Die sphärische Trigonometrie auf dem Gymnasium.

In den Lehrplänen vom 6. Januar 1892 enthalten die methodischen Bemerkungen zu dem mathematischen Unterrichte auf dem Gymnasium den Schlußsatz:

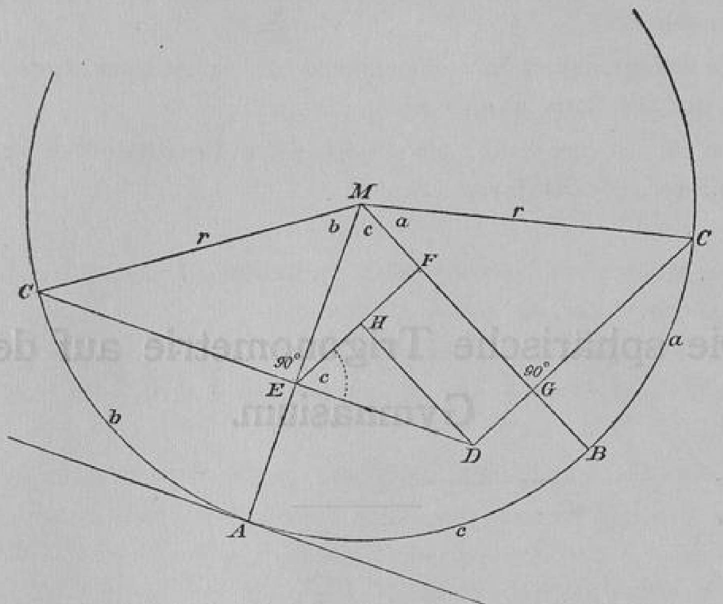
»Einige Grundformeln der sphärischen Trigonometrie, die zum besseren Verständniß der mathematischen Erdkunde erforderlich sind, lassen sich in einfacher Weise bei Betrachtung der dreiseitigen Ecke herleiten.«

So interessant die sphärische Trigonometrie und so leicht verständlich sie auch für den in der ebenen Trigonometrie sicheren und geübten Oberprimaner ist, wie ich in einer Programmarbeit Konitz 1873: »Analoga der ebenen und der sphärischen Trigonometrie« gezeigt habe, so wird sie doch auf das Nothwendigste beschränkt werden müssen. Für einen schwächeren Kursus wird das Verständniß des Sinussatzes und des Cosinussatzes und die Anwendung dieser beiden Grundformeln auf das allgemeine, wie auch besonders auf das rechtwinkelige Dreieck genügen. Mit einem besseren Kursus hingegen arbeite ich auch die für die geschicktere logarithmische Rechnung nothwendigen Umformungen bis zur Herleitung der Gaußischen Gleichungen und der Neperschen Analogieen durch, da hierin nichts weiter als eine Wiederholung des entsprechenden Abschnittes der ebenen Trigonometrie liegt. Auswendig gelernt werden Formeln nicht.

Unter der Voraussetzung der stereometrischen Grundlage gestaltet sich dann dieser Unterricht, wie das Folgende zeigt.

§ 1.

Sphärisches Dreieck und zugehörige körperliche Ecke.



I. Aus einem Kreise mit dem Radius r nimmt man einen Sector heraus, dessen Centriwinkel nach der vorstehenden Figur in drei ungleiche Centriwinkel a, b, c zerlegt wird. Sind a und b zusammen größer als c, so läßt sich der ursprüngliche Sector in den Radien MA und MB so falten, daß a, b, c eben bleiben und die äußeren mit MC bezeichneten Radien außerhalb der Ebene AMB in einen zusammenfallen. Dadurch entsteht ein sphärisches Dreieck ABC, dessen Seiten dieselbe Zahl von Graden enthalten wie die vorher mit a, b, c bezeichneten Centriwinkel. Kommt es nur auf die Zahl der Grade, nicht auf die Länge der Seiten des sphärischen Dreiecks an, so dürfen dieselben entsprechend auch mit a, b, c bezeichnet werden.

Die Winkel dieses sphärischen Dreiecks bezeichnen wir mit α, β, γ. Der Winkel α, den die Seiten b und c des sphärischen Dreiecks bilden, ist derselbe wie der Winkel CED den die Ebenen AMC und AMB miteinander bilden. Entsprechendes gilt für β und γ.

Somit haben wir ein sphärisches Dreieck ABC und eine ihm entsprechende körperliche Ecke. Die Seiten jenes sind Kreisbogen, die Seiten dieser die dazu gehörigen Centriwinkel. Die entsprechenden Seiten stimmen also in der Zahl der Grade überein. Die Winkel des sphärischen Dreiecks werden gemessen durch die Winkel, welche die Tangenten in den Ecken miteinander bilden. Sie sind deshalb identisch mit den entsprechenden Winkeln der körperlichen Ecke. Alle Sätze also, welche für die Seiten oder die Winkel der körperlichen Ecke gelten, müssen, falls es nur um die Zahl der Grade sich handelt, durch welche beide gemessen werden, auch für das sphärische Dreieck Geltung behalten und umgekehrt.

Aus der hier gezeigten Entstehungsweise des sphärischen Dreiecks und der körperlichen Ecke sind die Sätze abzulesen:

1. Die Summe der Seiten eines sphärischen Dreiecks (einer dreiseitigen körperlichen Ecke) ist kleiner als 360^0.
$$a + b + c < 360^0.$$
2. Die Summe zweier Seiten eines sphärischen Dreiecks (einer dreiseitigen körperlichen Ecke) ist größer als die dritte.
$$a + b > c.$$

II. Ein anderer Weg zu dem bisher erreichten Ziele geht von der Betrachtung der Kugel aus.

Jede durch den Mittelpunkt der Kugel gelegte Ebene schneidet die Kugeloberfläche in einem größten Kreise. Zwei durch denselben Durchmesser der Kugel (Axe) gelegte Ebenen bilden auf der Kugeloberfläche vier sphärische Zweiecke, von denen die gegenüberliegenden Scheitelzweiecke sind. Lege ich eine dritte beliebige Ebene durch den Mittelpunkt, so wird jedes der sphärischen Zweiecke in zwei Theile, sphärische Dreiecke, zerschnitten.

Die gemeinsame Grundlinie der beiden sphärischen Dreiecke eines solchen Zweiecks werde c genannt, die Seiten des einen a und b, die des anderen a' und b', so daß a und a' einerseits, b und b' andererseits einen Halbkreis bilden. Es sei c größer als jede der beiden Seiten a und b; dann läßt sich zeigen, daß $c < a + b$ ist, indem man in üblicher Weise die planimetrischen Sätze zu Hülfe nimmt:

1. In jedem ebenen Dreiecke ist die größte der drei Seiten und so überhaupt jede der drei Seiten kleiner als die Summe der beiden anderen.
2. In jedem Kreise entspricht der größeren Sehne auch der größere Bogen.

So hat man denn:
$$a + a' = 180^0$$
$$b + b' = 180^0$$
$$a + b + a' + b' = 360^0$$
$$c < a' + b'$$
folglich
$$a + b + a' + b' + c < 360^0 + a' + b'$$
$$a + b + c < 360^0$$

Ein sphärisches Viereck entsteht aus dem sphärischen Dreiecke, wenn man einen vierten größten Kreis so legt, daß von dem sphärischen Dreiecke ein kleineres abgeschnitten wird. Da die Summe der so weggeschnittenen beiden Bogenstücke größer ist als der für sie eintretende Bogen, die vierte Seite des Vierecks, so ist die Summe der vier Seiten des Vierecks kleiner, als die Summe der drei Seiten des Dreiecks war, d. h. sicher kleiner als 360°. In gleicher Weise ergiebt sich weiter, daß der Umfang jedes beliebigen sphärischen Polygons erst recht kleiner als 360° ist.

Für die körperliche Ecke heißt das: Die Summe der Seiten jeder beliebigen körperlichen Ecke ist kleiner als 360°.

Daraus folgt, daß nur die bekannten fünf regelmäßigen eckigen Körper möglich sind: drei von gleichseitigen Dreiecken begrenzte: Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder; einer von Quadraten begrenzt, nämlich der Würfel; einer von regelmäßigen Fünfecken begrenzt, das Dodekaeder. Denn nur 3, 4, 5 Winkel von je 60°, 3 Winkel von je 90°, 3 Winkel von je 108° lassen sich zu einer körperlichen Ecke zusammenstellen.

§ 2.

Die Supplementarecke und das Supplementardreieck.

Wenn man zu den drei Kanten einer dreiseitigen körperlichen Ecke senkrechte Ebenen legt, oder, anders ausgedrückt, wenn man von einem beliebigen Punkte innerhalb einer dreiseitigen körperlichen Ecke senkrechte Linien auf die Seiten derselben fällt, so erhält man eine zweite dreiseitige Ecke, deren Seiten die Winkel der ersten und deren Winkel die Seiten der ersten zu je 180° ergänzen. Denn der so geschlossene Körper ist nur von Vierecken begrenzt, in deren jedem 2 rechte Winkel einander gegenüberliegen, der eine der schiefen Winkel eine Seite der einen, der gegenüberliegende ein Winkel der anderen körperlichen Ecke ist. Dem Schüler, welcher sich dieses Modell selbst schneidet, macht dieser Satz keine wesentliche Schwierigkeit, da er gelernt hat, die Schnittflächen sich vorzuzeichnen.

Beseichnet man nun die Seiten der neuen körperlichen Ecke mit a', b', c' und die Winkel derselben mit α', β', γ' und zwar so, daß a' der Supplementwinkel zu dem Winkel α der ursprünglichen Ecke ist, α' der Supplementwinkel zu der Seite a der ursprünglichen Ecke, u. s. w., so entstehen folgende Gleichungen:

$$\alpha + a' = 180^0 \qquad \alpha' + a = 180^0$$
$$\beta + b' = 180^0 \qquad \beta' + b = 180^0$$
$$\gamma + c' = 180^0 \qquad \gamma' + c = 180^0$$

folglich $\alpha + \beta + \gamma + a' + b' + c' = 540^0$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + a + b + c = 540^0$$

$$360^0 > a + b + c$$

mithin $\alpha' + \beta' + \gamma' + a + b + c + 360^0 > a + b + c + 540^0$

$$\alpha' + \beta' + \gamma' > 180^0$$

$$\alpha + \beta + \gamma > 180^0$$

Satz: Die Summe der Winkel einer dreiseitigen körperlichen Ecke (eines sphärischen Dreiecks) ist größer als 180^0, aber kleiner als 540^0.

Das Letztere ist leicht ersichtlich aus $\alpha + \beta + \gamma + a' + b' + c' = 540^0$. Die Summe der Winkel der einen körperlichen Ecke und die Summe der Seiten der dazu gehörigen Supplementarecke zusammen giebt erst 540^0.

§ 3.

Inhalt des sphärischen Dreiecks bestimmt durch die Winkel. Folgerungen: sphärisches Polygon, Eulerscher Satz.

Wie ein sphärisches Dreieck durch Zerschneiden eines sphärischen Zweiecks nach § 1 entsteht, so läßt sich auch jedes sphärische Dreieck zu einem sphärischen Zweieck ergänzen und zwar auf dreifach verschiedene Weise. Das erste dieser drei sphärischen Zweiecke wird den Winkel α, das zweite den Winkel β, das dritte den Winkel γ haben.

Man bezeichne das gegebene sphärische Dreieck mit $\triangle$, die dazu gekommenen Nebendreiecke mit $\triangle_a$, $\triangle_b$, $\triangle_c$. Eins derselben, z. B. $\triangle_b$, wird nicht wie $\triangle$ und $\triangle_a$ und $\triangle_c$ auf der vorderen Halbkugelfläche liegen, dafür aber ein Scheiteldreieck, welches nachweislich gleich $\triangle_b$ ist, so daß die Summe $\triangle + \triangle_a + \triangle_b + \triangle_c = 2\,r^2\pi$, d. h. der Halbkugelfläche gleich ist.

Die Gleichheit des fraglichen Scheiteldreiecks mit $\triangle_b$ läßt sich zeigen, indem für beide der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises gesucht und von diesem aus jedes in drei gleichschenkelige Dreiecke zerlegt wird, unter denen die entsprechenden sofort als congruent erkannt werden.

Der Inhalt eines sphärischen Zweiecks wird in gleicher Weise bestimmt wie der Inhalt eines Kreissectors. Denkt man sich zu allen 360^0 des Äquators die Meridiane gezogen, so zerfällt damit die Kugeloberfläche in 360 congruente sphärische Zweiecke. Der Inhalt eines beliebig großen sphärischen Zweiecks verhält sich also zur Kugeloberfläche wie der Winkel des sphärischen Dreiecks zu 360^0.

$$\triangle + \triangle_a = 4r^2\pi \cdot \frac{\alpha}{360^0}$$

$$\triangle + \triangle_b = 4r^2\pi \cdot \frac{\beta}{360^0}$$

$$\triangle + \triangle_c = 4r^2\pi \cdot \frac{\gamma}{360^0}$$

$$2\triangle + 2r^2\pi = 4r^2\pi \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma}{360^0}$$

$$\triangle = 2r^2\pi \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^0}{360^0}$$

Satz: Der Inhalt eines sphärischen Dreiecks verhält sich zur halben Kugeloberfläche, wie der Überschuß seiner Winkelsumme über 180^0 sich zu 360^0 verhält.

Setzt man $\alpha + \beta + \gamma - 180^0 = 2\,\varepsilon$, so nimmt die letzte Gleichung die Form an:

$$\triangle = 2r^2\pi \cdot \frac{\varepsilon}{180^0}$$

Ein sphärisches Polygon läßt sich wie ein ebenes Polygon in soviel Dreiecke zerlegen, als das Polygon Seiten hat, indem man einen beliebigen Punkt innerhalb des Polygons mit allen Ecken desselben verbindet.

Bezeichnet man irgend eins dieser Dreiecke mit $\triangle_1$, seine Winkel mit α_1, β_1, γ_1, das darauf folgende mit $\triangle_2$, seine Winkel mit α_2, β_2, γ_2, u. s. w., das letzte mit $\triangle_n$, seine Winkel mit α_n, β_n, γ_n, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\triangle_1 = 2r^2\pi \cdot \frac{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 180^0}{360^0}$$

$$\triangle_2 = 2r^2\pi \cdot \frac{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - 180^0}{360^0}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\triangle_n = 2r^2\pi \cdot \frac{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n - 180^0}{360^0}$$

$$\text{Polygon} = 2r^2\pi \cdot \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \cdot\cdot + \alpha_n + \beta_1 + \beta_2 + \cdot\cdot + \beta_n + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdot\cdot + \gamma_n - n \,.\, 180^0}{360^0}$$

Sind γ_1, γ_2 u. s. w. die um den gewählten Punkt P gelegenen Winkel, so ist ihre Summe 360^0. Die mit α und β benannten Winkel aber sind die an den Ecken des Polygons gelegenen Winkel, deren Summe mit ω bezeichnet werde.

Somit ist:

$$\text{Polygon} = 2r^2\pi \cdot \frac{\omega - (n-2)\,180^0}{360^0}$$

Bezeichnet man in einem beliebigen eckigen Körper die Anzahl der Ecken mit E, der Flächen mit F, der Kanten mit K, so gilt

der Eulersche Satz: $E + F = K + 2$.

Derselbe wird in folgender Weise aus der Inhaltsgleichung für das sphärische Polygon hergeleitet:

Um einen beliebigen Punkt innerhalb des eckigen Körpers denken wir uns eine Kugel beschrieben mit einem so großen Radius, daß der Körper von der Kugelfläche vollständig eingeschlossen werde. Jeder Ecke des Körpers entspricht ein Kugelradius, der auf der Kugeloberfläche einen bestimmten Punkt bezeichnet; jeder Kante des Körpers ein Bogen zwischen zweien der bezeichneten Punkte; jeder Fläche des Körpers ein Polygon auf der Kugeloberfläche. Somit breitet sich auf dieser ein Netz von soviel Polygonen aus, als der Körper Flächen hat; von soviel Linien, als der Körper Kanten, und von soviel Knotenpunkten, als der Körper Ecken hat.

Es seien m Polygone. Das erste P_1 habe die Winkelsumme ω_1 und die Seitenzahl n_1; das zweite P_2 habe die Winkelsumme ω_2 und die Seitenzahl n_2, u. s. w. Das letzte Polygon P^m habe die Winkelsumme ω_m und die Seitenzahl n_m.

So gelten folgende Gleichungen:

$$P_1 = 2\, r^2 \pi \cdot \frac{\omega_1 - (n_1 - 2)\, 180^0}{360^0}$$

$$P_2 = 2\, r^2 \pi \cdot \frac{\omega_2 - (n_2 - 2)\, 180^0}{360^0}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$P_m = 2\, r^2 \pi \cdot \frac{\omega_m - (n_m - 2)\, 180^0}{360^0}$$

Die Summe aller Polygone ist die Kugeloberfläche $4\, r^2 \pi$.

$$4\, r^2 \pi = 2\, r^2 \pi \cdot \frac{\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_m - (n_1 + n_2 + \ldots + n_m)\, 180^0 + m \,.\, 360^0}{360^0}$$

Die Polygonwinkel gruppiren sich um die E Knotenpunkte.

Also ist $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_m = E \,.\, 360^0$. Ferner ist $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = 2\, K$.

Jede Seite eines Polygons gehört nämlich gleichzeitig noch einem angrenzenden Polygone an. In $n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ sind also alle Seiten doppelt gezählt. Die Anzahl m der Polygone ist aber auch mit F bezeichnet worden.

Damit gestaltet sich die letzte Gleichung so:

$$4\, r^2 \pi = 2\, r^2 \pi \cdot \frac{E \,.\, 360^0 - K \,.\, 360^0 + F \,.\, 360^0}{360^0}$$

also nach ersichtlicher Vereinfachung:

$$E + F = K + 2.$$

§ 4.

Hauptgleichungen für das allgemeine sphärische Dreieck.

Bilde ich aus der ebenen Figur § 1 die körperliche Ecke und das zugehörige sphärische Dreieck, so wird CD die Senkrechte von C auf die Ebene AMB. CE und DE bilden bei E den Winkel α, CG und DG bei G den Winkel β des sphärischen Dreiecks.

Somit ist $$CD = r \,.\, \sin b \,.\, \sin \alpha$$
$$CD = r \,.\, \sin a \,.\, \sin \beta$$

folglich $$r \,.\, \sin b \,.\, \sin \alpha = r \,.\, \sin a \,.\, \sin \beta$$

oder $$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin a}{\sin b}$$

Sinussatz: Die Sinus zweier Winkel eines sphärischen Dreiecks verhalten sich wie die Sinus der entsprechenden Seiten.

Da dieser Satz für je zwei Winkel und die entsprechenden Seiten nachgewiesen werden kann, so stellt er sich vollständig in folgender Form dar:

$$1. \quad \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma = \sin a : \sin b : \sin c.$$

Wie in der ebenen Trigonometrie entsprechen auch in der sphärischen dem Sinussatze zwei der vier Grundaufgaben:

1. Zur Bestimmung eines Dreiecks sind zwei Winkel gegeben und die dem einen von beiden gegenüberliegende Seite.
2. Zur Bestimmung eines Dreiecks sind zwei Seiten gegeben und ein Winkel, welcher einer derselben gegenüberliegt.

Bei der Auflösung dieser Aufgaben ist hier natürlich zu beachten, daß der dritte Winkel nicht gefunden werden kann wie in der ebenen Trigonometrie, da die drei Winkel des sphärischen Dreiecks nicht 180° zu ihrer Summe haben.

Die Strecke MG läßt sich auf doppelte Weise ausdrücken.

Aus dem Dreieck MGC ist

$$MG = r \,.\, \cos a$$

Ferner ist $$MG = MF + FG \text{ oder } MF + DH$$
$$MF = ME \,.\, \cos c = r \,.\, \cos b \,.\, \cos c$$
$$DH = r \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha$$
$$MG = r \,.\, \cos b \,.\, \cos c + r \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha$$

folglich
analog:
$$2. \begin{cases} \cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos \alpha \\ \cos b = \cos a \,.\, \cos c + \sin a \,.\, \sin c \,.\, \cos \beta \\ \cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos \gamma \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c} \\ \cos\beta = \dfrac{\cos b - \cos a \,.\, \cos c}{\sin a \,.\, \sin c} \\ \cos\gamma = \dfrac{\cos c - \cos a \,.\, \cos b}{\sin a \,.\, \sin b} \end{cases}$$

In diesen beiden Formen erscheint der Cosinussatz, welcher die Beziehung enthält zwischen den drei Seiten des sphärischen Dreiecks und irgend einem Winkel desselben. Den beiden Gleichungssystemen entsprechen wieder zwei der vier Grundaufgaben:

3. Ein Dreieck zu bestimmen durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel.
4. Ein Dreieck zu bestimmen durch die drei Seiten.

Nach § 2 bestehen zwischen zwei Supplementarecken resp. Supplementardreiecken die Beziehungen:

$$\begin{array}{lll} \alpha + a' = 180^0 & \text{also ist: } \sin\alpha = \sin a' & \cos\alpha = -\cos a' \\ \beta + b' = 180^0 & \sin\beta = \sin b' & \cos\beta = -\cos b' \\ \gamma + c' = 180^0 & \sin\gamma = \sin c' & \cos\gamma = -\cos c' \\ a + \alpha' = 180^0 & \sin a = \sin\alpha' & \cos a = -\cos\alpha' \\ b + \beta' = 180^0 & \sin b = \sin\beta' & \cos b = -\cos\beta' \\ c + \gamma' = 180^0 & \sin c = \sin\gamma' & \cos c = -\cos\gamma' \end{array}$$

Benützen wir dies für die vorstehenden Gleichungen 1. 2. 3., so finden wir damit Beziehungen zwischen den Seiten und den Winkeln des Supplementardreiecks, die nur insoweit, als sie Neues ergeben, mit Weglassung der Indices hergesetzt werden:

$$4. \begin{cases} \cos\alpha = -\cos\beta \,.\, \cos\gamma + \sin\beta \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos a \\ \cos\beta = -\cos\alpha \,.\, \cos\gamma + \sin\alpha \,.\, \sin\gamma \,.\, \cos b \\ \cos\gamma = -\cos\alpha \,.\, \cos\beta + \sin\alpha \,.\, \sin\beta \,.\, \cos c \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \cos a = \dfrac{\cos\alpha + \cos\beta \,.\, \cos\gamma}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma} \\ \cos b = \dfrac{\cos\beta + \cos\alpha \,.\, \cos\gamma}{\sin\alpha \,.\, \sin\gamma} \\ \cos c = \dfrac{\cos\gamma + \cos\alpha \,.\, \cos\beta}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta} \end{cases}$$

Darin liegt die Lösung folgender beiden Aufgaben:

5. Ein Dreieck zu bestimmen durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.
6. Ein Dreieck zu bestimmen durch die drei Winkel.

Drücken wir die Strecke DG in doppelter Weise aus, einmal aus dem rechtwinkeligen Dreiecke CDG und zweitens als Differenz der beiden Strecken EF und EH, so ergiebt sich schließlich:

$$\sin a \, . \cos \beta = \cos b \, . \sin c - \sin b \, . \cos c \, . \cos \alpha$$

oder
$$\frac{\sin a}{\sin b} \cdot \cos \beta = \frac{\cos b}{\sin b} \cdot \sin c - \cos c \, . \cos \alpha$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \cos \beta = \operatorname{cotg} b \, . \sin c - \cos c \, . \cos \alpha$$

$$\operatorname{cotg} \beta = \frac{\operatorname{cotg} b \, . \sin c - \cos c \, . \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

oder
$$\operatorname{cotg} b = \frac{\operatorname{cotg} \beta \, . \sin \alpha + \cos c \, . \cos \alpha}{\sin c}$$

Diese beiden Gleichungen dienen zur Lösung folgender beiden Aufgaben:

7. Ein Dreieck zu bestimmen durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel.

8. Ein Dreieck zu bestimmen durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.

Die hierzu gehörigen Gleichungen stellen sich vollständig in folgenden beiden Formen dar:

$$7. \left\{ \begin{aligned} \operatorname{cotg} \alpha &= \frac{\sin c \, . \operatorname{cotg} a - \cos c \, . \cos \beta}{\sin \beta} = \frac{\sin b \, . \operatorname{cotg} a - \cos b \, . \cos \gamma}{\sin \gamma} \\ \operatorname{cotg} \beta &= \frac{\sin c \, . \operatorname{cotg} b - \cos c \, . \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin a \, . \operatorname{cotg} b - \cos a \, . \cos \gamma}{\sin \gamma} \\ \operatorname{cotg} \gamma &= \frac{\sin b \, . \operatorname{cotg} c - \cos b \, . \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin a \, . \operatorname{cotg} c - \cos a \, . \cos \beta}{\sin \beta} \end{aligned} \right.$$

$$8. \left\{ \begin{aligned} \operatorname{cotg} a &= \frac{\sin \gamma \, . \operatorname{cotg} \alpha + \cos \gamma \, . \cos b}{\sin b} = \frac{\sin \beta \, . \operatorname{cotg} \alpha + \cos \beta \, . \cos c}{\sin c} \\ \operatorname{cotg} b &= \frac{\sin \gamma \, . \operatorname{cotg} \beta + \cos \gamma \, . \cos a}{\sin a} = \frac{\sin \alpha \, . \operatorname{cotg} \beta + \cos \alpha \, . \cos c}{\sin c} \\ \operatorname{cotg} c &= \frac{\sin \beta \, . \operatorname{cotg} \gamma + \cos \beta \, . \cos a}{\sin a} = \frac{\sin \alpha \, . \operatorname{cotg} \gamma + \cos \alpha \, . \cos b}{\sin b} \end{aligned} \right.$$

Aufgabe: Das Analogon zu einer der letzten Gleichungen für die ebene Trigonometrie zu finden.

§ 5.

Das rechtwinkelige Dreieck.

Von allen besonderen Fällen, die eine Vereinfachung der Gleichungen des § 4 bewirken, soll nur der eine herausgehoben werden, daß $\alpha = 90^0$ sei, so daß also a die Hypotenuse, b und c die Katheten des rechtwinkeligen Dreiecks sind.

$$1. \left| \begin{aligned} \sin b &= \sin a \, . \sin \beta \\ \sin c &= \sin a \, . \sin \gamma \end{aligned} \right.$$

$$2. \quad \cos a = \cos b \, . \cos c$$

$$3. \quad \cos a = \operatorname{cotg} \beta \, . \operatorname{cotg} \gamma$$

$$4. \begin{cases} \cos b = \dfrac{\cos \beta}{\sin \gamma} \\ \cos c = \dfrac{\cos \gamma}{\sin \beta} \end{cases}$$

$$5. \quad \operatorname{cotg} a = \operatorname{cotg} c \,.\, \cos \beta = \operatorname{cotg} b \,.\, \cos \gamma$$

$$6. \begin{cases} \operatorname{cotg} \beta = \operatorname{cotg} b \,.\, \sin c \\ \operatorname{cotg} \gamma = \operatorname{cotg} c \,.\, \sin b \end{cases}$$

Welche Aufgaben durch jede dieser Gleichungen gelöst sind, ist daraus ersichtlich, daß je 2 der genannten 3 Größen als gegeben gelten können, die dritte als gesucht.

§ 6.

Umformungen für die logarithmische Rechnung.

Sämmtliche Gleichungen des § 5, sowie auch die Sinusgleichung des § 4 sind für die logarithmische Rechnung bequem, da dieselben nur Producte und Quotienten enthalten.

Aus der Sinusgleichung ergiebt sich wie in der ebenen Trigonometrie unmittelbar die gleichfalls logarithmisch brauchbare Tangentengleichung:

$$1. \quad \frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{a + b}{2}}{\operatorname{tg} \frac{a - b}{2}}$$

Wie in der ebenen Trigonometrie findet dieselbe Anwendung zur Lösung der Aufgaben:

1. Ein Dreieck zu bestimmen durch zwei Winkel und die Summe oder die Differenz der gegenüberliegenden Seiten.
2. Ein Dreieck zu bestimmen durch zwei Seiten und die Summe oder die Differenz der gegenüberliegenden Winkel.

Aus der Cosinusgleichung

$$\cos \alpha = \frac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c}$$

leitet man genau so wie in der ebenen Trigonometrie den Cotangentensatz her, indem man $1 + \cos \alpha$ und $1 - \cos \alpha$ bildet und die Resultate durch einander dividirt. Setzt man auch hier $a + b + c = 2\,p$, so erhält man:

$$2. \begin{cases} \operatorname{cotg} \dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin p \,.\, \sin (p - a)}{\sin (p - b) \,.\, \sin (p - c)}} = \sin (p - a) \cdot \sqrt{\dfrac{\sin p}{\sin (p - a) \,.\, \sin (p - b) \,.\, \sin (p - c)}} \\ \operatorname{cotg} \dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin p \,.\, \sin (p - b)}{\sin (p - a) \,.\, \sin (p - c)}} = \sin (p - b) \cdot \sqrt{\dfrac{\sin p}{\sin (p - a) \,.\, \sin (p - b) \,.\, \sin (p - c)}} \\ \operatorname{cotg} \dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin p \,.\, \sin (p - c)}{\sin (p - a) \,.\, \sin (p - b)}} = \sin (p - c) \cdot \sqrt{\dfrac{\sin p}{\sin (p - a) \,.\, \sin (p - b) \,.\, \sin (p - c)}} \end{cases}$$

Multiplicirt man $1 + \cos\alpha$ und $1 - \cos\alpha$ mit einander, so ergiebt sich:

$$3. \begin{cases} \sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{\sin p \,.\, \sin(p-a) \,.\, \sin(p-b) \,.\, \sin(p-c)}}{\sin b \,.\, \sin c} \\ \sin\beta = \dfrac{2\sqrt{\sin p \,.\, \sin(p-a) \,.\, \sin(p-b) \,.\, \sin(p-c)}}{\sin a \,.\, \sin c} \\ \sin\gamma = \dfrac{2\sqrt{\sin p \,.\, \sin(p-a) \,.\, \sin(p-b) \,.\, \sin(p-c)}}{\sin b \,.\, \sin c} \end{cases}$$

Aus Gleichung 5 § 4

$$\cos a = \frac{\cos\alpha + \cos\beta \,.\, \cos\gamma}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma}$$

bildet man $1 + \cos a$ und $1 - \cos a$.

Führt man dann auch hier wie in § 3 für

$$\alpha + \beta + \gamma \text{ die Bezeichnung } 180^\circ + 2\varepsilon$$

ein, so erhält man die Resultate:

$$4. \begin{cases} \operatorname{tg}\dfrac{a}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin\varepsilon \,.\, \sin(\alpha-\varepsilon)}{\sin(\beta-\varepsilon) \,.\, \sin(\gamma-\varepsilon)}} = \sin(\alpha-\varepsilon)\sqrt{\dfrac{\sin\varepsilon}{\sin(\alpha-\varepsilon) \,.\, \sin(\beta-\varepsilon) \,.\, \sin(\gamma-\varepsilon)}} \\ \operatorname{tg}\dfrac{b}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin\varepsilon \,.\, \sin(\beta-\varepsilon)}{\sin(\alpha-\varepsilon) \,.\, \sin(\gamma-\varepsilon)}} = \sin(\beta-\varepsilon)\sqrt{\dfrac{\sin\varepsilon}{\sin(\alpha-\varepsilon) \,.\, \sin(\beta-\varepsilon) \,.\, \sin(\gamma-\varepsilon)}} \\ \operatorname{tg}\dfrac{c}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin\varepsilon \,.\, \sin(\gamma-\varepsilon)}{\sin(\alpha-\varepsilon) \,.\, \sin(\beta-\varepsilon)}} = \sin(\gamma-\varepsilon)\sqrt{\dfrac{\sin\varepsilon}{\sin(\alpha-\varepsilon) \,.\, \sin(\beta-\varepsilon) \,.\, \sin(\gamma-\varepsilon)}} \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \sin a = \dfrac{2\sqrt{\sin\varepsilon \,.\, \sin(\alpha-\varepsilon) \,.\, \sin(\beta-\varepsilon) \,.\, \sin(\gamma-\varepsilon)}}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma} \\ \sin b = \dfrac{2\sqrt{\sin\varepsilon \,.\, \sin(\alpha-\varepsilon) \,.\, \sin(\beta-\varepsilon) \,.\, \sin(\gamma-\varepsilon)}}{\sin\alpha \,.\, \sin\gamma} \\ \sin c = \dfrac{2\sqrt{\sin\varepsilon \,.\, \sin(\alpha-\varepsilon) \,.\, \sin(\beta-\varepsilon) \,.\, \sin(\gamma-\varepsilon)}}{\sin\alpha \,.\, \sin\beta} \end{cases}$$

§ 7.

Gaussische und Nepersche Gleichungen.

In § 6 hat man bilden müssen:

$$1 + \cos\alpha = \frac{2 \,.\, \sin p \,.\, \sin(p-a)}{\sin b \,.\, \sin c}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{2 \,.\, \sin(p-b) \,.\, \sin(p-c)}{\sin b \,.\, \sin c}$$

Damit hat man auch:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \,.\, \sin(p-a)}{\sin b \,.\, \sin c}}, \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin p \,.\, \sin(p-b)}{\sin a \,.\, \sin c}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-b) \,.\, \sin(p-c)}{\sin b \,.\, \sin c}}, \quad \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{\sin(p-a) \,.\, \sin(p-c)}{\sin a \,.\, \sin c}}$$

Setzt man diese Resultate ein in die bekannten Gleichungen:

$$\cos\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\,.\,\cos\frac{\beta}{2}\mp\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\sin\frac{\beta}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}=\sin\frac{\alpha}{2}\,.\,\cos\frac{\beta}{2}\pm\cos\frac{\alpha}{2}\,.\,\sin\frac{\beta}{2}$$

so erhält man die Gaußischen Gleichungen:

$$1.\quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\,.\sqrt{\frac{\sin(p-a)\,.\,\sin(p-b)}{\sin a\,.\,\sin b}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$2.\quad \cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\,.\sqrt{\frac{\sin(p-a)\,.\,\sin(p-b)}{\sin a\,.\,\sin b}}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$3.\quad \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\,.\sqrt{\frac{\sin p\,.\,\sin(p-c)}{\sin a\,.\,\sin b}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$4.\quad \sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\,.\sqrt{\frac{\sin p\,.\,\sin(p-c)}{\sin a\,.\,\sin b}}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

Durch Division ergeben sich hieraus die Neperschen Gleichungen:

$$5.\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$$

$$6.\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cdot\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$$

$$7.\quad \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$8.\quad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

Die Neperschen Gleichungen sind ersichtlich die geschickteste Auflösung der beiden Aufgaben:

1. Ein Dreieck zu bestimmen durch zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel.
2. Ein Dreieck zu bestimmen durch eine Seite und die beiden anliegenden Winkel.

Dazu enthalten sie auch die Lösung der ferneren Aufgaben:

3. Ein Dreieck zu bestimmen durch zwei Winkel und die Summe oder die Differenz der gegenüberliegenden Seiten.
4. Ein Dreieck zu bestimmen durch zwei Seiten und die Summe oder die Differenz der gegenüberliegenden Winkel.

§ 8.

Inhaltsbestimmung durch die Seiten.

In § 3 ist gezeigt worden, daß der Inhalt eines sphärischen Dreiecks außer von dem Radius der zugehörigen Kugel abhängt von dem Überschuß seiner Winkel über 180°. Im Vorhergehenden ist nun die Lösung aller naheliegenden Aufgaben über das sphärische Dreieck enthalten, also insbesondere auch das Auffinden der Winkel aus den sonst gegebenen Stücken, z. B. aus den drei Seiten. Danach bleibt also immer noch die Inhaltsgleichung des § 3 anzuwenden.

Es liegt jedoch ein eigener Reiz darin, den sphärischen Exceß direct durch die Seiten des Dreiecks auszudrücken, wenn es auch entbehrlich ist.

I. Sphärischer Excess des rechtwinkeligen Dreiecks.

Bedingung $\alpha = 90^\circ$

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ + 2\varepsilon$$

$$\beta + \gamma = 90^\circ + 2\varepsilon$$

$$\sin 2\varepsilon = -\cos(\beta + \gamma) = \sin\beta \cdot \sin\gamma - \cos\beta \cdot \cos\gamma$$

Nach § 5 Gl. 1. ist $\sin\beta \cdot \sin\gamma = \dfrac{\sin b \cdot \sin c}{\sin^2 a}$

4. $$\frac{\cos\beta \cdot \cos\gamma}{\sin\beta \cdot \sin\gamma} = \cos b \cdot \cos c$$

also $$\cos\beta \cdot \cos\gamma = \frac{\sin b \cdot \sin c \cdot \cos b \cdot \cos c}{\sin^2 a}$$

folglich $$\sin 2\varepsilon = \frac{\sin b \cdot \sin c}{\sin^2 a} \cdot (1 - \cos b \cdot \cos c)$$

$$= \frac{\sin b \cdot \sin c}{\sin^2 a}(1 - \cos a) = \frac{\sin b \cdot \sin c}{2\cos^2 \frac{a}{2}}$$

oder auch 1. $$\sin 2\varepsilon = \frac{\sin b \,.\, \sin c}{1 + \cos a} = \frac{\sin b \,.\, \sin c}{1 + \cos b \,.\, \cos c}$$

2. $$\cos 2\varepsilon = \frac{\cos b + \cos c}{1 + \cos b \,.\, \cos c}$$

3. $$1 - \cos 2\varepsilon = \frac{(1 - \cos b)\,(1 - \cos c)}{1 + \cos b \,.\, \cos c} = \frac{4 \sin^2 \frac{b}{2} \cdot \sin^2 \frac{c}{2}}{1 + \cos b \,.\, \cos c}$$

4. $$1 + \cos 2\varepsilon = \frac{(1 + \cos b)\,(1 + \cos c)}{1 + \cos b \,.\, \cos c} = \frac{4 \cos^2 \frac{b}{2} \cdot \cos^2 \frac{c}{2}}{1 + \cos b \,.\, \cos c}$$

5. $$\operatorname{tg} \varepsilon = \operatorname{tg} \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{c}{2}$$

Die Gleichungen 3 und 4 gestatten auch die kürzere Form:

6. $$\sin \varepsilon = \frac{\sin \frac{b}{2} \cdot \sin \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2}}$$

7. $$\cos \varepsilon = \frac{\cos \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{c}{2}}{\cos \frac{a}{2}}$$

II. Sphärischer Excess des schiefwinkeligen Dreiecks.

Das schiefwinkelige Dreieck läßt sich durch die Höhe als Summe oder als Differenz zweier rechtwinkeligen Dreiecke darstellen. In jenem Falle ist sein sphärischer Exceß die Summe der Excesse seiner beiden rechtwinkeligen Dreiecke, in diesem die Differenz. Die Behandlung des ersten der beiden Fälle schließt den zweiten ein.

Die Höhe CD von C auf AB werde h genannt, x das Segment BD, c—x das Segment AD. Der Exceß des Dreiecks BDC sei ε', der des Dreiecks ADC sei ε''.

Die vorstehenden Gleichungen 6 u. 7 auf diese beiden Dreiecke angewendet ergeben:

$$\sin \varepsilon' = \frac{\sin \frac{h}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{a}{2}}, \quad \cos \varepsilon' = \frac{\cos \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{a}{2}}$$

$$\sin \varepsilon'' = \frac{\sin \frac{h}{2} \cdot \sin \frac{c-x}{2}}{\cos \frac{b}{2}}, \quad \cos \varepsilon'' = \frac{\cos \frac{h}{2} \cdot \cos \frac{c-x}{1}}{\cos \frac{b}{2}}$$

Daraus folgt $\sin (\varepsilon' + \varepsilon'')$ oder:

$$\sin \varepsilon = \frac{\sin h \,.\, \sin \frac{c}{2}}{2 \,.\, \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2}} = \frac{\sin h \,.\, \sin c}{4 \,.\, \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{c}{2}}$$

Nach Gl. 1 § 5 ist aber $\sin h = \sin a \,.\, \sin \beta$ und nach Gl. 3 § 6

$$\sin \beta = \frac{2 \,.\, \sqrt{\sin p \,.\, \sin (p-a) \,.\, \sin (p-b) \,.\, \sin (p-c)}}{\sin a \,.\, \sin c}$$

also
$$\sin h = \frac{2 \,.\, \sqrt{\sin p \,.\, \sin (p-a) \,.\, \sin (p-b) \,.\, \sin (p-c)}}{\sin c}$$

8. $$\sin \varepsilon = \frac{\sqrt{\sin p \,.\, \sin (p-a) \,.\, \sin (p-b) \,.\, \sin (p-c)}}{2 \,.\, \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{c}{2}}$$

Nach Gl. 2 § 5 ist ferner $\cos x = \frac{\cos a}{\cos h}$

$$\cos (c-x) = \frac{\cos b}{\cos h}$$

Da ferner $\cos (c-x) = \cos c \,.\, \cos x + \sin c \,.\, \sin x$ ist, so ergiebt sich:

$$\sin x = \frac{\cos b - \cos a \,.\, \cos c}{\cos h \,.\, \sin c}$$

Zwischen $\sin x$ und $\cos x$ aber besteht die Gleichung

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Damit läßt sich $\cos h$ durch die Seiten ausdrücken:

$$\cos^2 h = \frac{\cos^2 a + \cos^2 b - 2 \cos a \,.\, \cos b \,.\, \cos c}{\sin^2 c}$$

Mit diesen Mitteln findet man $\cos \varepsilon$ in gleicher Weise wie vorhin $\sin \varepsilon$ durch die Seiten in folgender Form:

9. $$\cos \varepsilon = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \,.\, \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{c}{2}}$$

Aus 8. und 9. folgt durch Division:

10. $$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2 \sqrt{\sin p \,.\, \sin (p-a) \,.\, \sin (p-b) \,.\, \sin (p-c)}}{1 + \cos a + \cos b + \cos c}$$

Es ist endlich $\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin \varepsilon}{1 + \cos \varepsilon}$, mithin:

11. $$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{2 \sqrt{\sin p \,.\, \sin (p-a) \,.\, \sin (p-b) \,.\, \sin (p-c)}}{1 + \cos a + \cos b + \cos c + 4 \,.\, \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} \cdot \cos \frac{c}{2}}$$

Durch Einführung der halben Winkel findet sich für diesen Nenner die Productform:

$$8 \,.\, \cos \frac{p}{2} \cdot \cos \frac{p-a}{2} \cdot \cos \frac{p-b}{2} \cdot \cos \frac{p-c}{2}$$

Damit erreicht man schließlich:

12. $$\operatorname{tg} \frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\operatorname{tg} \frac{p}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-a}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{p-c}{2}}$$

J. Praetorius.