

WISSENSCHAFTLICHE BEILAGE  
ZUM JAHRESBERICHT DES KÖNIGL. KARLSGYMNASIUMS  
ZU HEILBRONN. 1905

---

RIEMANNSCHE FLÄCHEN  
IM EBENEN RAUM VON VIER DIMENSIONEN

VON

PROF. DR. K. KOMMERELL  
IN HEILBRONN

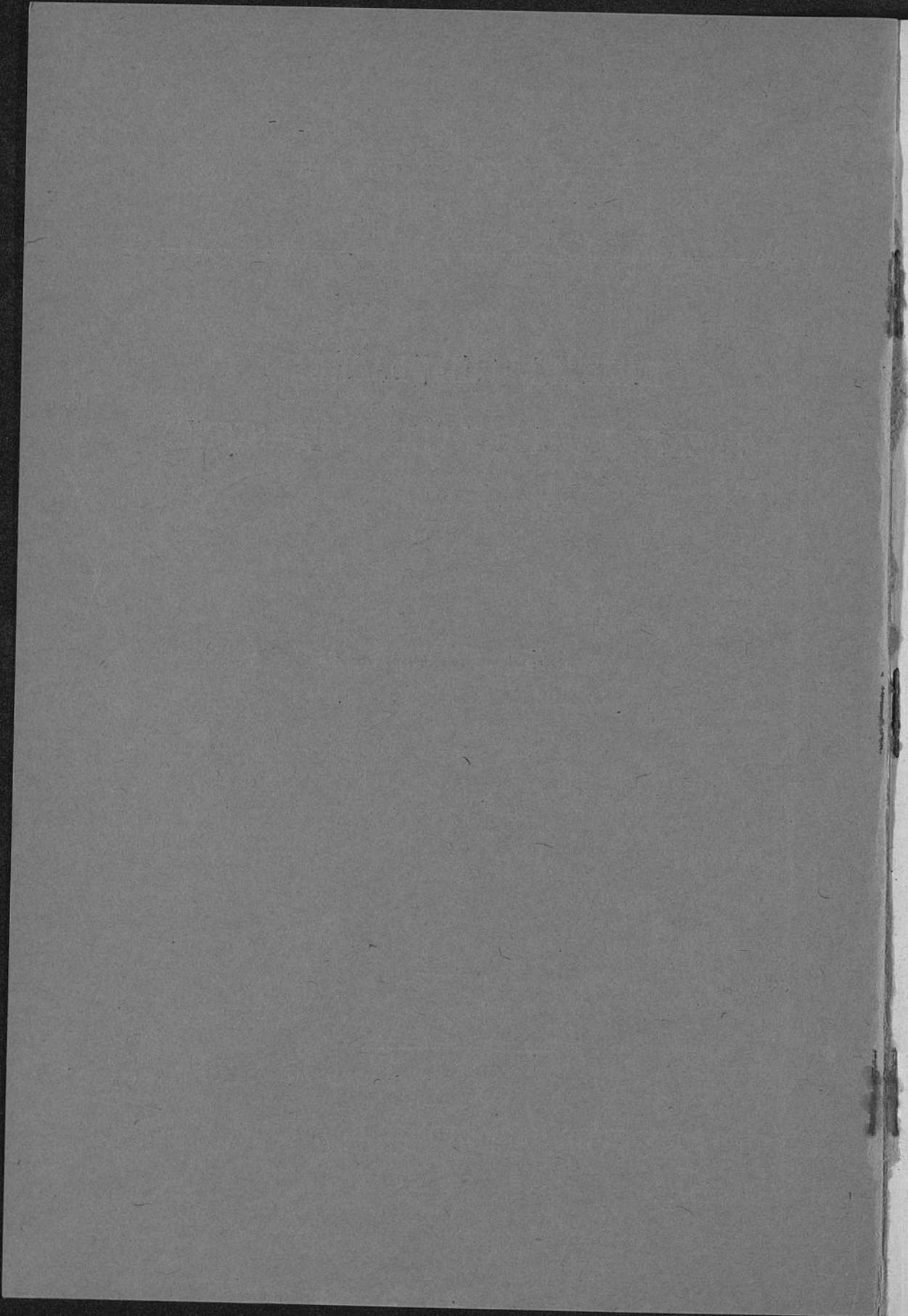
*ghe*  
*8 (1905)*



DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

Progr. Nr. 707

*1707*



WISSENSCHAFTLICHE BEILAGE  
ZUM JAHRESBERICHT DES KÖNIGL. KARLSGYMNASIUMS  
ZU HEILBRONN. 1905

---

---

RIEMANNSCHE FLÄCHEN  
IM EBENEN RAUM VON VIER DIMENSIONEN

VON

**PROF. DR. K. KOMMERELL**  
IN HEILBRONN

---

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG

Progr. Nr. 707





Sonderabdruck aus dem 60. Bande der Mathematischen Annalen.

Ist  $z + it$  eine Funktion der komplexen Variablen  $x + iy$ , so kann man den in einem Punkt  $x + iy$  der  $XY$ -Ebene vorhandenen Funktionswert durch einen Punkt im vierdimensionalen Raum mit den Koordinaten  $x, y, z, t$  zur Darstellung bringen. Dadurch wird im  $R_4$  über der  $XY$ -Ebene eine zweidimensionale Fläche ausgebreitet, welche das Bild der in den verschiedenen Punkten der  $XY$ -Ebene existierenden Funktionswerte ist. Wir haben diese Fläche eine *Riemannsche Fläche* oder kurz eine *R-Fläche*\*) genannt, weil sie funktionentheoretisch dasselbe leistet, wie die Riemannsche Fläche im gewöhnlichen Sinne.

Die vorliegende Arbeit, welche die Untersuchung der *R-Flächen* zum Gegenstande hat, gliedert sich nun in zwei Kapitel. Das erste Kapitel behandelt die Krümmungsverhältnisse allgemeiner zweidimensionaler Flächen des  $R_4$ ; man vergleiche hierzu meine Dissertation\*\*), in der die Flächen des  $R_4$  ausführlich behandelt sind. Im zweiten Kapitel werden speziell die *R-Flächen* untersucht: dieselben sind geometrisch und funktionentheoretisch interessant. Der in der Normalebene jedes Flächenpunkts liegende Kegelschnitt, der die Krümmungsverhältnisse vollständig charakterisiert, ist für alle Flächenpunkte ein Kreis mit dem Flächenpunkt als Mittelpunkt. Darum sind die Krümmungshalbmesser aller Normalschnitte in einem Punkt der Fläche einander gleich. Weiter zeigt sich, daß die *R-Flächen*

---

\*) Herr Blumenthal macht mich in freundlicher Weise darauf aufmerksam, daß Herr St. Kwietniewski in seiner Diss. „Über Flächen des vierdimensionalen Raumes, deren sämtliche Tangentialebenen untereinander gleichwinklig sind, und ihre Beziehung zu den ebenen Kurven, Zürich 1902“ dieselben Flächen betrachtet. Die indessen Herr Kwietniewski einen von dem meinigen wesentlich verschiedenen Standpunkt einnimmt, und unsere Arbeiten nur wenige Berührungspunkte zeigen, so nehme ich keinen Anstand, meine Arbeit ungeändert zu veröffentlichen. In einigen Fußnoten werde ich auf die Dissertation von Herrn Kwietniewski verweisen.

\*\*) Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen, Tübingen 1897. (Im folgenden kurz mit Diss. zitiert.)

Minimalflächen des  $R_4$  sind; man erhält so eine geometrische Deutung für das Dirichletsche Prinzip und den Greenschen Satz. Durch Projektion einer  $R$ -Fläche in eine Schar dreidimensionaler Räume erhält man eine Schar gewöhnlicher Flächen, die wir assoziierte Projektionsflächen genannt haben, weil sie in naher Beziehung zu einer Schar assoziierter Minimalflächen stehen. Diese Projektionsflächen sind alle aufeinander flächentreu bezogen, haben in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß und besitzen quadrierbare Asymptotenlinien. Zu diesen Flächen gehören die von Dini und v. Lilienthal untersuchten Flächen; einzelne derselben hat Dyck modellieren lassen (vgl. die Fußnoten zu § 9 und § 13). Alle aufeinander abwickelbaren  $R$ -Flächen sind kongruent oder Spiegelbilder voneinander in Beziehung auf einen  $R_3$ .

Die Projektionen der  $R$ -Fläche auf die  $XY$ -Ebene und die  $ZT$ -Ebene sind konforme Bilder der Fläche selbst und die  $R$ -Fläche vermittelt so in einfacher Weise die konforme Abbildung der  $XY$ -Ebene auf die  $ZT$ -Ebene. Die Tangential- und Normalebene der  $R$ -Flächen sind eigentümlich im  $R_4$  orientierte Ebenen und bilden einen Komplex. Die Gültigkeit des Cauchyschen Integralsatzes ist eine Folge dieser Orientierung der Tangentialebenen der  $R$ -Flächen.

Am Schlusse der Arbeit haben wir noch das Produkt zweier komplexer Größen durch ein Rechteck im vierdimensionalen Raum gedeutet und dieses Rechteck den Produktvektor genannt: man erhält so eine einfache geometrische Interpretation des Integrals  $\int F(x+iy)(dx+idy)$ , die eine Verallgemeinerung der bekannten Deutung eines Integrals durch eine Fläche im reellen Gebiet ist.

## I. Kapitel.

### Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen.

#### § 1.

#### Fundamentalgrößen erster und zweiter Ordnung.

Eine Fläche  $F_2$  im ebenen Raum von vier Dimensionen (kurz  $R_4$ ) wird dargestellt durch Gleichungen von der Form

$$(1) \quad x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad t = t(u, v),$$

so daß also die Koordinaten  $(xyzt)$  eines Flächenpunkts Funktionen zweier variabler Parameter  $u, v$  sind. Von diesen Funktionen setzen wir stets voraus, daß sie voneinander unabhängig und samt ihren ersten und zweiten Ableitungen stetig sind. Drei der Gleichungen (1) allein stellen eine zweidimensionale Fläche im gewöhnlichen Raume dar, nämlich die Pro-

jektion der  $F_2$  auf jenen Raum. Wir nennen diese Fläche kurz die *Projektionsfläche* jenes Raums.

Setzt man zur Abkürzung

$$\frac{\partial x}{\partial u} = x_1, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = x_2, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} = x_{12} \text{ etc.}$$

und

$$E = \Sigma x_1^2, \quad F = \Sigma x_1 x_2, \quad G = \Sigma x_2^2,$$

wo in den in Beziehung auf  $xyzt$  symmetrischen Summen nur das auf  $x$  bezügliche Glied angeschrieben ist, so erhält man für das *Linielement*  $ds$  der Fläche den Ausdruck

$$(2) \quad ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2.$$

Zu den Größen  $E, F, G$ , welche wir die *Fundamentalgrößen erster Ordnung* nennen, treten im folgenden noch zwölf weitere  $D_\mu, D'_\mu, D''_\mu$  ( $\mu = x, y, z, t$ ), welche auch die zweiten Ableitungen von  $x, y, z, t$  enthalten, und die wir *Fundamentalgrößen zweiter Ordnung* nennen.  $D_\mu$  bedeute die Unterdeterminante von  $\lambda_\mu$  in folgender Determinante

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z & \lambda_t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} & t_{11} \end{vmatrix}$$

Aus  $D_\mu$  erhält man der Reihe nach  $D'_\mu, D''_\mu$ , wenn man in  $D_\mu$  in der letzten Horizontalreihe die Indizes 11 bezgl. durch 12 und 22 ersetzt.

Wir definieren endlich noch drei Größen  $e, f, g$ , welche sowohl die ersten als auch die zweiten Ableitungen von  $x, y, z, t$  im zweiten Grad enthalten, durch folgende Gleichungen

$$(4) \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} & t_{11} \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} & t_{12} \end{vmatrix} = e; \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{11} & y_{11} & z_{11} & t_{11} \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} & t_{22} \end{vmatrix} = 2f; \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_{12} & y_{12} & z_{12} & t_{12} \\ x_{22} & y_{22} & z_{22} & t_{22} \end{vmatrix} = g.$$

§ 2.

**Tangentialebene, Normalebene, zweite Annäherungsfläche.**

Die Gleichung

$$(1) \quad A(X-x) + B(Y-y) + C(Z-z) + D(T-t) = 0,$$

wo  $A, B, C, D$  Konstante,  $X, Y, Z, T$  laufende Koordinaten sind, stellt einen durch den Flächenpunkt  $(x, y, z, t)$  hindurchgehenden dreidimensionalen ebenen Raum  $R_3$  dar. Geht dieser  $R_3$  auch noch durch die Punkte  $x + x_1 du, y + y_1 du$  etc. und  $x + x_2 dv$  etc., so muß

1\*

$$(2) \quad Ax_1 + By_1 + Cz_1 + Dt_1 = 0,$$

$$(3) \quad Ax_2 + By_2 + Cz_2 + Dt_2 = 0$$

sein. Die Gleichungen (1)—(3) stellen eine  $\infty^1$ -fache Schar von  $R_3$  dar, welche alle durch die Ebene

$$(4) \quad X - x = \lambda x_1 + \mu x_2; \quad Y - y = \lambda y_1 + \mu y_2; \quad Z - z = \lambda z_1 + \mu z_2; \\ T - t = \lambda t_1 + \mu t_2.$$

hindurchgehen, wobei  $\lambda, \mu$  variable Parameter sind. Diese Ebene nennen wir *Tangentialebene* oder *erste Annäherungsfläche* und jene Schar von  $R_3$ , welche durch diese hindurchgehen, *Tangentialräume*.

Die Ebene senkrecht zur Tangentialebene heißt *Normalebene*. Die Gleichungen der *Normalebene* lauten

$$(5) \quad M \equiv (X-x)x_1 + (Y-y)y_1 + (Z-z)z_1 + (T-t)t_1 = 0,$$

$$N \equiv (X-x)x_2 + (Y-y)y_2 + (Z-z)z_2 + (T-t)t_2 = 0.$$

Die Schar von  $R_3$

$$M + \lambda N = 0,$$

wo  $\lambda$  willkürlich ist, geht durch die Normalebene: wir nennen diese  $R_3$  *Normalräume*.

Wir wählen nun speziell als Parameter  $u, v$  der Fläche die Koordinaten  $x, y$ , dann lauten die Flächengleichungen

$$x = x, \quad y = y, \quad 2z = f(x, y), \quad 2t = \varphi(x, y).$$

Weiter setzen wir voraus, daß der Nullpunkt ein *regulärer* Flächenpunkt ist, so daß sich  $f$  und  $\varphi$  nach steigenden Potenzen von  $x, y$  entwickeln lassen: wir erhalten dann

$$2z = mx + ny + ax^2 + 2bxy + cy^2 + \dots,$$

$$2t = \mu x + \nu y + \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \dots$$

Endlich denken wir uns die Fläche so zum Koordinatensystem orientiert, daß die Ebene  $z = t = 0$  Tangentialebene der Fläche im Nullpunkt ist. Man erhält dann nach (4) als Flächengleichungen

$$2z = ax^2 + 2bxy + cy^2 + \dots,$$

$$2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 + \dots$$

Sieht man nun  $x, y$  als unendlich kleine Größen an, so kann für den Nullpunkt in allen Fällen, wo nur unendlich kleine Glieder bis zur zweiten Ordnung (Krümmungen) berücksichtigt werden müssen, die Fläche durch die einfachere mit den Gleichungen

$$(6) \quad 2z = ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

$$2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

ersetzt werden. Wir nennen daher die Fläche (6) *die zweite Annäherungsfläche*. Für die Annäherungsfläche ist die Ebene  $z = 0, t = 0$  die Tangentialebene, die Ebene  $x = 0, y = 0$  die Normalebene.

## § 3.

**Krümmung der Normalschnitte. Hauptschnitte.**

Wir schneiden nun die zweite Annäherungsfläche mit einem beliebigen durch den Nullpunkt gehenden  $R_3$  und untersuchen die Krümmung der aus der Fläche ausgeschnittenen Raumkurve  $C$  im Nullpunkt. Bildet dieser  $R_3$  mit dem durch die Kurventangente im Nullpunkte bestimmten Normalraum den Winkel  $\psi$  und ist weiter  $\rho_\psi$  der Krümmungshalbmesser der Kurve  $C$ ,  $\rho$  der Krümmungshalbmesser der Kurve, die jener Normalraum aus der Fläche ausschneidet, so gilt auch hier, wie wir nicht ausführlich beweisen\*), das *Meusniersche Theorem*

$$(1) \quad \rho_\psi = \rho \cos \psi.$$

Da so der Krümmungsradius jedes „schiefen“ Schnitts sich in einfacher Weise durch den Krümmungsradius des zugehörigen Normalschnitts ausdrückt, so betrachten wir des weiteren nur noch die Krümmung der Normalschnitte.

Wir schneiden also die Annäherungsfläche mit dem Normalraum

$$(2) \quad y - \lambda x = 0 \quad \text{oder} \quad y - x \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad (\text{d. h. } \lambda = \operatorname{tg} \varphi).$$

Dabei bedeutet  $\varphi$  den Neigungswinkel der Tangente der ausgeschnittenen Raumkurve mit der  $X$ -Achse. Eine leichte Rechnung ergibt für den Krümmungsradius  $\rho$

$$(3) \quad \frac{1}{\rho^2} = \left( \frac{a + 2b\lambda + c\lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)^2.$$

Die Gleichung (3) läßt sich noch in der bemerkenswerten Form

$$\frac{1}{\rho^2} = \frac{1}{\rho_z^2} + \frac{1}{\rho_t^2}$$

schreiben, wobei  $\rho_z$  der Krümmungshalbmesser der Kurve ist, die durch  $y - \lambda x = 0$  aus der Projektionsfläche des Raumes  $t = 0$  ausgeschnitten wird, und  $\rho_t$  die analoge Bedeutung hat. Die Gleichung (3) zeigt, daß im allgemeinen  $\rho$  nie Null und nie unendlich wird, daß also der Krümmungsradius für alle Schnitte dasselbe Zeichen hat. In diesem Sinne haben wir also auch keine den Haupttangente gewöhnlicher Flächen entsprechende Richtungen. Wenn aber die Ausdrücke

$$a + 2b\lambda + c\lambda^2 \quad \text{und} \quad \alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2$$

für einen Wert von  $\lambda$  gleichzeitig verschwinden oder, was dasselbe ist, wenn die Resultante dieser beiden Formen

$$4(ac - b^2)(\alpha\gamma - \beta^2) - (ac + a\gamma - 2b\beta)^2 = 0$$

\*) Vgl. Diss. § 4.

ist, so wird ein Krümmungshalbmesser unendlich groß. Wir haben dann einen Flächenpunkt mit besonderen Eigenschaften, den wir einen Punkt mit *parabolischer Krümmung* nennen, oder kurz einen *parabolischen Punkt*.

Um nun die *Maximal-* bzw. *Minimal-Werte* für den Krümmungshalbmesser zu erhalten, bilden wir mit Hilfe von (3)  $\frac{d}{d\lambda} \left( \frac{1}{\rho^2} \right) = 0$ . Unter Weglassung von Faktoren, die von Null verschieden sind, erhält man so die Gleichung

$$(4) [a + 2b\lambda + c\lambda^2][b\lambda^2 + (a-c)\lambda - b] + [\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2][\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta] = 0.$$

Diese Gleichung lehrt, daß hier im  $R_4$  eine Fläche vier Hauptkrümmungshalbmesser besitzt, während Flächen im  $R_3$  deren nur zwei besitzen. Bedenkt man aber, daß bei diesen zwei Krümmungshalbmesser unendlich groß sind, und rechnet man diese den Hauptkrümmungshalbmessern zu, so hat man im ganzen auch vier Krümmungshalbmesser. In der Tat, wendet man (4) auf eine Fläche im  $R_3$   $t=0$  an und setzt demnach  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ , so erhält man zur Bestimmung der Hauptschnitte die Gleichung

$$(a + 2b\lambda + c\lambda^2)(b\lambda^2 + (a-c)\lambda - b) = 0.$$

Der erste Faktor, mit Null verglichen, gibt aber die beiden Werte von  $\lambda$  für die Asymptotenrichtungen, der zweite Faktor die beiden Werte von  $\lambda$ , die den Krümmungslinien entsprechen. Verschwinden für einen Wert von  $\lambda$  die beiden Formen  $a + 2b\lambda + c\lambda^2$  und  $\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2$  gleichzeitig (parabolischer Punkt) so wird durch diesen Wert (4) befriedigt; in einem *parabolischen Punkt* gibt es daher nur drei endliche Hauptkrümmungshalbmesser. In diesem Fall werden durch den entsprechenden Normalraum  $y - \lambda x = 0$  aus den Projektionsflächen in die Räume  $z = 0$  und  $t = 0$  gleichzeitig Asymptotenrichtungen ausgeschnitten. Ebenso sieht man, daß, wenn ein Normalraum aus einer der Projektionsflächen eine Asymptotenrichtung, aus der andern die Richtung einer Krümmungslinie oder aus beiden Richtungen von Krümmungslinien ausschneidet, dieser Raum ein *Hauptschnittraum* ist d. h. eine Hauptkrümmungsrichtung aus der Fläche im  $R_4$  ausschneidet. Die weitere Diskussion schließen wir unten (§ 7) an die sogenannte Charakteristik an.

#### § 4.

##### Schnitt konsekutiver Normalebene. Charakteristik.

Nach § 2, (5) lauteten die Gleichungen der Normalebene im Punkte  $(x, y, z, t)$

$$(1) \quad \Sigma(X-x)x_1 = 0, \quad \Sigma(X-x)x_2 = 0,$$

wo in den Summen nur das auf  $x$  bezügliche Glied angeschrieben ist.

Schneidet man diese Normalebene mit der des benachbarten Punktes  $x + dx, y + dy$  etc., so erhält man weiter

$$(2) \quad \Sigma(X-x)dx_1 = Edu + Fdv, \quad \Sigma(X-x)dx_2 = Fdu + Gdv.$$

Löst man (1) und (2) nach  $X - x, Y - y$  etc. auf, so folgt nach den Bezeichnungen von § 1 leicht

$$(3) \quad \begin{aligned} X - x &= \frac{(ED'_x - FD_x)du^2 + (ED''_x - GD_x)dudv + (FD''_x - GD'_x)dv^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}, \\ Y - y &= \frac{(ED'_y - FD_y)du^2 + (ED''_y - GD_y)dudv + (FD''_y - GD'_y)dv^2}{edu^2 + 2fdudv + gdv^2}, \\ Z - z &= \dots\dots\dots, \\ T - t &= \dots\dots\dots. \end{aligned}$$

Jeder Fortschreitungsrichtung  $\frac{du}{dv}$  auf der Fläche entspricht nach (3) ein bestimmter Punkt  $(X, Y, Z, T)$  in der Normalebene des Flächenpunktes  $(x, y, z, t)$ . Durchläuft  $\frac{du}{dv}$  alle Werte d. h. schneidet man die Normalebenen aller Punkte einer kleinen geschlossenen Kurve auf der Fläche, die den Flächenpunkt  $(x, y, z, t)$  umgibt, mit der Normalebene dieses Punktes, so wird in der Normalebene ein Kegelschnitt erzeugt, den wir die „Charakteristik“ nennen. In § 7 wird sich nämlich zeigen, daß dieser Kegelschnitt die Krümmungsverhältnisse im Flächenpunkte vollständig charakterisiert, ähnlich wie die Indikatrix gewöhnlicher Flächen. Die Gleichungen dieser Charakteristik sind durch (3) gegeben, in denen  $\frac{du}{dv}$  als variabler Parameter anzusehen ist. Die Asymptotenrichtungen der Charakteristik erhält man durch Nullsetzen des Nenners in (3)

$$(4) \quad edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = 0.$$

Den Asymptotenrichtungen der Charakteristik entsprechen zwei Richtungen auf der Fläche selbst, die wir die *Asymptotenrichtungen der Fläche* nennen, diese sind durch (4) bestimmt. Je nachdem  $eg - f^2 \gtrless 0$ , ist die *Charakteristik* eine *Ellipse* bzw. *Parabel* oder *Hyperbel*. Wir werden weiter unten (§ 5) danach eine Einteilung der Flächenpunkte in drei Gattungen vornehmen. Wir wenden die Gleichungen (3) noch an auf die Gleichungen der zweiten Annäherungsfläche (§ 2, (6)): dieselben lauten

$$(5) \quad 2z = ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad 2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2.$$

Wir haben hier  $x, y$  als die veränderlichen Parameter  $u, v$  zu betrachten und erhalten so für die *Charakteristik im Nullpunkt* die Gleichungen:

$$(6) \quad X = 0; \quad Y = 0; \quad Z = \frac{\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta}{(\alpha + \beta\lambda)(b + c\lambda) - (\beta + \gamma\lambda)(a + b\lambda)};$$

$$T = -\frac{b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b}{(\alpha + \beta\lambda)(b + c\lambda) - (\beta + \gamma\lambda)(a + b\lambda)}.$$

Dabei ist  $\frac{dy}{dx} = \lambda$  gesetzt. Jedem Wert von  $\lambda$  oder jedem Element, das der Normalraum  $y - \lambda x = 0$  aus der Fläche schneidet, entspricht demnach ein Punkt  $M$  in der Charakteristik (6), die in der Normalebene  $X = 0$ ,  $Y = 0$  des Nullpunkts liegt.

Wir untersuchen nun die Lage des Punktes  $M$  zur Schmiegungeebene der Raumkurve, die der Raum  $y - \lambda x = 0$  aus der Fläche schneidet. Man erhält als Gleichungen dieser Schmiegungeebene

$$(7) \quad \frac{Z}{T} = \frac{a + 2b\lambda + c\lambda^2}{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}; \quad Y - \lambda X = 0.$$

Ist weiter  $O$  der Ursprung, so erhält man als Gleichungen für  $OM$  nach (6)

$$(8) \quad \frac{Z}{T} = -\frac{\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta}{b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b}; \quad X = 0; \quad Y = 0.$$

Bezeichnet man weiter mit  $v$  den Winkel, den  $OM$  mit der Schmiegungeebene (7) bildet, so erhält man leicht

$$(9) \quad \sin v = \frac{[\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2][\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta] + [a + 2b\lambda + c\lambda^2][b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b]}{\sqrt{\{[\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2]^2 + [a + 2b\lambda + c\lambda^2]^2\} \{[\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta]^2 + [b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b]^2\}}}$$

Für  $v = 0$  erhält man gerade die linke Seite der Gleichung (4) § 3, es folgt daher: *Der Schnittpunkt ( $M$ ) konsekutiver Normalebenen, in der Richtung eines Hauptschnitts genommen und nur in dieser, liegt in der Schmiegungeebene des durch jene Richtung gelegten Normalschnitts.*

Durch diesen Satz sind die Hauptkrümmungsrichtungen genau so charakterisiert, wie durch den analogen Satz die Hauptkrümmungsrichtungen der Flächen im  $R_3$ .

Wir setzen nun zweitens in (9)  $v = \frac{\pi}{2}$ : Man erhält dann

$$\begin{vmatrix} a + 2b\lambda + c\lambda^2 & \alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2 \\ b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b & \beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta \end{vmatrix} = 0.$$

Benützt man die Identität

$$(10) \quad \begin{vmatrix} \alpha + \beta\lambda & \beta + \gamma\lambda \\ \alpha + b\lambda & b + c\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ -\lambda & 1 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a + 2b\lambda + c\lambda^2 & \alpha + \beta\lambda + \gamma\lambda^2 \\ b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b & \beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta \end{vmatrix}$$

und läßt den von Null verschiedenen Faktor von  $1 + \lambda^2$  weg, so folgt

$$(11) \quad \begin{vmatrix} \alpha + \beta\lambda & \beta + \gamma\lambda \\ \alpha + b\lambda & b + c\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Die linke Seite von (11) ist aber der Nenner der Charakteristik (6). Für die *Asymptotenrichtungen* steht also *OM senkrecht zur Schmiegungeebene*; dies erinnert an den Satz der Fläche im  $R_3$ , nach dem für die Asymptotenkurven die Flächennormale senkrecht zur Schmiegungeebene steht.

## § 5.

**Involution auf der Fläche. Einteilung der Flächenpunkte.**

Die weiteren Erörterungen schließen sich wieder an die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} 2z &= ax^2 + 2bxy + cy^2, \\ 2t &= \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2 \end{aligned}$$

der zweiten Annäherungsfläche an. Da im folgenden wiederholt die Invarianten der beiden quadratischen Formen

$$(2) \quad f_1 \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2; \quad f_2 \equiv \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

aufzutreten, so setzen wir zur Abkürzung

$$\begin{aligned} D_{11} &\equiv ac - b^2 \text{ Diskriminante von } f_1, \\ D_{22} &\equiv \alpha\gamma - \beta^2 \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad f_2, \\ D_{12} &\equiv a\gamma + \alpha c - 2b\beta \text{ Simultaninvariante von } f_1 \text{ und } f_2, \end{aligned}$$

$$(3) \quad \mathfrak{D}_{12} \equiv \begin{vmatrix} ax + by & bx + cy \\ \alpha x + \beta y & \beta x + \gamma y \end{vmatrix} \text{ Funktionaldeterminante von } f_1 \text{ und } f_2,$$

$$R \equiv D_{12}^2 - 4D_{11}D_{22} \text{ Resultante von } f_1 \text{ und } f_2.$$

Die Tangentialebene in einem Punkt einer Fläche des  $R_3$  schneidet aus dieser eine Kurve aus, die im Berührungspunkt einen Doppelpunkt besitzt. Ähnliches ist für Flächen im  $R_4$  der Fall, indem jeder Tangentialraum

$$(4) \quad z - kt = 0 \quad \text{oder} \quad z - t \operatorname{tg} \varphi = 0 \quad (k = \operatorname{tg} \varphi)$$

eine Raumkurve aus der Fläche schneidet, die im Berührungspunkt einen singulären Punkt besitzt. Das Tangentenpaar in diesem Punkt ist durch die Gleichung

$$(5) \quad f_1 - kf_2 \equiv (a - k\alpha)x^2 + 2(b - k\beta)xy + (c - k\gamma)y^2 = 0$$

bestimmt. Das Tangentenpaar (5) liegt in der Tangentenebene d. h. in der  $XY$ -Ebene. Drei verschiedene Tangentialräume, entsprechend den Parametern  $k_1, k_2, k_3$ , schneiden sechs Linienelemente aus der Fläche, die durch die Gleichungen bestimmt sind, die man durch sukzessive Substitution von  $k_1, k_2, k_3$  für  $k$  aus (5) erhält. Da die Resultante dieser drei Gleichungen verschwindet, so liegen die sechs Elemente in Involution.\*) Es folgt: *Die einfach unendliche Schar (4) von Tangentialräumen paart die von dem Nullpunkt ausgehenden Flächenelemente involutorisch.*

\*) Vgl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, § 58.

Setzt man in (5) die Diskriminante gleich Null, also

$$(6) \quad D_{22}k^2 - D_{12}k + D_{11} = 0,$$

so erhält man zwei Werte  $k_1, k_2$  von  $k$ , welche die *Doppelstrahlen* der Involution bestimmen. Es ist dann

$$(7) \quad k = \frac{D_{12} \pm \sqrt{R}}{2D_{22}} = \operatorname{tg} \varphi_1.$$

Die Gleichung für die Doppelstrahlen selbst erhalten wir, indem wir bilden

$$(f_1 - k_1 f_2)(f_1 - k_2 f_2) = f_1^2 - (k_1 + k_2)f_1 f_2 + k_1 k_2 f_2^2 = 0,$$

oder

$$D_{22}f_1^2 - D_{12}f_1 f_2 + D_{11}f_2^2 = 0.$$

Die linke Seite ist aber identisch mit  $-\vartheta_{12}^2$ .\*) Die *Doppelstrahlen* sind also durch die Gleichung

$$\begin{vmatrix} ax + by & bx + cy \\ \alpha x + \beta y & \beta x + \gamma y \end{vmatrix} = 0$$

\*bestimmt. Beachtet man § 4, (6), so folgt: *Die Doppelstrahlen der Involution sind die in § 4 definierten Asymptotenrichtungen. Die Involutionenpaare werden daher von den Asymptotenrichtungen harmonisch getrennt.* Diese Doppelstrahlen können als Analogie der Doppelstrahlen der Involution in der Indikatrix gewöhnlicher Flächen gelten und die Benennung „Asymptotenrichtungen“ scheint daher von neuem gerechtfertigt. Die zwei Tangentialräume, welche diese ausschneiden ( $z - k_1 t = 0$ ,  $z - k_2 t = 0$ ), sollen „Asymptotenräume“ heißen.

Aus (7) ergibt sich nun, daß, je nachdem  $R > 0$ ,  $R = 0$ ,  $R < 0$  ist, die Asymptotenrichtungen reell verschieden, reell zusammenfallend, imaginär sind. Entsprechend ist dann die Charakteristik § 4, (6) eine *Hyperbel*, eine *Parabel* oder eine *Ellipse*. Im ersten Falle ( $R > 0$ ) nennen wir daher den Flächenpunkt einen *hyperbolischen*, im zweiten ( $R = 0$ ) in Übereinstimmung mit § 3 einen *parabolischen*, im dritten Falle ( $R < 0$ ) einen *elliptischen Punkt*. Im parabolischen Punkte ist ein Hauptkrümmungshalbmesser unendlich groß (s. § 3). Da weiter nach § 4, (4) in einem *allgemeinen Flächenpunkt* ( $x, y, z, t$ ) die Asymptotenrichtungen durch die Gleichung

$$edu^2 + 2fdu dv + gdv^2 = 0$$

bestimmt sind, so ist der Flächenpunkt ein *hyperbolischer*, *parabolischer* oder *elliptischer*, je nachdem  $f^2 - eg$  größer, gleich oder kleiner als Null ist.

Wir bilden nunmehr Paare von Tangentialräumen, welche aus der Fläche vier harmonische Strahlen ausschneiden. Damit die vier Linien-elemente, welche durch die beiden Gleichungen

$$f_1 - k f_2 = 0, \quad f_1 - k_1 f_2 = 0$$

\*) Vgl. Clebsch, Theorie der binären algebraischen Formen, § 57.

bestimmt sind, sich harmonisch trennen, muß die Simultaninvariante der linken Seiten verschwinden. Man erhält

$$(8) \quad 2kk_1D_{22} - (k+k_1)D_{12} + 2D_{11} = 0.$$

Die Form dieser Gleichung zeigt, daß die Paare von Tangentialräumen, welche vier harmonische Flächenelemente ausschneiden, eine Involution bilden. Für  $k = k_1$  erhält man aus (8) die Doppelräume dieser Involution, nämlich

$$k = \frac{D_{12} \pm \sqrt{R}}{2D_{22}}.$$

Nach (7) sind die Doppelräume die Asymptotenräume. Das Rechtwinkelpaar von Tangentialräumen in der Involution, „die Rechtwinkelräume“, erhält man, indem man in (8)  $k = -\frac{1}{k_1} = \operatorname{tg} \varphi$  setzt. Man erhält so

$$(9) \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{D_{12}}{D_{22} - D_{11}}.$$

Durch (9) sind zwei aufeinander senkrechte Tangentialräume definiert, die aus der Fläche vier harmonische Limienelemente ausschneiden und die Winkel der Asymptotenräume halbieren. Wir nennen diese Räume mit späterer Begründung „Hauptkrümmungsräume“. Man zeigt leicht, daß im parabolischen Punkt die beiden Asymptotenräume mit einem der beiden Hauptkrümmungsräume zusammenfallen.

## § 6.

### Die Krümmung der Projektionen in die Tangentialräume. Biegungsinvariante.

Wir gehen wieder aus von den Gleichungen (6) § 2 der zweiten Annäherungsfläche:

$$\begin{aligned} 2z &= ax^2 + 2bxy + cy^2, \\ 2t &= \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2. \end{aligned}$$

Wir drehen nun die Koordinatenräume  $z=0$  und  $t=0$  um die Tangentialebene ( $XY$ -Ebene) um den Winkel  $\varphi$ , setzen demnach

$$z = t_1 \sin \varphi + z_1 \cos \varphi, \quad t = t_1 \cos \varphi - z_1 \sin \varphi$$

und erhalten als Gleichungen der Annäherungsfläche in Beziehung auf das neue Koordinatensystem

$$(1) \quad \begin{aligned} 2z_1 &= (a \cos \varphi - \alpha \sin \varphi)x^2 + 2(b \cos \varphi - \beta \sin \varphi)xy \\ &\quad + (c \cos \varphi - \gamma \sin \varphi)y^2, \\ 2t_1 &= (a \sin \varphi + \alpha \cos \varphi)x^2 + 2(b \sin \varphi + \beta \cos \varphi)xy \\ &\quad + (c \sin \varphi + \gamma \cos \varphi)y^2. \end{aligned}$$

Die Gleichungen der Projektionsfläche in den Tangentialraum  $z_1 = 0$  lauten

$$(2) \quad \begin{aligned} 2t_1 &= (a \sin \varphi + \alpha \cos \varphi)x^2 + 2(b \sin \varphi + \beta \cos \varphi)xy \\ &\quad + (c \sin \varphi + \gamma \cos \varphi)y^2, \\ z_1 &= 0. \end{aligned}$$

Sind  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  die Hauptkrümmungshalbmesser dieser Projektionsfläche, so ist nach bekannten Formeln

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} &= (a \sin \varphi + \alpha \cos \varphi)(c \sin \varphi + \gamma \cos \varphi) - (b \sin \varphi + \beta \cos \varphi)^2 \quad \text{oder} \\ \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} &= D_{11} \sin^2 \varphi + D_{12} \sin \varphi \cos \varphi + D_{22} \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Variiert  $\varphi$ , so erhält man aus (2) die den verschiedenen Tangentialräumen entsprechenden Projektionsflächen. Das Krümmungsmaß (3) dieser Flächen variiert dann offenbar wie die reziproken Krümmungsradien folgender im  $R_3$   $t = 0$  gelegenen Fläche

$$(4) \quad 2z = D_{22}x^2 + D_{12}xy + D_{11}y^2.$$

Alle Sätze also, welche für die Krümmungsradien der Normalschnitte gewöhnlicher Flächen gelten, finden für das Krümmungsmaß der Projektionsflächen die entsprechende Deutung. Insbesondere erhält man zwei extreme Werte für das Krümmungsmaß, entsprechend den Hauptkrümmungsradien der Flächen im  $R_3$ , weiter Krümmungsmaße mit dem Wert Null, und endlich einen dem Eulerschen analogen Satz.

Die Tangentialräume, deren Projektionsflächen einen extremen Wert des Krümmungsmaßes besitzen, erhält man aus (3), indem man  $\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} \right) = 0$  setzt. Es folgt so

$$(5) \quad \operatorname{tg} 2\varphi = \frac{D_{12}}{D_{22} - D_{11}}.$$

Durch (5) sind also zwei aufeinander senkrechte Tangentialräume definiert, in welche projiziert die Fläche Flächen mit maximalem bzw. minimalem Wert des Hauptkrümmungsmaßes gibt. Diese Räume sind aber nach § 5, (9) identisch mit den dort definierten Hauptkrümmungsräumen.\*) Ihre Benennung scheint so gerechtfertigt.

Die Projektionsflächen mit dem Krümmungsmaß Null erhält man, indem man in (3)  $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = 0$  setzt. Es folgt

$$(6) \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{D_{12} \pm \sqrt{R}}{2D_{11}}.$$

Durch (6) sind zwei Tangentialräume, „Nullräume“, definiert, welche, wie

\*) Vgl. Killing, Nicht-Euklidische Raumformen p. 248.

man leicht zeigt, auf den Asymptotenräumen des § 5 senkrecht stehen. Da in § 5 sich gezeigt hat, daß die Winkel der Asymptotenräume durch die Hauptkrümmungsräume halbiert werden, so werden auch die Winkel der Nullräume durch die Hauptkrümmungsräume halbiert. Setzt man endlich in (3)  $\varphi + \frac{\pi}{2}$  statt  $\varphi$ , so erhält man das Krümmungsmaß  $\frac{1}{e_1' e_2'}$  der Projektionsfläche in den Raum  $t_1 = 0$ . Es folgt so

$$(7) \quad \frac{1}{e_1 e_2} + \frac{1}{e_1' e_2'} = D_{11} + D_{22}.$$

Die Summe der Krümmungsmaße zweier Projektionsflächen in Beziehung auf zwei beliebige zueinander senkrechte Tangentialräume ist also konstant.

Man kann zeigen\*), daß diese Summe für einen allgemeinen Flächenpunkt aus dem Ausdruck für das Linienelement

$$(8) \quad ds^2 = Edu^2 + 2Fdu dv + Gdv^2$$

durch dieselbe Formel erhalten wird, durch die man das Gaußsche Krümmungsmaß einer Fläche im  $R_3$  mit dem Linienelement (8) berechnet. Diese Summe ist daher eine Biegungsinvariante, die man passend ebenfalls das *Krümmungsmaß der Fläche* nennt.

## § 7.

### Die Charakteristik.

Wir untersuchen nun den in der Normalebene ( $ZT$ -Ebene) eines Flächenpunkts gelegenen Kegelschnitt, den wir in § 4 Charakteristik nannten. Es wird sich zeigen, daß dieser Kegelschnitt die Krümmungsverhältnisse im Flächenpunkt klar übersehen läßt: außerdem werden wir mit seiner Hilfe imstande sein, Genaueres über die Hauptkrümmungsradien auszusagen. Wir knüpfen zu diesem Zwecke an die Gleichungen (6) § 4

$$(1) \quad \begin{aligned} X = 0; \quad Y = 0; \quad Z &= \frac{\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta}{(\alpha + \beta\lambda)(b + c\lambda) - (\beta + \gamma\lambda)(a + b\lambda)}; \\ T &= -\frac{b\lambda^2 + (a - c)\lambda - b}{(\alpha + \beta\lambda)(b + c\lambda) - (\beta + \gamma\lambda)(a + b\lambda)} \end{aligned}$$

unsere Erörterungen an. Jeder Fortschreitungsrichtung  $\lambda = \frac{y}{x}$  der Fläche entspricht darnach ein Punkt  $(X, Y, Z, T)$  der Normalebene. Von der Einteilung der Flächenpunkte nach der Natur des Kegelschnitts war schon in § 4 die Rede. Wir bestimmen hier nun zunächst die *Lage der*

\*) Vgl. Hovestadt, Programm des Münsterschen Realgymnasiums 1880.

*Asymptoten* von (1). Man erhält die Gleichungen der Asymptotenrichtungen, indem man aus den beiden Gleichungen

$$(2) \quad \frac{Z}{T} = -\frac{\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta}{b\lambda^2 + (\alpha - c)\lambda - b} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} \alpha + \beta\lambda & \beta + \gamma\lambda \\ \alpha + b\lambda & b + c\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\lambda$  eliminiert. Quadriert man die Determinante und beachtet die Identität § 4, (10), so erhält man die beiden Gleichungen

$$D_{22}(a + 2b\lambda + c\lambda^2)^2 - D_{12}(a + 2b\lambda + c\lambda^2)(\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2) + D_{11}(\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2)^2 = 0,$$

$$(a + 2b\lambda + c\lambda^2)(\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta) - (\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2)(b\lambda^2 + (\alpha - c)\lambda - b) = 0.$$

Aus diesen beiden Gleichungen und der ersten Gleichung (2) läßt sich aber  $\lambda$  bequem eliminieren; man erhält so für die *Asymptotenrichtungen der Charakteristik*

$$(3) \quad D_{11}Z^2 + D_{12}ZT + D_{22}T^2 = 0$$

oder

$$(4) \quad \frac{Z}{T} = -\frac{D_{12} \pm \sqrt{R}}{2D_{11}}.$$

Diese Gleichung stellt aber, wie man aus § 6, (6) erkennt, die Nullräume dar. Es folgt: *Schneidet man die beiden Tangentialräume (Nullräume), auf welche die Fläche projiziert Flächen mit dem Krümmungsmaß Null gibt, mit der Normalebene, so erhält man in dieser zwei Gerade, welche die Asymptotenrichtungen der Charakteristik sind.*

Bestimmt man zu dem Geradenpaar (3) das Paar von Winkelhalbierenden, so erhält man die *Gleichung für die Achsenrichtungen* des Kegelschnitts. Eine kleine Rechnung gibt

$$(5) \quad D_{12}Z^2 + 2(D_{22} - D_{11})ZT - D_{12}T^2 = 0.$$

Setzt man hier  $\frac{Z}{T} = \operatorname{tg} \varphi$ , so erhält man für die *Achsenrichtungen*

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{D_{12}}{D_{22} - D_{11}}.$$

Nach § 6, (5) folgt: *Durch die Hauptkrümmungsräume werden aus der Normalebene die Achsenrichtungen der Charakteristik ausgeschnitten.*

Aus (1) folgt, daß die Größe  $\frac{Z}{T}$  sich durch Vertauschen von  $\lambda$  mit  $-\frac{1}{\lambda}$  nicht ändert. Zieht man demnach durch den Flächenpunkt zwei aufeinander senkrechte Linienelemente und schneidet die Normalebenen in den Endpunkten mit der im Anfangspunkt, so liegen die beiden resultierenden Schnittpunkte mit dem Flächenpunkt in gerader Linie. Der *Flächenpunkt ist nun nicht etwa Mittelpunkt des Kegelschnitts*, da die Größe

$Z^2 + T^2$  durch Vertauschen von  $\lambda$  mit  $-\frac{1}{\lambda}$  ihren Wert ändert, sondern ein nicht näher charakterisierter Punkt, jedoch *im Innern des Kegelschnitts*; denn jede Gerade durch den Flächenpunkt  $Z + \sigma T = 0$ , wo  $\sigma$  eine beliebige Konstante bedeutet, schneidet den Kegelschnitt in zwei *reellen* Punkten, da das Absolutglied der Gleichung dieser Geraden, in  $\lambda$  geschrieben,  $-1$  ist.

Man schneide nunmehr die Normalebene mit dem Tangentialraum  $Z=0$ . Dieser wird aus der Normalebene eine Gerade (die  $T$ -Achse) ausschneiden, auf der vom Kegelschnitt zwei Strecken  $T_1$  und  $T_2$  begrenzt werden, entsprechend den beiden Wurzeln  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  der Gleichung

$$\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta = 0.$$

Beachtet man die Identität § 4, (10), so erhält man jene beiden Strecken durch folgende Gleichungen

$$(7) \quad \frac{1}{T} = \frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{1 + \lambda^2}; \quad \beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta = 0.$$

Diese beiden Gleichungen gestatten nun eine interessante Deutung: Projiziert man die Fläche in den Raum  $Z=0$ , so erhält man eine Projektionsfläche mit den Gleichungen

$$2t = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2, \quad z = 0.$$

Die Normale dieser Fläche ist die  $T$ -Achse. Die Hauptkrümmungshalbmesser ( $R$ ) der Projektionsfläche erhält man wie bekannt durch die Gleichung

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{1 + \lambda^2},$$

wobei  $\lambda$  der Gleichung

$$\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta = 0$$

zu genügen hat. Es ist demnach

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{T}.$$

Da nun offenbar  $Z=0$  ein ganz beliebiger Tangentialraum ist, so folgt:

**Satz I.** *Schneidet man die Charakteristik mit dem beliebigen Tangentialraum  $Z=0$ , so erhält man zwei Abschnitte  $T_1$  und  $T_2$ . Die Gerade, auf der  $T_1$  und  $T_2$  liegen, stellt die Normale, ihre Endpunkte stellen die Hauptkrümmungsmittelpunkte, die Abschnitte  $T_1$  und  $T_2$  die Hauptkrümmungshalbmesser der in den Raum  $Z=0$  projizierten Fläche dar.*

Nach diesem Satze kann daher die Charakteristik auch auf folgende Art erzeugt werden: Man projiziere die Fläche in die einfach unendliche Schar von Tangentialräumen und erhält so eine einfach unendliche Schar gewöhnlicher Flächen. Ihre Normalen (im Nullpunkt) durchlaufen die

Normalebene und die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte die Charakteristik. An diesen Satz schließen sich noch einige Bemerkungen an. Das Produkt  $\frac{1}{T_1 T_2}$  ist das Krümmungsmaß der in den Raum  $Z=0$  projizierten Fläche. Ist  $Z=0$  ein Nullraum, so schneidet dieser nach dem Obigen aus der Normalebene eine Asymptotenrichtung aus. Ein Abschnitt  $T$  wird demnach unendlich groß und das Krümmungsmaß der in einen Nullraum projizierten Fläche ist Null — und dies war ja die definierende Eigenschaft der Nullräume (vgl. § 6). Ist  $Z=0$  ein Hauptkrümmungsraum, so wird durch diesen, wie oben gezeigt wurde, eine Achsenrichtung aus der Ebene der Charakteristik ausgeschnitten. Es muß also für einen Kegelschnitt der Satz gelten, daß das Produkt  $\frac{1}{T_1 T_2}$  ein Maximum bzw. Minimum ist, wenn die Gerade, auf der die Abschnitte liegen, achsenparallel ist. Zieht man ferner in der Ebene der Charakteristik durch den Flächenpunkt zwei zueinander senkrechte Gerade, etwa  $Z=0$  und  $T=0$ , so erhält man vier Abschnitte  $Z_1 Z_2, T_1 T_2$ , für die nach dem obigen Satz und § 6, (7)

$$\frac{1}{Z_1 Z_2} + \frac{1}{T_1 T_2} = D_{11} + D_{22}$$

ist. Diese Gleichung enthält wiederum einen leicht zu formulierenden Satz für Kegelschnitte. Die Größe  $\frac{1}{Z_1 Z_2} + \frac{1}{T_1 T_2}$ , welche gleich dem Krümmungsmaß der Fläche ist, zeigt einige Verwandtschaft mit der Potenz eines Punkts in Beziehung auf einen Kreis. Überhaupt jeder Satz über Sehnen eines Kegelschnitts durch einen inneren Punkt findet eine entsprechende Deutung für die Krümmungsverhältnisse der Fläche. Einige Beispiele mögen genügen. Ist etwa der Kegelschnitt ein Kreis, so haben alle Projektionsflächen dasselbe Krümmungsmaß (*Kreispunkt*). Ist der Flächenpunkt Mittelpunkt des Kegelschnitts, so haben in diesem Punkt alle Projektionsflächen den Charakter von Minimalflächen etc.

Wir beweisen noch einen Satz, der uns näheren Aufschluß über die Hauptkrümmungsradien geben wird. Derselbe lautet

Satz II. *Der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Normalschnitte ist die Fußpunktkurve der Charakteristik in Beziehung auf den Flächenpunkt.*

Zum Beweis dieses Satzes stellen wir zunächst für einen Punkt  $(Z_1, T_1)$  des Kegelschnitts, dem der Parameterwert  $\lambda$  in (1) entsprechen möge, die Gleichung der Tangente auf. Bedeutet  $(Z, T)$  einen Punkt dieser Tangente, so lautet, wie man leicht nachrechnet, ihre Gleichung

$$(8) \quad \frac{T - T_1}{Z - Z_1} = - \frac{a + 2b\lambda + c\lambda^2}{a + 2b\lambda + \gamma\lambda^2}.$$

Die Normale vom Flächenpunkt auf diese Tangente hat demnach die Gleichung

$$(9) \quad \frac{T}{Z} = \frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{\alpha + 2b\lambda + c\lambda^2}$$

Wir zeigen zunächst, daß auf dieser Geraden der Krümmungsmittelpunkt des dem Werte  $\lambda$  entsprechenden Normalschnitts liegt. Die Gleichung der Schmiegungebene dieses Normalschnitts ist nach § 4, (7)

$$(10) \quad \frac{T}{Z} = \frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{\alpha + 2b\lambda + c\lambda^2}; \quad Y - \lambda X = 0.$$

Die Schnittgerade dieser Schmiegungebene mit der Normalebene  $X = 0$ ,  $Y = 0$  des Flächenpunkts muß jenen Krümmungsmittelpunkt enthalten. Setzt man aber in (10)  $X = 0$ ,  $Y = 0$ , so erhält man gerade (9), womit dieser erste Teil des Beweises erledigt ist. Zeigen wir endlich, daß der Abstand  $\varrho$  des Flächenpunkts von der Tangente (8) gerade gleich dem Krümmungsradius des dem Werte  $\lambda$  entsprechenden Normalschnitts ist, so ist der Satz II bewiesen. Aus (8) erhält man aber für  $\varrho$  einen Ausdruck, der mit Hilfe der Identität § 4, (10) sich auf folgende Form

$$\frac{1}{\varrho^2} = \left( \frac{\alpha + 2b\lambda + c\lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)^2 + \left( \frac{\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)^2$$

bringen läßt. Aus § 3, (3) folgt nun, daß  $\varrho$  in der Tat gleich dem Krümmungsradius des dem Werte  $\lambda$  entsprechenden Normalschnitts ist, womit der Satz II bewiesen ist.

Wir bemerken noch: Geht die Normale vom Flächenpunkt auf die Kegelschnitttangente durch den Berührungspunkt hindurch oder, mit anderen Worten, steht diese Normale auf dem Kegelschnitt senkrecht, so muß nach (9) und (1)

$$[\alpha + 2b\lambda + c\lambda^2][b\lambda^2 + (a-c)\lambda - b] + [\alpha + 2\beta\lambda + \gamma\lambda^2][\beta\lambda^2 + (\alpha - \gamma)\lambda - \beta] = 0$$

sein. Dies ist aber nach § 3, (4) die Gleichung für die 4 Hauptkrümmungsrichtungen.

Etwas ausführlicher können wir also sagen: Legt man durch die Normalebene des Flächenpunkts  $O$  und ein Linienelement  $\lambda$  der Fläche durch  $O$  den Normalraum, so schneidet dieser aus der Fläche eine gewisse Kurve  $\Gamma$  aus. Dem Element  $\lambda$  entspricht andererseits ein bestimmter Punkt  $P$  der Charakteristik. Der Krümmungsmittelpunkt der Kurve  $\Gamma$  ist der Fußpunkt des Lotes  $g$ , das man von  $O$  auf die in  $P$  konstruierte Charakteristikentangente fallen kann. Die Schmiegungebene von  $\Gamma$  in  $O$  ist die Ebene durch das Element  $\lambda$  und das Lot  $g$ . Die Hauptkrümmungsmittelpunkte sind die Fußpunkte der Lote aus  $O$  auf die Charakteristik. Der Ort der Krümmungsmittelpunkte sämtlicher Normalschnitte ist die

Fußpunktkurve der Charakteristik für den Flächenpunkt  $O$ . *Die Fußpunktkurve berührt den Kegelschnitt in den Hauptkrümmungsmittelpunkten.*

Man erkennt also von neuem die Richtigkeit der am Schluß von § 4 aufgeführten Sätze. Man sieht weiter, daß die Hauptkrümmungshalbmesser wirkliche Maxima und Minima darstellen und daß mindestens zwei derselben reell sind, da sich von einem inneren Punkt eines Kegelschnitts mindestens zwei reelle Normalen auf denselben fallen lassen. Ist der Kegelschnitt eine Parabel (parabolischer Punkt), so ist eine Normale unendlich groß, d. h. im parabolischen Punkt ist ein Hauptkrümmungshalbmesser unendlich groß, wie wir dies ja oben schon gesehen haben. Werden in einem Punkt zwei Hauptkrümmungshalbmesser gleich, so läßt sich zeigen, daß der Flächenpunkt auf einer der Achsen (im parabolischen Punkt auf der Achse) liegt und daß die den beiden anderen Hauptkrümmungshalbmessern entsprechenden Hauptschnitte aufeinander senkrecht stehen. *Werden in einem Punkt drei Hauptkrümmungshalbmesser gleich, so kann dies offenbar nur dann der Fall sein, wenn die Charakteristik ein Kreis und der Flächenpunkt sein Mittelpunkt ist.* Dann sind aber überhaupt alle Krümmungshalbmesser gleich und alle Projektionsflächen haben gleiche aber entgegengesetzte Hauptkrümmungshalbmesser. *Die im nächsten Kapitel definierten Flächen besitzen nur solche Flächenpunkte.* Ist der Kegelschnitt ein Kreis, der Flächenpunkt aber nicht sein Mittelpunkt, so haben alle Projektionsflächen dasselbe Krümmungsmaß. In diesem Falle gibt es nur zwei Lote auf den Kreis, also nur zwei reelle Hauptkrümmungshalbmesser.

### § 8.

#### Die Linien auf der Fläche. Formel für die Hauptkrümmungshalbmesser.

Die bisher betrachteten ausgezeichneten Richtungen in einem Flächenpunkt führen zu bestimmten Linien auf der Fläche.

Verfolgt man zuerst die vier Hauptkrümmungsrichtungen von Punkt zu Punkt, so erhält man ein vierfach unendliches System von Flächenkurven, die wir „*Krümmungslinien*“ nennen. Zur Aufstellung ihrer Differentialgleichung benützen wir den Satz des § 4, wonach der Schnittpunkt konsekutiver Normalebene, in der Richtung eines Hauptschnitts genommen, in der Schmiegungeebene des durch jene Richtung gelegten Normalschnitts liegt.

Seien  $x = x(u)$ ,  $y = y(u)$ ,  $z = z(u)$ ,  $t = t(u)$  die Gleichungen einer Raumkurve, wo  $u$  der Parameter ist, so haben wir als Gleichungen der Schmiegungeebene in einem Punkte ( $u$ )

$$X - x = \lambda \frac{dx}{du} + \mu \frac{d^2x}{du^2}, \quad Y - y = \lambda \frac{dy}{du} + \mu \frac{d^2y}{du^2} \text{ etc.}$$

wobei  $X, Y, Z, T$  laufende Koordinaten,  $\lambda, \mu$  variable Parameter sind. Um nun die Gleichungen der Schmiegungebene einer durch den Punkt  $(u, v)$  der Fläche gehenden Flächenkurve zu erhalten, haben wir  $v$  als Funktion von  $u$  anzusehen. Wir erhalten dann als Gleichungen der Schmiegungebene

$$(1) \quad X - x = \lambda x_1 + \mu \left( \frac{dx_1}{du} + \frac{dx_2}{du} \frac{dv}{du} \right) + x_2 \left( \lambda \frac{dv}{du} + \mu \frac{d^2v}{du^2} \right),$$

wo wir nur die auf  $x$  bezügliche Gleichung angeschrieben haben. Da die Gleichungen (1) die Gleichung

$$(2) \quad \begin{vmatrix} X - x & x_1 & x_2 & dx_1 du + dx_2 dv \\ Y - y & y_1 & y_2 & dy_1 du + dy_2 dv \\ Z - z & z_1 & z_2 & dz_1 du + dz_2 dv \\ T - t & t_1 & t_2 & dt_1 du + dt_2 dv \end{vmatrix} = 0$$

nach sich ziehen, so erhält der durch (2) dargestellte  $R_3$  die Schmiegungebene (1). Da außerdem die Koordinaten  $X, Y, Z, T$  eines Punktes der Tangentialebene § 2, (4) die Gleichung (2) identisch befriedigen, so ist jener  $R_3$  ein Tangentialraum des Punktes  $(u, v)$ . Wir können also als Gleichungen der Schmiegungebene des Normalschnitts die Gleichung (2) und die Gleichung des der Richtung  $\frac{dv}{du}$  entsprechenden Normalraums ansehen. Diesen zwei Gleichungen hat also nach dem oben angeführten Satz der Schnittpunkt  $(X, Y, Z, T)$  konsekutiver Normalebene, in der Richtung des Elements  $\left(\frac{dv}{du}\right)$  genommen, zu genügen. Die Koordinaten  $X, Y, Z, T$ , die wir aus den Gleichungen § 4, (3) zu entnehmen haben, genügen aber, weil der Punkt  $(X, Y, Z, T)$  in der Normalebene des Punktes  $(u, v)$  liegt, der Gleichung jenes Normalraums von selbst: diese Koordinaten haben also nur noch der Gleichung (2) zu genügen. Statt (2) können wir aber mit Einführung der Fundamentalgrößen zweiter Ordnung des § 1 schreiben

$$(3) \quad \Sigma(X - x)(D_x du^2 + 2D'_x du dv + D''_x dv^2) = 0,$$

wobei man hier wie auch in den folgenden Summen die übrigen Glieder durch zyklische Vertauschung von  $x, y, z, t$  aus dem Leitglied erhält. Aus dieser Gleichung und aus den Gleichungen § 4, (3) erhalten wir nunmehr als *Differentialgleichung der Krümmungslinien*

$$(4) \quad \Sigma(D_x du^2 + 2D'_x du dv + D''_x dv^2) \times \\ \times \{(ED'_x - FD_x) du^2 + (ED''_x - GD_x) du dv + (FD''_x - GD'_x) dv^2\} = 0.$$

Aus der Gleichung (1) können wir auch eine *Formel für die Hauptkrümmungshalbmesser* des Flächenpunkts  $(u, v)$  ableiten. Quadriert man nämlich (2) durch Kombination von Kolonnen mit Kolonnen und benützt die Gleichungen (1) und (2) des § 4, welche ausdrücken, daß  $(X, Y, Z, T)$  der Schnittpunkt der beiden konsekutiven Normalebenen ist, so erhält man

$$(5) \quad \begin{vmatrix} \Sigma(X-x)^2 & 0 & 0 & ds^2 \\ 0 & E & F & du \Sigma x_1 dx_1 + dv \Sigma x_1 dx_2 \\ 0 & F & G & du \Sigma x_2 dx_1 + dv \Sigma x_2 dx_2 \\ ds^2 & du \Sigma x_1 dx_1 + dv \Sigma x_1 dx_2 & du \Sigma x_2 dx_1 + dv \Sigma x_2 dx_2 & \Sigma(dx_1 du + dx_2 dv)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

$\Sigma(X-x)^2$  ist gleich dem Quadrat des Krümmungsradius  $\rho$ , der der Richtung  $(du, dv)$  entspricht, und die Differentiale  $du, dv$  müssen der Gleichung (4) genügen.

Nun ist aber

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{cccc} x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \end{array} \right\|^2 = \\ & \left\| \begin{array}{cccc} dx_1 du + dx_2 dv & dy_1 du + dy_2 dv & dz_1 du + dz_2 dv & dt_1 du + dt_2 dv \end{array} \right\|^2 = \\ & = \begin{vmatrix} E & F & du \Sigma x_1 dx_1 + dv \Sigma x_1 dx_2 \\ F & G & du \Sigma x_2 dx_1 + dv \Sigma x_2 dx_2 \\ du \Sigma x_1 dx_1 + dv \Sigma x_1 dx_2 & du \Sigma x_2 dx_1 + dv \Sigma x_2 dx_2 & \Sigma(dx_1 du + dx_2 dv)^2 \end{vmatrix} = \\ & = \sum \left\| \begin{array}{ccc} y_1 & z_1 & t_1 \\ y_2 & z_2 & t_2 \end{array} \right\|^2 = \\ & = \Sigma(D_x du^2 + 2D'_x dudv + D''_x dv^2)^2. \end{aligned}$$

Benützt man diese Gleichungen, so erhält man aus (5)

$$(6) \quad \rho^2 = \frac{(Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2)(EG - F^2)}{\Sigma(D_x du^2 + 2D'_x dudv + D''_x dv^2)^2}.$$

Diese Gleichung gibt uns entsprechend den vier Wurzelwerten  $\frac{dv}{du}$  der Gleichung (4) die vier Hauptkrümmungsradien in einem Flächenpunkt  $(u, v)$ .

Es mag bemerkt werden, daß für eine Fläche im dreidimensionalen Raum  $t=0$  alle Fundamentalgrößen zweiter Ordnung außer  $D_x, D'_x, D''_x$  gleich Null, diese letzteren aber mit den Fundamentalgrößen zweiter Ordnung der Flächentheorie identisch sind. Die Gleichungen (4) und (6) gehen dann in die wohlbekanntten Formeln der Flächentheorie für die Krümmungslinien (und Asymptotenkurven) und die Hauptkrümmungshalbmesser über.

Geht man ferner den Asymptotenrichtungen auf der Fläche nach, so erhält man eine doppelt unendliche Schar von Kurven, die wir „Asymptotenlinien“ nennen: ihre Differentialgleichung ist nach § 4, (4)

$$(7) \quad edu^2 + 2fdudv + gdv^2 = 0.$$

Ist für einen Punkt  $(u, v)$

$$(8) \quad eg - f^2 = 0,$$

so fallen die Asymptotenrichtungen zusammen, die Charakteristik ist eine Parabel, und ein Hauptkrümmungshalbmesser ist unendlich (parabolischer Punkt). Die Gleichung (8) definiert daher eine Linie auf der Fläche, welche sämtliche parabolische Punkte verbindet, man wird diese passend die *parabolische Linie* nennen. Wie für die Flächen im  $R_3$  ist die parabolische Linie im allgemeinen der Ort der Spitzen, in singulären Fällen ganz oder teilweise die Einhüllende der Asymptotenlinien.

Endlich kann man ebenso wie für die Flächen des  $R_3$  kürzeste Linien — geodätische Linien — auf den Flächen im  $R_4$  definieren (vgl. Diss. § 10). Da wir von den entsprechenden Formeln keinen Gebrauch machen, so unterlassen wir es, sie hier aufzustellen. Nur mag noch bemerkt werden, daß auch für die geodätischen Linien auf Flächen im  $R_4$  die Schmiegeebene der Linie stets senkrecht auf der Tangentialebene der Fläche steht.

## II. Kapitel.

### *R*-Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen.

#### § 9.

#### Definition der *R*-Flächen.

Es sei durch die Gleichung

$$(1) \quad z + it = F(x + iy)$$

$z + it$  in einem bestimmten Bereich der  $XY$ -Ebene als analytische Funktion der komplexen Variablen  $x + iy$  definiert. Wir denken uns nun im  $R_4$  ein rechtwinkliges Koordinatensystem  $X, Y, Z, T$  und stellen in diesem die komplexe Variable  $x + iy$  in der üblichen Weise durch einen bestimmten Punkt  $P_2$  der  $XY$ -Ebene dar. Sei  $z + it$  einer der Werte der Funktion  $F$  im Punkte  $P_2$ , so gehe man in der  $Z$ -Richtung um  $z$  vorwärts bis zum Punkt  $P_1$ , hierauf von  $P_1$  in der  $T$ -Richtung um  $t$  bis zum Punkt  $P$ . Der Punkt  $P$  hat dann die Koordinaten  $x, y, z, t$  und ist der Repräsentant des Funktionswerts  $z + it$ . Hat die Funktion in  $P_2$  noch andere Werte, so wiederhole man für jeden dieser die angegebene Konstruktion: man erhält so die Punkte  $P', P'', \dots$  etc. Für alle diese

Punkte  $P^{(i)}$  ist  $P_2$  die Projektion auf die  $XY$ -Ebene. Durchläuft nun  $P_2$  den Definitionsbereich der Funktion  $F$  in der  $XY$ -Ebene, so wird der Punkt  $P$  eine Fläche im vierdimensionalen Raum beschreiben; dieselbe wird, falls mehrere Punkte  $P$  vorhanden waren, aus mehreren Blättern bestehen. Sind die einzelnen Werte von  $F$  in jedem Punkt  $x + iy$  des Definitionsbereichs durch analytische Fortsetzung alle ineinander überführbar, so werden die einzelnen Blätter der Fläche nicht getrennt voneinander verlaufen, sondern eine einzige zusammenhängende Fläche bilden. Diese Fläche stellt uns offenbar den gesamten Wertevorrat der Funktion  $F$  dar: Wir nennen sie eine *Riemannsche Fläche* im  $R_4$  oder kurz eine *R-Fläche*, weil die Projektion dieser Fläche auf die  $XY$ -Ebene gerade die Riemannsche Fläche der Funktion  $F$  im gewöhnlichen Sinne gibt. Jedem Blatt der letzteren entspricht ein bestimmtes Blatt der *R-Fläche* oder genauer: die beiden Flächen sind eineindeutig aufeinander bezogen. Es wird sich in § 10 zeigen, daß diese Abbildung eine konforme ist. Die Bezeichnung „*R-Fläche*“ scheint gerechtfertigt, weil die Fläche für die Funktionentheorie genau dasselbe leistet, wie die gewöhnliche Riemannsche Fläche. Nimmt man z. B. einen Punkt  $P$  der *R-Fläche* in der Nähe eines Verzweigungspunkts von der Ordnung  $n$ , so wird, wenn die Projektion  $P_2$  von  $P$  auf die  $XY$ -Ebene in dieser den Verzweigungspunkt umläuft,  $P$  in ein zweites, drittes etc. Blatt der *R-Fläche* gelangen. Hat der Punkt  $P_2$  nach  $n$  Umläufen seine Ausgangsstelle wieder erreicht, so ist auch der Punkt  $P$  auf seinen ursprünglichen Platz gerückt: Die  $n$  Blätter der *R-Fläche* hängen in dem Verzweigungspunkt in einem Zyklus zusammen.

Durch diese geometrische Deutung von (1) hat man noch den Vorteil, daß dieselbe *R-Fläche* auch den gesamten Wertevorrat der Umkehrfunktion von (1) darstellt; denn stellt man den Funktionswert  $z + it$  durch den Punkt  $Q_2$  mit den Koordinaten  $(z, t)$  in der  $ZT$ -Ebene dar und geht man von  $Q_2$  in der  $X$ -Richtung um  $x$  vorwärts bis  $Q_1$  und dann von  $Q_1$  in der  $Y$ -Richtung um  $y$ , so hat man wieder den Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $x, y, z, t$  erreicht. Der Punkt  $Q_2$  wird die Projektion von mehreren Flächenpunkten auf die  $ZT$ -Ebene sein können. Sucht man alle diese auf, so erhält man eine gewisse Anzahl Werte  $x_1 + iy_1, x_2 + iy_2$  etc., welche offenbar die Werte der Umkehrfunktion von (1) für den Wert  $z + it$  repräsentieren. Projiziert man also die *R-Fläche* von (1) auf die  $ZT$ -Ebene, so wird dadurch über der  $ZT$ -Ebene die Riemannsche Fläche (im gewöhnlichen Sinne) der Umkehrfunktion von (1) ausgebreitet. Da demnach die *R-Fläche* in Beziehung auf die  $XY$ -Ebene und  $ZT$ -Ebene dieselbe Rolle spielt, so müssen die Flächensätze, die sich auf die eine Ebene beziehen, in analoger Weise für die andere gelten.

Die Projektion der *R-Fläche* in den Raum  $t = 0$  ist die Fläche der

Punkte  $P_1$ , wir nennen sie kurz die  $t$ -Projektionsfläche: diese stellt die *reellen* Werte von  $F$  dar. Analog nennen wir die Projektion der  $R$ -Fläche in den Raum  $z = 0$  die  $z$ -Projektionsfläche: sie ist das Bild für die *imaginären* Werte von  $F$ . Dreht man nun nach der Methode der darstellenden Geometrie den Raum  $z = 0$  und mit ihm die  $z$ -Projektionsfläche um die  $XY$ -Ebene, bis die  $T$ -Achse mit der  $Z$ -Achse zusammenfällt, so hat man zwei gewöhnliche im Raum  $(XYZ)$  gelegene Flächen, welche die reellen bzw. imaginären Werte von  $F(x + iy)$  repräsentieren: dieselben stellen zwei konjugierte logarithmische Potentiale dar. Dini\*) hat diese untersucht, Dyck\*\*) hat einige von ihnen modellieren lassen. Wir kommen in § 12 auf sie ausführlich zu sprechen.

Schneidet man die Fläche mit dem Raum  $y = 0$ , so erhält man eine in dem Raum  $XZT$  gelegene Kurve, welche das Bild der Funktion  $F$  für *reelle* Werte der Variablen  $x + iy$  darstellt. Die Teile der Kurve, welche in der  $XZ$ -Ebene ( $y = 0, t = 0$ ) liegen, stellen dann die reellen Züge der Kurve  $\zeta = F(\xi)$  dar, wenn  $\zeta = z + it, \xi = x + iy$  gesetzt wird. Ebenso sind die Teile der Kurve, die in der  $XT$ -Ebene ( $y = 0, z = 0$ ) liegen, Repräsentanten der imaginären Kurvenzüge von  $\zeta = F(\xi)$  für reelle Werte von  $\xi$ . So erhält man z. B. für die Gleichung  $\zeta = \sqrt{a^2 - \xi^2}$  als reellen Kurvenzug ( $\xi < a$ ) einen Kreis in der  $XZ$ -Ebene und als imaginären ( $\xi > a$ ) eine gleichseitige Hyperbel in der  $XT$ -Ebene: ihre unendlich fernen Punkte stellen die zwei unendlich fernen Kreispunkte dar. Ebenso gibt die Gleichung  $\zeta = b \sqrt{\frac{\xi^2}{a^2} - 1}$  für  $\xi > a$  in der  $XZ$ -Ebene eine Hyperbel, für  $\xi < a$  die zu dieser konjugierte Hyperbel in der  $XT$ -Ebene. Diese letztere ist die in der analytischen Geometrie hie und da benutzte „Stellvertreterhyperbel“\*\*\*).

Der Schnitt der Fläche mit der Ebene  $z = 0, t = 0$  gibt in der  $XY$ -Ebene eine gewisse Anzahl Punkte; diese repräsentieren die Werte von  $x + iy$ , für die  $F = 0$  ist, und zwar alle, die reellen und die komplexen. Hat man zwei Gleichungen von der Form (1), so hat man zwei  $R$ -Flächen; die Schnittpunkte dieser stellen die gemeinsamen Werte der beiden Gleichungen dar. Diese Anschauungen dürften namentlich für die algebraischen  $R$ -Flächen von Nutzen sein: statt von Schnittpunkten zweier algebraischer Kurven zu reden, müßte man von den Schnittpunkten der zugehörigen  $R$ -Flächen sprechen. Sind  $m$  und  $n$  die Ordnungen der beiden Kurven, so existieren immer  $mn$  *reelle* derartige Schnittpunkte. Als geometrisches

\*) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 78.

\*\*) Modelle zur Funktionentheorie, Verlag von M. Schilling Ser. XIV.

\*\*\*) Vgl. etwa Salmon-Fiedler, analyt. Geom. der Kegelschnitte, 5. Aufl. I, p. 319.

Bild der algebraischen Gleichung  $f(\xi, \zeta) = 0$  benützt man bald die Riemannsche Verzweigungsfläche, bald nach dem Vorgang von Clebsch\*) eine ebene algebraische Kurve, deren Ebene jedoch, wenn man  $\xi$  und  $\zeta$  auch komplexe Werte beilegt, keine reelle Existenz hat. An die Stelle dieser Kurve tritt nun die *reelle*  $R$ -Fläche und man kann sagen: Die Kurve in der Theorie der algebraischen Kurven (als  $R$ -Fläche dargestellt) und die zugehörige Riemannsche Verzweigungsfläche in der Funktionentheorie sind identische Gebilde.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen gehen wir über zu der Aufstellung der Gleichungen der  $R$ -Flächen. Dieselben lauten

$$(2) \quad x = x; \quad y = y; \quad z = u(x, y); \quad t = v(x, y),$$

wobei die Funktionen  $u$  und  $v$  den Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

und den hieraus folgenden

$$(4) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

genügen. In der Tat stellen die Gleichungen (2) eine Fläche im  $R_4$  dar, wobei  $x, y$  die Parameter sind, und wegen (3) ist

$$(5) \quad z + it = u + iv = F(x + iy).$$

Die Gleichungen (2) und (3) geben somit die allgemeinste  $R$ -Fläche.\*\*\*)

## § 10.

### Das Linienelement und die Tangentialebene.

Für die Fundamentalgrößen erster Ordnung des § 1 erhält man nach § 9, (2) und (3)

$$(1) \quad F = 0, \quad E = G = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2$$

und für das Linienelement der Fläche

$$(2) \quad ds^2 = \lambda(dx^2 + dy^2),$$

wenn man zur Abkürzung setzt

$$(3) \quad \lambda = 1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Aus der Gleichung (2) ergibt sich sofort der wichtige Satz: *Die Projektionen der  $R$ -Fläche auf die  $XY$ -Ebene und (weil die  $ZT$ -Ebene dieselbe Rolle wie die  $XY$ -Ebene spielt) auf die  $ZT$ -Ebene sind konforme Bilder der  $R$ -Fläche.* Die beiden Ebenen sind daher auch konform aufeinander

\*) Clebsch, Journ. für Math., Bd. 63 (1863), S. 189 ff.

\*\*) Vgl. auch Kwietniewski, a. a. O. § 5.

bezogen, wie dies ja bekannt ist. Entsprechende Punkte der beiden Ebenen sind die beiden Projektionen eines Punktes der  $R$ -Fläche. Aus (2) folgt weiter, daß die Kurven  $x + iy = \text{const.}$  und  $x - iy = \text{const.}$  die *Minimallinien* der  $R$ -Fläche sind. Für manche Fragen ist es nun geschickt, statt der reellen Parameter  $x, y$  die komplexen Parameter der Minimallinien zu benutzen; wir setzen daher

$$(4) \quad x + iy = \sigma; \quad x - iy = \sigma_1.$$

Ist weiter  $\Phi$  die zu  $F$  konjugierte Funktion, so erhalten wir als Flächengleichungen

$$(5) \quad x = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}; \quad y = -\frac{i(\sigma - \sigma_1)}{2}; \quad z = \frac{1}{2}(F(\sigma) + \Phi(\sigma_1)); \quad t = -\frac{i}{2}(F(\sigma) - \Phi(\sigma_1)),$$

und für das Linienelement der Fläche

$$(6) \quad ds^2 = \{1 + F'(\sigma)\Phi'(\sigma_1)\}d\sigma d\sigma_1.$$

Setzt man

$$(7) \quad \xi = \sigma; \quad \eta = -i\sigma; \quad \zeta = F(\sigma); \quad \vartheta = -iF(\sigma);$$

$$(8) \quad \xi_1 = \sigma_1; \quad \eta_1 = i\sigma_1; \quad \zeta_1 = F(\sigma_1); \quad \vartheta_1 = i\Phi(\sigma_1),$$

so stellen die Gleichungen (7) und ebenso (8), da

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + d\vartheta^2 = d\xi_1^2 + d\eta_1^2 + d\zeta_1^2 + d\vartheta_1^2 = 0$$

ist, *Minimallinien* im  $R_4$  dar. Aus (5) folgt nun

$$(9) \quad x = \frac{\xi + \xi_1}{2}; \quad y = \frac{\eta + \eta_1}{2}; \quad z = \frac{\zeta + \zeta_1}{2}; \quad t = \frac{\vartheta + \vartheta_1}{2}.$$

Die  $R$ -Fläche ist daher der Ort der Mitten aller Sehnen, welche einen beliebigen Punkt der Minimalkurve (7) mit einem beliebigen Punkt der Minimalkurve (8) verbindet. Diese Erzeugungsweise der  $R$ -Flächen erinnert an die der Minimalflächen des  $R_3$ . Es wird sich in § 13 zeigen, daß die  $R$ -Flächen ebenfalls Minimalflächen sind.

Aus § 2, (4) erhält man als *Gleichungen der Tangentialebene* im Punkt  $(x, y, z, t)$

$$(10) \quad \begin{aligned} Z - z &= (X - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (Y - y) \frac{\partial u}{\partial y}, \\ T - t &= -(\dot{X} - x) \frac{\partial u}{\partial y} + (Y - y) \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Statt dieser zwei Gleichungen kann man auch die einzige

$$(11) \quad \frac{(z + it) - (Z + iT)}{(x + iy) - (X + iY)} = F'(x + iy)$$

setzen, wobei  $F'$  die Ableitung von  $F$  bedeutet. Aus dieser Gleichung folgt, daß die Aussage: „ $F$  hat eine Ableitung im Punkt  $x + iy$ “ identisch ist mit der Aussage: „Die  $R$ -Fläche besitzt im entsprechenden Punkte eine Tangentialebene“. Ist für einen Wert  $x + iy$  die Ableitung  $F'(x + iy) = 0$ ,

so geht die Tangentialebene parallel mit der  $XY$ -Ebene oder steht senkrecht auf der  $ZT$ -Ebene. Die Umkehrfunktion von  $F$  hat dann bekanntlich im Punkt  $z + it$  einen Verzweigungspunkt. Analog wird  $F$  selbst im Punkt  $x + iy$  einen Verzweigungspunkt haben, wenn die Tangentialebene im entsprechenden Punkt der  $R$ -Fläche senkrecht zur  $XY$ -Ebene steht. Die Fläche wird in diesen Punkten im allgemeinen keine Singularität besitzen: man vergleiche hierzu den Fall einer ebenen Kurve an den Stellen, wo die Tangente parallel einer der Achsen läuft.

Als Gleichungen der Normalebene erhält man nach § 2

$$(12) \quad \begin{aligned} X - x &= - (Z - z) \frac{\partial u}{\partial x} + (T - t) \frac{\partial u}{\partial y}, \\ Y - y &= - (Z - z) \frac{\partial u}{\partial y} - (T - t) \frac{\partial u}{\partial x}. \end{aligned}$$

Die Tangentialebenen und Normalebene der  $R$ -Flächen sind nun eigentümlich im  $R_4$  orientierte Ebenen, indem der Satz gilt: *Die Projektionen einer Tangentialebene oder Normalebene in die  $XY$ - und  $ZT$ -Ebene sind ähnliche Bilder jener Ebenen.* Zum Beweise verschiebe man die Ebenen parallel mit sich in den Nullpunkt und erhält dann für beide Ebenen Gleichungen von der Form

$$(13) \quad Z = aX + bY; \quad T = -bX + aY$$

wo  $a$  und  $b$  zwei beliebige Konstante sind. Diese Gleichungen stellen aber eine spezielle  $R$ -Fläche mit der Gleichung  $Z + iT = (a - ib)(X + iY)$  dar mit dem Linienelement  $ds^2 = (1 + a^2 + b^2)(dx^2 + dy^2)$ . Da das Vergrößerungsverhältnis der konformen Abbildung auf die  $XY$ -Ebene konstant ist, so ist der Beweis des Satzes erbracht. Steht jedoch die Ebene (13) senkrecht auf der  $XY$ -Ebene, so projiziert sie sich auf diese in einen einzigen Punkt und der Satz gilt für diese Ebene nicht. Analog, wenn die Ebene senkrecht zur  $ZT$ -Ebene steht. Die Tangentialebenen und Normalebene der  $R$ -Flächen bilden einen Komplex, den wir mit späterer Begründung (s. § 15) den *Komplex der Nullebenen*\*) nennen. Die Gleichungen des Komplexes lauten

$$(14) \quad Z = aX + bY + c; \quad T = -bX + aY + d$$

wo  $a, b, c, d$  vier beliebige reelle Konstante bedeuten. Zu dem Komplex gehören auch die  $XY$ -Ebene und die  $ZT$ -Ebene, sowie die zu diesen parallelen Ebenen.

\*) Veronese (Grundzüge der Geometrie von mehreren Dimensionen, übersetzt von Schepp, Leipzig 1894) nennt die Ebenen dieses Komplexes „gleichwinklige Ebenen“, weil jede Gerade in einer von zwei Ebenen des Systems mit ihrer senkrechten Projektion auf die andere Ebene einen und denselben Winkel bildet. Vgl. auch Kwietniewski, a. a. O. § 3. Es erscheint Herrn Kwietniewski entgangen zu sein, daß auch die Normalebene der  $R$ -Flächen dem Komplex angehören.

## § 11.

**Deformation der  $R$ -Flächen.**

Wir nennen zwei Flächen des  $R_4$  aufeinander abwickelbar, wenn sie punktweise aufeinander bezogen sind und in entsprechenden Punkten dasselbe Linienelement haben. Es entsteht nun die Frage: *Gibt es zu einer gegebenen  $R$ -Fläche andere  $R$ -Flächen, die auf dieselbe abwickelbar sind?*

Zur Beantwortung dieser Frage seien

$$(1) \quad x = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}; \quad y = -\frac{i(\sigma - \sigma_1)}{2}; \quad z = \frac{1}{2}(F(\sigma) + \Phi(\sigma_1)); \quad t = -\frac{i}{2}(F(\sigma) - \Phi(\sigma_1))$$

die Gleichungen der gegebenen Fläche bezogen auf ihre Minimallinien und

$$(2) \quad ds^2 = \{1 + F'(\sigma)\Phi'(\sigma_1)\} d\sigma d\sigma_1$$

ihr Linienelement, vgl. § 10, (5) und (6). Seien weiter  $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$  die Koordinaten eines Punktes einer anderen Fläche in Beziehung auf dasselbe Koordinatensystem,  $\omega$  und  $\omega_1$  die Parameter ihrer Minimallinien,  $f_1$  und  $\varphi_1$  konjugierte Funktionen, so sind die Gleichungen dieser Fläche

$$(3) \quad \xi = \frac{\omega + \omega_1}{2}; \quad \eta = -\frac{i(\omega - \omega_1)}{2}; \quad \zeta = \frac{1}{2}(f_1(\omega) + \varphi_1(\omega_1)); \quad \vartheta = \frac{i}{2}(f_1(\omega) - \varphi_1(\omega_1)),$$

und ihr Linienelement  $dS$  ist bestimmt durch

$$(4) \quad dS^2 = \{1 + f_1'(\omega)\varphi_1'(\omega_1)\} d\omega d\omega_1.$$

Sind nun die beiden Flächen aufeinander abwickelbar, so müssen sich  $\omega$  und  $\omega_1$  als Funktionen von  $\sigma$  und  $\sigma_1$  so bestimmen lassen, daß

$$(5) \quad ds^2 = dS^2$$

ist. Sind aber die Flächen aufeinander abwickelbar, so sind sie insbesondere auch konform aufeinander abgebildet und darum ist nach dem Satz in § 10 die Projektion der einen Fläche auf die  $XY$ -Ebene ein konformes Bild der Projektion der andern Fläche auf die  $XY$ -Ebene. Die Parameter der Minimallinien der Flächen sind nun aber auch Parameter der Minimallinien der  $XY$ -Ebene und es muß daher  $\omega$  eine Funktion von  $\sigma$ , und  $\omega_1$  die konjugierte Funktion von  $\sigma_1$ ; oder  $\omega$  Funktion von  $\sigma_1$ , und  $\omega_1$  die konjugierte Funktion von  $\sigma$  sein. Die letzte Alternative findet statt, wenn die durch die Projektion beider Flächen auf die  $XY$ -Ebene vermittelte konforme Abbildung der  $XY$ -Ebene auf sich selbst eine Abbildung mit Umlegung der Winkel wäre: dann trage man aber die  $\eta$ -Koordinate der zweiten Fläche auf die Seite der negativen  $y$  ab, man erhält dann das Spiegelbild der zweiten Fläche in Beziehung auf den Raum  $y = 0$ . Dieses Spiegelbild müßte offenbar auch auf die erste Fläche abwickelbar sein und die konforme Abbildung der  $XY$ -Ebene

auf sich selbst wäre jetzt eine Abbildung *ohne* Umlegung der Winkel. Ohne der Allgemeinheit zu schaden, dürfen wir also

$$(6) \quad \omega = \psi(\sigma); \quad \omega_1 = \chi(\sigma_1)$$

setzen, wo  $\psi$  und  $\chi$  konjugierte Funktionen sind. Nach der Bestimmung aller auf die erste abwickelbaren Flächen dürfen wir diese letzteren dann natürlich noch einer Spiegelung an dem Raum  $y = 0$  unterwerfen.

Aus (2), (4) und (5) folgt nun

$$(7) \quad 1 + F'(\sigma) \Phi'(\sigma_1) = \{1 + f'_1(\omega) \varphi'_1(\omega_1)\} \frac{d\omega}{d\sigma} \frac{d\omega_1}{d\sigma_1}.$$

Denkt man sich nun in  $f_1(\omega)$  und  $\varphi_1(\omega_1)$  mit Hilfe von (6) die Parameter  $\sigma$  und  $\sigma_1$  eingeführt, so geht  $f_1(\omega)$  über in eine Funktion von  $\sigma$ ,  $\varphi_1(\omega_1)$  in eine Funktion von  $\sigma_1$ , die wir bezüglich mit  $f(\sigma)$  und  $\varphi(\sigma_1)$  bezeichnen, wobei  $f$  und  $\varphi$  konjugierte Funktionen sind: es ist also

$$(8) \quad f_1(\omega) = f(\sigma); \quad \varphi_1(\omega_1) = \varphi(\sigma_1).$$

Hieraus folgt

$$(9) \quad f'_1(\omega) \frac{d\omega}{d\sigma} = f'(\sigma); \quad \varphi'_1(\omega_1) \frac{d\omega_1}{d\sigma_1} = \varphi'(\sigma_1).$$

Man erhält nun aus (6), (7) und (9) die Funktionalgleichung

$$(10) \quad 1 + F'(\sigma) \Phi'(\sigma_1) = \psi'(\sigma) \chi'(\sigma_1) + f'(\sigma) \varphi'(\sigma_1),$$

welche zur Bestimmung der Funktionen  $f, \varphi, \psi, \chi$  dient. Statt (10) schreiben wir

$$(11) \quad \frac{1}{\varphi'(\sigma_1)} + \frac{F'(\sigma) \Phi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} - \frac{\psi'(\sigma) \chi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = f'(\sigma)$$

wobei  $\varphi'(\sigma_1)$  als von Null verschieden vorausgesetzt ist. Ist aber  $\varphi'(\sigma_1) = 0$ , so folgt aus (9), da  $\omega_1$  von  $\sigma_1$  abhängig sein muß und daher nicht konstant sein kann, daß  $\varphi'_1(\omega_1) = 0$  ist; dann wäre nach (3) die zweite Fläche eine Ebene. In diesem Fall zeigt man aber leicht, daß dann auch die erste Fläche eine Ebene sein müßte. Schließen wir also diesen trivialen Fall aus, setzen also voraus, daß  $F'''(\sigma)$  nicht identisch Null ist, so gilt (11) allgemein. Wir differenzieren (11) nach  $\sigma$  und erhalten, wenn wir zur Abkürzung

$$(12) \quad \frac{\Phi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = \Theta(\sigma_1); \quad \frac{\chi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = H(\sigma_1)$$

setzen,

$$(13) \quad F''(\sigma) \Theta(\sigma_1) - \psi''(\sigma) H(\sigma_1) = f''(\sigma).$$

Diese Gleichung differenziert man nach  $\sigma_1$  und erhält

$$(14) \quad F'''(\sigma) \Theta'(\sigma_1) - \psi''(\sigma) H'(\sigma_1) = 0.$$

$F'''(\sigma)$  haben wir eben als von Null verschieden vorausgesetzt und  $H'(\sigma_1)$  muß auch von Null verschieden sein; denn wäre  $H'(\sigma_1) = 0$ , so würde

aus (14) sich ergeben  $\Theta'(\sigma_1) = 0$  und aus (12), wenn  $m$  und  $n$  Konstante bedeuten,  $\Phi'(\sigma_1) = m\varphi'(\sigma_1)$ ,  $\chi'(\sigma_1) = n\varphi'(\sigma_1)$ . Vertauscht man hier  $i$  mit  $-i$ , so folgt  $F'(\sigma) = m_0 f'(\sigma)$ ,  $\psi'(\sigma) = n_0 f'(\sigma)$ , wenn  $m_0, n_0$  die zu  $m, n$  konjugierten Konstanten bedeuten. Eliminiert man aus diesen vier Gleichungen und (10) alle Funktionen außer  $f'(\sigma)$  und  $\varphi'(\sigma_1)$ , so folgt

$$f'(\sigma)\varphi'(\sigma_1) = \frac{1}{nn_0 - mm_0 + 1}.$$

Aus dieser Gleichung schließt man, daß  $\varphi'(\sigma_1)$  konstant ist, und jetzt aus der Gleichung  $\Phi'(\sigma_1) = m\varphi'(\sigma_1)$ , daß  $\Phi'(\sigma_1)$  ebenfalls eine Konstante ist. In diesem Fall stellen aber die Gleichungen (1) eine Ebene dar, was oben ausgeschlossen wurde.  $H'(\sigma_1)$  ist demnach von Null verschieden, und aus (14) folgt nun

$$(15) \quad \frac{\Theta'(\sigma_1)}{H'(\sigma_1)} = \frac{\psi''(\sigma)}{F''(\sigma)}.$$

Die linke Seite hängt aber bloß von  $\sigma_1$ , die rechte nur von  $\sigma$  ab: jede der beiden Seiten ist daher gleich einer Konstanten  $\alpha$ . Aus (15) erhält man jetzt, wenn  $\beta, \gamma$  zwei weitere Konstanten bedeuten

$$\Theta(\sigma_1) = \alpha H(\sigma_1) + \beta, \quad \psi'(\sigma) = \alpha F'(\sigma) + \gamma$$

oder nach (12)

$$(16) \quad \frac{\Phi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = \frac{\alpha\chi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} + \beta; \quad \psi'(\sigma) = \alpha F'(\sigma) + \gamma.$$

Hieraus und aus (11) folgt

$$(17) \quad \frac{1 - \gamma\chi'(\sigma_1)}{\varphi'(\sigma_1)} = f'(\sigma) - \beta F'(\sigma).$$

Hier muß nun jede der Seiten wieder einer Konstanten  $\delta$  gleich sein und wir erhalten somit

$$(18) \quad 1 - \gamma\chi'(\sigma_1) = \delta\varphi'(\sigma_1),$$

$$(19) \quad f'(\sigma) - \beta F'(\sigma) = \delta.$$

Bedeutet  $a, b, c$  drei weitere Konstante, so folgt aus (19) und (16)

$$(20) \quad f(\sigma) = \beta F(\sigma) + \delta\sigma + a,$$

$$(21) \quad \psi(\sigma) = \alpha F(\sigma) + \gamma\sigma + b,$$

$$(22) \quad \Phi(\sigma_1) = \alpha\chi(\sigma_1) + \beta\varphi(\sigma_1) + c.$$

Die Gleichungen (18), (20), (21), (22) enthalten die Lösung. Die in diesen auftretenden Konstanten sind jedoch nicht völlig willkürlich, sondern es bestehen vier Relationen zwischen ihnen, welche ausdrücken, daß  $F(\sigma), \Phi(\sigma_1); f(\sigma), \varphi(\sigma_1); \psi(\sigma), \chi(\sigma_1); \sigma, \sigma_1$  vier Paare konjugiert imaginärer Größen sind. Bezeichnet man die zu einer der Konstanten konjugierte durch den Index Null und vertauscht in (22)  $i$  mit  $-i$ , so folgt:

$$F(\sigma) = \alpha_0 \psi(\sigma) + \beta_0 f(\sigma) + c_0.$$

Trägt man den Wert von  $\psi(\sigma)$  aus (21) in die vorstehende Gleichung ein, so kommt

$$F(\sigma) = \alpha\alpha_0 F(\sigma) + \gamma\alpha_0\sigma + \beta_0 f(\sigma) + b\alpha_0 + c_0.$$

Hier ist  $\beta_0$  sicher von Null verschieden, sonst wäre  $F(\sigma)$  eine in  $\sigma$  lineare Funktion und (1) eine Ebene; es ist also nach  $f(\sigma)$  aufgelöst

$$(23) \quad f(\sigma) = \left(\frac{1-\alpha\alpha_0}{\beta_0}\right) F(\sigma) - \frac{\gamma\alpha_0}{\beta_0} \sigma - \left(\frac{b\alpha_0+c_0}{\beta_0}\right).$$

Die Gleichungen (20) und (23) müssen identisch übereinstimmen, denn sonst wäre  $F(\sigma)$  wieder lineare Funktion von  $\sigma$ , bzw. wäre, falls die Koeffizienten  $F(\sigma)$  in (20) und (23) gleich wären,  $\sigma$  konstant. Durch Koeffizientenvergleichung ergibt sich also

$$(24) \quad \alpha\alpha_0 + \beta\beta_0 = 1; \quad \delta\beta_0 + \gamma\alpha_0 = 0; \quad a\beta_0 + b\alpha_0 + c_0 = 0.$$

Die vierte Relation erhält man aus (18). Man vertausche dort  $i$  mit  $-i$  und erhält  $\delta_0 f''(\sigma) + \gamma_0 \psi'(\sigma) = 1$ . Entnimmt man aus (20) und (21) die Werte  $f'(\sigma)$  und  $\psi(\sigma)$  und setzt sie in die letzte Gleichung ein, so folgt

$$(\delta_0\beta + \gamma_0\alpha) F'(\sigma) + \delta\delta_0 + \gamma\gamma_0 = 1.$$

Aus der zweiten Gleichung (24) folgt aber durch Vertauschung von  $i$  mit  $-i$ :  $\delta_0\beta + \gamma_0\alpha = 0$  und somit aus der letzten Gleichung

$$(25) \quad \gamma\gamma_0 + \delta\delta_0 = 1.$$

Nun ist nach (8) und (3)  $f(\sigma) = f_1(\omega) = \xi + i\vartheta$ , weiter nach (1)  $\sigma = x + iy$ ,  $F(\sigma) = z + it$  und nach (6) und (3)  $\psi(\sigma) = \omega = \xi + i\eta$ . Aus (20) und (21) folgt also

$$(26) \quad \xi + i\eta = \alpha(z + it) + \gamma(x + iy) + b,$$

$$(27) \quad \xi + i\vartheta = \beta(z + it) + \delta(x + iy) + a.$$

Durch diese Gleichungen wird jedem Punkt  $(x, y, z, t)$  der gegebenen Fläche ein Punkt  $(\xi, \eta, \xi, \vartheta)$  der auf sie abwickelbaren Fläche zugewiesen. Die Gleichungen (26) und (27) zusammen mit den Relationen (24) und (25) enthalten demnach die vollständige Lösung der Aufgabe. Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit können wir nun  $a = b = 0$  und daher (24) auch  $c = 0$  setzen; es entspricht dies einer passenden Parallelverschiebung der zweiten Fläche. Durch passende Orientierung der  $\xi\eta$ -Achsen in der  $\xi\eta$ -Ebene und der  $\xi\vartheta$ -Achsen in der  $\xi\vartheta$ -Ebene kann man weiter bewirken, daß die Konstanten  $\gamma$  und  $\delta$  reell sind. Das  $\xi\eta\xi\vartheta$ -Koordinatensystem denken wir uns dann mitsamt der zweiten Fläche gedreht, bis es wieder mit dem  $xyzt$ -Koordinatensystem zusammenfällt. Setzt man nun

$$(28) \quad \gamma = \cos \gamma_1; \quad \delta = \sin \gamma_1; \quad \alpha = \cos \delta_1 e^{-i\alpha_1}; \quad \beta = \sin \delta_1 e^{i\beta_1}; \quad a = b = c = 0,$$

wo  $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$  nunmehr *reelle* Konstanten bedeuten, so sind durch diesen

Ansatz die erste und dritte Gleichung (24) und die Gleichung (25) befriedigt. Die zweite Gleichung (24) gibt endlich

$$\operatorname{tg} \gamma_1 \operatorname{tg} \delta_1 + e^{i(\alpha_1 + \beta_1)} = 0.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \text{entweder } \alpha_1 + \beta_1 = \pi \quad \text{und dann } \delta_1 = \frac{\pi}{2} - \gamma_1 \quad \text{bezw. } \delta_1 = \frac{3\pi}{2} - \gamma_1 \\ \text{oder } \alpha_1 + \beta_1 = 2\pi \quad \text{und dann } \delta_1 = \gamma_1 - \frac{\pi}{2} \quad \text{bezw. } \delta_1 = \gamma_1 - \frac{3\pi}{2}. \end{aligned}$$

Aus (28) und diesen Gleichungen folgt, daß

$$(29) \quad \gamma = \cos \gamma_1; \quad \delta = \sin \gamma_1; \quad \alpha = \sin \gamma_1 e^{-i\alpha_1}; \quad \beta = -\cos \gamma_1 e^{-i\alpha_1}; \quad a = b = c = 0$$

ist. Eigentlich erhält man noch eine zweite Reihe von Gleichungen für die Bestimmung der Konstanten, diese geht aber aus (29) dadurch hervor, daß man für  $\alpha_1$  den Wert  $\alpha_1 - \pi$  setzt. Die Werte der Konstanten setze man aus (29) in (26) und (27) ein und erhält dann durch Trennung des Reellen und Imaginären die *Schlußformeln*

$$(30) \quad \begin{aligned} \xi &= x \cos \gamma_1 && + z \sin \gamma_1 \cos \alpha_1 + t \sin \gamma_1 \sin \alpha_1, \\ \eta &= && y \cos \gamma_1 - z \sin \gamma_1 \sin \alpha_1 + t \sin \gamma_1 \cos \alpha_1, \\ \zeta &= x \sin \gamma_1 && - z \cos \gamma_1 \cos \alpha_1 - t \cos \gamma_1 \sin \alpha_1, \\ \vartheta &= && y \sin \gamma_1 + z \cos \gamma_1 \sin \alpha_1 - t \cos \gamma_1 \cos \alpha_1, \end{aligned}$$

in denen  $\alpha_1$  und  $\gamma_1$  zwei beliebige reelle Konstanten bedeuten. Aus (30) folgt nun

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \vartheta^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2$$

und hieraus ergibt sich, daß die Gleichungen (30) eine *orthogonale Substitution* darstellen. Alle Flächen, deren Gleichungen (30) durch Variierung der Konstanten  $\alpha_1, \gamma_1$  hervorgehen, sind daher unter sich kongruent: da für  $\alpha_1 = \pi, \gamma_1 = 0$  aus (30)  $\xi = x, \eta = y, \zeta = z, \vartheta = t$  folgt, so sind alle diese Flächen mit der gegebenen kongruent. Nach dem, was oben im Anschluß an Gleichung (5) und (6) gesagt wurde, gilt also der Satz: *Alle aufeinander abwickelbaren R-Flächen sind entweder kongruent oder Spiegelbilder voneinander in Beziehung auf einen dreidimensionalen Raum.*

In bekannter Weise können wir nun die Gleichungen (30) aber auch auffassen als Gleichungen der gegebenen Fläche, nur bezogen auf ein gedrehtes Koordinatensystem  $\xi, \eta, \zeta, \vartheta$ . Dieses Koordinatensystem ist aber nun *nicht* in beliebiger Weise zur Fläche orientiert, sondern die Ebene  $\xi = 0, \eta = 0$ , welche in Beziehung auf das  $xyzt$ -Koordinatensystem die Gleichungen

$$(31) \quad \begin{aligned} z &= -x \operatorname{ctg} \gamma_1 \cos \alpha_1 + y \operatorname{ctg} \gamma_1 \sin \alpha_1, \\ t &= -x \operatorname{ctg} \gamma_1 \sin \alpha_1 - y \operatorname{ctg} \gamma_1 \cos \alpha_1 \end{aligned}$$

hat, und ebenso die Ebene  $\xi = 0$ ;  $\vartheta = 0$ , welche in Beziehung auf das  $xyzt$ -System

$$(32) \quad \begin{aligned} z &= x \operatorname{tg} \gamma_1 \cos \alpha_1 - y \operatorname{tg} \gamma_1 \sin \alpha_1, \\ t &= x \operatorname{tg} \gamma_1 \sin \alpha_1 + y \operatorname{tg} \gamma_1 \cos \alpha_1 \end{aligned}$$

zu Gleichungen hat, gehören zu dem am Schluß von § 10 definierten Komplex der Nullebenen des vierdimensionalen Raums. Die Gleichungen (31) oder (32) enthalten aber offenbar alle Ebenen des Komplexes — nur sind diese parallel mit sich so verschoben, daß sie alle durch den Ursprung gehen. Da nun die Gleichungen (30) eine  $R$ -Fläche auch in Beziehung auf die  $\xi\eta$ - und  $\xi\vartheta$ -Ebene darstellen, so folgt nach § 10 der interessante

Satz. *Projiziert man eine  $R$ -Fläche auf alle Ebenen des Nullkomplexes, so erhält man lauter konforme Bilder der  $R$ -Fläche.\**

Da die Tangential- und Normalebene der  $R$ -Fläche selbst zu dem Komplex gehören, so gilt der

Zusatz. *Die Projektionen einer  $R$ -Fläche auf ihre sämtlichen Tangential- und Normalebene sind konforme Bilder der  $R$ -Fläche.*

Bemerkung. Durch die Gleichungen (30) ist  $\zeta + i\vartheta$  als Funktion von  $\xi + i\eta$  definiert; der funktionale Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen wird ein ganz anderer sein als zwischen  $z + it$  und  $x + iy$ : daraus folgt, daß eine und dieselbe  $R$ -Fläche sehr verschiedene funktionale Zusammenhänge geometrisch darstellen kann.

## § 12.

### Die Krümmung der $R$ -Flächen.

Als Flächengleichung benutzen wir die Gleichung § 9, (2) und berechnen zunächst die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung sowie die Größen  $e$ ,  $f$ ,  $g$  (s. § 1). Achtet man auf die Gleichungen § 9, (3), (4), so erhält man für die *Fundamentalgrößen zweiter Ordnung*:

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} D_x &= -D'_x = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; & D_y &= -D'_y = \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ D_x &= -D'_x = -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; & D_t &= -D'_t = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ D'_x &= -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; & D'_y &= -\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \\ D'_z &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; & D'_i &= -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right.$$

$$(2) \quad f = 0; \quad e = g = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2.$$

\*) Vgl. Kwietniewski, a. a. O. § 3, VI.

Nach den Gleichungen § 4, (3) und § 10, (1), (3) ergeben sich als Gleichungen der Charakteristik in einem beliebigen Flächenpunkt  $(x, y)$ :

$$(3) \quad \begin{aligned} X-x &= \frac{\lambda D'_x(dx^2-dy^2)+2\lambda D''_x dx dy}{e(dx^2+dy^2)}; & Y-y &= \frac{\lambda D'_y(dx^2-dy^2)+2\lambda D''_y dx dy}{e(dx^2+dy^2)}; \\ Z-z &= \frac{\lambda D'_z(dx^2-dy^2)+2\lambda D''_z dx dy}{e(dx^2+dy^2)}; & T-t &= \frac{\lambda D'_t(dx^2-dy^2)+2\lambda D''_t dx dy}{e(dx^2+dy^2)}, \end{aligned}$$

wo  $\lambda$  die § 10, (3) angegebene Bedeutung hat.

Jeder Fortschreitungsrichtung  $(dx, dy)$  auf der Fläche im Punkt  $(x, y, z, t)$  ist nach (3) ein Punkt  $(X, Y, Z, T)$  des Kegelschnitts zugewiesen. Benutzt man nun die aus (1) und (2) sich ergebenden Identitäten

$$(4) \quad \Sigma(D_x)^2 = \Sigma(D'_x)^2 = \Sigma(D''_x)^2 = e\lambda, \quad \Sigma D_x D'_x = 0, \quad \Sigma D'_x D''_x = 0, \\ \Sigma D_x D''_x = -e\lambda,$$

so folgt aus (3)

$$(5) \quad (X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2 + (T-t)^2 = \frac{\lambda^2}{e}$$

und hieraus der

Satz: Die Charakteristik ist für jeden Flächenpunkt einer  $R$ -Fläche ein Kreis und der Flächenpunkt sein Mittelpunkt oder: eine  $R$ -Fläche besitzt lauter Kreispunkte.\*)

Bezeichnet man den Radius dieses Kreises im Punkt  $(x, y, z, t)$  mit  $r$ , so folgt aus (5)

$$r = \frac{\lambda^{\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}}.$$

Aus dem in § 7 Gesagten geht nun hervor:

Die Krümmungsradien sämtlicher Normalschnitte in einem Flächenpunkt sind gleich  $r$ . Die Hauptkrümmungsrichtungen sind unbestimmt. In der Tat verschwindet die linke Seite der Differentialgleichung der Krümmungslinien (§ 8, (4)) identisch. Alle Projektionsflächen in die Schar der Tangentialräume im Flächenpunkt  $(x, y)$  haben in dem betreffenden Punkt den Charakter von Minimalflächen und dasselbe Krümmungsmaß. Die Asymptotenlinien § 8, (7) sind die Minimallinien der  $R$ -Fläche, also imaginär. Die Involution § 5 ist eine Rechtwinkel-Involution: Ein Tangentialraum schneidet also aus der Fläche zwei zueinander senkrechte Linienelemente aus und zwei zueinander senkrechte Tangentialräume schneiden vier Linienelemente aus, welche untereinander Winkel von je  $\frac{\pi}{4}$  bilden etc.

Das Krümmungsmaß  $k$  der Fläche erhält man entweder nach der

\*) Vgl. Kwietniewski, a. a. O. § 3, VII.

Bemerkung am Schluß von § 6 aus  $ds^2 = \lambda(dx^2 + dy^2)$  mit Hilfe der Gaußschen Formel oder einfacher nach § 7. Es folgt

$$(7) \quad k = -\frac{2}{r^2} = -\frac{2e}{\lambda^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Gleichung (6) für den Radius  $r$  der Charakteristik läßt sich noch auf eine bemerkenswerte Form bringen. Bedeutet wieder  $\Phi$  die konjugierte Funktion von  $F$  in § 9, (5), so ist

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = F'(x + iy), \quad \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial v}{\partial x} = \Phi'(x - iy),$$

$$\text{also } \lambda = 1 + F''(x + iy) \Phi'(x - iy)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F''(x + iy) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}; \quad \Phi''(x - iy) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + i \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y},$$

$$\text{also } \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 = e = F''(x + iy) \Phi''(x - iy).$$

Aus (6) folgt nun

$$(8) \quad \frac{1}{r} = \frac{[F''(x + iy) \Phi''(x - iy)]^{\frac{1}{2}}}{[1 + F''(x + iy) \Phi'(x - iy)]^{\frac{3}{2}}}.$$

Ist  $F$  eine *reelle* Funktion (also  $F = \Phi$ ) der *reellen* Variablen  $x$  allein ( $y = 0$ ), so erhält man aus (8)

$$(9) \quad \frac{1}{r} = \frac{F''(x)}{\{1 + (F'(x))^2\}^{\frac{3}{2}}}.$$

Die Gleichung (9) gibt aber die Größe der Krümmung  $\frac{1}{r}$  der Kurve  $z = F(x)$  im Punkte  $(x)$  an. Läßt man für  $x$  und  $z$  in  $z = F(x)$  auch komplexe Werte zu, so tritt an die Stelle der Kurve die  $R$ -Fläche und zur Berechnung „der Krümmung  $\frac{1}{r}$ “ hat man die Formel (8), welche somit eine Verallgemeinerung von (9) darstellt. Sucht man die Werte von  $x + iy$ , welche der Gleichung  $F''(x + iy) = 0$  genügen, so erhält man auf der  $R$ -Fläche die den Wendepunkten ebener Kurven entsprechenden Punkte. In diesen ist die Krümmung sämtlicher Normalschnitte gleich Null. Da nun die  $R$ -Fläche die zugehörige ebene Kurve enthält, so hat man eine *reelle* Darstellung sämtlicher Wendepunkte einer ebenen Kurve erreicht. Die bekannten Sätze über die Wendepunkte einer Kurve dritter Ordnung z. B. finden so im  $R_4$  eine reelle Interpretation, nämlich: die neun Wendepunkte einer  $R$ -Fläche dritter Ordnung liegen zu je dreien auf einer Nullebene.

Bezieht man zwei ebene Kurven durch parallele Tangenten punktweise aufeinander, so verhalten sich zwei entsprechende Linienelemente umgekehrt wie die entsprechenden Krümmungen. Analog zeigt man ohne Schwierigkeit: Bezieht man zwei  $R$ -Flächen durch parallele Tangential-

ebenen punktweise aufeinander, so verhalten sich zwei entsprechende Linienelemente umgekehrt wie die entsprechenden Krümmungen. Damit zeigt sich von neuem die große Analogie der Krümmung ebener Kurven mit der Krümmung der  $R$ -Flächen. Zum Schlusse führen wir noch zwei Sätze an, deren Beweis wir übergehen:

*Eine  $R$ -Fläche, die überall die konstante Krümmung Null besitzt, ist eine Ebene; und: es gibt keine  $R$ -Fläche, welche in allen Punkten eine konstante von Null verschiedene Krümmung besitzt.*

### § 13.

#### Die assoziierten Projektionsflächen.

Wir betrachten nunmehr die beiden Flächen, die durch Projektion der  $R$ -Fläche in die dreidimensionalen Räume  $z=0$  bzw.  $t=0$  entstehen, und die wir in § 9  $z$ -Projektionsfläche bzw.  $t$ -Projektionsfläche genannt haben: dieselben stellen zwei konjugierte logarithmische Potentiale dar. Es ist nützlich, überhaupt allgemein die Projektion der  $R$ -Fläche in einen beliebigen durch die  $XY$ -Ebene gehenden dreidimensionalen Raum zu untersuchen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$\begin{aligned} z' &= z \cos \alpha + t \sin \alpha, \\ t' &= z \sin \alpha - t \cos \alpha, \end{aligned}$$

mit anderen Worten, wir drehen das Koordinatensystem um die  $XY$ -Ebene um den Winkel  $\alpha$ . Jetzt hat die Projektion der  $R$ -Fläche in den Raum  $t'=0$  zu Gleichungen

$$(1) \quad z' = u \cos \alpha + v \sin \alpha; \quad t' = 0.$$

Die Gleichungen (1) stellen also eine gewöhnliche Fläche dar, die aus der  $R$ -Fläche durch Projektion in den Raum  $z \sin \alpha - t \cos \alpha = 0$  entsteht. Läßt man in (1)  $\alpha$  variieren, so erhält man eine ganze Schar von Flächen, nämlich die Projektionsflächen in die Räume  $z \sin \alpha - t \cos \alpha = 0$ . Wir nennen diese Flächen *assoziierte Projektionsflächen*. Zwei Flächen der Schar, die den Parameterwerten  $\alpha$  und  $\alpha + \frac{\pi}{2}$  entsprechen und darum Projektionsflächen in zwei zueinander senkrechte Räume darstellen, nennen wir *adjungierte Projektionsflächen*. Die  $t$ -Projektionsfläche und die  $z$ -Projektionsfläche ( $\alpha=0$ ;  $\alpha=\frac{\pi}{2}$ ) sind adjungierte Flächen. Diese letzteren hat Dini\*) untersucht; die Sätze I und II im folgenden stellen Erweiterungen der von Dini für zwei adjungierte Projektionsflächen gefundenen Sätze dar.\*\*)

\*) Giorn. di mat. 3 (1865), p. 78.

\*\*) Vgl. auch. R. v. Lilienthal, J. f. Math. 98 (1885), p. 131.

Für das Linienelement  $ds$  der Fläche (1) erhält man mit Rücksicht auf § 9, (3)

$$(2) \quad ds^2 = E dx^2 + 2F dx dy + G dy^2,$$

wobei

$$E = 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha \right)^2;$$

$$F = \left( \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha \right) \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha \right);$$

$$G = 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha \right)^2$$

ist. Für das Flächenelement  $dJ = \sqrt{EG - F^2} dx dy$  erhält man hieraus

$$(3) \quad dJ = \sqrt{1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

Da  $dJ$  von  $\alpha$  unabhängig ist, so folgt der

Satz I. *Die assoziierten Projektionsflächen (1) sind flächentreu aufeinander abgebildet.*

Für das Krümmungsmaß  $k$  in einem Punkt  $(x, y)$  der Fläche (1) erhält man

$$(4) \quad k = - \frac{\left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right)^2}{\lambda^2},$$

wo

$$\lambda = 1 + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2$$

gesetzt ist. Aus (4) ergibt sich, daß die Projektionsflächen überall negativ gekrümmt sind, und weiter

Satz II. *Die assoziierten Projektionsflächen haben in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß.*

Sind weiter  $a, b, c$  die Richtungskosinus der Normalen in einem Punkt  $(x, y)$  von (1), so ist

$$(5) \quad a\sqrt{\lambda} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \sin \alpha; \quad b\sqrt{\lambda} = \frac{\partial u}{\partial y} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial x} \sin \alpha; \quad c\sqrt{\lambda} = -1.$$

Da hier  $c$  von  $\alpha$  unabhängig ist, so folgt, daß die Tangentialebenen der assoziierten Projektionsflächen in entsprechenden Punkten gegen die  $XY$ -Ebene dieselbe Neigung besitzen, was sich auch leicht aus Satz I geometrisch ergibt. Sind  $a_1, b_1, c_1$  die Richtungskosinus der Normalen einer anderen Fläche der Schar (1) mit dem Parameterwert  $\alpha_1$ , so ergibt sich aus (5)

$$(6) \quad \frac{aa_1 + bb_1}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \cos(\alpha - \alpha_1)$$

und hieraus

Satz III. Die Tangentialebene in einem Punkt  $(x, y)$  der Projektionsfläche  $(\alpha)$  ist gegen die Tangentialebene der Fläche  $(\alpha_1)$  im entsprechenden Punkt um die Verbindungslinie der zwei entsprechenden Punkte um den Winkel  $\alpha - \alpha_1$  gedreht.

Hieraus oder auch aus Satz I, II und mit Hilfe des Gaußschen Satzes folgt:

Satz IV. Die sphärischen Bilder der assoziierten Projektionsflächen sind kongruent.

Durch Drehung um die  $z'$ -Achse kommen sie zur Deckung miteinander. Die assoziierten Projektionsflächen bilden ein hübsches Beispiel dafür, daß Flächen, die in entsprechenden Punkten dasselbe Krümmungsmaß besitzen und überdies noch flächentreu aufeinander bezogen sind, doch nicht aufeinander abwickelbar sein müssen. Die Flächen der Schar (1) gehen zwar durch stetige Gestaltsänderung ineinander über: diese Gestaltsänderung ist aber keine solche ohne Dehnung, da das Linienelement (2) von  $\alpha$  nicht unabhängig ist.

Wir betrachten weiter auf zwei assoziierten Flächen mit den Gleichungen

$$(7) \quad z' = u \cos \alpha + v \sin \alpha, \quad z'_1 = u \cos \alpha_1 + v \sin \alpha_1$$

die Kurven  $z' = \text{konst.}$  bzw.  $z'_1 = \text{konst.}$  Man zeigt leicht, daß die Projektionen dieser Kurvensysteme auf die  $XY$ -Ebene sich allenthalben unter dem Winkel  $\alpha - \alpha_1$  schneiden. Hieraus folgt für zwei adjungierte Flächen der auch sonst bekannte

Satz V. Die Projektionen der Niveaulinien einer von zwei adjungierten Projektionsflächen auf die  $XY$ -Ebene sind die Projektionen der Falllinien der anderen und umgekehrt.\*)

Ebenso ergibt sich ohne Schwierigkeit, daß die Winkel der Parameterkurven in entsprechenden Punkten zweier adjungierter  $R$ -Flächen supplementär sind.

Wir wenden uns zu den Asymptotenlinien der assoziierten Projektionsflächen: die Gleichungen dieser erhält man durch Quadratur, wie wir jetzt zeigen wollen.

Zu diesem Zweck nehmen wir als Parameterkurven der Fläche (1) die Kurven, die auf die  $XY$ -Ebene projiziert die Minimallinien dieser Ebene geben. Beachtet man, daß  $u \cos \alpha + v \sin \alpha$  der reelle Teil der Funktion  $e^{-i\alpha} F(x + iy)$  ist, wenn  $u + iv = F(x + iy)$  ist, so erhält man nach § 10, 5 als Gleichungen der assoziierten Projektionsflächen:

$$(8) \quad x = \frac{\sigma + \sigma_1}{2}; \quad y = -\frac{i(\sigma - \sigma_1)}{2}; \quad z' = \frac{1}{2}(e^{-i\alpha} F(\sigma) + e^{i\alpha} \Phi(\sigma_1)).$$

\*) Vgl. die pag. 23 angeführten Modelle.

Dabei ist  $\Phi$  die zu  $F$  konjugierte Funktion,  $\sigma$  und  $\sigma_1$  sind die Parameter. Für die Fundamentalgrößen zweiter Ordnung  $D, D', D''$  erhält man \*)

$$D = \frac{ie^{-i\alpha} F''(\sigma)}{4\delta}; \quad D' = 0; \quad D'' = \frac{ie^{i\alpha} \Phi''(\sigma_1)}{4\delta},$$

wo zur Abkürzung

$$\delta^2 = -\frac{1}{4} \{1 + F'(\sigma) \Phi'(\sigma_1)\}$$

gesetzt ist. Die *Differentialgleichung der Asymptotenlinien* lautet nun

$$(9) \quad e^{-i\alpha} F''(\sigma) d\sigma^2 + e^{i\alpha} \Phi''(\sigma_1) d\sigma_1^2 = 0.$$

Hier sind aber die Variablen getrennt und man erhält daher die Gleichungen der Asymptotenlinien selbst durch Quadratur.

Die Differentialgleichung (9) ist aber auch zugleich die Differentialgleichung der Asymptotenlinien einer Schar *assoziierter Minimalflächen*\*\*) mit den Gleichungen

$$(10) \quad \begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \int (1 - \sigma^2) e^{-i\alpha} F''(\sigma) d\sigma + \frac{1}{2} \int (1 - \sigma_1^2) e^{i\alpha} \Phi''(\sigma_1) d\sigma_1, \\ y &= \frac{i}{2} \int (1 + \sigma^2) e^{-i\alpha} F''(\sigma) d\sigma - \frac{i}{2} \int (1 + \sigma_1^2) e^{i\alpha} \Phi''(\sigma_1) d\sigma_1, \\ z &= \int \sigma e^{-i\alpha} F''(\sigma) d\sigma + \int \sigma_1 e^{i\alpha} \Phi''(\sigma_1) d\sigma_1. \end{aligned}$$

Durch die Gleichungen (8) und (10) ist nun die Minimalfläche (10) auf die Projektionsfläche (8) abgebildet (aber nicht konform) und zwar so, daß die Asymptotenlinien sich entsprechen. Zu dem Minimalflächenpunkt  $(\sigma, \sigma_1)$  erhält man die Projektion auf die  $XY$ -Ebene des entsprechenden Punkts der Projektionsfläche dadurch, daß man das sphärische Bild des Minimalflächenpunkts stereographisch auf die  $XY$ -Ebene projiziert. Daraus folgt aber nach den bekannten Sätzen über die Minimalflächen, daß die beiden Flächen so abgebildet sind, daß die Projektion der Projektionsfläche (8) auf die  $XY$ -Ebene ein konformes Bild der Minimalfläche ist. Da nun die Asymptotenlinien sich entsprechen und diese die Minimalfläche bekanntlich in unendlich kleine Quadrate teilen, so folgt der

Satz VI. *Die Projektionen der Asymptotenlinien jeder assoziierten Projektionsfläche auf die  $XY$ -Ebene bilden ein isometrisches Kurvensystem.*

Aus dem bekannten Satz endlich bezüglich der konformen Abbildung zweier adjungierter Minimalflächen, wonach den Krümmungslinien der einen Minimalfläche die Asymptotenlinien der adjungierten entsprechen

\*) Vgl. z. B. Stahl-Kommerell, Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie § 2.

\*\*) Vgl. ebenda § 12, (12) und (9).

und umgekehrt, schließt man, daß die Projektionen der Asymptotenlinien von zwei adjungierten Projektionsflächen auf die  $XY$ -Ebene vier Systeme von Kurven geben, die sich überall unter einem Winkel gleich  $\frac{\pi}{4}$  schneiden.

## § 14.

**Die  $R$ -Flächen sind Minimalflächen des  $R_4$ .**

Auf der durch die Gleichung

$$(1) \quad z + it = F(x + iy)$$

dargestellten  $R$ -Fläche denken wir uns ein zusammenhängendes durch eine oder mehrere Grenzkurven  $\Gamma$  begrenztes Flächenstück. Die Projektion des Flächenstücks auf die  $XY$ -Ebene gibt einen Bereich  $\mathfrak{B}_1$  mit den Grenzkurven  $\Gamma_1$  und ebenso erhält man durch Projektion auf die  $ZT$ -Ebene in dieser einen Bereich  $\mathfrak{B}_2$  mit den Grenzkurven  $\Gamma_2$ . Die Bereiche  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  bilden wegen der konformen Abbildung des auf der  $R$ -Fläche liegenden Flächenstücks auf die  $XY$ - und  $ZT$ -Ebene (vgl. § 10) ebenfalls zusammenhängende Flächenstücke, die jedoch ihre Ebenen mehrfach überdecken können. Durch die in  $\mathfrak{B}_1$  (samt Grenzkurven) reguläre Funktion (1) — dies setzen wir von  $F$  voraus — ist dann  $\mathfrak{B}_1$  konform auf  $\mathfrak{B}_2$  abgebildet. Durch die Grenzkurven  $\Gamma$  legen wir nun eine andere Fläche  $A$ , von der wir voraussetzen, daß das innerhalb  $\Gamma$  liegende Flächenstück frei von Singularitäten sei und daß die Projektionen dieses Flächenstücks auf die  $XY$ - und  $ZT$ -Ebene gerade die Bereiche  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  geben: mit anderen Worten, daß durch dieses Flächenstück die Bereiche  $\mathfrak{B}_1$  und  $\mathfrak{B}_2$  ein-eindeutig — aber jetzt nicht konform — aufeinander abgebildet werden. Die Gleichungen dieser Fläche  $A$  seien

$$(2) \quad x = x, \quad y = y, \quad z = U(x, y), \quad t = V(x, y).$$

Nach dem oben Gesagten müssen wir also von den sonst willkürlichen Funktionen  $U, V$  voraussetzen, daß sie samt ihren ersten partiellen Ableitungen in Bereich  $\mathfrak{B}_1$  eindeutige und stetige Funktionen von  $x, y$  sind, daß in  $\mathfrak{B}_1$  ihre Funktionaldeterminante stets von Null verschieden ist und daß die längs der Grenzkurven  $\Gamma_1$  von  $\mathfrak{B}_1$  aufgepflanzten Werte die Kurven  $\Gamma$  des  $R_4$  geben. Unter diesen Voraussetzungen beweisen wir nun den

*Satz. Der auf der  $R$ -Fläche von den Kurven  $\Gamma$  begrenzte Flächeninhalt ist kleiner als der entsprechende auf der Fläche  $A$ . In diesem Sinne sind die  $R$ -Flächen Minimalflächen des  $R_4$ .*

*Beweis.* Für das Flächenelement  $dJ$  von (2) hat man

$$(3) \quad dJ = \delta dx dy,$$

wo

(4)

$$\delta = +\sqrt{EG - F^2};$$

(5)

$$E = 1 + \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2; \quad F = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V}{\partial y};$$

$$G = 1 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2$$

ist. Ist  $dJ_1$  die Projektion von  $dJ$  auf die  $XY$ -Ebene,  $dJ_2$  die Projektion von  $dJ$  auf die  $ZT$ -Ebene, so hat man, wie man leicht nachrechnet,

(6)

$$dJ_1 = dx dy; \quad dJ_2 = +\sqrt{eg - f^2} dx dy,$$

wo

(7)

$$e = E - 1; \quad f = F; \quad g = G - 1$$

gesetzt ist; die Inhalte  $dJ$ ,  $dJ_1$ ,  $dJ_2$  fassen wir dabei als positive Größen auf, da es hier nur auf die Größe und nicht auf den Umlaufssinn derselben ankommt. Wir zeigen nun, daß, wenn nicht gleichzeitig

(8)

$$e = g, \quad f = 0$$

ist, stets  $dJ > dJ_1 + dJ_2$  ist. Aus (3), (4) und (7) folgt nämlich

(9)

$$dJ = +\sqrt{1 + e + g + eg - f^2} dx dy.$$

Weiter ist  $\frac{e+g}{2} \geq +\sqrt{eg}$ , wo das Gleichheitszeichen nur dann gilt, wenn  $e = g$  ist; um so mehr ist also  $e + g > 2\sqrt{eg - f^2}$ . An die Stelle des Zeichens  $>$  tritt hier nur das Zeichen  $=$ , wenn die beiden Gleichungen (8) gleichzeitig bestehen. Aus (9) ergibt sich nun, falls die Gleichungen (8) nicht gleichzeitig erfüllt sind,

$$dJ > +\sqrt{1 + 2\sqrt{eg - f^2} + eg - f^2} dx dy$$

oder

$$dJ > (1 + \sqrt{eg - f^2}) dx dy$$

oder

(10)

$$dJ > dJ_1 + dJ_2.$$

Sind aber die Gleichungen (8) beide erfüllt, so ist

(11)

$$dJ = dJ_1 + dJ_2.$$

Die Gleichungen (8) und (5) geben aber dann

(12)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial V}{\partial y}; \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial V}{\partial x},$$

und  $U$  ist der reelle,  $V$  der imaginäre Teil einer Funktion von  $x + iy$  oder umgekehrt, d. h. die Fläche  $A$  ist dann eine  $R$ -Fläche. Ist also  $A$  nicht auch eine  $R$ -Fläche — und dies kann, wie sogleich gezeigt wird, nur dann der Fall sein, falls  $A$  mit der gegebenen  $R$ -Fläche zusammenfällt — so gilt für die  $R$ -Fläche (11), für die Fläche  $A$  (10). Bezeichnet man nun mit  $J_R$  den Inhalt des in die Kurven  $\Gamma$  eingespannten Flächenstücks der  $R$ -Fläche, mit  $J_A$  den entsprechenden Inhalt der Fläche  $A$  und mit  $J_1$  und  $J_2$  die Inhalte von  $\mathfrak{B}_1$  bzw.  $\mathfrak{B}_2$  (d. h. aller Blätter von  $\mathfrak{B}_1$

und  $\mathfrak{B}_2$ ), so erhält man aus (10) und (11) entsprechend den bezüglich der Fläche  $A$  gemachten Voraussetzungen

$$(13) \quad J_R = J_1 + J_2,$$

$$(14) \quad J_A > J_1 + J_2.$$

Es bleibt jetzt nur noch übrig, zu zeigen, daß es außer der gegebenen  $R$ -Fläche durch  $\Gamma$  keine zweite den für die Fläche  $A$  gemachten Voraussetzungen genügende  $R$ -Fläche gibt; denn wäre

$$z + it = f(x + iy)$$

die Gleichung einer solchen, so müßte  $f$  und darum auch die Funktion

$$(15) \quad Z + iT = F(x + iy) - f(x + iy)$$

eine in  $\mathfrak{B}_1$  (samt Rand) reguläre Funktion von  $x + iy$  sein. Bei der durch (15) vermittelten konformen Abbildung von  $\mathfrak{B}_1$  auf die  $ZT$ -Ebene würde aber allen Punkten der Kurven  $\Gamma_1$  der Punkt  $Z = 0, T = 0$  entsprechen, was der Regularität widerspricht. Ist also  $A$  eine von der gegebenen  $R$ -Fläche verschiedene Fläche, so ist sicher die Gleichung (14) erfüllt und damit der Beweis des Satzes erledigt.

Genau so wie zuletzt zeigt man, daß zwei  $R$ -Flächen innerhalb eines Gebietes, in dem sie Bilder regulärer Funktionen sind, nicht einmal die Punkte eines noch so kleinen endlichen Kurvenstücks miteinander gemein haben können, ohne zusammenzufallen. Zwei  $R$ -Flächen schneiden sich eben in diskreten Punkten und nicht in Linien. Da somit eine  $R$ -Fläche durch ein noch so kleines endliches Kurvenstück eindeutig bestimmt ist, so darf man deshalb zur Bestimmung einer *Minimalfläche* ( $R$ -Fläche) im vierdimensionalen Raum nicht eine beliebige Raumkurve  $\Gamma$ , durch die die Fläche gehen soll, vorgeben. Aus der Funktionentheorie ist ja auch bekannt, daß die Angabe der reellen Werte  $z$  längs  $\Gamma_1$ , die imaginären Werte  $t$  längs  $\Gamma_1$  bis auf eine additive Konstante bestimmt. Mit andern Worten: man darf zur Bestimmung der Minimalfläche nur die Projektion  $\gamma$  der Randkurve  $\Gamma$  in den dreidimensionalen Raum  $t = 0$  vorgeben. Die Aufgabe, aus  $\gamma$  die Minimalfläche zu bestimmen, ist identisch mit der bekannten Randwertaufgabe der Funktionentheorie.

Wir schließen mit zwei Bemerkungen. Aus (3) folgt nämlich, daß das Integral

$$\int_{\mathfrak{B}_1} \int \delta \, dx \, dy$$

erstreckt über  $\mathfrak{B}_1$  für die  $R$ -Fläche einen Minimalwert besitzt. Aus (12) folgt aber, daß der Minimalwert  $J_R$  selbst gegeben ist durch

$$(16) \quad J_R = \int_{\mathfrak{B}_1} \int \left( 1 + \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right) dx \, dy,$$

wo jetzt  $U + iV = F(x + iy)$  ist.

Das rechtsstehende Integral stimmt aber bis auf die additive Konstante  $\int_{\mathfrak{B}_1} dx dy$  mit dem Integral überein, dessen Minimum-Eigenschaft bei dem sogenannten *Dirichletschen Prinzip* betrachtet wird.

Aus (13), (16) und (6) folgt endlich

$$\int_{\mathfrak{B}_1} \int \left( 1 + \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = \int_{\mathfrak{B}_1} dx dy + \int_{\mathfrak{B}_2} dU dV$$

und hieraus der bekannte Satz von Green

$$(17) \quad \int_{\mathfrak{B}_1} \int \left\{ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy = \int U dV,$$

wo das rechtsstehende Integral um den Rand von  $\mathfrak{B}_1$  oder  $\mathfrak{B}_2$  so zu führen ist, daß sein Wert positiv wird. Die Gleichung (13) enthält also eine interessante geometrische Interpretation für den Greenschen Satz.

Anmerkung. Bedeutet  $\delta''(\varphi)$  den Differentialparameter zweiter Ordnung\*) für das Linienelement der Minimalfläche (*R-Fläche*), so ergibt sich leicht

$$\delta''(x) = \delta''(y) = \delta''(z) = \delta''(t) = 0 \quad \text{und} \quad \delta''(Ax + By + Cz + Dt) = 0,$$

wo  $A, B, C, D$  Konstanten sind. Die letzte Gleichung sagt aber aus\*\*), daß jede Schar von Parallelräumen aus der Minimalfläche ein Isothermensystem ausschneidet. Man vergleiche hierzu den analogen für die Minimalflächen des  $R_3$  gültigen Satz. Von der Erzeugung der Minimalflächen des  $R_4$  durch Minimalkurven war in § 10 die Rede.

## § 15.

### Darstellung des Produkts zweier komplexen Größen durch ein Rechteck im vierdimensionalen Raum.

In reellen Zahlengebiet kann das Produkt zweier Größen durch ein Rechteck dargestellt werden. Durch geeignete Festsetzungen kann man nun auch für zwei komplexe Größen  $x + iy$  und  $z + it$  ein Rechteck angeben, welches das Produkt derselben geometrisch interpretiert. Dies ist für manche Zwecke von Vorteil.

Ist  $O$  der Ursprung des Koordinatensystems, so stellen wir, wie üblich, die Größe  $x + iy$  durch den Vektor  $OP_1$  der  $XY$ -Ebene und die Größe  $z + it$  durch den Vektor  $OP_2$  der  $ZT$ -Ebene dar. Diese beiden Vektoren

\*) vgl. etwa Stahl-Kommerell, Die Grundformeln der allgemeinen Flächentheorie § 17, (7).

\*\*) *ibid.* § 17, IV.

bestimmen ein Rechteck  $OP_1PP_2$ , wobei  $P$  die Koordinaten  $x, y, z, t$  hat; dieses Rechteck soll uns der Repräsentant von  $(x+iy) \cdot (z+it)$  sein. Bezeichnet man dieses Rechteck mit  $J$ , so setze man symbolisch

$$(1) \quad J = (x+iy)(z+it).$$

Für das folgende ist es nun geschickter, dem Punkt  $P$  nicht die Koordinaten  $x, y, z, t$  zuzuschreiben, sondern die Koordinaten  $x, iy, z, it$ . Nach dieser Festsetzung projiziere man das Rechteck  $J$  der Reihe nach auf die  $XZ$ -,  $YZ$ -,  $XT$ -,  $YT$ -Ebene und erhält so vier Rechtecke, die wir mit  $J_{xz}$ ,  $J_{yz}$ ,  $J_{xt}$ ,  $J_{yt}$  bezeichnen. Das Rechteck  $J_{xt}$  z. B. hat die Seiten  $x$  und  $it$  und hat einen Inhalt  $= xt$ ; wir sagen aber jetzt, der Inhalt sei  $ixt$ , und machen dies ebenso für die anderen Rechtecke. Man erhält so

$$(2) \quad J_{xz} = xz, \quad J_{yz} = iyz, \quad J_{xt} = ixt, \quad J_{yt} = -yt;$$

aus (2) folgt aber jetzt  $J_{xz} + J_{yz} + J_{xt} + J_{yt} = (x+iy)(z+it)$  und darum aus (1)

$$(3) \quad J = J_{xz} + J_{yz} + J_{xt} + J_{yt}.$$

Wir nennen nun das Rechteck  $J$  den *Produktvektor* der beiden Vektoren  $OP_1$  und  $OP_2$  oder der beiden komplexen Größen  $x+iy$  und  $z+it$  und den Punkt  $O$  seine *Ecke*. Die vier Größen  $J_{xz}$  etc. nennen wir die *Komponenten* des Produktvektors. Nach (3) ist also *der Produktvektor gleich der Summe seiner vier Komponenten*. Zwei Produktvektoren heißen gleich, wenn jeder dieselbe Komponentensumme hat. Zwei Produktvektoren werden addiert, indem man die Komponenten addiert. Man kann nun mit einem Produktvektor mancherlei Lageverschiebungen und Änderungen vornehmen, ohne daß er seinen Wert ändert. Für uns kommen hauptsächlich drei solche Veränderungen in Betracht.

I. Nach (1) ist  $J = a(x+iy) \cdot \frac{z+it}{a}$ , wo  $a$  eine reelle Konstante bedeuten möge. Daraus folgt, daß man die Seiten  $OP_1$  und  $OP_2$  des Produktvektors verändern darf, wenn nur dabei der Inhalt des Rechtecks  $J$  derselbe bleibt.

II. Da weiter  $J = e^{i\alpha}(x+iy) \cdot (z+it)^{-i\alpha}$  ist, wo  $\alpha$  wieder reell sein möge, so folgt, daß man die eine Seite  $OP_1$  von  $J$  in der  $XY$ -Ebene im Sinne der wachsenden Winkel um den Winkel  $\alpha$  drehen darf, wenn man nur ebenso  $OP_2$  in der  $ZT$ -Ebene im Sinne der abnehmenden Winkel um den Winkel  $\alpha$  dreht. Dabei ist in der  $XY$ - und  $ZT$ -Ebene derjenige Drehsinn der positive, in dem gedreht die positiven reellen Achsen nach einer Drehung von  $\frac{\pi}{2}$  mit den positiven imaginären Achsen zusammenfallen. Durch die genannte Operation kann man jeden Produktvektor aus dem  $R_4$  in den dreidimensionalen Raum  $XYZ$  hereindrehen: man braucht

dazu nur  $OP_2$  um den Winkel  $P_2OZ$  in der  $ZT$ -Ebene im Sinne der abnehmenden Winkel und  $OP_1$  in der  $XY$ -Ebene um denselben Winkel im Sinne der wachsenden Winkel zu drehen.

III. Endlich kann man den Produktvektor offenbar parallel mit sich verschieben. Um dabei die Komponenten des verschobenen Produktvektors mit dem richtigen Zeichen zu erhalten, ist zu beachten, daß die Rechteckseiten des Produktvektors gerichtete Größen sind und darum auch die Projektionen derselben.

Durch diese Festsetzungen ist es nun möglich, irgend welchen algebraischen Ausdruck komplexer Größen durch geometrische Konstruktionen darzustellen.

Beispiel. Es sei  $z + it = (x + iy)^n$  und es soll zu dem Wert  $x + iy$  der Funktionswert gesucht werden. Der Vektor  $OP_1$  (s. Fig. 1) in der

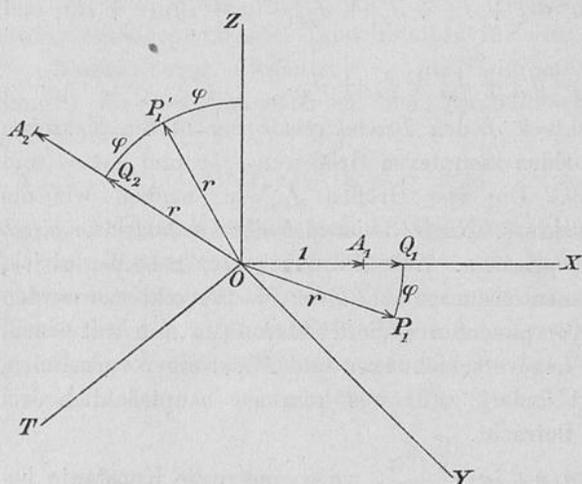


Fig. 1.

$XY$ -Ebene sei  $= x + iy$ , ebenso  $OP_1' = x + iy$  in der  $ZT$ -Ebene. Der Radiusvektor von  $OP_1$  und  $OP_1'$  sei  $r$ , die Amplitude  $\varphi$ . Der Produktvektor aus  $OP_1$  und  $OP_1'$  ist dann gleich  $(x + iy)^2$ . Wir drehen nun  $OP_1$  um den Winkel  $\varphi$  nach  $OQ_1$  ( $Q_1$  liegt auf der  $X$ -Achse) in negativem Sinn und dafür  $OP_1'$  um  $\varphi$  in positivem Sinn nach  $OQ_2$ .  $OQ_1$  und  $OQ_2$  geben jetzt

ebenfalls einen Produktvektor gleich  $(x + iy)^2$ . Sei  $OA_1 = 1$ , dann verkleinere man  $OQ_1$  im Verhältnis  $\frac{1}{r}$ , worauf  $Q_1$  nach  $A_1$  gelangt;

$OQ_2$  dagegen vergrößere man im Verhältnis  $\frac{r}{1}$ , worauf  $Q_2$  nach  $A_2$  gelangt. Der durch  $OA_1$  und  $OA_2$  bestimmte Produktvektor ist ebenfalls

$= (x + iy)^2$ . Da nun aber  $OA_1 = 1$ , so ist  $OA_2 = (x + iy)^2$ ,  $OA_2$  und  $OP_1$  bilden nun einen Produktvektor  $= (x + iy)^3$ . Man verfähre nun gerade so wie vorher, drehe  $OP_1$  zurück nach  $OQ_1$  und verkürze wieder

$OQ_1$  im Verhältnis  $\frac{1}{r}$ . Dafür hat man  $OA_2$  wiederum um den Winkel  $\varphi$  in positivem Sinn zu drehen und die Länge  $OA_2$  mit  $r$  zu multiplizieren. Daraus folgt, daß der Vektor  $z + it$ , der die Größe  $(x + iy)^n$  darstellt,

die  $n$ -fache Amplitude von  $x + iy$  besitzt und einen Radiusvektor gleich der  $n^{\text{ten}}$  Potenz des Radiusvektors von  $x + iy$ . Läuft nun der Vektor  $OP_1$  einmal in der  $XY$ -Ebene herum, so macht der Vektor  $OP_n = z + it$   $n$  Umläufe in der  $ZT$ -Ebene. Mit andern Worten: die durch die Gleichung  $z + it = (x + iy)^n$  dargestellte  $R$ -Fläche gibt, auf die  $XY$ -Ebene projiziert, eine Riemannsche Fläche mit einem Blatt, auf die  $ZT$ -Ebene projiziert, eine solche mit  $n$  Blättern. Zieht man durch die jeweilige Lage von  $P_1$  den Vektor  $P_1P$  parallel und gleich  $OP_n$ , so wird der Punkt  $P$  eine auf der  $R$ -Fläche liegende Kurve beschreiben, die, auf die  $XY$ -Ebene projiziert, den einfachen Kreis mit dem Radius  $OP_1$  gibt, auf die  $ZT$ -Ebene projiziert, den Kreis mit dem Radius  $OP_n$  aber  $n$  mal gerechnet. Man erhält so eine Anschauung für das Verhalten der  $R$ -Fläche im Nullpunkt, wo  $x + iy$ , als Funktion von  $z + it$  betrachtet, einen Windungspunkt  $(n-1)^{\text{ter}}$  Ordnung besitzt.

## § 16.

Geometrische Deutung von  $\int F(x + iy) (dx + idy)$ .

Wir betrachten die durch die Gleichung

$$(1) \quad z + it = F(x + iy)$$

dargestellte  $R$ -Fläche. In einem Bereich der  $XY$ -Ebene, in dem  $F$  regulär sich verhält, ziehen wir eine Kurve  $A_1B_1$  (s. Fig. 2) und pflanzen nun in

allen Punkten dieser Kurve die aus (1) sich ergebenden Werte  $z + it$  auf: dadurch erhalten wir auf der  $R$ -Fläche die Kurve  $AB$ . Sei  $P_1$  ein Punkt von  $A_1B_1$  mit den Koordinaten  $x, iy$ ,  $P$  der entsprechende Punkt auf  $AB$ , so stellt uns der Vektor  $P_1P$  den in  $P_1$  vorhandenen Funktionswert  $z + it$  von (1) dar. Lassen wir  $P_1$  von  $A_1$  nach  $B_1$  wandern, so überfährt der Vektor  $P_1P$  dabei eine gewisse

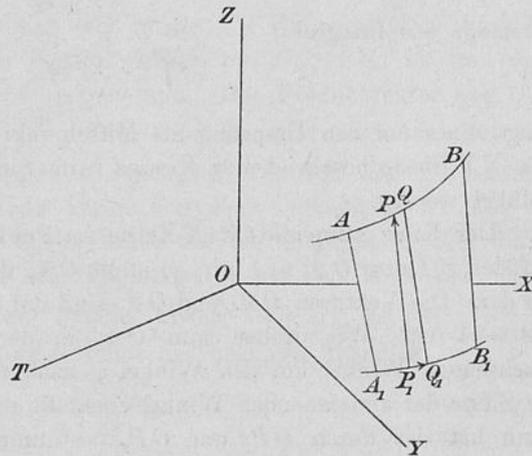


Fig. 2.

Fläche, die wir die *Vektorfläche* nennen. Sei  $Q_1$  ein  $P_1$  sehr benachbarter Punkt der Kurve  $A_1B_1$ ,  $Q$  sein entsprechender auf  $AB$  und setze man  $P_1Q_1 = dx + idy$ , so bestimmen die beiden Vektoren  $P_1P$  und  $P_1Q_1$  einen

Produktvektor mit der Ecke  $P_1$ . Wir nennen ihn  $dJ$ . Die vier Komponenten von  $dJ$  werden bis auf unendlich kleine Größen höherer Ordnung mit den vier Projektionen des Stücks  $P_1Q_1QP$  auf die Ebenen der Komponenten von  $dJ$  übereinstimmen. Bildet man nun

$$(2) \quad \int_{A_1}^{B_1} F(x+iy) (dx+idy),$$

so stellt dieses bestimmte Integral die Summe der vier Projektionen der Vektorfläche  $AA_1B_1BA$  auf die genannten Ebenen in dem in § 15 namhaft gemachten Sinne dar. Nennt man diese vier Projektionen ebenfalls die *Komponenten* der Vektorfläche, so kann man

$$(3) \quad \int_{A_1}^{B_1} F(x+iy) (dx+idy) = J$$

setzen, wofern man unter  $J$  die Summe der vier Komponenten der Vektorfläche  $AA_1B_1BA$  versteht. Man sieht, daß (3) auf eine reelle Funktion  $F(x)$  der reellen Variablen  $x$  angewendet die gewöhnliche Deutung des  $\int_{A_1}^{B_1} F(x) dx$  gibt, wenn die  $X$ -Achse zur Integrationskurve  $A_1B_1$  genommen wird.

Beispiel:

$$(4) \quad z + it = \frac{1}{x+iy}.$$

Es möge das Integral

$$(5) \quad \int \frac{dx+idy}{x+iy}$$

längs eines um den Ursprung als Mittelpunkt und mit dem Radius 1 in der  $XY$ -Ebene beschriebenen Kreises  $k$  im Sinne der wachsenden Winkel geführt werden.

Der Kreis schneide die  $X$ -Achse im Punkt  $A_1$  (s. Fig. 3); trägt man auf der  $Z$ -Achse  $OA_2 = 1$  ab, so stellt  $OA_2$  den Funktionswert im Punkt  $A_1$  dar. Die Vektoren  $OA_1$  und  $OA_2$  sind die Seiten eines Produktvektors, der  $= 1$  ist. Wir drehen nun  $OA_1$  in der  $XY$ -Ebene im Sinne der wachsenden Winkel um den Winkel  $\varphi$  nach  $OP_1$ ,  $OA_2$  in der  $ZT$ -Ebene im Sinne der abnehmenden Winkel ebenfalls um den Winkel  $\varphi$  nach  $OP_2$ , dann hat der durch  $OP_1$  und  $OP_2$  bestimmte Produktvektor nach § 15 ebenfalls den Wert 1.  $OP_2$  stellt also (wie übrigens auch aus der durch (4) vermittelten konformen Abbildung der  $XY$ -Ebene auf die  $ZT$ -Ebene folgt) den in  $P_1$  vorhandenen Funktionswert dar. Es ist demnach, wenn  $P_1$  die Koordinaten  $x, iy$ , hat  $OP_2 = \frac{1}{x+iy}$ .  $P_1Q_1$  sei  $= dx+idy$ . Wir

verlegen nun den Vektor  $P_1 Q_1$  parallel mit sich so nach  $O$ , daß  $P_1$  auf  $O$  fällt und nennen den nach  $O$  verschobenen Vektor  $OQ'$ . Aus  $OQ'$  und  $OP_2$  bilden wir einen Produktvektor: dieser ist dann  $= \frac{dx + i dy}{x + iy}$ .  $OP_2$  drehe man in der  $ZT$ -Ebene um den Winkel  $\varphi$  im Sinne der wachsenden

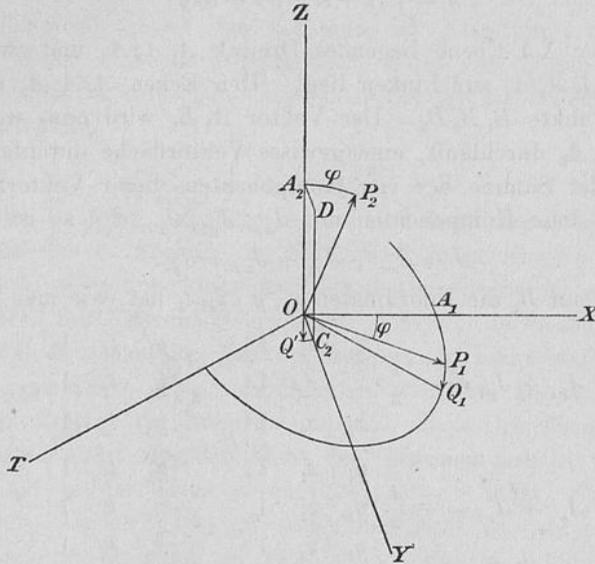


Fig. 3.

Winkel bis  $OA_2$ , dann muß man  $OQ'$  in der  $XY$ -Ebene um den Winkel  $\varphi$  im Sinne der abnehmenden Winkel drehen bis  $OC_2$ . Es ist nun aber klar, daß  $C_2$  auf der  $Y$ -Achse liegen muß. Der Produktvektor aus  $OA_2$  und  $OC_2$  ist somit  $= \frac{dx + i dy}{x + iy}$ . Der Produktvektor ist aber jetzt mit seiner zur  $YZ$ -Ebene gehörigen Komponente identisch, da alle anderen Null sind. Bezeichnet man die Länge von  $P_1 Q_1$  mit  $ds$ , so ist  $OC_2$  der Länge nach ebenfalls  $= ds$ ;  $C_2$  hat daher auf der  $Y$ -Achse die Koordinate  $i \cdot ds$  und der Produktvektor aus  $OA_2$  und  $OC_2$  hat den Wert  $i ds$ . Teilt man nun den Kreis in lauter gleiche kleine Teile  $ds$ , so hat  $\frac{dx + i dy}{x + iy}$  überall den Wert  $i ds$ . Es folgt somit das bekannte Resultat

$$\int_K \frac{dx + i dy}{x + iy} = 2i\pi.$$

Ebenso zeigt man leicht, daß

$$\int_K (x + iy)^n (dx + i dy) = 0$$

ist, wo  $n$  eine ganze positive oder negative von  $-1$  verschiedene Zahl ist.

Als zweites Beispiel nehmen wir die Funktion

$$(6) \quad z + it = (a + ib)(x + iy) + c + id,$$

welche eine spezielle  $R$ -Fläche nämlich eine Nullebene  $N$  darstellt, und führen das Integral

$$(7) \quad J = \int (z + it)(dx + idy)$$

um ein in der  $XY$ -Ebene liegendes Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  und zwar so, daß das Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  zur Linken liegt. Den Ecken  $A_1 A_2 A_3$  entsprechen auf  $N$  drei Punkte  $B_1 B_2 B_3$ . Der Vektor  $A_1 B_1$  wird nun, wenn  $A_1$  das Dreieck  $A_1 A_2 A_3$  durchläuft, eine gewisse Vektorfläche durchfahren;  $J$  ist dann gleich der Summe der vier Komponenten dieser Vektorfläche. Bezeichnet man diese Komponenten mit  $J_{xz}$ ,  $J_{yz}$ ,  $J_{xt}$ ,  $J_{yt}$ , so ist

$$(8) \quad J = J_{xz} + J_{yz} + J_{xt} + J_{yt}.$$

Es ist nun, wenn  $B_k$  die Koordinaten  $x_k, y_k, z_k, t_k$  hat, wie man leicht zeigt

$$(9) \quad J_{xz} + J_{yt} = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} - \frac{i^2}{2} \begin{vmatrix} y_1 & t_1 & 1 \\ y_2 & t_2 & 1 \\ y_3 & t_3 & 1 \end{vmatrix},$$

$$(10) \quad J_{yz} + J_{xt} = -\frac{i}{2} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} - \frac{i}{2} \begin{vmatrix} x_1 & t_1 & 1 \\ x_2 & t_2 & 1 \\ x_3 & t_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Da nun aber nach (6)

$$(11) \quad z_k = ax_k - by_k + c; \quad t_k = bx_k + ay_k + d$$

ist, so sieht man, daß die rechten Seiten von (9) und (10) identisch verschwinden. Daraus folgt

$$(12) \quad \int_{A_1 A_2 A_3} (z + it)(dx + idy) = 0.$$

Gleichung (12) stellt einen speziellen Fall des Cauchyschen Integralsatzes dar. Das Bestehen der Gleichung (12) ist auch der Anlaß gewesen, warum wir eine Ebene mit der Gleichung (6) eine *Nullebene* nannten. Ebenso wollen wir jedes in einer Nullebene liegende Dreieck ein *Nulldreieck* nennen. Weil nun die Tangentialebenen jeder  $R$ -Fläche Nullebenen sind (vgl. § 10), so kann man von hier aus einen Beweis des Cauchyschen Integralsatzes für eine beliebige  $R$ -Fläche gewinnen. Wir skizzieren kurz den Gang desselben.

Es sei in der  $XY$ -Ebene ein zusammenhängender Bereich  $\mathfrak{B}$  mit den Grenzkurven  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$  gegeben und die Funktion

$$(13) \quad z + it = F(x + iy)$$

sei in  $\mathfrak{B}$  (einschließlich der Grenzkurven) eindeutig erklärt, sie werde in

$\mathfrak{B}$  nirgends unendlich und besitze an jeder Stelle von  $\mathfrak{B}$  eine endliche Ableitung. Mit anderen Worten: wir setzen voraus, daß die durch (13) dargestellte  $R$ -Fläche in allen Punkten von  $\mathfrak{B}$  eine Tangentialebene besitze (vgl. § 10). Wir teilen nun den Bereich  $\mathfrak{B}$  in lauter unendlich kleine Dreiecke; diesen unendlich kleinen Dreiecken der  $XY$ -Ebene werden auf der  $R$ -Fläche wegen der Existenz der Ableitung von  $F$  ebenfalls unendlich kleine Dreiecke entsprechen. Jedes von diesen ist ein Nulldreieck, weil es in einer Tangentialebene der  $R$ -Fläche liegt. Nun führen wir das Integral

$$(14) \quad \int (z + it) (dx + i dy)$$

um jedes der Dreiecke von  $\mathfrak{B}$  so herum, daß das Dreieck zur Linken liegt. Die Summe dieser Integrale ist Null, weil jedes einzelne Integral Null ist (genauer: unendlich klein von der dritten Ordnung, wenn die Seite eines Dreiecks des Bereichs  $\mathfrak{B}$  unendlich klein von der ersten Ordnung ist). Da nun jede Dreiecksseite, die der Begrenzung nicht angehört, zweimal in entgegengesetztem Sinne durchlaufen wird, so heben sich die entsprechenden Beträge der Integralsumme für diese Dreiecksseiten auf. Die Integralsumme stellt also den Wert dar, den man erhält, wenn man das Integral (14) um die Grenzkurven  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$  so führt, daß  $\mathfrak{B}$  stets zur Linken liegt. Da aber die Integralsumme Null ist, so gilt das gleiche für das längs der Grenzkurven  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots$  geführte Integral. Damit ist aber der Integralsatz bewiesen.

Man sieht, daß die Gültigkeit des Satzes durch die Orientierung der Tangentialebenen der  $R$ -Fläche bedingt ist und daß zum Beweise nur die Existenz, nicht aber auch die Stetigkeit der Ableitung von  $F(x + iy)$  vorauszusetzen ist, wie dies auch Goursat\*) neuerdings gezeigt hat.

\*) Vgl. Encyklopädie der math. Wiss. Bd. II<sub>2</sub>, Heft 1, Fußnote 16.

$\mathfrak{B}$  nirg  
 Ableitun  
 dargest  
 sitze ( $\gamma$   
 kleine  $L$   
 auf der  
 unendli  
 dreieck  
 wir das  
  
 (14)  
 um jed  
 Die Su  
 ist (ge  
 eines  $D$   
 Da nur  
 in ent  
 spreche  
 Integra  
 Integra  
 Linken  
 für das  
 aber d  
 M  
 Tangen  
 Exister  
 voraus



von vier Dimensionen. 49

Stelle von  $\mathfrak{B}$  eine endliche  
 voraus, daß die durch (13)  
 $\mathfrak{B}$  eine Tangentialebene be-  
 reich  $\mathfrak{B}$  in lauter unendlich  
 ecken der  $XY$ -Ebene werden  
 Ableitung von  $F$  ebenfalls  
 es von diesen ist ein Null-  
 $R$ -Fläche liegt. Nun führen

$dy$ )  
 das Dreieck zur Linken liegt.  
 jedes einzelne Integral Null  
 en Ordnung, wenn die Seite  
 von der ersten Ordnung ist).  
 ung nicht angehört, zweimal  
 ird, so heben sich die ent-  
 diese Dreiecksseiten auf. Die  
 a man erhält, wenn man das  
 so führt, daß  $\mathfrak{B}$  stets zur  
 Null ist, so gilt das gleiche  
 geführte Integral. Damit ist

es durch die Orientierung der  
 und daß zum Beweise nur die  
 der Ableitung von  $F(x+iy)$   
 ) neuerdings gezeigt hat.

Heft 1, Fußnote 16.





