Ist $z + it$ eine Funktion der komplexen Variabeln $x + iy$, so kann man den in einem Punkt $x + iy$ der XY-Ebene vorhandenen Funktionswert durch einen Punkt im vierdimensionalen Raum mit den Koordinaten x, y, z, t zur Darstellung bringen. Dadurch wird im R_4 über der XY-Ebene eine zweidimensionale Fläche ausgebreitet, welche das Bild der in den verschiedenen Punkten der XY-Ebene existierenden Funktionswerte ist. Wir haben diese Fläche *eine Riemannsche Fläche* oder kurz *eine R-Fläche**) genannt, weil sie funktionentheoretisch dasselbe leistet, wie die Riemannsche Fläche im gewöhnlichen Sinne.

Die vorliegende Arbeit, welche die Untersuchung der R-Flächen zum Gegenstande hat, gliedert sich nun in zwei Kapitel. Das erste Kapitel behandelt die Krümmungsverhältnisse allgemeiner zweidimensionaler Flächen des R_4; man vergleiche hiezu meine Dissertation**), in der die Flächen des R_4 ausführlich behandelt sind. Im zweiten Kapitel werden speziell die R-Flächen untersucht: dieselben sind geometrisch und funktionentheoretisch interessant. Der in der Normalebene jedes Flächenpunkts liegende Kegelschnitt, der die Krümmungsverhältnisse vollständig charakterisiert, ist für alle Flächenpunkte ein Kreis mit dem Flächenpunkt als Mittelpunkt. Darum sind die Krümmungshalbmesser aller Normalschnitte in einem Punkt der Fläche einander gleich. Weiter zeigt sich, daß die R-Flächen

*) Herr Blumenthal macht mich in freundlicher Weise darauf aufmerksam, daß Herr St. Kwietniewski in seiner Diss. „Über Flächen des vierdimensionalen Raumes, deren sämtliche Tangentialebenen untereinander gleichwinklig sind, und ihre Beziehung zu den ebenen Kurven, Zürich 1902" dieselben Flächen betrachtet. Die indessen Herr Kwietniewski einen von dem meinigen wesentlich verschiedenen Standpunkt einnimmt, und unsere Arbeiten nur wenige Berührungspunkte zeigen, so nehme ich keinen Anstand, meine Arbeit ungeändert zu veröffentlichen. In einigen Fußnoten werde ich auf die Dissertation von Herrn Kwietniewski verweisen.

**) Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen, Tübingen 1897. (Im folgenden kurz mit Diss. zitiert.)

Minimalflächen des R_4 sind; man erhält so eine geometrische Deutung für das Dirichletsche Prinzip und den Greenschen Satz. Durch Projektion einer R-Fläche in eine Schar dreidimensionaler Räume erhält man eine Schar gewöhnlicher Flächen, die wir assoziierte Projektionsflächen genannt haben, weil sie in naher Beziehung zu einer Schar assoziierter Minimalflächen stehen. Diese Projektionsflächen sind alle aufeinander flächentreu bezogen, haben in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß und besitzen quadrierbare Asymptotenlinien. Zu diesen Flächen gehören die von Dini und v. Lilienthal untersuchten Flächen; einzelne derselben hat Dyck modellieren lassen (vgl. die Fußnoten zu § 9 und § 13). Alle aufeinander abwickelbaren R-Flächen sind kongruent oder Spiegelbilder voneinander in Beziehung auf einen R_3.

Die Projektionen der R-Fläche auf die XY-Ebene und die ZT-Ebene sind konforme Bilder der Fläche selbst und die R-Fläche vermittelt so in einfacher Weise die konforme Abbildung der XY-Ebene auf die ZT-Ebene. Die Tangential- und Normalebenen der R-Flächen sind eigentümlich im R_4 orientierte Ebenen und bilden einen Komplex. Die Gültigkeit des Cauchyschen Integralsatzes ist eine Folge dieser Orientierung der Tangentialebenen der R-Flächen.

Am Schlusse der Arbeit haben wir noch das Produkt zweier komplexer Größen durch ein Rechteck im vierdimensionalen Raum gedeutet und dieses Rechteck den Produktvektor genannt: man erhält so eine einfache geometrische Interpretation des Integrals $\int F(x+iy)\,(dx+i\,dy)$, die eine Verallgemeinerung der bekannten Deutung eines Integrals durch eine Fläche im reellen Gebiet ist.

I. Kapitel.

Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen.

§ 1.

Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung.

Eine Fläche F_2 im ebenen Raum von vier Dimensionen (kurz R_4) wird dargestellt durch Gleichungen von der Form

$$(1) \qquad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad t = t(u, v),$$

so daß also die Koordinaten $(xyzt)$ eines Flächenpunkts Funktionen zweier variabler Parameter u, v sind. Von diesen Funktionen setzen wir stets voraus, daß sie voneinander unabhängig und samt ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig sind. Drei der Gleichungen (1) allein stellen eine zweidimensionale Fläche im gewöhnlichen Raume dar, nämlich die Pro-