sigma) \chi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = f'(\sigma)$$

wobei  $\varphi'(\sigma_1)$  als von Null verschieden vorausgesetzt ist. Ist aber  $\varphi'(\sigma_1) = 0$ , so folgt aus (9), da  $\omega_1$  von  $\sigma_1$  abhängig sein muß und daher nicht konstant sein kann, daß  $\varphi'_1(\omega_1) = 0$  ist; dann wäre nach (3) die zweite Fläche eine Ebene. In diesem Fall zeigt man aber leicht, daß dann auch die erste Fläche eine Ebene sein müßte. Schließen wir also diesen trivialen Fall aus, setzen also voraus, daß  $F'''(\sigma)$  nicht identisch Null ist, so gilt (11) allgemein. Wir differenzieren (11) nach  $\sigma$  und erhalten, wenn wir zur Abkürzung

$$(12) \quad \frac{\Phi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = \Theta(\sigma_1); \quad \frac{\chi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = H(\sigma_1)$$

setzen,

$$(13) \quad F''(\sigma) \Theta(\sigma_1) - \psi''(\sigma) H(\sigma_1) = f''(\sigma).$$

Diese Gleichung differenziert man nach  $\sigma_1$  und erhält

$$(14) \quad F'''(\sigma) \Theta'(\sigma_1) - \psi''(\sigma) H'(\sigma_1) = 0.$$

$F'''(\sigma)$  haben wir eben als von Null verschieden vorausgesetzt und  $H'(\sigma_1)$  muß auch von Null verschieden sein; denn wäre  $H'(\sigma_1) = 0$ , so würde

aus (14) sich ergeben  $\Theta'(\sigma_1) = 0$  und aus (12), wenn  $m$  und  $n$  Konstante bedeuten,  $\Phi'(\sigma_1) = m\varphi'(\sigma_1)$ ,  $\chi'(\sigma_1) = n\varphi'(\sigma_1)$ . Vertauscht man hier  $i$  mit  $-i$ , so folgt  $F'(\sigma) = m_0 f'(\sigma)$ ,  $\psi'(\sigma) = n_0 f'(\sigma)$ , wenn  $m_0, n_0$  die zu  $m, n$  konjugierten Konstanten bedeuten. Eliminiert man aus diesen vier Gleichungen und (10) alle Funktionen außer  $f'(\sigma)$  und  $\varphi'(\sigma_1)$ , so folgt

$$f'(\sigma) \varphi'(\sigma_1) = \frac{1}{nn_0 - mm_0 + 1}.$$

Aus dieser Gleichung schließt man, daß  $\varphi'(\sigma_1)$  konstant ist, und jetzt aus der Gleichung  $\Phi'(\sigma_1) = m\varphi'(\sigma_1)$ , daß  $\Phi'(\sigma_1)$  ebenfalls eine Konstante ist. In diesem Fall stellen aber die Gleichungen (1) eine Ebene dar, was oben ausgeschlossen wurde.  $H'(\sigma_1)$  ist demnach von Null verschieden, und aus (14) folgt nun

$$(15) \quad \frac{\Theta'(\sigma_1)}{H'(\sigma_1)} = \frac{\psi''(\sigma)}{F''(\sigma)}.$$

Die linke Seite hängt aber bloß von  $\sigma_1$ , die rechte nur von  $\sigma$  ab: jede der beiden Seiten ist daher gleich einer Konstanten  $\alpha$ . Aus (15) erhält man jetzt, wenn  $\beta, \gamma$  zwei weitere Konstanten bedeuten

$$\Theta(\sigma_1) = \alpha H(\sigma_1) + \beta, \quad \psi'(\sigma) = \alpha F'(\sigma) + \gamma$$

oder nach (12)

$$(16) \quad \frac{\Phi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = \frac{\alpha\chi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} + \beta; \quad \psi'(\sigma) = \alpha F'(\sigma) + \gamma.$$

Hieraus und aus (11) folgt

$$(17) \quad \frac{1 - \gamma\chi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = f'(\sigma) - \beta F'(\sigma).$$

Hier muß nun jede der Seiten wieder einer Konstanten  $\delta$  gleich sein und wir erhalten somit

$$(18) \quad 1 - \gamma\chi'(\sigma_1) = \delta\varphi'(\sigma_1),$$

$$(19) \quad f'(\sigma) - \beta F'(\sigma) = \delta.$$

Bedeutet  $a, b, c$  drei weitere Konstante, so folgt aus (19) und (16)

$$(20) \quad f(\sigma) = \beta F(\sigma) + \delta\sigma + a,$$

$$(21) \quad \psi(\sigma) = \alpha F(\sigma) + \gamma\sigma + b,$$

$$(22) \quad \Phi(\sigma_1) = \alpha\chi(\sigma_1) + \beta\varphi(\sigma_1) + c.$$

Die Gleichungen (18), (20), (21), (22) enthalten die Lösung. Die in diesen auftretenden Konstanten sind jedoch nicht völlig willkürlich, sondern es bestehen vier Relationen zwischen ihnen, welche ausdrücken, daß  $F(\sigma), \Phi(\sigma_1); f(\sigma), \varphi(\sigma_1); \psi(\sigma), \chi(\sigma_1); \sigma, \sigma_1$  vier Paare konjugiert imaginärer Größen sind. Bezeichnet man die zu einer der Konstanten konjugierte durch den Index Null und vertauscht in (22)  $i$  mit  $-i$ , so folgt:

$$F(\sigma) = \alpha_0 \psi(\sigma) + \beta_0 f(\sigma) + c_0.$$

Trägt man den Wert von  $\psi(\sigma)$  aus (21) in die vorstehende Gleichung ein, so kommt

$$F(\sigma) = \alpha\alpha_0 F(\sigma) + \gamma\alpha_0\sigma + \beta_0 f(\sigma) + b\alpha_0 + c_0.$$

Hier ist  $\beta_0$  sicher von Null verschieden, sonst wäre  $F(\sigma)$  eine in  $\sigma$  lineare Funktion und (1) eine Ebene; es ist also nach  $f(\sigma)$  aufgelöst

$$(23) \quad f(\sigma) = \left(\frac{1-\alpha\alpha_0}{\beta_0}\right) F(\sigma) - \frac{\gamma\alpha_0}{\beta_0} \sigma - \left(\frac{b\alpha_0+c_0}{\beta_0}\right).$$

Die Gleichungen (20) und (23) müssen identisch übereinstimmen, denn sonst wäre  $F(\sigma)$  wieder lineare Funktion von  $\sigma$ , bzw. wäre, falls die Koeffizienten  $F(\sigma)$  in (20) und (23) gleich wären,  $\sigma$  konstant. Durch Koeffizientenvergleichung ergibt sich also

$$(24) \quad \alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 = 1; \quad \delta\beta_0 + \gamma\alpha_0 = 0; \quad a\beta_0 + b\alpha_0 + c_0 = 0.$$

Die vierte Relation erhält man aus (18). Man vertausche dort  $i$  mit  $-i$  und erhält  $\delta_0 f''(\sigma) + \gamma_0 \psi'(\sigma) = 1$ . Entnimmt man aus (20) und (21) die Werte  $f'(\sigma)$  und  $\psi(\sigma)$  und setzt sie in die letzte Gleichung ein, so folgt

$$(\delta_0 \beta + \gamma_0 \alpha) F'(\sigma) + \delta \delta_0 + \gamma \gamma_0 = 1.$$

Aus der zweiten Gleichung (24) folgt aber durch Vertauschung von  $i$  mit  $-i$ :  $\delta_0 \beta + \gamma_0 \alpha = 0$  und somit aus der letzten Gleichung

$$(25) \quad \gamma \gamma_0 + \delta \delta_0 = 1.$$

Nun ist nach (8) und (3)  $f(\sigma) = f_1(\omega) = \xi + i\vartheta$ , weiter nach (1)  $\sigma = x + iy$ ,  $F(\sigma) = z + it$  und nach (6) und (3)  $\psi(\sigma) = \omega = \xi + i\eta$ . Aus (20) und (21) folgt also

$$(26) \quad \xi + i\eta = \alpha(z + it) + \gamma(x + iy) + b,$$

$$(27) \quad \xi + i\vartheta = \beta(z + it) + \delta(x + iy) + a.$$

Durch diese Gleichungen wird jedem Punkt  $(x, y, z, t)$  der gegebenen Fläche ein Punkt  $(\xi, \eta, \xi, \vartheta)$  der auf sie abwickelbaren Fläche zugewiesen. Die Gleichungen (26) und (27) zusammen mit den Relationen (24) und (25) enthalten demnach die vollständige Lösung der Aufgabe. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können wir nun  $a = b = 0$  und daher (24) auch  $c = 0$  setzen; es entspricht dies einer passenden Parallelverschiebung der zweiten Fläche. Durch passende Orientierung der  $\xi\eta$ -Achsen in der  $\xi\eta$ -Ebene und der  $\xi\vartheta$ -Achsen in der  $\xi\vartheta$ -Ebene kann man weiter bewirken, daß die Konstanten  $\gamma$  und  $\delta$  reell sind. Das  $\xi\eta\xi\vartheta$ -Koordinatensystem denken wir uns dann mitsamt der zweiten Fläche gedreht, bis es wieder mit dem  $xyzt$ -Koordinatensystem zusammenfällt. Setzt man nun

$$(28) \quad \gamma = \cos \gamma_1; \quad \delta = \sin \gamma_1; \quad \alpha = \cos \delta_1 e^{-i\alpha_1}; \quad \beta = \sin \delta_1 e^{i\beta_1}; \quad a = b = c = 0,$$

wo  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$  nunmehr *reelle* Konstanten bedeuten, so sind durch diesen

Ansatz die erste und dritte Gleichung (24) und die Gleichung (25) befriedigt. Die zweite Gleichung (24) gibt endlich

$$\operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \delta_1 + e^{i(\alpha_1 + \beta_1)} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \text{entweder } \alpha_1 + \beta_1 = \pi \quad \text{und dann } \delta_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma_1 \quad \text{bezw. } \delta_1 = \frac{3\pi}{2} - \gamma_1 \\ \text{oder } \alpha_1 + \beta_1 = 2\pi \quad \text{und dann } \delta_1 = \gamma_1 - \frac{\pi}{2} \quad \text{bezw. } \delta_1 = \gamma_1 - \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Aus (28) und diesen Gleichungen folgt, daß

$$(29) \quad \gamma = \cos \gamma_1; \quad \delta = \sin \gamma_1; \quad \alpha = \sin \gamma_1 e^{-i\alpha_1}; \quad \beta = -\cos \gamma_1 e^{-i\alpha_1}; \quad a = b = c = 0$$

ist. Eigentlich erhält man noch eine zweite Reihe von Gleichungen für die Bestimmung der Konstanten, diese geht aber aus (29) dadurch hervor, daß man für  $\alpha_1$  den Wert  $\alpha_1 - \pi$  setzt. Die Werte der Konstanten setze man aus (29) in (26) und (27) ein und erhält dann durch Trennung des Reellen und Imaginären die *Schlußformeln*

$$(30) \quad \begin{aligned} \xi &= x \cos \gamma_1 && + z \sin \gamma_1 \cos \alpha_1 + t \sin \gamma_1 \sin \alpha_1, \\ \eta &= && y \cos \gamma_1 - z \sin \gamma_1 \sin \alpha_1 + t \sin \gamma_1 \cos \alpha_1, \\ \zeta &= x \sin \gamma_1 && - z \cos \gamma_1 \cos \alpha_1 - t \cos \gamma_1 \sin \alpha_1, \\ \vartheta &= && y \sin \gamma_1 + z \cos \gamma_1 \sin \alpha_1 - t \cos \gamma_1 \cos \alpha_1, \end{aligned}$$

in denen  $\alpha_1$  und  $\gamma_1$  zwei beliebige reelle Konstanten bedeuten. Aus (30) folgt nun

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \vartheta^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

und hieraus ergibt sich, daß die Gleichungen (30) eine *orthogonale Substitution* darstellen. Alle Flächen, deren Gleichungen (30) durch Variierung der Konstanten  $\alpha_1, \gamma_1$  hervorgehen, sind daher unter sich kongruent: da für  $\alpha_1 = \pi, \gamma_1 = 0$  aus (30)  $\xi = x, \eta = y, \zeta = z, \vartheta = t$  folgt, so sind alle diese Flächen mit der gegebenen kongruent. Nach dem, was oben im Anschluß an Gleichung (5) und (6) gesagt wurde, gilt also der Satz: *Alle aufeinander abwickelbaren R-Flächen sind entweder kongruent oder Spiegelbilder voneinander in Beziehung auf einen dreidimensionalen Raum.*

In bekannter Weise können wir nun die Gleichungen (30) aber auch auffassen als Gleichungen der gegebenen Fläche, nur bezogen auf ein gedrehtes Koordinatensystem  $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ . Dieses Koordinatensystem ist aber nun *nicht* in beliebiger Weise zur Fläche orientiert, sondern die Ebene  $\xi = 0, \eta = 0$ , welche in Beziehung auf das  $xyzt$ -Koordinatensystem die Gleichungen

$$(31) \quad \begin{aligned} z &= -x \operatorname{ctg} \gamma_1 \cos \alpha_1 + y \operatorname{ctg} \gamma_1 \sin \alpha_1, \\ t &= -x \operatorname{ctg} \gamma_1 \sin \alpha_1 - y \operatorname{ctg} \gamma_1 \cos \alpha_1 \end{aligned}$$

hat, und ebenso die Ebene  $\xi = 0$ ;  $\vartheta = 0$ , welche in Beziehung auf das  $xyzt$ -System

$$(32) \quad \begin{aligned} z &= x \operatorname{tg} \gamma_1 \cos \alpha_1 - y \operatorname{tg} \gamma_1 \sin \alpha_1, \\ t &= x \operatorname{tg} \gamma_1 \sin \alpha_1 + y \operatorname{tg} \gamma_1 \cos \alpha_1 \end{aligned}$$

zu Gleichungen hat, gehören zu dem am Schluß von § 10 definierten Komplex der Nullebenen des vierdimensionalen Raums. Die Gleichungen (31) oder (32) enthalten aber offenbar alle Ebenen des Komplexes — nur sind diese parallel mit sich so verschoben, daß sie alle durch den Ursprung gehen. Da nun die Gleichungen (30) eine  $R$ -Fläche auch in Beziehung auf die  $\xi\eta$ - und  $\xi\vartheta$ -Ebene darstellen, so folgt nach § 10 der interessante

Satz. *Projiziert man eine  $R$ -Fläche auf alle Ebenen des Nullkomplexes, so erhält man lauter konforme Bilder der  $R$ -Fläche.\**

Da die Tangential- und Normalebene der  $R$ -Fläche selbst zu dem Komplex gehören, so gilt der

Zusatz. *Die Projektionen einer  $R$ -Fläche auf ihre sämtlichen Tangential- und Normalebene sind konforme Bilder der  $R$ -Fläche.*

Bemerkung. Durch die Gleichungen (30) ist  $\zeta + i\vartheta$  als Funktion von  $\xi + i\eta$  definiert; der funktionale Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen wird ein ganz anderer sein als zwischen  $z + it$  und  $x + iy$ : daraus folgt, daß eine und dieselbe  $R$ -Fläche sehr verschiedene funktionale Zusammenhänge geometrisch darstellen kann.

## § 12.

### Die Krümmung der $R$ -Flächen.

Als Flächengleichung benutzen wir die Gleichung § 9, (2) und berechnen zunächst die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung sowie die Größen  $e$ ,  $f$ ,  $g$  (s. § 1). Achtet man auf die Gleichungen § 9, (3), (4), so erhält man für die *Fundamentalgrößen zweiter Ordnung*:

$$(1) \quad \begin{cases} D_x = -D'_x = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; & D_y = -D'_y = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ D_z = -D'_z = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; & D_t = -D'_t = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ D'_x = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; & D'_y = -\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \\ D'_z = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; & D'_t = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

$$(2) \quad f = 0; \quad e = g = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

\*) Vgl. Kwietniewski, a. a. O. § 3, VI.

Nach den Gleichungen § 4, (3) und § 10, (1), (3) ergeben sich als Gleichungen der Charakteristik in einem beliebigen Flächenpunkt  $(x, y)$ :

$$(3) \quad \begin{aligned} X-x &= \frac{\lambda D'_x(dx^2-dy^2) + 2\lambda D''_x dx dy}{e(dx^2+dy^2)}; & Y-y &= \frac{\lambda D'_y(dx^2-dy^2) + 2\lambda D''_y dx dy}{e(dx^2+dy^2)}; \\ Z-z &= \frac{\lambda D'_z(dx^2-dy^2) + 2\lambda D''_z dx dy}{e(dx^2+dy^2)}; & T-t &= \frac{\lambda D'_t(dx^2-dy^2) + 2\lambda D''_t dx dy}{e(dx^2+dy^2)}, \end{aligned}$$

wo  $\lambda$  die § 10, (3) angegebene Bedeutung hat.

Jeder Fortschreitungsrichtung  $(dx, dy)$  auf der Fläche im Punkt  $(x, y, z, t)$  ist nach (3) ein Punkt  $(X, Y, Z, T)$  des Kegelschnitts zugewiesen. Benutzt man nun die aus (1) und (2) sich ergebenden Identitäten

$$(4) \quad \Sigma(D_x)^2 = \Sigma(D'_x)^2 = \Sigma(D''_x)^2 = e\lambda, \quad \Sigma D_x D'_x = 0, \quad \Sigma D'_x D''_x = 0, \\ \Sigma D_x D''_x = -e\lambda,$$

so folgt aus (3)

$$(5) \quad (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 + (T-t)^2 = \frac{\lambda^2}{e}$$

und hieraus der

Satz: Die Charakteristik ist für jeden Flächenpunkt einer  $R$ -Fläche ein Kreis und der Flächenpunkt sein Mittelpunkt oder: eine  $R$ -Fläche besitzt lauter Kreispunkte.\*)

Bezeichnet man den Radius dieses Kreises im Punkt  $(x, y, z, t)$  mit  $r$ , so folgt aus (5)

$$r = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}.$$

Aus dem in § 7 Gesagten geht nun hervor:

Die Krümmungsradien sämtlicher Normalschnitte in einem Flächenpunkt sind gleich  $r$ . Die Hauptkrümmungsrichtungen sind unbestimmt. In der Tat verschwindet die linke Seite der Differentialgleichung der Krümmungslinien (§ 8, (4)) identisch. Alle Projektionsflächen in die Schar der Tangentialräume im Flächenpunkt  $(x, y)$  haben in dem betreffenden Punkt den Charakter von Minimalflächen und dasselbe Krümmungsmaß. Die Asymptotenlinien § 8, (7) sind die Minimallinien der  $R$ -Fläche, also imaginär. Die Involution § 5 ist eine Rechtwinkel-Involution: Ein Tangentialraum schneidet also aus der Fläche zwei zueinander senkrechte Linienelemente aus und zwei zueinander senkrechte Tangentialräume schneiden vier Linienelemente aus, welche untereinander Winkel von je  $\frac{\pi}{4}$  bilden etc.

Das Krümmungsmaß  $k$  der Fläche erhält man entweder nach der

\*) Vgl. Kwietniewski, a. a. O. § 3, VII.

Bemerkung am Schluß von § 6 aus  $ds^2 = \lambda(dx^2 + dy^2)$  mit Hilfe der Gaußschen Formel oder einfacher nach § 7. Es folgt

$$(7) \quad k = -\frac{2}{r^2} = -\frac{2e}{\lambda^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Gleichung (6) für den Radius  $r$  der Charakteristik läßt sich noch auf eine bemerkenswerte Form bringen. Bedeutet wieder  $\Phi$  die konjugierte Funktion von  $F$  in § 9, (5), so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = F'(x + iy), \quad \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} = \Phi'(x - iy),$$

$$\text{also } \lambda = 1 + F''(x + iy) \Phi'(x - iy)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F''(x + iy) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad \Phi''(x - iy) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$$\text{also } \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = e = F''(x + iy) \Phi''(x - iy).$$

Aus (6) folgt nun

$$(8) \quad \frac{1}{r} = \frac{[F''(x + iy) \Phi''(x - iy)]^{\frac{1}{2}}}{[1 + F''(x + iy) \Phi'(x - iy)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Ist  $F$  eine *reelle* Funktion (also  $F = \Phi$ ) der *reellen* Variablen  $x$  allein ( $y = 0$ ), so erhält man aus (8)

$$(9) \quad \frac{1}{r} = \frac{F''(x)}{\{1 + (F'(x))^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Gleichung (9) gibt aber die Größe der Krümmung  $\frac{1}{r}$  der Kurve  $z = F(x)$  im Punkte  $(x)$  an. Läßt man für  $x$  und  $z$  in  $z = F(x)$  auch komplexe Werte zu, so tritt an die Stelle der Kurve die  $R$ -Fläche und zur Berechnung „der Krümmung  $\frac{1}{r}$ “ hat man die Formel (8), welche somit eine Verallgemeinerung von (9) darstellt. Sucht man die Werte von  $x + iy$ , welche der Gleichung  $F''(x + iy) = 0$  genügen, so erhält man auf der  $R$ -Fläche die den Wendepunkten ebener Kurven entsprechenden Punkte. In diesen ist die Krümmung sämtlicher Normalschnitte gleich Null. Da nun die  $R$ -Fläche die zugehörige ebene Kurve enthält, so hat man eine *reelle* Darstellung sämtlicher Wendepunkte einer ebenen Kurve erreicht. Die bekannten Sätze über die Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung z. B. finden so im  $R_4$  eine reelle Interpretation, nämlich: die neun Wendepunkte einer  $R$ -Fläche dritter Ordnung liegen zu je dreien auf einer Nullebene.

Bezieht man zwei ebene Kurven durch parallele Tangenten punktweise aufeinander, so verhalten sich zwei entsprechende Linienelemente umgekehrt wie die entsprechenden Krümmungen. Analog zeigt man ohne Schwierigkeit: Bezieht man zwei  $R$ -Flächen durch parallele Tangential-

ebenen punktweise aufeinander, so verhalten sich zwei entsprechende Linienelemente umgekehrt wie die entsprechenden Krümmungen. Damit zeigt sich von neuem die große Analogie der Krümmung ebener Kurven mit der Krümmung der  $R$ -Flächen. Zum Schlusse führen wir noch zwei Sätze an, deren Beweis wir übergehen:

*Eine  $R$ -Fläche, die überall die konstante Krümmung Null besitzt, ist eine Ebene; und: es gibt keine  $R$ -Fläche, welche in allen Punkten eine konstante von Null verschiedene Krümmung besitzt.*

### § 13.

#### Die assoziierten Projektionsflächen.

Wir betrachten nunmehr die beiden Flächen, die durch Projektion der  $R$ -Fläche in die dreidimensionalen Räume  $z=0$  bzw.  $t=0$  entstehen, und die wir in § 9  $z$ -Projektionsfläche bzw.  $t$ -Projektionsfläche genannt haben: dieselben stellen zwei konjugierte logarithmische Potentiale dar. Es ist nützlich, überhaupt allgemein die Projektion der  $R$ -Fläche in einen beliebigen durch die  $XY$ -Ebene gehenden dreidimensionalen Raum zu untersuchen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\begin{aligned} z' &= z \cos \alpha + t \sin \alpha, \\ t' &= z \sin \alpha - t \cos \alpha, \end{aligned}$$

mit anderen Worten, wir drehen das Koordinatensystem um die  $XY$ -Ebene um den Winkel  $\alpha$ . Jetzt hat die Projektion der  $R$ -Fläche in den Raum  $t'=0$  zu Gleichungen

$$(1) \quad z' = u \cos \alpha + v \sin \alpha; \quad t' = 0.$$

Die Gleichungen (1) stellen also eine gewöhnliche Fläche dar, die aus der  $R$ -Fläche durch Projektion in den Raum  $z \sin \alpha - t \cos \alpha = 0$  entsteht. Läßt man in (1)  $\alpha$  variieren, so erhält man eine ganze Schar von Flächen, nämlich die Projektionsflächen in die Räume  $z \sin \alpha - t \cos \alpha = 0$ . Wir nennen diese Flächen *assoziierte Projektionsflächen*. Zwei Flächen der Schar, die den Parameterwerten  $\alpha$  und  $\alpha + \frac{\pi}{2}$  entsprechen und darum Projektionsflächen in zwei zueinander senkrechte Räume darstellen, nennen wir *adjungierte Projektionsflächen*. Die  $t$ -Projektionsfläche und die  $z$ -Projektionsfläche ( $\alpha=0$ ;  $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ) sind adjungierte Flächen. Diese letzteren hat Dini\*) untersucht; die Sätze I und II im folgenden stellen Erweiterungen der von Dini für zwei adjungierte Projektionsflächen gefundenen Sätze dar.\*\*)

\*) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 78.

\*\*) Vgl. auch. R. v. Lilienthal, J. f. Math. 98 (1885), p. 131.

Für das Linienelement  $ds$  der Fläche (1) erhält man mit Rücksicht auf § 9, (3)

$$(2) \quad ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2,$$

wobei

$$E = 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha \right)^2;$$

$$F = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha \right);$$

$$G = 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha \right)^2$$

ist. Für das Flächenelement  $dJ = \sqrt{EG - F^2} dx dy$  erhält man hieraus

$$(3) \quad dJ = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

Da  $dJ$  von  $\alpha$  unabhängig ist, so folgt der

Satz I. *Die assoziierten Projektionsflächen (1) sind flächentreu aufeinander abgebildet.*

Für das Krümmungsmaß  $k$  in einem Punkt  $(x, y)$  der Fläche (1) erhält man

$$(4) \quad k = - \frac{\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2}{\lambda^2},$$

wo

$$\lambda = 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

gesetzt ist. Aus (4) ergibt sich, daß die Projektionsflächen überall negativ gekrümmt sind, und weiter

Satz II. *Die assoziierten Projektionsflächen haben in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß.*

Sind weiter  $a, b, c$  die Richtungskosinus der Normalen in einem Punkt  $(x, y)$  von (1), so ist

$$(5) \quad a\sqrt{\lambda} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha; \quad b\sqrt{\lambda} = \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha; \quad c\sqrt{\lambda} = -1.$$

Da hier  $c$  von  $\alpha$  unabhängig ist, so folgt, daß die Tangentialebenen der assoziierten Projektionsflächen in entsprechenden Punkten gegen die  $XY$ -Ebene dieselbe Neigung besitzen, was sich auch leicht aus Satz I geometrisch ergibt. Sind  $a_1, b_1, c_1$  die Richtungskosinus der Normalen einer anderen Fläche der Schar (1) mit dem Parameterwert  $\alpha_1$ , so ergibt sich aus (5)

$$(6) \quad \frac{aa_1 + bb_1}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \cos(\alpha - \alpha_1)$$

und hieraus

Satz III. Die Tangentialebene in einem Punkt  $(x, y)$  der Projektionsfläche  $(\alpha)$  ist gegen die Tangentialebene der Fläche  $(\alpha_1)$  im entsprechenden Punkt um die Verbindungslinie der zwei entsprechenden Punkte um den Winkel  $\alpha - \alpha_1$  gedreht.

Hieraus oder auch aus Satz I, II und mit Hilfe des Gaußschen Satzes folgt:

Satz IV. Die sphärischen Bilder der assoziierten Projektionsflächen sind kongruent.

Durch Drehung um die  $z'$ -Achse kommen sie zur Deckung miteinander. Die assoziierten Projektionsflächen bilden ein hübsches Beispiel dafür, daß Flächen, die in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß besitzen und überdies noch flächentreu aufeinander bezogen sind, doch nicht aufeinander abwickelbar sein müssen. Die Flächen der Schar (1) gehen zwar durch stetige Gestaltsänderung ineinander über: diese Gestaltsänderung ist aber keine solche ohne Dehnung, da das Linienelement (2) von  $\alpha$  nicht unabhängig ist.

Wir betrachten weiter auf zwei assoziierten Flächen mit den Gleichungen

$$(7) \quad z' = u \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad z'_1 = u \cos \alpha_1 + v \sin \alpha_1$$

die Kurven  $z' = \text{konst.}$  bzw.  $z'_1 = \text{konst.}$  Man zeigt leicht, daß die Projektionen dieser Kurvensysteme auf die  $XY$ -Ebene sich allenthalben unter dem Winkel  $\alpha - \alpha_1$  schneiden. Hieraus folgt für zwei adjungierte Flächen der auch sonst bekannte

Satz V. Die Projektionen der Niveaulinien einer von zwei adjungierten Projektionsflächen auf die  $XY$ -Ebene sind die Projektionen der Falllinien der anderen und umgekehrt.\*)

Ebenso ergibt sich ohne Schwierigkeit, daß die Winkel der Parameterkurven in entsprechenden Punkten zweier adjungierter  $R$ -Flächen supplementär sind.

Wir wenden uns zu den Asymptotenlinien der assoziierten Projektionsflächen: die Gleichungen dieser erhält man durch Quadratur, wie wir jetzt zeigen wollen.

Zu diesem Zweck nehmen wir als Parameterkurven der Fläche (1) die Kurven, die auf die  $XY$ -Ebene projiziert die Minimallinien dieser Ebene geben. Beachtet man, daß  $u \cos \alpha + v \sin \alpha$  der reelle Teil der Funktion  $e^{-i\alpha} F(x + iy)$  ist, wenn  $u + iv = F(x + iy)$  ist, so erhält man nach § 10, 5 als Gleichungen der assoziierten Projektionsflächen:

$$(8) \quad x = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}; \quad y = -\frac{i(\sigma - \sigma_1)}{2}; \quad z' = \frac{1}{2}(e^{-i\alpha} F(\sigma) + e^{i\alpha} \Phi(\sigma_1)).$$

\*) Vgl. die pag. 23 angeführten Modelle.

Dabei ist  $\Phi$  die zu  $F$  konjugierte Funktion,  $\sigma$  und  $\sigma_1$  sind die Parameter. Für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung  $D, D', D''$  erhält man \*)

$$D = \frac{ie^{-i\alpha} F''(\sigma)}{4\delta}; \quad D' = 0; \quad D'' = \frac{ie^{i\alpha} \Phi''(\sigma_1)}{4\delta},$$

wo zur Abkürzung

$$\delta^2 = -\frac{1}{4} \{1 + F'(\sigma) \Phi'(\sigma_1)\}$$

gesetzt ist. Die Differentialgleichung der Asymptotenlinien lautet nun

$$(9) \quad e^{-i\alpha} F''(\sigma) d\sigma^2 + e^{i\alpha} \Phi''(\sigma_1) d\sigma_1^2 = 0.$$

Hier sind aber die Variablen getrennt und man erhält daher die Gleichungen der Asymptotenlinien selbst durch Quadratur.

Die Differentialgleichung (9) ist aber auch zugleich die Differentialgleichung der Asymptotenlinien einer Schar *assoziierter Minimalflächen*\*\*) mit den Gleichungen

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \int (1 - \sigma^2) e^{-i\alpha} F''(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \int (1 - \sigma_1^2) e^{i\alpha} \Phi''(\sigma_1) d\sigma_1, \\ y &= \frac{i}{2} \int (1 + \sigma^2) e^{-i\alpha} F''(\sigma) d\sigma - \frac{i}{2} \int (1 + \sigma_1^2) e^{i\alpha} \Phi''(\sigma_1) d\sigma_1, \\ z &= \int \sigma e^{-i\alpha} F''(\sigma) d\sigma + \int \sigma_1 e^{i\alpha} \Phi''(\sigma_1) d\sigma_1. \end{aligned}$$

Durch die Gleichungen (8) und (10) ist nun die Minimalfläche (10) auf die Projektionsfläche (8) abgebildet (aber nicht konform) und zwar so, daß die Asymptotenlinien sich entsprechen. Zu dem Minimalflächenpunkt  $(\sigma, \sigma_1)$  erhält man die Projektion auf die  $XY$ -Ebene des entsprechenden Punkts der Projektionsfläche dadurch, daß man das sphärische Bild des Minimalflächenpunkts stereographisch auf die  $XY$ -Ebene projiziert. Daraus folgt aber nach den bekannten Sätzen über die Minimalflächen, daß die beiden Flächen so abgebildet sind, daß die Projektion der Projektionsfläche (8) auf die  $XY$ -Ebene ein konformes Bild der Minimalfläche ist. Da nun die Asymptotenlinien sich entsprechen und diese die Minimalfläche bekanntlich in unendlich kleine Quadrate teilen, so folgt der

Satz VI. Die Projektionen der Asymptotenlinien jeder assoziierten Projektionsfläche auf die  $XY$ -Ebene bilden ein isometrisches Kurvensystem.

Aus dem bekannten Satz endlich bezüglich der konformen Abbildung zweier adjungierter Minimalflächen, wonach den Krümmungslinien der einen Minimalfläche die Asymptotenlinien der adjungierten entsprechen

\*) Vgl. z. B. Stahl-Kommerell, Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie § 2.

\*\*) Vgl. ebenda § 12, (12) und (9).

und umgekehrt, schließt man, daß die Projektionen der Asymptotenlinien von zwei adjungierten Projektionsflächen auf die  $XY$ -Ebene vier Systeme von Kurven geben, die sich überall unter einem Winkel gleich  $\frac{\pi}{4}$  schneiden.

## § 14.

**Die  $R$ -Flächen sind Minimalflächen des  $R_4$ .**

Auf der durch die Gleichung

$$(1) \quad z + it = F(x + iy)$$

dargestellten  $R$ -Fläche denken wir uns ein zusammenhängendes durch eine oder mehrere Grenzkurven  $\Gamma$  begrenztes Flächenstück. Die Projektion des Flächenstücks auf die  $XY$ -Ebene gibt einen Bereich  $\mathfrak{B}_1$  mit den Grenzkurven  $\Gamma_1$  und ebenso erhält man durch Projektion auf die  $ZT$ -Ebene in dieser einen Bereich  $\mathfrak{B}_2$  mit den Grenzkurven  $\Gamma_2$ . Die Bereiche  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  bilden wegen der konformen Abbildung des auf der  $R$ -Fläche liegenden Flächenstücks auf die  $XY$ - und  $ZT$ -Ebene (vgl. § 10) ebenfalls zusammenhängende Flächenstücke, die jedoch ihre Ebenen mehrfach überdecken können. Durch die in  $\mathfrak{B}_1$  (samt Grenzkurven) reguläre Funktion (1) — dies setzen wir von  $F$  voraus — ist dann  $\mathfrak{B}_1$  konform auf  $\mathfrak{B}_2$  abgebildet. Durch die Grenzkurven  $\Gamma$  legen wir nun eine andere Fläche  $A$ , von der wir voraussetzen, daß das innerhalb  $\Gamma$  liegende Flächenstück frei von Singularitäten sei und daß die Projektionen dieses Flächenstücks auf die  $XY$ - und  $ZT$ -Ebene gerade die Bereiche  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  geben: mit anderen Worten, daß durch dieses Flächenstück die Bereiche  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  ein-eindeutig — aber jetzt nicht konform — aufeinander abgebildet werden. Die Gleichungen dieser Fläche  $A$  seien

$$(2) \quad x = x, \quad y = y, \quad z = U(x, y), \quad t = V(x, y).$$

Nach dem oben Gesagten müssen wir also von den sonst willkürlichen Funktionen  $U, V$  voraussetzen, daß sie samt ihren ersten partiellen Ableitungen in Bereich  $\mathfrak{B}_1$  eindeutige und stetige Funktionen von  $x, y$  sind, daß in  $\mathfrak{B}_1$  ihre Funktionaldeterminante stets von Null verschieden ist und daß die längs der Grenzkurven  $\Gamma_1$  von  $\mathfrak{B}_1$  aufgepflanzten Werte die Kurven  $\Gamma$  des  $R_4$  geben. Unter diesen Voraussetzungen beweisen wir nun den

*Satz. Der auf der  $R$ -Fläche von den Kurven  $\Gamma$  begrenzte Flächeninhalt ist kleiner als der entsprechende auf der Fläche  $A$ . In diesem Sinne sind die  $R$ -Flächen Minimalflächen des  $R_4$ .*

*Beweis.* Für das Flächenelement  $dJ$  von (2) hat man

$$(3) \quad dJ = \delta dx dy,$$

wo

(4)

$$\delta = +\sqrt{EG - F^2};$$

(5)

$$E = 1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2; \quad F = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y};$$

$$G = 1 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2$$

ist. Ist  $dJ_1$  die Projektion von  $dJ$  auf die  $XY$ -Ebene,  $dJ_2$  die Projektion von  $dJ$  auf die  $ZT$ -Ebene, so hat man, wie man leicht nachrechnet,

(6)

$$dJ_1 = dx dy; \quad dJ_2 = +\sqrt{eg - f^2} dx dy,$$

wo

(7)

$$e = E - 1; \quad f = F; \quad g = G - 1$$

gesetzt ist; die Inhalte  $dJ$ ,  $dJ_1$ ,  $dJ_2$  fassen wir dabei als positive Größen auf, da es hier nur auf die Größe und nicht auf den Umlaufssinn derselben ankommt. Wir zeigen nun, daß, wenn nicht gleichzeitig

(8)

$$e = g, \quad f = 0$$

ist, stets  $dJ > dJ_1 + dJ_2$  ist. Aus (3), (4) und (7) folgt nämlich

(9)

$$dJ = +\sqrt{1 + e + g + eg - f^2} dx dy.$$

Weiter ist  $\frac{e+g}{2} \geq +\sqrt{eg}$ , wo das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn  $e = g$  ist; um so mehr ist also  $e + g > 2\sqrt{eg - f^2}$ . An die Stelle des Zeichens  $>$  tritt hier nur das Zeichen  $=$ , wenn die beiden Gleichungen (8) gleichzeitig bestehen. Aus (9) ergibt sich nun, falls die Gleichungen (8) nicht gleichzeitig erfüllt sind,

$$dJ > +\sqrt{1 + 2\sqrt{eg - f^2} + eg - f^2} dx dy$$

oder

$$dJ > (1 + \sqrt{eg - f^2}) dx dy$$

oder

(10)

$$dJ > dJ_1 + dJ_2.$$

Sind aber die Gleichungen (8) beide erfüllt, so ist

(11)

$$dJ = dJ_1 + dJ_2.$$

Die Gleichungen (8) und (5) geben aber dann

(12)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

und  $U$  ist der reelle,  $V$  der imaginäre Teil einer Funktion von  $x + iy$  oder umgekehrt, d. h. die Fläche  $A$  ist dann eine  $R$ -Fläche. Ist also  $A$  nicht auch eine  $R$ -Fläche — und dies kann, wie sogleich gezeigt wird, nur dann der Fall sein, falls  $A$  mit der gegebenen  $R$ -Fläche zusammenfällt — so gilt für die  $R$ -Fläche (11), für die Fläche  $A$  (10). Bezeichnet man nun mit  $J_R$  den Inhalt des in die Kurven  $\Gamma$  eingespannten Flächenstücks der  $R$ -Fläche, mit  $J_A$  den entsprechenden Inhalt der Fläche  $A$  und mit  $J_1$  und  $J_2$  die Inhalte von  $\mathfrak{B}_1$  bzw.  $\mathfrak{B}_2$  (d. h. aller Blätter von  $\mathfrak{B}_1$

und  $\mathfrak{B}_2$ ), so erhält man aus (10) und (11) entsprechend den bezüglich der Fläche  $A$  gemachten Voraussetzungen

$$(13) \quad J_R = J_1 + J_2,$$

$$(14) \quad J_A > J_1 + J_2.$$

Es bleibt jetzt nur noch übrig, zu zeigen, daß es außer der gegebenen  $R$ -Fläche durch  $\Gamma$  keine zweite den für die Fläche  $A$  gemachten Voraussetzungen genügende  $R$ -Fläche gibt; denn wäre

$$z + it = f(x + iy)$$

die Gleichung einer solchen, so müßte  $f$  und darum auch die Funktion

$$(15) \quad Z + iT = F(x + iy) - f(x + iy)$$

eine in  $\mathfrak{B}_1$  (samt Rand) reguläre Funktion von  $x + iy$  sein. Bei der durch (15) vermittelten konformen Abbildung von  $\mathfrak{B}_1$  auf die  $ZT$ -Ebene würde aber allen Punkten der Kurven  $\Gamma_1$  der Punkt  $Z = 0, T = 0$  entsprechen, was der Regularität widerspricht. Ist also  $A$  eine von der gegebenen  $R$ -Fläche verschiedene Fläche, so ist sicher die Gleichung (14) erfüllt und damit der Beweis des Satzes erledigt.

Genau so wie zuletzt zeigt man, daß zwei  $R$ -Flächen innerhalb eines Gebietes, in dem sie Bilder regulärer Funktionen sind, nicht einmal die Punkte eines noch so kleinen endlichen Kurvenstücks miteinander gemein haben können, ohne zusammenzufallen. Zwei  $R$ -Flächen schneiden sich eben in diskreten Punkten und nicht in Linien. Da somit eine  $R$ -Fläche durch ein noch so kleines endliches Kurvenstück eindeutig bestimmt ist, so darf man deshalb zur Bestimmung einer *Minimalfläche* ( $R$ -Fläche) im vierdimensionalen Raum nicht eine beliebige Raumkurve  $\Gamma$ , durch die die Fläche gehen soll, vorgeben. Aus der Funktionentheorie ist ja auch bekannt, daß die Angabe der reellen Werte  $z$  längs  $\Gamma_1$ , die imaginären Werte  $t$  längs  $\Gamma_1$  bis auf eine additive Konstante bestimmt. Mit andern Worten: man darf zur Bestimmung der Minimalfläche nur die Projektion  $\gamma$  der Randkurve  $\Gamma$  in den dreidimensionalen Raum  $t = 0$  vorgeben. Die Aufgabe, aus  $\gamma$  die Minimalfläche zu bestimmen, ist identisch mit der bekannten Randwertaufgabe der Funktionentheorie.

Wir schließen mit zwei Bemerkungen. Aus (3) folgt nämlich, daß das Integral

$$\int_{\mathfrak{B}_1} \int \delta \, dx \, dy$$

erstreckt über  $\mathfrak{B}_1$  für die  $R$ -Fläche einen Minimalwert besitzt. Aus (12) folgt aber, daß der Minimalwert  $J_R$  selbst gegeben ist durch

$$(16) \quad J_R = \int_{\mathfrak{B}_1} \int \left( 1 + \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right) dx \, dy,$$

wo jetzt  $U + iV = F(x + iy)$  ist.

Das rechtsstehende Integral stimmt aber bis auf die additive Konstante  $\int_{\mathfrak{B}_1} dx dy$  mit dem Integral überein, dessen Minimum-Eigenschaft bei dem sogenannten *Dirichletschen Prinzip* betrachtet wird.

Aus (13), (16) und (6) folgt endlich

$$\int_{\mathfrak{B}_1} \int \left( 1 + \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = \int_{\mathfrak{B}_1} dx dy + \int_{\mathfrak{B}_2} dU dV$$

und hieraus der bekannte Satz von Green

$$(17) \quad \int_{\mathfrak{B}_1} \int \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \int U dV,$$

wo das rechtsstehende Integral um den Rand von  $\mathfrak{B}_1$  oder  $\mathfrak{B}_2$  so zu führen ist, daß sein Wert positiv wird. Die Gleichung (13) enthält also eine interessante geometrische Interpretation für den Greenschen Satz.

Anmerkung. Bedeutet  $\delta''(\varphi)$  den Differentialparameter zweiter Ordnung\*) für das Linienelement der Minimalfläche (*R-Fläche*), so ergibt sich leicht

$$\delta''(x) = \delta''(y) = \delta''(z) = \delta''(t) = 0 \quad \text{und} \quad \delta''(Ax + By + Cz + Dt) = 0,$$

wo  $A, B, C, D$  Konstanten sind. Die letzte Gleichung sagt aber aus\*\*), daß jede Schar von Parallelräumen aus der Minimalfläche ein Isothermensystem ausschneidet. Man vergleiche hierzu den analogen für die Minimalflächen des  $R_3$  gültigen Satz. Von der Erzeugung der Minimalflächen des  $R_4$  durch Minimalkurven war in § 10 die Rede.

## § 15.

### Darstellung des Produkts zweier komplexen Größen durch ein Rechteck im vierdimensionalen Raum.

In reellen Zahlengebiet kann das Produkt zweier Größen durch ein Rechteck dargestellt werden. Durch geeignete Festsetzungen kann man nun auch für zwei komplexe Größen  $x + iy$  und  $z + it$  ein Rechteck angeben, welches das Produkt derselben geometrisch interpretiert. Dies ist für manche Zwecke von Vorteil.

Ist  $O$  der Ursprung des Koordinatensystems, so stellen wir, wie üblich, die Größe  $x + iy$  durch den Vektor  $OP_1$  der  $XY$ -Ebene und die Größe  $z + it$  durch den Vektor  $OP_2$  der  $ZT$ -Ebene dar. Diese beiden Vektoren

\*) vgl. etwa Stahl-Kommerell, Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie § 17, (7).

\*\*) *ibid.* § 17, IV.

bestimmen ein Rechteck  $OP_1PP_2$ , wobei  $P$  die Koordinaten  $x, y, z, t$  hat; dieses Rechteck soll uns der Repräsentant von  $(x+iy) \cdot (z+it)$  sein. Bezeichnet man dieses Rechteck mit  $J$ , so setze man symbolisch

$$(1) \quad J = (x+iy)(z+it).$$

Für das folgende ist es nun geschickter, dem Punkt  $P$  nicht die Koordinaten  $x, y, z, t$  zuzuschreiben, sondern die Koordinaten  $x, iy, z, it$ . Nach dieser Festsetzung projiziere man das Rechteck  $J$  der Reihe nach auf die  $XZ$ -,  $YZ$ -,  $XT$ -,  $YT$ -Ebene und erhält so vier Rechtecke, die wir mit  $J_{xz}$ ,  $J_{yz}$ ,  $J_{xt}$ ,  $J_{yt}$  bezeichnen. Das Rechteck  $J_{xt}$  z. B. hat die Seiten  $x$  und  $it$  und hat einen Inhalt  $= xt$ ; wir sagen aber jetzt, der Inhalt sei  $ixt$ , und machen dies ebenso für die anderen Rechtecke. Man erhält so

$$(2) \quad J_{xz} = xz, \quad J_{yz} = iyz, \quad J_{xt} = ixt, \quad J_{yt} = -yt;$$

aus (2) folgt aber jetzt  $J_{xz} + J_{yz} + J_{xt} + J_{yt} = (x+iy)(z+it)$  und darum aus (1)

$$(3) \quad J = J_{xz} + J_{yz} + J_{xt} + J_{yt}.$$

Wir nennen nun das Rechteck  $J$  den *Produktvektor* der beiden Vektoren  $OP_1$  und  $OP_2$  oder der beiden komplexen Größen  $x+iy$  und  $z+it$  und den Punkt  $O$  seine *Ecke*. Die vier Größen  $J_{xz}$  etc. nennen wir die *Komponenten* des Produktvektors. Nach (3) ist also *der Produktvektor gleich der Summe seiner vier Komponenten*. Zwei Produktvektoren heißen gleich, wenn jeder dieselbe Komponentensumme hat. Zwei Produktvektoren werden addiert, indem man die Komponenten addiert. Man kann nun mit einem Produktvektor mancherlei Lageverschiebungen und Änderungen vornehmen, ohne daß er seinen Wert ändert. Für uns kommen hauptsächlich drei solche Veränderungen in Betracht.

I. Nach (1) ist  $J = a(x+iy) \cdot \frac{z+it}{a}$ , wo  $a$  eine reelle Konstante bedeuten möge. Daraus folgt, daß man die Seiten  $OP_1$  und  $OP_2$  des Produktvektors verändern darf, wenn nur dabei der Inhalt des Rechtecks  $J$  derselbe bleibt.

II. Da weiter  $J = e^{i\alpha}(x+iy) \cdot (z+it)^{-i\alpha}$  ist, wo  $\alpha$  wieder reell sein möge, so folgt, daß man die eine Seite  $OP_1$  von  $J$  in der  $XY$ -Ebene im Sinne der wachsenden Winkel um den Winkel  $\alpha$  drehen darf, wenn man nur ebenso  $OP_2$  in der  $ZT$ -Ebene im Sinne der abnehmenden Winkel um den Winkel  $\alpha$  dreht. Dabei ist in der  $XY$ - und  $ZT$ -Ebene derjenige Drehsinn der positive, in dem gedreht die positiven reellen Achsen nach einer Drehung von  $\frac{\pi}{2}$  mit den positiven imaginären Achsen zusammenfallen. Durch die genannte Operation kann man jeden Produktvektor aus dem  $R_4$  in den dreidimensionalen Raum  $XYZ$  hereindrehen: man braucht

dazu nur  $OP_2$  um den Winkel  $P_2OZ$  in der  $ZT$ -Ebene im Sinne der abnehmenden Winkel und  $OP_1$  in der  $XY$ -Ebene um denselben Winkel im Sinne der wachsenden Winkel zu drehen.

III. Endlich kann man den Produktvektor offenbar parallel mit sich verschieben. Um dabei die Komponenten des verschobenen Produktvektors mit dem richtigen Zeichen zu erhalten, ist zu beachten, daß die Rechteckseiten des Produktvektors gerichtete Größen sind und darum auch die Projektionen derselben.

Durch diese Festsetzungen ist es nun möglich, irgend welchen algebraischen Ausdruck komplexer Größen durch geometrische Konstruktionen darzustellen.

Beispiel. Es sei  $z + it = (x + iy)^n$  und es soll zu dem Wert  $x + iy$  der Funktionswert gesucht werden. Der Vektor  $OP_1$  (s. Fig. 1) in der

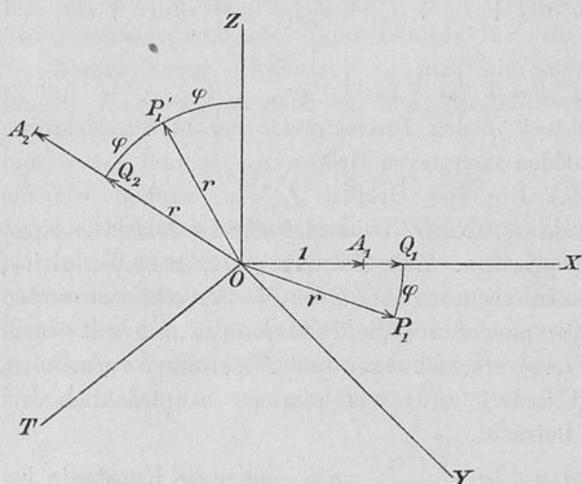


Fig. 1.

$XY$ -Ebene sei  $= x + iy$ , ebenso  $OP_1' = x + iy$  in der  $ZT$ -Ebene. Der Radiusvektor von  $OP_1$  und  $OP_1'$  sei  $r$ , die Amplitude  $\varphi$ . Der Produktvektor aus  $OP_1$  und  $OP_1'$  ist dann gleich  $(x + iy)^2$ . Wir drehen nun  $OP_1$  um den Winkel  $\varphi$  nach  $OQ_1$  ( $Q_1$  liegt auf der  $X$ -Achse) in negativem Sinn und dafür  $OP_1'$  um  $\varphi$  in positivem Sinn nach  $OQ_2$ .  $OQ_1$  und  $OQ_2$  geben jetzt

ebenfalls einen Produktvektor gleich  $(x + iy)^2$ . Sei  $OA_1 = 1$ , dann verkleinere man  $OQ_1$  im Verhältnis  $\frac{1}{r}$ , worauf  $Q_1$  nach  $A_1$  gelangt;

$OQ_2$  dagegen vergrößere man im Verhältnis  $\frac{r}{1}$ , worauf  $Q_2$  nach  $A_2$  gelangt.

Der durch  $OA_1$  und  $OA_2$  bestimmte Produktvektor ist ebenfalls  $= (x + iy)^2$ . Da nun aber  $OA_1 = 1$ , so ist  $OA_2 = (x + iy)^2$ ,  $OA_2$  und  $OP_1$  bilden nun einen Produktvektor  $= (x + iy)^3$ . Man verfare nun gerade so wie vorher, drehe  $OP_1$  zurück nach  $OQ_1$  und verkürze wieder

$OQ_1$  im Verhältnis  $\frac{1}{r}$ . Dafür hat man  $OA_2$  wiederum um den Winkel  $\varphi$

in positivem Sinn zu drehen und die Länge  $OA_2$  mit  $r$  zu multiplizieren. Daraus folgt, daß der Vektor  $z + it$ , der die Größe  $(x + iy)^n$  darstellt,

die  $n$ -fache Amplitude von  $x + iy$  besitzt und einen Radiusvektor gleich der  $n^{\text{ten}}$  Potenz des Radiusvektors von  $x + iy$ . Läuft nun der Vektor  $OP_1$  einmal in der  $XY$ -Ebene herum, so macht der Vektor  $OP_n = z + it$   $n$  Umläufe in der  $ZT$ -Ebene. Mit andern Worten: die durch die Gleichung  $z + it = (x + iy)^n$  dargestellte  $R$ -Fläche gibt, auf die  $XY$ -Ebene projiziert, eine Riemannsche Fläche mit einem Blatt, auf die  $ZT$ -Ebene projiziert, eine solche mit  $n$  Blättern. Zieht man durch die jeweilige Lage von  $P_1$  den Vektor  $P_1P$  parallel und gleich  $OP_n$ , so wird der Punkt  $P$  eine auf der  $R$ -Fläche liegende Kurve beschreiben, die, auf die  $XY$ -Ebene projiziert, den einfachen Kreis mit dem Radius  $OP_1$  gibt, auf die  $ZT$ -Ebene projiziert, den Kreis mit dem Radius  $OP_n$  aber  $n$  mal gerechnet. Man erhält so eine Anschauung für das Verhalten der  $R$ -Fläche im Nullpunkt, wo  $x + iy$ , als Funktion von  $z + it$  betrachtet, einen Windungspunkt  $(n-1)^{\text{ter}}$  Ordnung besitzt.

## § 16.

Geometrische Deutung von  $\int F(x + iy) (dx + idy)$ .

Wir betrachten die durch die Gleichung

$$(1) \quad z + it = F(x + iy)$$

dargestellte  $R$ -Fläche. In einem Bereich der  $XY$ -Ebene, in dem  $F$  regulär sich verhält, ziehen wir eine Kurve  $A_1B_1$  (s. Fig. 2) und pflanzen nun in

allen Punkten dieser Kurve die aus (1) sich ergebenden Werte  $z + it$  auf: dadurch erhalten wir auf der  $R$ -Fläche die Kurve  $AB$ . Sei  $P_1$  ein Punkt von  $A_1B_1$  mit den Koordinaten  $x, iy$ ,  $P$  der entsprechende Punkt auf  $AB$ , so stellt uns der Vektor  $P_1P$  den in  $P_1$  vorhandenen Funktionswert  $z + it$  von (1) dar. Lassen wir  $P_1$  von  $A_1$  nach  $B_1$  wandern, so überfährt der Vektor  $P_1P$  dabei eine gewisse

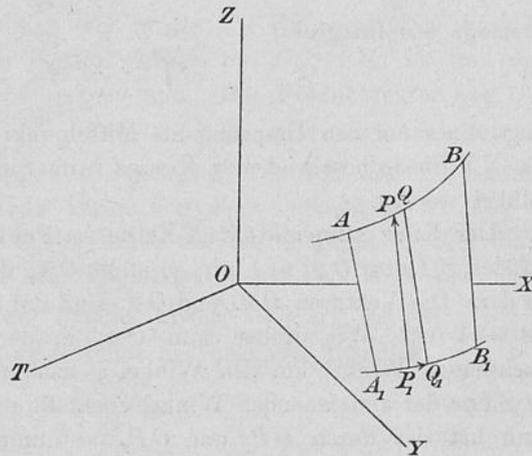


Fig. 2.

Fläche, die wir die *Vektorfläche* nennen. Sei  $Q_1$  ein  $P_1$  sehr benachbarter Punkt der Kurve  $A_1B_1$ ,  $Q$  sein entsprechender auf  $AB$  und setze man  $P_1Q_1 = dx + idy$ , so bestimmen die beiden Vektoren  $P_1P$  und  $P_1Q_1$  einen

Produktvektor mit der Ecke  $P_1$ . Wir nennen ihn  $dJ$ . Die vier Komponenten von  $dJ$  werden bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung mit den vier Projektionen des Stücks  $P_1Q_1QP$  auf die Ebenen der Komponenten von  $dJ$  übereinstimmen. Bildet man nun

$$(2) \quad \int_{A_1}^{B_1} F(x+iy) (dx+idy),$$

so stellt dieses bestimmte Integral die Summe der vier Projektionen der Vektorfläche  $AA_1B_1BA$  auf die genannten Ebenen in dem in § 15 namhaft gemachten Sinne dar. Nennt man diese vier Projektionen ebenfalls die *Komponenten* der Vektorfläche, so kann man

$$(3) \quad \int_{A_1}^{B_1} F(x+iy) (dx+idy) = J$$

setzen, wofern man unter  $J$  die Summe der vier Komponenten der Vektorfläche  $AA_1B_1BA$  versteht. Man sieht, daß (3) auf eine reelle Funktion  $F(x)$  der reellen Variablen  $x$  angewendet die gewöhnliche Deutung des  $\int_{A_1}^{B_1} F(x) dx$  gibt, wenn die  $X$ -Achse zur Integrationskurve  $A_1B_1$  genommen wird.

Beispiel:

$$(4) \quad z + it = \frac{1}{x+iy}.$$

Es möge das Integral

$$(5) \quad \int \frac{dx+idy}{x+iy}$$

längs eines um den Ursprung als Mittelpunkt und mit dem Radius 1 in der  $XY$ -Ebene beschriebenen Kreises  $k$  im Sinne der wachsenden Winkel geführt werden.

Der Kreis schneide die  $X$ -Achse im Punkt  $A_1$  (s. Fig. 3); trägt man auf der  $Z$ -Achse  $OA_2 = 1$  ab, so stellt  $OA_2$  den Funktionswert im Punkt  $A_1$  dar. Die Vektoren  $OA_1$  und  $OA_2$  sind die Seiten eines Produktvektors, der  $= 1$  ist. Wir drehen nun  $OA_1$  in der  $XY$ -Ebene im Sinne der wachsenden Winkel um den Winkel  $\varphi$  nach  $OP_1$ ,  $OA_2$  in der  $ZT$ -Ebene im Sinne der abnehmenden Winkel ebenfalls um den Winkel  $\varphi$  nach  $OP_2$ , dann hat der durch  $OP_1$  und  $OP_2$  bestimmte Produktvektor nach § 15 ebenfalls den Wert 1.  $OP_2$  stellt also (wie übrigens auch aus der durch (4) vermittelten konformen Abbildung der  $XY$ -Ebene auf die  $ZT$ -Ebene folgt) den in  $P_1$  vorhandenen Funktionswert dar. Es ist demnach, wenn  $P_1$  die Koordinaten  $x, iy$ , hat  $OP_2 = \frac{1}{x+iy}$ .  $P_1Q_1$  sei  $= dx+idy$ . Wir

verlegen nun den Vektor  $P_1 Q_1$  parallel mit sich so nach  $O$ , daß  $P_1$  auf  $O$  fällt und nennen den nach  $O$  verschobenen Vektor  $OQ'$ . Aus  $OQ'$  und  $OP_2$  bilden wir einen Produktvektor: dieser ist dann  $= \frac{dx + i dy}{x + iy}$ .  $OP_2$  drehe man in der  $ZT$ -Ebene um den Winkel  $\varphi$  im Sinne der wachsenden

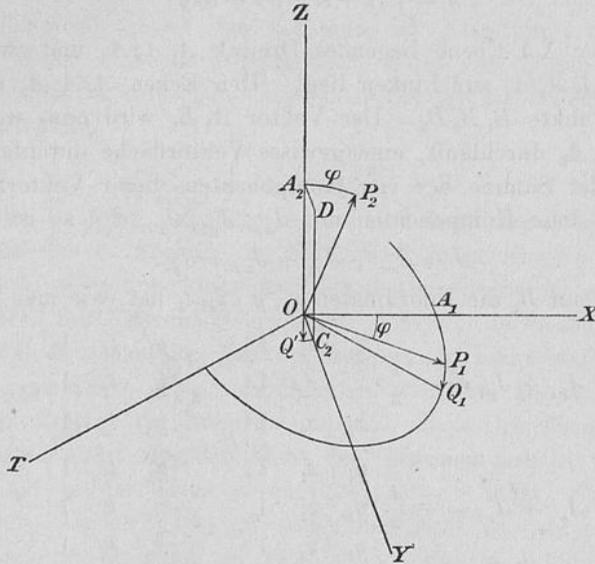


Fig. 3.

Winkel bis  $OA_2$ , dann muß man  $OQ'$  in der  $XY$ -Ebene um den Winkel  $\varphi$  im Sinne der abnehmenden Winkel drehen bis  $OC_2$ . Es ist nun aber klar, daß  $C_2$  auf der  $Y$ -Achse liegen muß. Der Produktvektor aus  $OA_2$  und  $OC_2$  ist somit  $= \frac{dx + i dy}{x + iy}$ . Der Produktvektor ist aber jetzt mit seiner zur  $YZ$ -Ebene gehörigen Komponente identisch, da alle anderen Null sind. Bezeichnet man die Länge von  $P_1 Q_1$  mit  $ds$ , so ist  $OC_2$  der Länge nach ebenfalls  $= ds$ ;  $C_2$  hat daher auf der  $Y$ -Achse die Koordinate  $i \cdot ds$  und der Produktvektor aus  $OA_2$  und  $OC_2$  hat den Wert  $i ds$ . Teilt man nun den Kreis in lauter gleiche kleine Teile  $ds$ , so hat  $\frac{dx + i dy}{x + iy}$  überall den Wert  $i ds$ . Es folgt somit das bekannte Resultat

$$\int_K \frac{dx + i dy}{x + iy} = 2i\pi.$$

Ebenso zeigt man leicht, daß

$$\int_K (x + iy)^n (dx + i dy) = 0$$

ist, wo  $n$  eine ganze positive oder negative von  $-1$  verschiedene Zahl ist.

Als zweites Beispiel nehmen wir die Funktion

$$(6) \quad z + it = (a + ib)(x + iy) + c + id,$$

welche eine spezielle  $R$ -Fläche nämlich eine Nullebene  $N$  darstellt, und führen das Integral

$$(7) \quad J = \int (z + it)(dx + idy)$$

um ein in der  $XY$ -Ebene liegendes Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  und zwar so, daß das Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  zur Linken liegt. Den Ecken  $A_1 A_2 A_3$  entsprechen auf  $N$  drei Punkte  $B_1 B_2 B_3$ . Der Vektor  $A_1 B_1$  wird nun, wenn  $A_1$  das Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  durchläuft, eine gewisse Vektorfläche durchfahren;  $J$  ist dann gleich der Summe der vier Komponenten dieser Vektorfläche. Bezeichnet man diese Komponenten mit  $J_{xz}$ ,  $J_{yz}$ ,  $J_{xt}$ ,  $J_{yt}$ , so ist

$$(8) \quad J = J_{xz} + J_{yz} + J_{xt} + J_{yt}.$$

Es ist nun, wenn  $B_k$  die Koordinaten  $x_k, y_k, z_k, t_k$  hat, wie man leicht zeigt

$$(9) \quad J_{xz} + J_{yt} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} - \frac{i^2}{2} \begin{vmatrix} y_1 & t_1 & 1 \\ y_2 & t_2 & 1 \\ y_3 & t_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$(10) \quad J_{yz} + J_{xt} = -\frac{i}{2} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} - \frac{i}{2} \begin{vmatrix} x_1 & t_1 & 1 \\ x_2 & t_2 & 1 \\ x_3 & t_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Da nun aber nach (6)

$$(11) \quad z_k = ax_k - by_k + c; \quad t_k = bx_k + ay_k + d$$

ist, so sieht man, daß die rechten Seiten von (9) und (10) identisch verschwinden. Daraus folgt

$$(12) \quad \int_{A_1 A_2 A_3} (z + it)(dx + idy) = 0.$$

Gleichung (12) stellt einen speziellen Fall des Cauchyschen Integralsatzes dar. Das Bestehen der Gleichung (12) ist auch der Anlaß gewesen, warum wir eine Ebene mit der Gleichung (6) eine *Nullebene* nannten. Ebenso wollen wir jedes in einer Nullebene liegende Dreieck ein *Nulldreieck* nennen. Weil nun die Tangentialebenen jeder  $R$ -Fläche Nullebenen sind (vgl. § 10), so kann man von hier aus einen Beweis des Cauchyschen Integralsatzes für eine beliebige  $R$ -Fläche gewinnen. Wir skizzieren kurz den Gang desselben.

Es sei in der  $XY$ -Ebene ein zusammenhängender Bereich  $\mathfrak{B}$  mit den Grenzkurven  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$  gegeben und die Funktion

$$(13) \quad z + it = F(x + iy)$$

sei in  $\mathfrak{B}$  (einschließlich der Grenzkurven) eindeutig erklärt, sie werde in

$\mathfrak{B}$  nirgends unendlich und besitze an jeder Stelle von  $\mathfrak{B}$  eine endliche Ableitung. Mit anderen Worten: wir setzen voraus, daß die durch (13) dargestellte  $R$ -Fläche in allen Punkten von  $\mathfrak{B}$  eine Tangentialebene besitze (vgl. § 10). Wir teilen nun den Bereich  $\mathfrak{B}$  in lauter unendlich kleine Dreiecke; diesen unendlich kleinen Dreiecken der  $XY$ -Ebene werden auf der  $R$ -Fläche wegen der Existenz der Ableitung von  $F$  ebenfalls unendlich kleine Dreiecke entsprechen. Jedes von diesen ist ein Nulldreieck, weil es in einer Tangentialebene der  $R$ -Fläche liegt. Nun führen wir das Integral

$$(14) \quad \int (z + it) (dx + i dy)$$

um jedes der Dreiecke von  $\mathfrak{B}$  so herum, daß das Dreieck zur Linken liegt. Die Summe dieser Integrale ist Null, weil jedes einzelne Integral Null ist (genauer: unendlich klein von der dritten Ordnung, wenn die Seite eines Dreiecks des Bereichs  $\mathfrak{B}$  unendlich klein von der ersten Ordnung ist). Da nun jede Dreiecksseite, die der Begrenzung nicht angehört, zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen wird, so heben sich die entsprechenden Beträge der Integralsumme für diese Dreiecksseiten auf. Die Integralsumme stellt also den Wert dar, den man erhält, wenn man das Integral (14) um die Grenzkurven  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$  so führt, daß  $\mathfrak{B}$  stets zur Linken liegt. Da aber die Integralsumme Null ist, so gilt das gleiche für das längs der Grenzkurven  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$  geführte Integral. Damit ist aber der Integralsatz bewiesen.

Man sieht, daß die Gültigkeit des Satzes durch die Orientierung der Tangentialebenen der  $R$ -Fläche bedingt ist und daß zum Beweise nur die Existenz, nicht aber auch die Stetigkeit der Ableitung von  $F(x + iy)$  vorauszusetzen ist, wie dies auch Goursat\*) neuerdings gezeigt hat.

\*) Vgl. Encyklopädie der math. Wiss. Bd. II<sub>2</sub>, Heft 1, Fußnote 16.

$\mathfrak{B}$  nirg  
 Ableitu  
 dargest  
 sitze ( $\gamma$   
 kleine  $L$   
 auf der  
 unendli  
 dreieck  
 wir das  
  
 (14)  
 um jed  
 Die Su  
 ist (ge  
 eines  $D$   
 Da nu  
 in ent  
 spreche  
 Integra  
 Integra  
 Linken  
 für das  
 aber d  
 M  
 Tangen  
 Exister  
 voraus



von vier Dimensionen. 49

Stelle von  $\mathfrak{B}$  eine endliche  
 voraus, daß die durch (13)  
 $\mathfrak{B}$  eine Tangentialebene be-  
 reich  $\mathfrak{B}$  in lauter unendlich  
 ecken der  $XY$ -Ebene werden  
 Ableitung von  $F$  ebenfalls  
 es von diesen ist ein Null-  
 $R$ -Fläche liegt. Nun führen

$dy$ )  
 das Dreieck zur Linken liegt.  
 jedes einzelne Integral Null  
 en Ordnung, wenn die Seite  
 von der ersten Ordnung ist).  
 ung nicht angehört, zweimal  
 ird, so heben sich die ent-  
 diese Dreiecksseiten auf. Die  
 a man erhält, wenn man das  
 so führt, daß  $\mathfrak{B}$  stets zur  
 Null ist, so gilt das gleiche  
 geführte Integral. Damit ist

es durch die Orientierung der  
 und daß zum Beweise nur die  
 der Ableitung von  $F(x+iy)$   
 ) neuerdings gezeigt hat.

Heft 1, Fußnote 16.

