Minimalflächen des R_4 sind; man erhält so eine geometrische Deutung für das Dirichletsche Prinzip und den Greenschen Satz. Durch Projektion einer R-Fläche in eine Schar dreidimensionaler Räume erhält man eine Schar gewöhnlicher Flächen, die wir assoziierte Projektionsflächen genannt haben, weil sie in naher Beziehung zu einer Schar assoziierter Minimalflächen stehen. Diese Projektionsflächen sind alle aufeinander flächentreu bezogen, haben in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß und besitzen quadrierbare Asymptotenlinien. Zu diesen Flächen gehören die von Dini und v. Lilienthal untersuchten Flächen; einzelne derselben hat Dyck modellieren lassen (vgl. die Fußnoten zu § 9 und § 13). Alle aufeinander abwickelbaren R-Flächen sind kongruent oder Spiegelbilder voneinander in Beziehung auf einen R_3.

Die Projektionen der R-Fläche auf die XY-Ebene und die ZT-Ebene sind konforme Bilder der Fläche selbst und die R-Fläche vermittelt so in einfacher Weise die konforme Abbildung der XY-Ebene auf die ZT-Ebene. Die Tangential- und Normalebenen der R-Flächen sind eigentümlich im R_4 orientierte Ebenen und bilden einen Komplex. Die Gültigkeit des Cauchyschen Integralsatzes ist eine Folge dieser Orientierung der Tangentialebenen der R-Flächen.

Am Schlusse der Arbeit haben wir noch das Produkt zweier komplexer Größen durch ein Rechteck im vierdimensionalen Raum gedeutet und dieses Rechteck den Produktvektor genannt: man erhält so eine einfache geometrische Interpretation des Integrals $\int F(x+iy)\,(dx+i\,dy)$, die eine Verallgemeinerung der bekannten Deutung eines Integrals durch eine Fläche im reellen Gebiet ist.

I. Kapitel.
Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen.

§ 1.
Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung.

Eine Fläche F_2 im ebenen Raum von vier Dimensionen (kurz R_4) wird dargestellt durch Gleichungen von der Form

(1) $$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad t = t(u, v),$$

so daß also die Koordinaten $(xyzt)$ eines Flächenpunkts Funktionen zweier variabler Parameter u, v sind. Von diesen Funktionen setzen wir stets voraus, daß sie voneinander unabhängig und samt ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig sind. Drei der Gleichungen (1) allein stellen eine zweidimensionale Fläche im gewöhnlichen Raume dar, nämlich die Projektion der F_2 auf jenen Raum. Wir nennen diese Fläche kurz die *Projektionsfläche* jenes Raums.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = x_2, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \, \partial v} = x_{12} \text{ etc.}$$

und

$$E = \Sigma x_1^2, \quad F = \Sigma x_1 x_2, \quad G = \Sigma x_2^2,$$

wo in den in Beziehung auf $x y z t$ symmetrischen Summen nur das auf x bezügliche Glied angeschrieben ist, so erhält man für das *Linienelement ds der Fläche* den Ausdruck

$$ds^2 = E du^2 + 2 F du\, dv + G dv^2. \tag{2}$$

Zu den Größen E, F, G, welche wir *die Fundamentalgrößen erster Ordnung* nennen, treten im folgenden noch zwölf weitere D_μ, D'_μ, D''_μ $(\mu = x, y, z, t)$, welche auch die zweiten Ableitungen von x, y, z, t enthalten, und die wir *Fundamentalgrößen zweiter Ordnung* nennen. D_μ bedeute die Unterdeterminante von λ_μ in folgender Determinante

$$\begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z & \lambda_t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} & t_{11} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

Aus D_μ erhält man der Reihe nach D'_μ, D''_μ, wenn man in D_μ in der letzten Horizontalreihe die Indizes 11 bezgl. durch 12 und 22 ersetzt.

Wir definieren endlich noch drei Größen e, f, g, welche sowohl die ersten als auch die zweiten Ableitungen von x, y, z, t im zweiten Grad enthalten, durch folgende Gleichungen

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} & t_{11} \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} & t_{12} \end{vmatrix} = e; \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} & t_{11} \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} & t_{22} \end{vmatrix} = 2f; \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} & t_{12} \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} & t_{22} \end{vmatrix} = g. \tag{4}$$

§ 2.

Tangentialebene, Normalebene, zweite Annäherungsfläche.

Die Gleichung

$$A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) + D(T-t) = 0, \tag{1}$$

wo A, B, C, D Konstante, X, Y, Z, T laufende Koordinaten sind, stellt einen durch den Flächenpunkt (x, y, z, t) hindurchgehenden dreidimensionalen ebenen Raum R_3 dar. Geht dieser R_3 auch noch durch die Punkte $x + x_1 du$, $y + y_1 du$ etc. und $x + x_2 dv$ etc., so muß

$$(2)\qquad Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Dt_1 = 0,$$
$$(3)\qquad Ax_2 + By_2 + Cz_2 + Dt_2 = 0$$

sein. Die Gleichungen (1)—(3) stellen eine ∞^1-fache Schar von R_3 dar, welche alle durch die Ebene

$$(4)\qquad X - x = \lambda x_1 + \mu x_2;\quad Y - y = \lambda y_1 + \mu y_2;\quad Z - z = \lambda z_1 + \mu z_2;$$
$$T - t = \lambda t_1 + \mu t_2$$

hindurchgehen, wobei λ, μ variable Parameter sind. Diese Ebene nennen wir *Tangentialebene* oder *erste Annäherungsfläche* und jene Schar von R_3, welche durch diese hindurchgehen, *Tangentialräume.*

Die Ebene senkrecht zur Tangentialebene heißt *Normalebene.* Die Gleichungen der *Normalebene* lauten

$$(5)\qquad \begin{aligned} M &\equiv (X-x)x_1 + (Y-y)y_1 + (Z-z)z_1 + (T-t)t_1 = 0,\\ N &\equiv (X-x)x_2 + (Y-y)y_2 + (Z-z)z_2 + (T-t)t_2 = 0. \end{aligned}$$

Die Schar von R_3

$$M + \lambda N = 0,$$

wo λ willkürlich ist, geht durch die Normalebene: wir nennen diese R_3 *Normalräume.*

Wir wählen nun speziell als Parameter u, v der Fläche die Koordinaten x, y, dann lauten die Flächengleichungen

$$x = x,\quad y = y,\quad 2z = f(x, y),\quad 2t = \varphi(x, y).$$

Weiter setzen wir voraus, daß der Nullpunkt ein *regulärer* Flächenpunkt ist, so daß sich f und φ nach steigenden Potenzen von x, y entwickeln lassen: wir erhalten dann

$$2z = mx + ny + ax^2 + 2bxy + cy^2 + \cdots,$$
$$2t = \mu x + \nu y + \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \cdots.$$

Endlich denken wir uns die Fläche so zum Koordinatensystem orientiert, daß die Ebene $z = t = 0$ Tangentialebene der Fläche im Nullpunkt ist. Man erhält dann nach (4) als Flächengleichungen

$$2z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \cdots,$$
$$2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \cdots.$$

Sieht man nun x, y als unendlich kleine Größen an, so kann für den Nullpunkt in allen Fällen, wo nur unendlich kleine Glieder bis zur zweiten Ordnung (Krümmungen) berücksichtigt werden müssen, die Fläche durch die einfachere mit den Gleichungen

$$(6)\qquad \begin{aligned} 2z &= ax^2 + 2bxy + cy^2,\\ 2t &= \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \end{aligned}$$

ersetzt werden. Wir nennen daher die Fläche (6) *die zweite Annäherungsfläche.* Für die Annäherungsfläche ist die Ebene $z = 0,\ t = 0$ die Tangentialebene, die Ebene $x = 0,\ y = 0$ die Normalebene.

§ 3.

Krümmung der Normalschnitte. Hauptschnitte.

Wir schneiden nun die zweite Annäherungsfläche mit einem beliebigen durch den Nullpunkt gehenden R_3 und untersuchen die Krümmung der aus der Fläche ausgeschnittenen Raumkurve C im Nullpunkt. Bildet dieser R_3 mit dem durch die Kurventangente im Nullpunkte bestimmten Normalraum den Winkel ψ und ist weiter ϱ_ψ der Krümmungshalbmesser der Kurve C, ϱ der Krümmungshalbmesser der Kurve, die jener Normalraum aus der Fläche ausschneidet, so gilt auch hier, wie wir nicht ausführlich beweisen*), das *Meusniersche Theorem*

(1) $$\varrho_\psi = \varrho \cos\psi.$$

Da so der Krümmungsradius jedes „schiefen" Schnitts sich in einfacher Weise durch den Krümmungsradius des zugehörigen Normalschnitts ausdrückt, so betrachten wir des weiteren nur noch die Krümmung der Normalschnitte.

Wir schneiden also die Annäherungsfläche mit dem Normalraum

(2) $$y - \lambda x = 0 \quad \text{oder} \quad y - x \operatorname{tg}\varphi = 0 \ (\text{d. h. } \lambda = \operatorname{tg}\varphi).$$

Dabei bedeutet φ den Neigungswinkel der Tangente der ausgeschnittenen Raumkurve mit der X-Achse. Eine leichte Rechnung ergibt für den Krümmungsradius ϱ

(3) $$\frac{1}{\varrho^2} = \left(\frac{a + 2b\lambda + c\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2 + \left(\frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2.$$

Die Gleichung (3) läßt sich noch in der bemerkenswerten Form

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{1}{\varrho_z^2} + \frac{1}{\varrho_t^2}$$

schreiben, wobei ϱ_z der Krümmungshalbmesser der Kurve ist, die durch $y - \lambda x = 0$ aus der Projektionsfläche des Raumes $t = 0$ ausgeschnitten wird, und ϱ_t die analoge Bedeutung hat. Die Gleichung (3) zeigt, daß im allgemeinen ϱ nie Null und nie unendlich wird, daß also der Krümmungsradius für alle Schnitte dasselbe Zeichen hat. In diesem Sinne haben wir also auch keine den Haupttangenten gewöhnlicher Flächen entsprechende Richtungen. Wenn aber die Ausdrücke

$$a + 2b\lambda + c\lambda^2 \quad \text{und} \quad \alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2$$

für einen Wert von λ gleichzeitig verschwinden oder, was dasselbe ist, wenn die Resultante dieser beiden Formen

$$4(ac-b^2)(\alpha\gamma-\beta^2) - (\alpha c + a\gamma - 2b\beta)^2 = 0$$

*) Vgl. Diss. § 4.

ist, so wird ein Krümmungshalbmesser unendlich groß. Wir haben dann einen Flächenpunkt mit besonderen Eigenschaften, den wir einen Punkt mit *parabolischer Krümmung* nennen, oder kurz einen *parabolischen Punkt*.

Um nun die *Maximal-* bezw. *Minimal-Werte für den Krümmungshalbmesser* zu erhalten, bilden wir mit Hilfe von (3) $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{1}{\varrho^2}\right) = 0$. Unter Weglassung von Faktoren, die von Null verschieden sind, erhält man so die Gleichung

(4) $[a+2b\lambda+c\lambda^2][b\lambda^2+(a-c)\lambda-b]+[\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2][\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta]=0.$

Diese Gleichung lehrt, daß hier im R_4 eine Fläche *vier Hauptkrümmungshalbmesser* besitzt, während Flächen im R_3 deren nur zwei besitzen. Bedenkt man aber, daß bei diesen zwei Krümmungshalbmesser unendlich groß sind, und rechnet man diese den Hauptkrümmungshalbmessern zu, so hat man im ganzen auch vier Krümmungshalbmesser. In der Tat, wendet man (4) auf eine Fläche im R_3 $t=0$ an und setzt demnach $\alpha=\beta=\gamma=0$, so erhält man zur Bestimmung der Hauptschnitte die Gleichung

$$(a+2b\lambda+c\lambda^2)(b\lambda^2+(a-c)\lambda-b)=0.$$

Der erste Faktor, mit Null verglichen, gibt aber die beiden Werte von λ für die Asymptotenrichtungen, der zweite Faktor die beiden Werte von λ, die den Krümmungslinien entsprechen. Verschwinden für einen Wert von λ die beiden Formen $a+2b\lambda+c\lambda^2$ und $\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2$ gleichzeitig (parabolischer Punkt) so wird durch diesen Wert (4) befriedigt; in einem *parabolischen Punkt gibt es daher nur drei endliche Hauptkrümmungshalbmesser.* In diesem Fall werden durch den entsprechenden Normalraum $y-\lambda x=0$ aus den Projektionsflächen in die Räume $z=0$ und $t=0$ gleichzeitig Asymptotenrichtungen ausgeschnitten. Ebenso sieht man, daß, wenn ein Normalraum aus einer der Projektionsflächen eine Asymptotenrichtung, aus der andern die Richtung einer Krümmungslinie oder aus beiden Richtungen von Krümmungslinien ausschneidet, dieser Raum ein *Hauptschnittraum* ist d. h. eine Hauptkrümmungsrichtung aus der Fläche im R_4 ausschneidet. Die weitere Diskussion schließen wir unten (§ 7) an die sogenannte Charakteristik an.

§ 4.

Schnitt konsekutiver Normalebenen. Charakteristik.

Nach § 2, (5) lauteten die Gleichungen der Normalebene im Punkte (x, y, z, t)

(1) $$\Sigma(X-x)x_1=0, \qquad \Sigma(X-x)x_2=0,$$

wo in den Summen nur das auf x bezügliche Glied angeschrieben ist.

Schneidet man diese Normalebene mit der des benachbarten Punktes $x+dx$, $y+dy$ etc., so erhält man weiter

(2) $\Sigma(X-x)dx_1 = Edu + Fdv, \quad \Sigma(X-x)dx_2 = Fdu + Gdv.$

Löst man (1) und (2) nach $X-x$, $Y-y$ etc. auf, so folgt nach den Bezeichnungen von § 1 leicht

$$\begin{aligned} X-x &= \frac{(ED'_x - FD_x)du^2 + (ED''_x - GD_x)du\,dv + (FD''_x - GD'_x)dv^2}{edu^2 + 2f\,du\,dv + gdv^2}, \\ (3) \quad Y-y &= \frac{(ED'_y - FD_y)du^2 + (ED''_y - GD_y)du\,dv + (FD''_y - GD'_y)dv^2}{edu^2 + 2f\,du\,dv + gdv^2}, \\ Z-z &= \cdots\cdots\cdots, \\ T-t &= \cdots\cdots\cdots. \end{aligned}$$

Jeder Fortschreitungsrichtung $\frac{du}{dv}$ auf der Fläche entspricht nach (3) ein bestimmter Punkt (X, Y, Z, T) in der Normalebene des Flächenpunkts (x, y, z, t). Durchläuft $\frac{du}{dv}$ alle Werte d. h. schneidet man die Normalebenen aller Punkte einer kleinen geschlossenen Kurve auf der Fläche, die den Flächenpunkt (x, y, z, t) umgibt, mit der Normalebene dieses Punktes, so wird in *der Normalebene* ein *Kegelschnitt* erzeugt, den wir die „*Charakteristik*“ nennen. In § 7 wird sich nämlich zeigen, daß dieser Kegelschnitt die Krümmungsverhältnisse im Flächenpunkte vollständig charakterisiert, ähnlich wie die Indikatrix gewöhnlicher Flächen. Die Gleichungen dieser Charakteristik sind durch (3) gegeben, in denen $\frac{du}{dv}$ als variabler Parameter anzusehen ist. Die Asymptotenrichtungen der Charakteristik erhält man durch Nullsetzen des Nenners in (3)

(4) $$edu^2 + 2f\,du\,dv + gdv^2 = 0.$$

Den Asymptotenrichtungen der Charakteristik entsprechen zwei Richtungen auf der Fläche selbst, die wir die *Asymptotenrichtungen der Fläche* nennen, diese sind durch (4) bestimmt. Je nachdem $eg - f^2 \gtreqless 0$, ist die *Charakteristik* eine *Ellipse* bezw. *Parabel* oder *Hyperbel*. Wir werden weiter unten (§ 5) danach eine Einteilung der Flächenpunkte in drei Gattungen vornehmen.

Wir wenden die Gleichungen (3) noch an auf die Gleichungen der zweiten Annäherungsfläche (§ 2, (6)): dieselben lauten

(5) $$2z = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad 2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2.$$

Wir haben hier x, y als die veränderlichen Parameter u, v zu betrachten und erhalten so für die *Charakteristik im Nullpunkt* die Gleichungen:

$$
(6) \quad
\begin{aligned}
&X=0;\ Y=0;\ Z=\frac{\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta}{(\alpha+\beta\lambda)(b+c\lambda)-(\beta+\gamma\lambda)(a+b\lambda)};\\
&T=-\frac{b\lambda^2+(a-c)\lambda-b}{(\alpha+\beta\lambda)(b+c\lambda)-(\beta+\gamma\lambda)(a+b\lambda)}.
\end{aligned}
$$

Dabei ist $\frac{dy}{dx}=\lambda$ gesetzt. Jedem Wert von λ oder jedem Element, das der Normalraum $y-\lambda x=0$ aus der Fläche schneidet, entspricht demnach ein Punkt M in der Charakteristik (6), die in der Normalebene $X=0$, $Y=0$ des Nullpunkts liegt.

Wir untersuchen nun die Lage des Punktes M zur Schmiegungsebene der Raumkurve, die der Raum $y-\lambda x=0$ aus der Fläche schneidet. Man erhält als Gleichungen dieser Schmiegungsebene

$$
(7) \qquad \frac{Z}{T}=\frac{a+2b\lambda+c\lambda^2}{\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2};\qquad Y-\lambda X=0.
$$

Ist weiter O der Ursprung, so erhält man als Gleichungen für OM nach (6)

$$
(8) \qquad \frac{Z}{T}=-\frac{\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta}{b\lambda^2+(a-c)\lambda-b};\quad X=0;\quad Y=0.
$$

Bezeichnet man weiter mit v den Winkel, den OM mit der Schmiegungsebene (7) bildet, so erhält man leicht

$$
(9) \quad \sin v=\frac{[\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2][\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta]+[a+2b\lambda+c\lambda^2][b\lambda^2+(a-c)\lambda-b]}{\sqrt{\{[\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2]^2+[a+2b\lambda+c\lambda^2]^2\}\,\{[\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta]^2+[b\lambda^2+(a-c)\lambda-b]^2\}}}.
$$

Für $v=0$ erhält man gerade die linke Seite der Gleichung (4) § 3, es folgt daher: *Der Schnittpunkt* (M) *konsekutiver Normalebenen, in der Richtung eines Hauptschnitts genommen und nur in dieser, liegt in der Schmiegungsebene des durch jene Richtung gelegten Normalschnitts.*

Durch diesen Satz sind die Hauptkrümmungsrichtungen genau so charakterisiert, wie durch den analogen Satz die Hauptkrümmungsrichtungen der Flächen im R_3.

Wir setzen nun zweitens in (9) $v=\frac{\pi}{2}$: Man erhält dann

$$
\begin{vmatrix} a+2b\lambda+c\lambda^2 & \alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2\\ b\lambda^2+(a-c)\lambda-b & \beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta\end{vmatrix}=0.
$$

Benützt man die Identität

$$
(10) \quad \begin{vmatrix}\alpha+\beta\lambda & \beta+\gamma\lambda\\ a+b\lambda & b+c\lambda\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1 & \lambda\\ -\lambda & 1\end{vmatrix}\equiv\begin{vmatrix} a+2b\lambda+c\lambda^2 & \alpha+\beta\lambda+\gamma\lambda^2\\ b\lambda^2+(a-c)\lambda-b & \beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta\end{vmatrix}
$$

und läßt den von Null verschiedenen Faktor von $1+\lambda^2$ weg, so folgt

$$
(11) \qquad \begin{vmatrix}\alpha+\beta\lambda & \beta+\gamma\lambda\\ a+b\lambda & b+c\lambda\end{vmatrix}=0.
$$

Die linke Seite von (11) ist aber der Nenner der Charakteristik (6). Für die *Asymptotenrichtungen steht also OM senkrecht zur Schmiegungsebene;* dies erinnert an den Satz der Fläche im R_3, nach dem für die Asymptotenkurven die Flächennormale senkrecht zur Schmiegungsebene steht.

§ 5.

Involution auf der Fläche. Einteilung der Flächenpunkte.

Die weiteren Erörterungen schließen sich wieder an die Gleichungen

$$\begin{aligned} 2z &= ax^2 + 2bxy + cy^2, \\ 2t &= \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \end{aligned} \tag{1}$$

der zweiten Annäherungsfläche an. Da im folgenden wiederholt die Invarianten der beiden quadratischen Formen

$$f_1 \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2; \quad f_2 \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \tag{2}$$

auftreten, so setzen wir zur Abkürzung

$D_{11} \equiv ac - b^2$ Diskriminante von f_1,

$D_{22} \equiv \alpha\gamma - \beta^2$ „ „ f_2,

$D_{12} \equiv a\gamma + \alpha c - 2b\beta$ Simultaninvariante von f_1 und f_2,

(3) $\vartheta_{12} \equiv \begin{vmatrix} ax+by & bx+cy \\ \alpha x+\beta y & \beta x+\gamma y \end{vmatrix}$ Funktionaldeterminante von f_1 und f_2,

$R \equiv D_{12}^2 - 4D_{11}D_{22}$ Resultante von f_1 und f_2.

Die Tangentialebene in einem Punkt einer Fläche des R_3 schneidet aus dieser eine Kurve aus, die im Berührungspunkt einen Doppelpunkt besitzt. Ähnliches ist für Flächen im R_4 der Fall, indem jeder Tangentialraum

$$z - kt = 0 \quad \text{oder} \quad z - t\,\mathrm{tg}\,\varphi = 0 \qquad (k = \mathrm{tg}\,\varphi) \tag{4}$$

eine Raumkurve aus der Fläche schneidet, die im Berührungspunkt einen singulären Punkt besitzt. Das Tangentenpaar in diesem Punkt ist durch die Gleichung

$$f_1 - kf_2 \equiv (a-k\alpha)x^2 + 2(b-k\beta)xy + (c-k\gamma)y^2 = 0 \tag{5}$$

bestimmt. Das Tangentenpaar (5) liegt in der Tangentenebene d. h. in der XY-Ebene. Drei verschiedene Tangentialräume, entsprechend den Parametern k_1, k_2, k_3, schneiden sechs Linienelemente aus der Fläche, die durch die Gleichungen bestimmt sind, die man durch sukzessive Substitution von k_1, k_2, k_3 für k aus (5) erhält. Da die Resultante dieser drei Gleichungen verschwindet, so liegen die sechs Elemente in Involution.*) Es folgt: *Die einfach unendliche Schar* (4) *von Tangentialräumen paart die von dem Nullpunkt ausgehenden Flächenelemente involutorisch.*

*) Vgl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, § 58.

Setzt man in (5) die Diskriminante gleich Null, also

(6) $$D_{22}k^2 - D_{12}k + D_{11} = 0,$$

so erhält man zwei Werte k_1, k_2 von k, welche die *Doppelstrahlen* der Involution bestimmen. Es ist dann

(7) $$k = \frac{D_{12} \pm \sqrt{R}}{2D_{22}} = \operatorname{tg} \varphi_1.$$

Die Gleichung für die Doppelstrahlen selbst erhalten wir, indem wir bilden

$$(f_1 - k_1f_2)(f_1 - k_2f_2) = f_1^2 - (k_1+k_2)f_1f_2 + k_1k_2f_2^2 = 0,$$

oder

$$D_{22}f_1^2 - D_{12}f_1f_2 + D_{11}f_2^2 = 0.$$

Die linke Seite ist aber identisch mit $-\vartheta_{12}^2$.*) Die *Doppelstrahlen* sind also durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} ax + by & bx + cy \\ \alpha x + \beta y & \beta x + \gamma y \end{vmatrix} = 0$$

bestimmt. Beachtet man § 4, (6), so folgt: *Die Doppelstrahlen der Involution sind die in § 4 definierten Asymptotenrichtungen. Die Involutionspaare werden daher von den Asymptotenrichtungen harmonisch getrennt.* Diese Doppelstrahlen können als Analogie der Doppelstrahlen der Involution in der Indikatrix gewöhnlicher Flächen gelten und die Benennung „Asymptotenrichtungen" scheint daher von neuem gerechtfertigt. Die zwei Tangentialräume, welche diese ausschneiden ($z - k_1t = 0$, $z - k_2t = 0$), sollen „*Asymptotenräume*" heißen.

Aus (7) ergibt sich nun, daß, je nachdem $R > 0$, $R = 0$, $R < 0$ ist, die Asymptotenrichtungen reell verschieden, reell zusammenfallend, imaginär sind. Entsprechend ist dann die Charakteristik § 4, (6) eine *Hyperbel*, eine *Parabel* oder eine *Ellipse*. Im ersten Falle ($R > 0$) nennen wir daher den Flächenpunkt einen *hyperbolischen*, im zweiten ($R = 0$) in Übereinstimmung mit § 3 einen *parabolischen*, im dritten Falle ($R < 0$) einen *elliptischen Punkt*. Im parabolischen Punkte ist ein Hauptkrümmungshalbmesser unendlich groß (s. § 3). Da weiter nach § 4, (4) in einem *allgemeinen Flächenpunkt* (x, y, z, t) die Asymptotenrichtungen durch die Gleichung

$$e\,du^2 + 2f\,du\,dv + g\,dv^2 = 0$$

bestimmt sind, *so ist der Flächenpunkt ein hyperbolischer, parabolischer oder elliptischer, je nachdem $f^2 - eg$ größer, gleich oder kleiner als Null ist.*

Wir bilden nunmehr *Paare von Tangentialräumen, welche aus der Fläche vier harmonische Strahlen ausschneiden.* Damit die vier Linienelemente, welche durch die beiden Gleichungen

$$f_1 - kf_2 = 0, \quad f_1 - k_1f_2 = 0$$

*) Vgl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, § 57.

bestimmt sind, sich harmonisch trennen, muß die Simultaninvariante der linken Seiten verschwinden. Man erhält

$$2kk_1D_{22} - (k+k_1)D_{12} + 2D_{11} = 0. \tag{8}$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, daß die *Paare von Tangentialräumen, welche vier harmonische Flächenelemente ausschneiden, eine Involution bilden.* Für $k = k_1$ erhält man aus (8) die *Doppelräume* dieser Involution, nämlich

$$k = \frac{D_{12} \pm \sqrt{R}}{2D_{22}}.$$

Nach (7) sind die *Doppelräume* die Asymptotenräume. Das Rechtwinkelpaar von Tangentialräumen in der Involution, „die Rechtwinkelräume", erhält man, indem man in (8) $k = -\frac{1}{k_1} = \operatorname{tg}\varphi$ setzt. Man erhält so

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{D_{12}}{D_{22} - D_{11}}. \tag{9}$$

Durch (9) sind *zwei aufeinander senkrechte Tangentialräume definiert, die aus der Fläche vier harmonische Linienelemente ausschneiden und die Winkel der Asymptotenräume halbieren.* Wir nennen diese Räume mit späterer Begründung *„Hauptkrümmungsräume"*. Man zeigt leicht, daß im parabolischen Punkt die beiden Asymptotenräume mit einem der beiden Hauptkrümmungsräume zusammenfallen.

§ 6.

Die Krümmung der Projektionen in die Tangentialräume. Biegungsinvariante.

Wir gehen wieder aus von den Gleichungen (6) § 2 der zweiten Annäherungsfläche:

$$\begin{aligned} 2z &= ax^2 + 2bxy + cy^2,\\ 2t &= \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2. \end{aligned}$$

Wir drehen nun die Koordinatenräume $z = 0$ und $t = 0$ um die Tangentialebene (XY-Ebene) um den Winkel φ, setzen demnach

$$z = t_1 \sin\varphi + z_1 \cos\varphi, \qquad t = t_1\cos\varphi - z_1 \sin\varphi$$

und erhalten als Gleichungen der Annäherungsfläche in Beziehung auf das neue Koordinatensystem

$$\begin{aligned} 2z_1 &= (a\cos\varphi - \alpha\sin\varphi)x^2 + 2(b\cos\varphi - \beta\sin\varphi)xy\\ &\qquad + (c\cos\varphi - \gamma\sin\varphi)y^2,\\ 2t_1 &= (a\sin\varphi + \alpha\cos\varphi)x^2 + 2(b\sin\varphi + \beta\cos\varphi)xy\\ &\qquad + (c\sin\varphi + \gamma\cos\varphi)y^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Die Gleichungen der Projektionsfläche in den Tangentialraum $z_1 = 0$ lauten

$$(2)\qquad \begin{aligned} 2t_1 &= (a\sin\varphi + \alpha\cos\varphi)x^2 + 2(b\sin\varphi + \beta\cos\varphi)\,xy \\ &\qquad + (c\sin\varphi + \gamma\cos\varphi)\,y^2, \\ z_1 &= 0. \end{aligned}$$

Sind ϱ_1 und ϱ_2 die Hauptkrümmungshalbmesser dieser Projektionsfläche, so ist nach bekannten Formeln

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} &= (a\sin\varphi + \alpha\cos\varphi)(c\sin\varphi + \gamma\cos\varphi) - (b\sin\varphi + \beta\cos\varphi)^2 \quad \text{oder} \\ \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} &= D_{11}\sin^2\varphi + D_{12}\sin\varphi\cos\varphi + D_{22}\cos^2\varphi. \end{aligned}$$

Variiert φ, so erhält man aus (2) die den verschiedenen Tangentialräumen entsprechenden Projektionsflächen. Das Krümmungsmaß (3) dieser Flächen variiert dann offenbar wie die reziproken Krümmungsradien folgender im R_3 $t = 0$ gelegenen Fläche

$$(4)\qquad 2z = D_{22}x^2 + D_{12}xy + D_{11}y^2.$$

Alle Sätze also, welche für die Krümmungsradien der Normalschnitte gewöhnlicher Flächen gelten, finden für das Krümmungsmaß der Projektionsflächen die entsprechende Deutung. Insbesondere erhält man zwei extreme Werte für das Krümmungsmaß, entsprechend den Hauptkrümmungsradien der Flächen im R_3, weiter Krümmungsmaße mit dem Wert Null, und endlich einen dem Eulerschen analogen Satz.

Die Tangentialräume, deren Projektionsflächen einen extremen Wert des Krümmungsmaßes besitzen, erhält man aus (3), indem man $\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{\varrho_1\varrho_2}\right) = 0$ setzt. Es folgt so

$$(5)\qquad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{D_{12}}{D_{22} - D_{11}}.$$

Durch (5) sind also *zwei aufeinander senkrechte Tangentialräume definiert, in welche projiziert die Fläche Flächen mit maximalem bzw. minimalem Wert des Hauptkrümmungsmaßes gibt. Diese Räume sind aber nach § 5, (9) identisch mit den dort definierten Hauptkrümmungsräumen.**) Ihre Benennung scheint so gerechtfertigt.

Die Projektionsflächen mit dem Krümmungsmaß Null erhält man, indem man in (3) $\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = 0$ setzt. Es folgt

$$(6)\qquad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{D_{12} \pm \sqrt{R}}{2D_{11}}.$$

Durch (6) sind zwei Tangentialräume, „*Nullräume*", definiert, welche, wie

*) Vgl. Killing, Nicht-Euklidische Raumformen p. 248.

man leicht zeigt, auf den Asymptotenräumen des § 5 senkrecht stehen. Da in § 5 sich gezeigt hat, daß die Winkel der Asymptotenräume durch die Hauptkrümmungsräume halbiert werden, so werden auch die Winkel der Nullräume durch die Hauptkrümmungsräume halbiert. Setzt man endlich in (3) $\varphi + \frac{\pi}{2}$ statt φ, so erhält man das Krümmungsmaß $\frac{1}{\varrho_1' \varrho_2'}$ der Projektionsfläche in den Raum $t_1 = 0$. Es folgt so

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} + \frac{1}{\varrho_1' \varrho_2'} = D_{11} + D_{22}. \tag{7}$$

Die Summe der Krümmungsmaße zweier Projektionsflächen in Beziehung auf zwei beliebige zueinander senkrechte Tangentialräume ist also konstant.

Man kann zeigen*), daß diese Summe für einen allgemeinen Flächenpunkt aus dem Ausdruck für das Linienelement

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2 \tag{8}$$

durch dieselbe Formel erhalten wird, durch die man das Gaußsche Krümmungsmaß einer Fläche im R_3 mit dem Linienelement (8) berechnet. Diese Summe ist daher eine Biegungsinvariante, die man passend ebenfalls das *Krümmungsmaß der Fläche* nennt.

§ 7.

Die Charakteristik.

Wir untersuchen nun den in der Normalebene (ZT-Ebene) eines Flächenpunkts gelegenen Kegelschnitt, den wir in § 4 Charakteristik nannten. Es wird sich zeigen, daß dieser Kegelschnitt die Krümmungsverhältnisse im Flächenpunkt klar übersehen läßt: außerdem werden wir mit seiner Hilfe imstande sein, Genaueres über die Hauptkrümmungsradien auszusagen. Wir knüpfen zu diesem Zwecke an die Gleichungen (6) § 4

$$\begin{aligned} X = 0;\ Y = 0;\ Z &= \frac{\beta\lambda^2 + (\alpha-\gamma)\lambda - \beta}{(\alpha+\beta\lambda)(b+c\lambda) - (\beta+\gamma\lambda)(a+b\lambda)}; \\ T &= -\frac{b\lambda^2 + (a-c)\lambda - b}{(\alpha+\beta\lambda)(b+c\lambda) - (\beta+\gamma\lambda)(a+b\lambda)} \end{aligned} \tag{1}$$

unsere Erörterungen an. Jeder Fortschreitungsrichtung $\lambda = \frac{y}{x}$ der Fläche entspricht darnach ein Punkt (X, Y, Z, T) der Normalebene. Von der Einteilung der Flächenpunkte nach der Natur des Kegelschnitts war schon in § 4 die Rede. Wir bestimmen hier nun zunächst die *Lage der*

*) Vgl. Hovestadt, Programm des Münsterschen Realgymnasiums 1880.

Asymptoten von (1). Man erhält die Gleichungen der Asymptotenrichtungen, indem man aus den beiden Gleichungen

$$(2)\qquad \frac{Z}{T} = -\frac{\beta\lambda^2 + (\alpha-\gamma)\lambda - \beta}{b\lambda^2 + (a-c)\lambda - b} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha+\beta\lambda & \beta+\gamma\lambda \\ a+b\lambda & b+c\lambda \end{vmatrix} = 0$$

λ eliminiert. Quadriert man die Determinante und beachtet die Identität § 4, (10), so erhält man die beiden Gleichungen

$$D_{22}(a+2b\lambda+c\lambda^2)^2 - D_{12}(a+2b\lambda+c\lambda^2)(\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2) + D_{11}(\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2)^2 = 0,$$

$$(a+2b\lambda+c\lambda^2)(\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta) - (\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2)(b\lambda^2+(a-c)\lambda-b) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen und der ersten Gleichung (2) läßt sich aber λ bequem eliminieren; man erhält so für die *Asymptotenrichtungen der Charakteristik*

$$(3)\qquad D_{11}Z^2 + D_{12}ZT + D_{22}T^2 = 0$$

oder

$$(4)\qquad \frac{Z}{T} = -\frac{D_{12} \pm \sqrt{R}}{2D_{11}}.$$

Diese Gleichung stellt aber, wie man aus § 6, (6) erkennt, die Nullräume dar. Es folgt: *Schneidet man die beiden Tangentialräume (Nullräume), auf welche die Fläche projiziert Flächen mit dem Krümmungsmaß Null gibt, mit der Normalebene, so erhält man in dieser zwei Gerade, welche die Asymptotenrichtungen der Charakteristik sind.*

Bestimmt man zu dem Geradenpaar (3) das Paar von Winkelhalbierenden, so erhält man die *Gleichung für die Achsenrichtungen* des Kegelschnitts. Eine kleine Rechnung gibt

$$(5)\qquad D_{12}Z^2 + 2(D_{22}-D_{11})ZT - D_{12}T^2 = 0.$$

Setzt man hier $\frac{Z}{T} = \operatorname{tg}\varphi$, so erhält man für *die Achsenrichtungen*

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{D_{12}}{D_{22} - D_{11}}.$$

Nach § 6, (5) folgt: *Durch die Hauptkrümmungsräume werden aus der Normalebene die Achsenrichtungen der Charakteristik ausgeschnitten.*

Aus (1) folgt, daß die Größe $\frac{Z}{T}$ sich durch Vertauschen von λ mit $-\frac{1}{\lambda}$ nicht ändert. Zieht man demnach durch den Flächenpunkt zwei aufeinander senkrechte Linienelemente und schneidet die Normalebenen in den Endpunkten mit der im Anfangspunkt, so liegen die beiden resultierenden Schnittpunkte mit dem Flächenpunkt in gerader Linie. Der *Flächenpunkt ist nun nicht etwa Mittelpunkt des Kegelschnitts*, da die Größe

$Z^2 + T^2$ durch Vertauschen von λ mit $-\frac{1}{\lambda}$ ihren Wert ändert, sondern ein nicht näher charakterisierter Punkt, jedoch *im Innern des Kegelschnitts;* denn jede Gerade durch den Flächenpunkt $Z + \sigma T = 0$, wo σ eine beliebige Konstante bedeutet, schneidet den Kegelschnitt in zwei *reellen* Punkten, da das Absolutglied der Gleichung dieser Geraden, in λ geschrieben, -1 ist.

Man schneide nunmehr die Normalebene mit dem Tangentialraum $Z = 0$. Dieser wird aus der Normalebene eine Gerade (die T-Achse) ausschneiden, auf der vom Kegelschnitt zwei Strecken T_1 und T_2 begrenzt werden, entsprechend den beiden Wurzeln λ_1 und λ_2 der Gleichung

$$\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta = 0.$$

Beachtet man die Identität § 4, (10), so erhält man jene beiden Strecken durch folgende Gleichungen

(7) $$\frac{1}{T} = \frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{1 + \lambda^2}; \quad \beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta = 0.$$

Diese beiden Gleichungen gestatten nun eine interessante Deutung: Projiziert man die Fläche in den Raum $Z = 0$, so erhält man eine Projektionsfläche mit den Gleichungen

$$2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2, \quad z = 0.$$

Die Normale dieser Fläche ist die T-Achse. Die Hauptkrümmungshalbmesser (R) der Projektionsfläche erhält man wie bekannt durch die Gleichung

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{1 + \lambda^2},$$

wobei λ der Gleichung

$$\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta = 0$$

zu genügen hat. Es ist demnach

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{T}.$$

Da nun offenbar $Z = 0$ ein ganz beliebiger Tangentialraum ist, so folgt:

Satz I. *Schneidet man die Charakteristik mit dem beliebigen Tangentialraum $Z = 0$, so erhält man zwei Abschnitte T_1 und T_2. Die Gerade, auf der T_1 und T_2 liegen, stellt die Normale, ihre Endpunkte stellen die Hauptkrümmungsmittelpunkte, die Abschnitte T_1 und T_2 die Hauptkrümmungshalbmesser der in den Raum $Z = 0$ projizierten Fläche dar.*

Nach diesem Satze kann daher die Charakteristik auch auf folgende Art erzeugt werden: Man projiziere die Fläche in die einfach unendliche Schar von Tangentialräumen und erhält so eine einfach unendliche Schar gewöhnlicher Flächen. Ihre Normalen (im Nullpunkt) durchlaufen die

Normalebene und die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte die Charakteristik. An diesen Satz schließen sich noch einige Bemerkungen an. Das Produkt $\frac{1}{T_1 T_2}$ ist das Krümmungsmaß der in den Raum $Z=0$ projizierten Fläche. Ist $Z=0$ ein Nullraum, so schneidet dieser nach dem Obigen aus der Normalebene eine Asymptotenrichtung aus. Ein Abschnitt T wird demnach unendlich groß und das Krümmungsmaß der in einen Nullraum projizierten Fläche ist Null — und dies war ja die definierende Eigenschaft der Nullräume (vgl. § 6). Ist $Z=0$ ein Hauptkrümmungsraum, so wird durch diesen, wie oben gezeigt wurde, eine Achsenrichtung aus der Ebene der Charakteristik ausgeschnitten. Es muß also für einen Kegelschnitt der Satz gelten, daß das Produkt $\frac{1}{T_1 T_2}$ ein Maximum bzw. Minimum ist, wenn die Gerade, auf der die Abschnitte liegen, achsenparallel ist. Zieht man ferner in der Ebene der Charakteristik durch den Flächenpunkt zwei zueinander senkrechte Gerade, etwa $Z=0$ und $T=0$, so erhält man vier Abschnitte $Z_1 Z_2$, $T_1 T_2$, für die nach dem obigen Satz und § 6, (7)

$$\frac{1}{Z_1 Z_2} + \frac{1}{T_1 T_2} = D_{11} + D_{22}$$

ist. Diese Gleichung enthält wiederum einen leicht zu formulierenden Satz für Kegelschnitte. Die Größe $\frac{1}{Z_1 Z_2} + \frac{1}{T_1 T_2}$, welche gleich dem Krümmungsmaß der Fläche ist, zeigt einige Verwandtschaft mit der Potenz eines Punkts in Beziehung auf einen Kreis. Überhaupt jeder Satz über Sehnen eines Kegelschnitts durch einen inneren Punkt findet eine entsprechende Deutung für die Krümmungsverhältnisse der Fläche. Einige Beispiele mögen genügen. Ist etwa der Kegelschnitt ein Kreis, so haben alle Projektionsflächen dasselbe Krümmungsmaß (*Kreispunkt*). Ist der Flächenpunkt Mittelpunkt des Kegelschnitts, so haben in diesem Punkt alle Projektionsflächen den Charakter von Minimalflächen etc.

Wir beweisen noch einen Satz, der uns näheren Aufschluß über die Hauptkrümmungsradien geben wird. Derselbe lautet

Satz II. *Der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Normalschnitte ist die Fußpunktkurve der Charakteristik in Beziehung auf den Flächenpunkt.*

Zum Beweis dieses Satzes stellen wir zunächst für einen Punkt (Z_1, T_1) des Kegelschnitts, dem der Parameterwert λ in (1) entsprechen möge, die Gleichung der Tangente auf. Bedeutet (Z, T) einen Punkt dieser Tangente, so lautet, wie man leicht nachrechnet, ihre Gleichung

$$\frac{T - T_1}{Z - Z_1} = - \frac{a + 2b\lambda + c\lambda^2}{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}. \tag{8}$$

Die Normale vom Flächenpunkt auf diese Tangente hat demnach die Gleichung

$$\frac{T}{Z}=\frac{\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2}{a+2b\lambda+c\lambda^2}. \tag{9}$$

Wir zeigen zunächst, daß auf dieser Geraden der Krümmungsmittelpunkt des dem Werte λ entsprechenden Normalschnitts liegt. Die Gleichung der Schmiegungsebene dieses Normalschnitts ist nach § 4, (7)

$$\frac{T}{Z}=\frac{\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2}{a+2b\lambda+c\lambda^2}; \quad Y-\lambda X=0. \tag{10}$$

Die Schnittgerade dieser Schmiegungsebene mit der Normalebene $X=0$, $Y=0$ des Flächenpunkts muß jenen Krümmungsmittelpunkt enthalten. Setzt man aber in (10) $X=0$, $Y=0$, so erhält man gerade (9), womit dieser erste Teil des Beweises erledigt ist. Zeigen wir endlich, daß der Abstand ϱ des Flächenpunkts von der Tangente (8) gerade gleich dem Krümmungsradius des dem Werte λ entsprechenden Normalschnitts ist, so ist der Satz II bewiesen. Aus (8) erhält man aber für ϱ einen Ausdruck, der mit Hilfe der Identität § 4, (10) sich auf folgende Form

$$\frac{1}{\varrho^2}=\left(\frac{a+2b\lambda+c\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2+\left(\frac{\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)^2$$

bringen läßt. Aus § 3, (3) folgt nun, daß ϱ in der Tat gleich dem Krümmungsradius des dem Werte λ entsprechenden Normalschnitts ist, womit der Satz II bewiesen ist.

Wir bemerken noch: Geht die Normale vom Flächenpunkt auf die Kegelschnitttangente durch den Berührungspunkt hindurch oder, mit anderen Worten, steht diese Normale auf dem Kegelschnitt senkrecht, so muß nach (9) und (1)

$$[a+2b\lambda+c\lambda^2][b\lambda^2+(a-c)\lambda-b]+[\alpha+2\beta\lambda+\gamma\lambda^2][\beta\lambda^2+(\alpha-\gamma)\lambda-\beta]=0$$

sein. Dies ist aber nach § 3, (4) die Gleichung für die 4 Hauptkrümmungsrichtungen.

Etwas ausführlicher können wir also sagen: Legt man durch die Normalebene des Flächenpunkts O und ein Linienelement λ der Fläche durch O den Normalraum, so schneidet dieser aus der Fläche eine gewisse Kurve Γ aus. Dem Element λ entspricht andererseits ein bestimmter Punkt P der Charakteristik. Der Krümmungsmittelpunkt der Kurve Γ ist der Fußpunkt des Lotes g, das man von O auf die in P konstruierte Charakteristikentangente fällen kann. Die Schmiegungsebene von Γ in O ist die Ebene durch das Element λ und das Lot g. *Die Hauptkrümmungsmittelpunkte sind die Fußpunkte der Lote aus O auf die Charakteristik.* Der Ort der Krümmungsmittelpunkte sämtlicher Normalschnitte ist die

Fußpunktkurve der Charakteristik für den Flächenpunkt O. *Die Fußpunktkurve berührt den Kegelschnitt in den Hauptkrümmungsmittelpunkten.*

Man erkennt also von neuem die Richtigkeit der am Schluß von § 4 aufgeführten Sätze. Man sieht weiter, daß die Hauptkrümmungshalbmesser wirkliche Maxima und Minima darstellen und daß mindestens zwei derselben reell sind, da sich von einem inneren Punkt eines Kegelschnitts mindestens zwei reelle Normalen auf denselben fällen lassen. Ist der Kegelschnitt eine Parabel (parabolischer Punkt), so ist eine Normale unendlich groß, d. h. im parabolischen Punkt ist ein Hauptkrümmungshalbmess unendlich groß, wie wir dies ja oben schon gesehen haben. Werden in einem Punkt zwei Hauptkrümmungshalbmesser gleich, so läßt sich zeigen, daß der Flächenpunkt auf einer der Achsen (im parabolischen Punkt auf *der* Achse) liegt und daß die den beiden anderen Hauptkrümmungshalbmessern entsprechenden Hauptschnitte aufeinander senkrecht stehen. *Werden in einem Punkt drei Hauptkrümmungshalbmesser gleich, so kann dies offenbar nur dann der Fall sein, wenn die Charakteristik ein Kreis und der Flächenpunkt sein Mittelpunkt ist.* Dann sind aber überhaupt alle Krümmungshalbmesser gleich und alle Projektionsflächen haben gleiche aber entgegengesetzte Hauptkrümmungshalbmesser. *Die im nächsten Kapitel definierten Flächen besitzen nur solche Flächenpunkte.* Ist der Kegelschnitt ein Kreis, der Flächenpunkt aber nicht sein Mittelpunkt, so haben alle Projektionsflächen dasselbe Krümmungsmaß. In diesem Falle gibt es nur zwei Lote auf den Kreis, also nur zwei reelle Hauptkrümmungshalbmesser.

§ 8.

Die Linien auf der Fläche. Formel für die Hauptkrümmungshalbmesser.

Die bisher betrachteten ausgezeichneten Richtungen in einem Flächenpunkt führen zu bestimmten Linien auf der Fläche.

Verfolgt man zuerst die vier Hauptkrümmungsrichtungen von Punkt zu Punkt, so erhält man ein vierfach unendliches System von Flächenkurven, die wir *„Krümmungslinien“* nennen. Zur Aufstellung ihrer Differentialgleichung benützen wir den Satz des § 4, wonach der Schnittpunkt konsekutiver Normalebenen, in der Richtung eines Hauptschnitts genommen, in der Schmiegungsebene des durch jene Richtung gelegten Normalschnitts liegt.

Seien $x = x(u)$, $y = y(u)$, $z = z(u)$, $t = t(u)$ die Gleichungen einer Raumkurve, wo u der Parameter ist, so haben wir als Gleichungen der Schmiegungsebene in einem Punkte (u)

$$X - x = \lambda \frac{dx}{du} + \mu \frac{d^2x}{du^2}, \qquad Y - y = \lambda \frac{dy}{du} + \mu \frac{d^2y}{du^2} \text{ etc.}$$

wobei X, Y, Z, T laufende Koordinaten, λ, μ variable Parameter sind. Um nun die Gleichungen der Schmiegungsebene einer durch den Punkt (u, v) der Fläche gehenden Flächenkurve zu erhalten, haben wir v als Funktion von u anzusehen. Wir erhalten dann als Gleichungen der Schmiegungsebene

$$(1) \qquad X - x = \lambda x_1 + \mu \left(\frac{dx_1}{du} + \frac{dx_2}{du}\frac{dv}{du}\right) + x_2 \left(\lambda \frac{dv}{du} + \mu \frac{d^2v}{du^2}\right),$$

wo wir nur die auf x bezügliche Gleichung angeschrieben haben. Da die Gleichungen (1) die Gleichung

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} X - x & x_1 & x_2 & dx_1\,du + dx_2\,dv \\ Y - y & y_1 & y_2 & dy_1\,du + dy_2\,dv \\ Z - z & z_1 & z_2 & dz_1\,du + dz_2\,dv \\ T - t & t_1 & t_2 & dt_1\,du + dt_2\,dv \end{vmatrix} = 0$$

nach sich ziehen, so erhält der durch (2) dargestellte R_3 die Schmiegungsebene (1). Da außerdem die Koordinaten X, Y, Z, T eines Punkts der Tangentialebene § 2, (4) die Gleichung (2) identisch befriedigen, so ist jener R_3 ein Tangentialraum des Punkts (u, v). Wir können also als Gleichungen der Schmiegungsebene des Normalschnitts die Gleichung (2) und die Gleichung des der Richtung $\frac{dv}{du}$ entsprechenden Normalraums ansehen. Diesen zwei Gleichungen hat also nach dem oben angeführten Satz der Schnittpunkt (X, Y, Z, T) konsekutiver Normalebenen, in der Richtung des Elements $\left(\frac{dv}{du}\right)$ genommen, zu genügen. Die Koordinaten X, Y, Z, T, die wir aus den Gleichungen § 4, (3) zu entnehmen haben, genügen aber, weil der Punkt (X, Y, Z, T) in der Normalebene des Punkts (u, v) liegt, der Gleichung jenes Normalraums von selbst: diese Koordinaten haben also nur noch der Gleichung (2) zu genügen. Statt (2) können wir aber mit Einführung der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung des § 1 schreiben

$$(3) \qquad \Sigma (X - x)(D_x\,du^2 + 2 D'_x\,du\,dv + D''_x\,dv^2) = 0,$$

wobei man hier wie auch in den folgenden Summen die übrigen Glieder durch zyklische Vertauschung von x, y, z, t aus dem Leitglied erhält. Aus dieser Gleichung und aus den Gleichungen § 4, (3) erhalten wir nunmehr als *Differentialgleichung der Krümmungslinien*

$$(4) \qquad \Sigma (D_x\,du^2 + 2 D'_x\,du\,dv + D''_x\,dv^2) \times$$
$$\times \{(ED'_x - FD_x)\,du^2 + (ED''_x - GD_x)\,du\,dv + (FD''_x - GD'_x)\,dv^2\} = 0.$$

Aus der Gleichung (1) können wir auch eine *Formel für die Hauptkrümmungshalbmesser* des Flächenpunkts (u, v) ableiten. Quadriert man nämlich (2) durch Kombination von Kolonnen mit Kolonnen und benützt die Gleichungen (1) und (2) des § 4, welche ausdrücken, daß (X, Y, Z, T) der Schnittpunkt der beiden konsekutiven Normalebenen ist, so erhält man

$$(5)\quad \begin{vmatrix} \Sigma(X-x)^2 & 0 & 0 & ds^2 \\ 0 & E & F & du\,\Sigma x_1 dx_1 + dv\,\Sigma x_1 dx_2 \\ 0 & F & G & du\,\Sigma x_2 dx_1 + dv\,\Sigma x_2 dx_2 \\ ds^2 & du\,\Sigma x_1 dx_1 + dv\,\Sigma x_1 dx_2 & du\,\Sigma x_2 dx_1 + dv\,\Sigma x_2 dx_2 & \Sigma(dx_1 du + dx_2 dv)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Sigma(X-x)^2$ ist gleich dem Quadrat des Krümmungsradius ϱ, der der Richtung (du, dv) entspricht, und die Differentiale du, dv müssen der Gleichung (4) genügen.

Nun ist aber

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ dx_1 du + dx_2 dv & dy_1 du + dy_2 dv & dz_1 du + dz_2 dv & dt_1 du + dt_2 dv \end{Vmatrix}^2 =$$

$$= \begin{vmatrix} E & F & du\,\Sigma x_1 dx_1 + dv\,\Sigma x_1 dx_2 \\ F & G & du\,\Sigma x_2 dx_1 + dv\,\Sigma x_2 dx_2 \\ du\,\Sigma x_1 dx_1 + dv\,\Sigma x_1 dx_2 & du\,\Sigma x_2 dx_1 + dv\,\Sigma x_2 dx_2 & \Sigma(dx_1 du + dx_2 dv)^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \\ dy_1 du + dy_2 dv & dz_1 du + dz_2 dv & dt_1 du + dt_2 dv \end{vmatrix}^2 =$$

$$= \Sigma(D_x du^2 + 2 D'_x du dv + D''_x dv^2)^2.$$

Benützt man diese Gleichungen, so erhält man aus (5)

$$(6)\qquad \varrho^2 = \frac{(E du^2 + 2F du dv + G dv^2)^2 (EG - F^2)}{\Sigma(D_x du^2 + 2 D'_x du dv + D''_x dv^2)^2}.$$

Diese Gleichung gibt uns entsprechend den vier Wurzelwerten $\frac{dv}{du}$ der Gleichung (4) *die vier Hauptkrümmungsradien in einem Flächenpunkt* (u, v).

Es mag bemerkt werden, daß für *eine Fläche im dreidimensionalen Raum* $t = 0$ alle Fundamentalgrößen zweiter Ordnung außer D_t, D'_t, D''_t gleich Null, diese letzteren aber mit den Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Flächentheorie identisch sind. Die Gleichungen (4) und (6) gehen dann in die wohlbekannten Formeln der Flächentheorie für die Krümmungslinien (und Asymptotenkurven) und die Hauptkrümmungshalbmesser über.

Geht man ferner den Asymptotenrichtungen auf der Fläche nach, so erhält man eine doppelt unendliche Schar von Kurven, die wir „*Asymptotenlinien*“ nennen: ihre Differentialgleichung ist nach § 4, (4)

$$edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = 0. \tag{7}$$

Ist für einen Punkt (u, v)

$$eg - f^2 = 0, \tag{8}$$

so fallen die Asymptotenrichtungen zusammen, die Charakteristik ist eine Parabel, und ein Hauptkrümmungshalbmesser ist unendlich (parabolischer Punkt). Die Gleichung (8) definiert daher eine Linie auf der Fläche, welche sämtliche parabolische Punkte verbindet, man wird diese passend die *parabolische Linie* nennen. Wie für die Flächen im R_3 ist die parabolische Linie im allgemeinen der Ort der Spitzen, in singulären Fällen ganz oder teilweise die Einhüllende der Asymptotenlinien.

Endlich kann man ebenso wie für die Flächen des R_3 kürzeste Linien — geodätische Linien — auf den Flächen im R_4 definieren (vgl. Diss. § 10). Da wir von den entsprechenden Formeln keinen Gebrauch machen, so unterlassen wir es, sie hier aufzustellen. Nur mag noch bemerkt werden, daß auch für die geodätischen Linien auf Flächen im R_4 die Schmiegungsebene der Linie stets senkrecht auf der Tangentialebene der Fläche steht.

II. Kapitel.

R-Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen.

§ 9.

Definition der *R*-Flächen.

Es sei durch die Gleichung

$$z + it = F(x + iy) \tag{1}$$

$z + it$ in einem bestimmten Bereich der XY-Ebene als analytische Funktion der komplexen Variabeln $x + iy$ definiert. Wir denken uns nun im R_4 ein rechtwinkliges Koordinatensystem X, Y, Z, T und stellen in diesem die komplexe Variable $x + iy$ in der üblichen Weise durch einen bestimmten Punkt P_2 der XY-Ebene dar. Sei $z + it$ einer der Werte der Funktion F im Punkte P_2, so gehe man in der Z-Richtung um z vorwärts bis zum Punkt P_1, hierauf von P_1 in der T-Richtung um t bis zum Punkt P. Der Punkt P hat dann die Koordinaten x, y, z, t und ist der Repräsentant des Funktionswerts $z + it$. Hat die Funktion in P_2 noch andere Werte, so wiederhole man für jeden dieser die angegebene Konstruktion: man erhält so die Punkte $P', P'', \cdots$ etc. Für alle diese