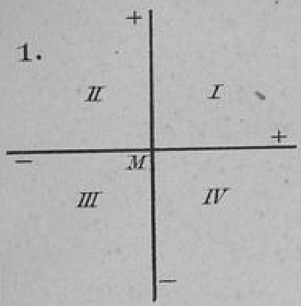
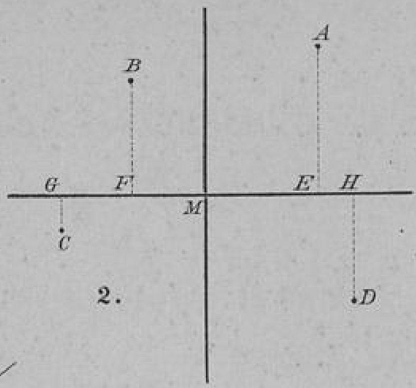
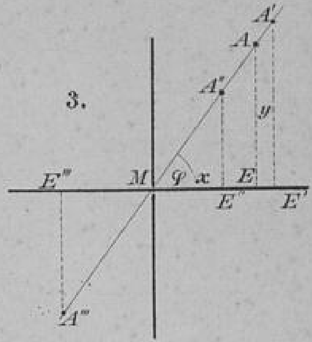
1.



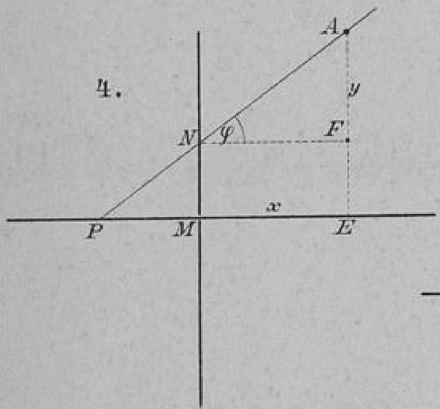
2.



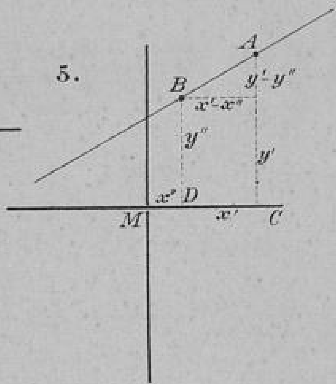
3.



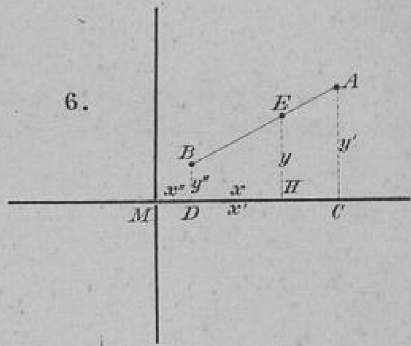
4.



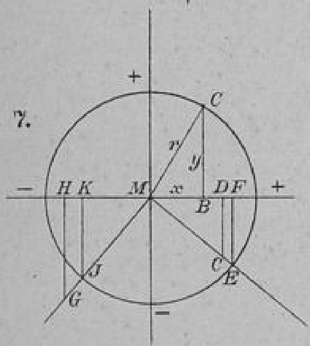
5.



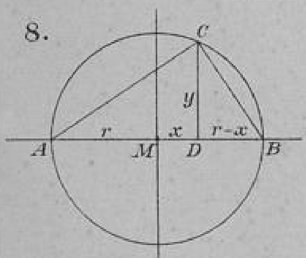
6.



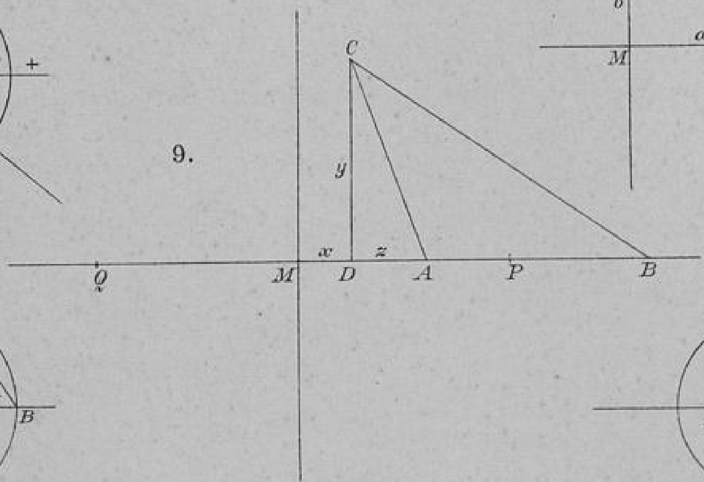
7.



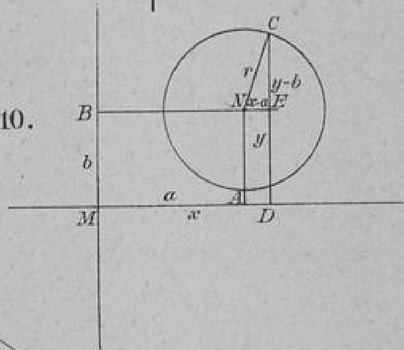
8.



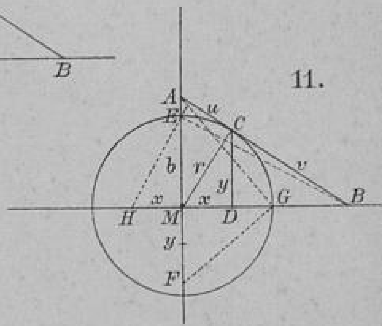
9.



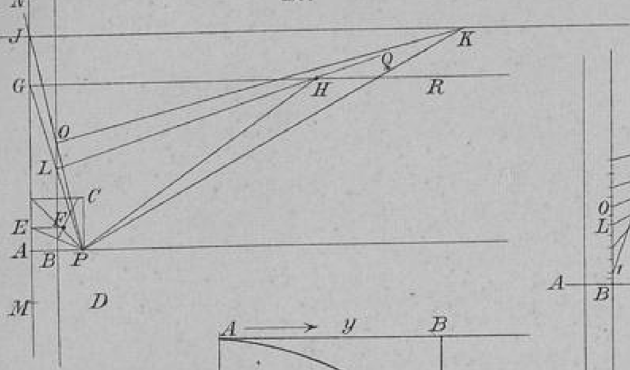
10.



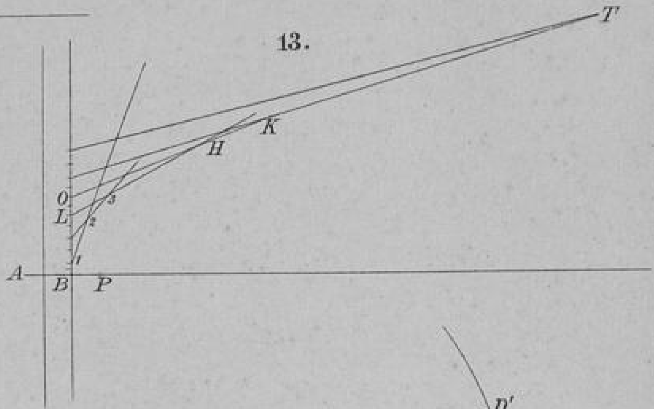
11.



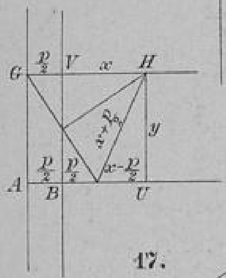
12.



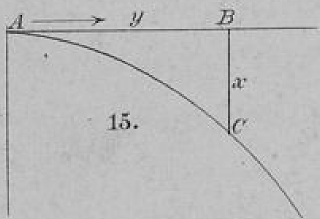
13.



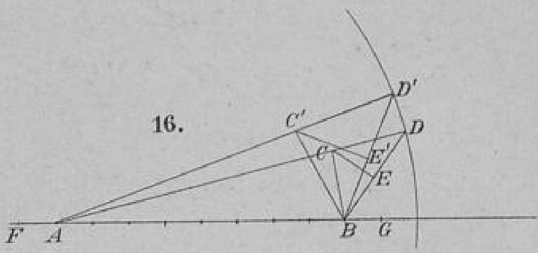
14.



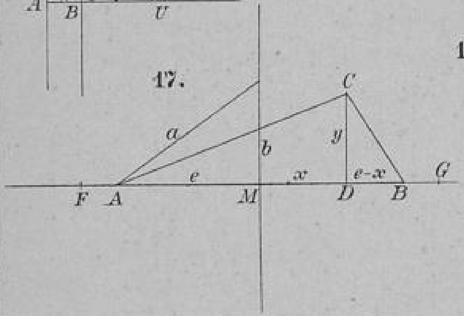
15.



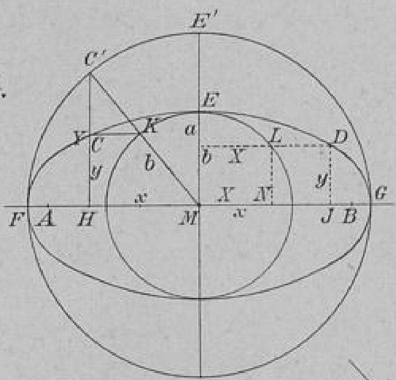
16.



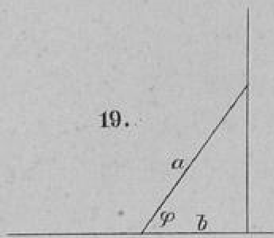
17.



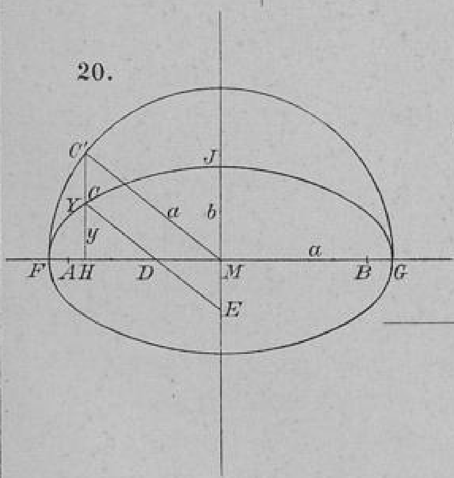
18.



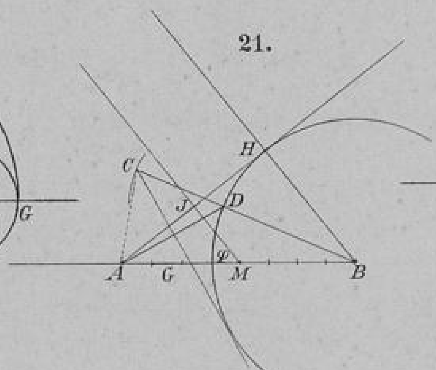
19.



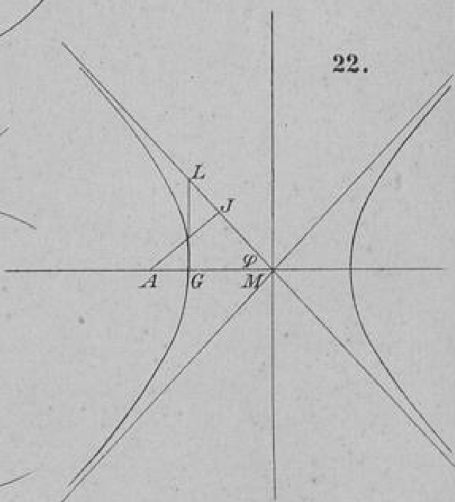
20.



21.



22.



Der Koordinatenbegriff und einige Grundlehren von den Kegelschnitten.

Die »Lehrpläne und Lehraufgaben für die höheren Schulen« vom 6. Januar 1892 enthalten das Thema auf Seite 49 als Schluß des Pensums der IA des Gymnasiums.

In den methodischen Bemerkungen dazu wird auf die Möglichkeit hingewiesen, »die Schüler der obersten Klasse in den besonders wichtigen Koordinatenbegriff einzuführen und ihnen in möglichst einfach gehaltener Darstellung einige Grundeigenschaften der Kegelschnitte klar zu machen.«

Der planmäßige Unterricht in analytischer und in sogenannter neuerer Geometrie wird ausdrücklich ausgeschlossen.

Das Folgende soll zeigen, wie diese Vorschriften an unserem Gymnasium verstanden und in den letzten zwei Jahren ausgeführt worden sind.

§ 1.

Begriffsbestimmungen.

Die Eintheilung der unbegrenzt gedachten ebenen Fläche durch zwei unbegrenzte unter einem rechten Winkel sich schneidende grade Linien, Koordinatenaxen, ist aus dem Unterrichte in der Trigonometrie bekannt, ebenso die Bezeichnung der entstehenden vier Quadranten in bestimmter Reihenfolge. Bei uns ist dieselbe üblich, wie Figur 1 zeigt.

Ordinate heißt die Senkrechte von irgend einem Punkte auf die Wagrechte.

Abscisse ist die Entfernung des Fußpunktes jener Senkrechten von dem Durchschnittspunkte der Koordinatenaxen.

So ist AE in Figur 2 die Ordinate des Punktes A, ME seine Abscisse;
BF die Ordinate des Punktes B, MF seine Abscisse;
CG die Ordinate des Punktes C, MG seine Abscisse;
DH die Ordinate des Punktes D, MH seine Abscisse.

Bekannt ist ferner die Anwendung der Zeichen + (plus) und — (minus) zur Bezeichnung der entgegengesetzten Lage zweier Strecken statt oben und unten, rechts und links.

Nennt man m die Maßeinheit in Figur 2, so hat:

der Punkt A	die Ordinate + 4 m,	die Abscisse + 3 m
B	+ 3 m	— 2 m
C	— 1 m	— 4 m
D	— 3 m	+ 4 m

Für das Wort Ordinate wählt man die kürzere Bezeichnung y, für das Wort Abscisse x.

Ordinatenaxe ist die unbegrenzte Senkrechte; ihr oberer Zweig heißt positiv (+), ihr unterer negativ (—).

Abscissenaxe ist die unbegrenzte Wagrechte; ihr Zweig rechts heißt positiv (+), ihr Zweig links negativ (—).

Der Schnittpunkt beider Koordinatenaxen heißt Anfangspunkt des Koordinatensystems.

§ 2.

Punkte in verschiedener Lage.

Leseübungen. Zeige die Punkte (Figur 2), für welche ist:

1) $y = +3$ m,	$x = +2$ m	2) $y = -3$ m,	$x = +2$ m
3) $y = -3$ m,	$x = -3$ m	4) $y = +4$ m,	$x = -3$ m
5) $y = -4$ m,	$x = -3$ m	6) $y = -4$ m,	$x = +3$ m
7) $y = +1$ m,	$x = +4$ m	8) $y = -1$ m,	$x = +4$ m
9) $y = +1$ m,	$x = -4$ m	10) $y = +3$ m,	$x = +4$ m
11) $y = +3$ m,	$x = -4$ m	12) $y = -3$ m,	$x = -4$ m
13) $y = +2{,}5$ m,	$x = +1{,}3$ m	14) $y = +4{,}2$ m,	$x = -2{,}7$ m
15) $y = -3{,}8$ m,	$x = -3{,}1$ m	16) $y = -1{,}6$ m,	$x = +4{,}5$ m
17) $y = +1\frac{1}{2}$ m,	$x = -4\frac{2}{5}$ m	18) $y = -3\frac{1}{3}$ m,	$x = +2\frac{3}{4}$ m

§ 3.

Grade Linie.

Die Gleichung einer durch den Anfangspunkt gezogenen graden Linie.

Der Punkt A (Figur 3) habe $y = 4$ m, $x = 3$ m. Wir verbinden ihn mit M durch eine grade Linie. Das Verhältnis der Ordinate zur Abscisse des Punktes A ist $^4/_3$.

Zeige, daß das Verhältnis von Ordinate zu Abscisse für alle beliebigen Punkte derselben geraden Linie gleichfalls $^4/_3$ ist.

Zeige, daß für irgend einen über MA oder unter MA, also außerhalb MA, liegenden Punkt das Verhältnis von $\frac{y}{x} \gtrless {}^4/_3$ sein muß.

Man nennt $\frac{y}{x} = {}^4/_3$ oder $y = {}^4/_3\, x$ die Gleichung der graden Linie MA.

Da $\frac{y}{x} = {}^4/_3$ auch ersetzt werden kann durch die Tangente des Winkels φ, so kann als Gleichung der Linie MA auch gelten

$$y = \operatorname{tang} \varphi \, . \, x = ax,$$

worin a die Tangente des Winkels bedeutet, welchen die vorliegende Linie mit der Abscissenaxe bildet.

§ 4.

Aufgaben. Zeige auf Figur 2 die Linien, deren Gleichungen sind:

1) $y = 2\ x$	2) $y = -2\ x$
3) $y = {}^3/_5\ x$	4) $y = -{}^3/_5\ x$
5) $y = 1{,}4\ x$	6) $y = -1{,}4\ x$
7) $4\,y = 9\ x$	8) $9\,y = -4\ x$

9) Bestimme die Gleichung der Abscissenaxe.

10) Bestimme die Gleichung der Ordinatenaxe.

11) Zeige, daß die Gleichungen für 9) und 10) in der allgemeinen Gleichung $y = ax$ enthalten sind.

12) Auf welche Dreiecksaufgabe sind 1) bis 8) zurückgekommen?

13) Bestimme das zu irgend einem bekannten x zugehörige y, z. B. für Gl. 1) oder 3).

§ 5.

Die grade Linie in beliebiger Lage.

Wir zeichnen eine grade Linie, welche nicht durch den Koordinatenanfang sondern durch den Punkt N der Ordinatenaxe geht, wo MN = 2 m, und für welche die Tangente des Neigungswinkels zur Abscissenaxe $^3/_4$ ist.

Für diese Linie ist $\frac{AF}{NF} = \text{tang}\ \varphi = {^3/_4}$,

$$AF = AE - EF = y - 2\ m,$$

$$NF = x.$$

Mithin ist $\frac{y - 2\ m}{x} = {^3/_4}$ die Beziehung zwischen Ordinate und Abscisse des Punktes A dieser Linie.

Zeige, daß dieselbe Gleichung auch gilt für irgend einen anderen Punkt dieser Linie.

Die Gleichung jener graden Linie ist demnach, anders geordnet,

$$y = {^3/_4}\ x + 2\ m.$$

Wenn man x = o nimmt, so erhält man y = 2 m, d. h. die Strecke, welche jene grade Linie von der Ordinatenaxe abschneidet.

Wenn man hingegen y = o nimmt, so erhält man

$$x = -\ {^8/_3}\ m$$

d. h. jene Linie schneidet von der Abscissenaxe eine Strecke PM links vom Anfangspunkte aus ab, deren Größe $^8/_3$ m ist. Zeige das aus den ähnlichen Dreiecken PMN und NFA.

§ 6.

Die allgemeine Gleichung der graden Linie

ist

$$y = a\,x + b$$

Hier bedeutet b nach § 5 die Strecke, welche die grade Linie von der Ordinatenaxe abschneidet, a die Tangente des Winkels, welchen sie mit der Abscissenaxe bildet.

Aufgabe: Zeichne folgende Linien:

1) $y = 2\ x + 3\ m$	2) $y = 3\ x - 2\ m$
3) $y = {^3/_5}\ x + 1\ m$	4) $y = 1{,}6\ x + 4\ m$
5) $y = {^1/_2}\ x - 5\ m$	6) $y = {^2/_3}\ x + 2{,}5\ m$
7) $4\ y = 3\ x + 7\ m$	8) $8\ y = 5\ x - 6\ m$

Fragen: 1) Wie groß sind die Winkel, welche die vorstehenden Linien mit der Abscissenaxe bilden?

2) Welche Strecken werden von ihnen auf jeder der beiden Koordinatenaxen abgeschnitten?

3) Welche Art der Zeichnung ergiebt sich danach für irgend eine dieser Linien? Wenn wir in der Gleichung $y = 2x + 3m$

$$x = 1\ m \text{ nehmen, so ist } y = 5\ m$$
$$x = 2\ m \qquad y = 7\ m$$

4) Wie läßt sich hienach jede grade Linie zeichnen, deren Gleichung gegeben ist?

§ 7.

Der Schnittpunkt zweier graden Linien.

Löst man die beiden Gleichungen:

$$1)\ 4x - 5y = 2\ m$$
$$2)\ 3x - 2y = 5\ m$$

nach x und y auf, so findet sich $x = 3$ m, $y = 2$ m. Diese beiden Resultate genügen also jeder der beiden Gleichungen, d. h. der Punkt, dessen Ordinate 2 m, dessen Abscisse 3 m ist, gehört jeder der durch jene Gleichungen angedeuteten beiden Linien an, ist also der Schnittpunkt derselben. Zeichne jene beiden Linien, um die Probe auf dieses Exempel zu machen.

Bestimme den Schnittpunkt folgender beiden graden Linien durch Zeichnung derselben und prüfe das Resultat durch Rechnung:

$$1)\ 8x - 15y = -30\ m$$
$$2)\ 2x + 3y = +15\ m$$

Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes folgender beiden Linien:

$$1)\ a\,x + b\,y + c = 0$$
$$2)\ a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$

§ 8.

1. Aufgabe: Die Winkel, die Seiten und den Inhalt eines Dreiecks zu bestimmen, welches durch die Abscissenaxe und zwei grade Linien begrenzt wird, deren Gleichungen gegeben sind, z. B.

$$1)\ 8x - 15y = -30\ m$$
$$2)\ 2x + 3y = +15\ m$$

Auflösung: Bestimme die Strecke, welche Linie 1) von der Abscissenaxe abschneidet, und den Winkel, welchen sie mit der Abscissenaxe bildet; ebenso die Strecke, welche Linie 2) von der Abscissenaxe abschneidet, und den Winkel, welchen sie mit der Abscissenaxe bildet, so ist die Aufgabe zurückgeführt auf die trigonometrische Aufgabe: Ein Dreieck zu bestimmen durch die Grundlinie und die beiden anliegenden Winkel.

2. Aufgabe: Den Winkel zu bestimmen, welchen zwei durch Gleichungen gegebene grade Linien mit einander bilden.

Auflösung: Sobald jeder der beiden Winkel bestimmt ist, welche die gegebenen Linien mit der Abscissenaxe bilden, ist der Winkel, welchen beide Linien mit einander bilden, der Unterschied jener beiden Winkel oder der Nebenwinkel dieses Unterschiedes.

Die beiden Linien seien durch die Gleichungen gegeben:

$$1)\ y = a\,x + b$$
$$2)\ y = c\,x + d$$

Linie 1) bilde mit der Abscissenaxe den Winkel $\varkappa$, so ist tang $\varkappa = a$.

Linie 2) bilde mit der Abscissenaxe den Winkel λ, so ist tang $\lambda = c$.

Also ist der gesuchte Winkel $\mu = \varkappa - \lambda$ oder $\lambda - \varkappa$.

Nun ist aus der Trigonometrie bekannt

$$\operatorname{tang}(\varkappa - \lambda) = \frac{\operatorname{tang}\varkappa - \operatorname{tang}\lambda}{1 + \operatorname{tang}\varkappa \cdot \operatorname{tang}\lambda} = \frac{a - c}{1 + a \cdot c}$$

Durch diese Gleichung läßt sich der Winkel zweier graden Linien auch direkt aus den Constanten ihrer Gleichungen bestimmen.

Mache die Probe mit dem Beispiele:

$$1)\ y = 1{,}6\,x + 4\ \mathrm{m}$$
$$2)\ y = {}^3/_5\,x + 1\ \mathrm{m}$$

3. Aufgabe: Die Bedingung für die Parallelität zweier Linien aufzustellen, welche durch ihre Gleichungen gegeben sind.

Auflösung: Parallele Linien müssen mit der Abscissenaxe gleiche Winkel bilden. Nach Aufg. 2 muß also auch tang $\varkappa$ = tang λ, d. h. $a = c$ sein.

Dasselbe ergiebt sich aus $\operatorname{tang}(\varkappa - \lambda) = \dfrac{a - c}{1 + a\,c}$

Ist $\varkappa = \lambda$, so ist $\operatorname{tang}(\varkappa - \lambda) = 0$, also $a - c = 0$, d. h. $a = c$.

4. Aufgabe: Die Bedingung für die senkrechte Lage zweier Linien zu einander aus ihren Gleichungen festzustellen.

Auflösung: In die Gleichung

$$\operatorname{tang}(\varkappa - \lambda) = \frac{a - c}{1 + a\,c}$$

ist für $\varkappa - \lambda$ die Zahl 90^0 zu setzen. Nun ist tang $90^0 = \infty$. Es muß also der Nenner des Bruches $\dfrac{a - c}{1 + a\,c}$ Null sein, d. h. $c = -\dfrac{1}{a}$

Weise das durch geometrische Betrachtung nach.

Mache die Probe durch Construction der beiden Linien:

$$1)\ y = -2\ x + 3\ m$$

$$2)\ y = +\tfrac{1}{2} x - 7\ m$$

§ 9.

1. **Aufgabe:** Die Entfernung zweier Punkte A und B durch ihre Koordinaten zu bestimmen.

Auflösung: Aus Figur 5 ergiebt sich durch den Pythagoreischen Lehrsatz:

$$AB^2 = (x_{,} - x_{,,})^2 + (y_{,} -_{,,})^2$$

Zeige, daß diese Gleichung unverändert bleibt bei jeder beliebigen Lage der beiden Punkte.

2. **Aufgabe:** Ein Dreieck zu bestimmen durch die Koordinaten seiner Eckpunkte.

Auflösung: Die drei Seiten sind nach Aufg. 1 zu finden, danach die Winkel durch den Cotangentensatz.

3. **Aufgabe:** Ein Dreieck zu bestimmen durch drei grade Linien, welche durch ihre Gleichungen gegeben sind.

Auflösung: Bestimme die Schnittpunkte je zweier Linien nach § 7, so führt § 9 Aufg. 2 zum Ziele.

4. **Aufgabe:** Die Gleichung einer graden Linie zu bestimmen durch die Koordinaten zweier Punkte, durch welche sie gezogen werden soll.

Auflösung: Die beiden gegebenen Punkte seien A und B in Figur 6. Für irgend einen dritten Punkt E, dessen Koordinaten x, y seien, haben wir durch die Ähnlichkeit der Dreiecke AFE und EGB

$$\frac{y_{,} - y}{y - y_{,,}} = \frac{x_{,} - x}{x - x_{,,}}$$

Diese Gleichung läßt sich so ordnen:

$$y = \frac{y_{,} - y_{,,}}{x_{,} - x_{,,}}\, x + \frac{x_{,,}\, y_{,} - x_{,}\, y_{,,}}{x_{,} - x_{,,}}$$

Der Winkel, welchen diese grade Linie mit der Abscissenaxe bildet, ergiebt sich also aus der Gleichung:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{y_{,} - y_{,,}}{x_{,} - x_{,,}}$$

Dieselbe schneidet von der Ordinatenaxe die Strecke $\frac{x_{,,}\, y_{,} - x_{,}\, y_{,,}}{x_{,} - x_{,,}}$ ab, von der Abscissenaxe die Strecke $\frac{x_{,}\, y_{,,} - x_{,,}\, y_{,}}{y_{,} - y_{,,}}$

§ 10.

Der Kreis.

Zum Anfangspunkte des Koordinatensystems wähle man den Mittelpunkt des gegebenen Kreises, dessen Radius r sei.

In Figur 7 ist nach dem Pythagoreischen Lehrsatze für den Punkt A

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Diese Gleichung gilt für jeden beliebigen Punkt der Kreisperipherie und heißt deshalb Gleichung des Kreises.

Zeige, daß für alle Punkte (C) innerhalb des Kreises diese Beziehung sich so ändert, daß

$$x^2 + y^2 <, r^2,$$

für alle Punkte außerhalb (G)

$$x^2 + y^2 >, r^2$$

Schreiben wir die Gleichung des Kreises

$$y^2 = r^2 - x^2 = (r + x)(r - x),$$

so haben wir (Figur 8) den bekannten Satz: Das Quadrat der Höhe eines rechtwinkeligen Dreiecks ist gleich dem Rechtecke aus den beiden Höhensegmenten der Hypotenuse.

Aufgabe: Den Ort aller Punkte zu bestimmen, deren Entfernungen von zwei festen Punkten A und B ein gegebenes Verhältnis haben, z. B. 5 : 3.

Auflösung 1. Auf der Linie AB selbst liegen zwei der gesuchten Punkte, nämlich P und Q (Figur 9). Diese können gefunden werden, indem man die Strecke AB = c nach dem gegebenen Verhältnis teilt.

Irgend einen außerhalb AB liegenden Punkt C von jener Beschaffenheit findet man mit Anwendung des Satzes, daß die Halbirungslinie eines Winkels die gegenüberliegende Seite des Dreiecks in dem Verhältnis der anliegenden Seiten teilt.

Benützt man also AB als Sehne irgend eines Kreises, dessen Radius beliebig genommen werden kann, und verbindet den Halbirungspunkt des unteren Bogens AB mit P, so muß man auf dem oberen Bogen einen solchen Punkt C finden.

Wir nehmen PQ zur Abscissenaxe und M, den Halbirungspunkt von PQ, zum Anfangspunkte des Koordinatensystems. Die Ordinate CD des Punktes C sei y, die Abscisse MD sei x, dann ist

$$x^2 + y^2 = MC^2$$

Bezeichnet man das gegebene Verhältnis allgemein m : n statt 5 : 3, so finden sich BP, AP, BQ, AQ aus den Gleichungen:

$$1)\ BP + AP = c \qquad 2)\ BQ - AQ = c$$

$$\frac{BP}{AP} = \frac{m}{n} \qquad \frac{BQ}{AQ} = \frac{m}{n}$$

nämlich: $BP = \frac{m}{m+n} \cdot c \qquad AP = \frac{n}{m+n} \cdot c$

$$BQ = \frac{m}{m-n} \cdot c \qquad AQ = \frac{n}{m-n} \cdot c$$

und damit: $PQ = \frac{2\,m\,n}{m^2-n^2} \cdot c \qquad AM = \frac{n^2}{m^2-n^2} \cdot c$

$$DA = \frac{n^2}{m^2-n^2} \cdot c - x \qquad DB = \frac{m^2}{m^2-n^2} \cdot c - x$$

Wenden wir nun auf die Dreiecke CDA und CDB den Pythagoreischen Lehrsatz an und dividiren CB durch CA, so erhalten wir:

$$\frac{y^2 + \left(\frac{m^2}{m^2 - n^2} \cdot c - x\right)^2}{y^2 + \left(\frac{n^2}{m^2 - n^2} \cdot c - x\right)^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

Nach allen möglichen Vereinfachungen ergiebt sich:

$$x^2 + y^2 = \frac{m^2\,n^2}{(m^2 - n^2)^2} \cdot c^2$$

$$\text{Also}\quad MC = \frac{m\,n}{m^2 - n^2} \cdot c$$

Das heißt aber: Der Punkt C liegt auf dem Kreise, welcher PQ zum Durchmesser hat. Da C ein beliebiger aller jener Punkte ist, welche die gegebene Bedingung erfüllen, so ist der Kreis, welcher PQ zum Durchmesser hat, der gesuchte geometrische Ort.

Auflösung 2. Figur 9.

$$\frac{y^2 + (c + z)^2}{y^2 + z^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

$$y^2 + z^2 - \frac{2\,n^2\,c}{m^2 - n^2} \cdot z = \frac{n^2\,c^2}{m^2 - n^2}$$

$$y^2 + \left(z - \frac{n^2\,c}{m^2 - n^2}\right)^2 = \frac{m^2\,n^2 \cdot c^2}{(m^2 - n^2)^2}$$

$$y^2 + x^2 = \frac{m^2\,n^2}{(m^2 - n^2)^2} \cdot c^2$$

In dem gegebenen Beispiele ist also der gesuchte Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie c und das Verhältnis der Seiten $\frac{a}{b} = {}^5/_3$ haben, der Kreis, dessen Durchmesser $PQ = {}^{15}/_8\,c$ ist.

§ 11.

Die Gleichung des Kreises, bezogen auf ein beliebig gelegenes Koordinatensystem.

Die Koordinaten seines Mittelpunktes seien a (Abscisse) und b (Ordinate), Figur 10. Für einen beliebigen Punkt der Peripherie, dessen Ordinate CD (y), dessen Abscisse MD (x) sei, gilt

$$1)\quad (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Zeige, daß diese Gleichung Geltung behalte, wo auch immer der Punkt C auf der Kreisperipherie gewählt werde.

Zeichne die entsprechenden Figuren für folgende Formen dieser Gleichung:

$$2)\quad (x + a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$
$$3)\quad (x - a)^2 + (y + b)^2 = r^2$$
$$4)\quad (x + a)^2 + (y + b)^2 = r^2$$

Deute diese Gleichungen für den Fall, daß entweder a oder b Null ist.

Führe die Gleichungen

$$x^2 + 2\,a\,x + y^2 + 2\,b\,x = c^2$$
$$x^2 - a\,x + y^2 - b\,x = c^2$$

auf eine der vorigen Formen zurück.

§ 12.

Kreis und grade Linie.

Aufgabe: Es sei $x^2 + y^2 = r^2$ die Gleichung eines gegebenen Kreises, $y = a\,x + b$ die Gleichung einer gegebenen graden Linie. Bestimme die Koordinaten des Schnittpunktes beider.

Auflösung: Setze $a\,x + b$ für y in die Gleichung des Kreises ein:

$$x^2 + a^2 x^2 + 2\,a\,b\,x + b^2 = r^2$$

$$x^2 + \frac{2\,a\,b}{1 + a^2}\,x = \frac{r^2 - b^2}{1 + a^2}$$

$$x_, = \frac{-\,a\,b + \sqrt{(r^2 - b^2)(1 + a^2) + a^2 b^2}}{1 + a^2}$$

$$x_, = \frac{-\,a\,b + \sqrt{r^2(1 + a^2) - b^2}}{1 + a^2}$$

$$x_{,,} = \frac{-\,a\,b - \sqrt{r^2(1 + a^2) - b^2}}{1 + a^2}$$

$$y_{,} = \frac{b + a\sqrt{r^2(1+a^2) - b^2}}{1 + a^2}$$

$$y_{,,} = \frac{b - a\sqrt{r^2(1+a^2) - b^2}}{1 + a^2}$$

Zusammen gehören 1) $x_,$ und $y_,$ 2) $x_{,,}$ und $y_{,,}$ Die Resultate zeigen folgende Fälle:

1) Zwei von einander verschiedene Schnittpunkte sind vorhanden, wenn

$$r^2(1+a^2) > b^2.$$

2) Beide Schnittpunkte fallen in einen zusammen, wenn $r^2(1+a^2) = b^2$ oder

$$1 + a^2 = \frac{b^2}{r^2}$$

Die Koordinaten dieses einen Punktes, des Tangentialpunktes, sind also:

$$x = -a \cdot \frac{r^2}{b}, \qquad y = \frac{r^2}{b}$$

3) Die Schnittpunkte sind imaginär, also in Wirklichkeit nicht vorhanden, wenn

$$r^2(1+a^2) < b^2$$

Bemerkung. Die Resultate zu 2) lassen eine nicht uninteressante geometrische Deutung zu. Da in Figur 11 $MA = b$ und $MG = r$ ist, so muß, wenn ich $MF = CD = y$ mache, AGF ein rechter Winkel sein; denn $by = r^2$.

So muß ferner, wenn ich $MH = MD = x$ mache, HEB ein rechter Winkel sein, da die Gleichung $x \cdot MB = r^2$ besteht und sich zeigen läßt, daß $MB = -\frac{b}{a}$ ist.

Deute endlich $uv = by$ geometrisch.

§ 13.

Die Parabel.

Der geometrische Ort aller Punkte, welche von einer festen graden Linie (Leitlinie) und von einem festen Punkte (Brennpunkt) gleich weit entfernt sind, heißt Parabel.

Aufgabe: Gegeben ist Leitlinie MN und Brennpunkt P. Bestimme irgend welche Punkte, die von beiden gleiche Entfernung haben. Figur 12.

Auflösung: Der erste Punkt ist B, der Halbirungspunkt der von P auf MN gefällten Senkrechten PA. Er heißt Scheitelpunkt der Parabel. Ebenso nahe liegt es, die Punkte C und D als solche zu finden, indem man $PC = PD = PA$ und senkrecht zu PA nimmt.

Irgend ein andrer Punkt, z. B. H, der von P und MN gleichweit entfernt sein soll, muß die Spitze eines gleichschenkeligen Dreiecks sein, dessen Grundlinie die Verbindung des Brennpunktes mit einem Punkte G der Leitlinie MN ist, und dessen Seite GH parallel PA sein muß.

Folgerungen aus der Construktion der Parabelpunkte:

1. Die Parabel hat über AP und unter AP immer je zwei entsprechende Punkte, sie wird also durch die unbegrenzte Linie AP, ihre Axe, in zwei symmetrische Zweige getheilt.

2. LH muß Tangente an die Parabel für den Punkt H sein; denn je näher I dem Punkte G gewählt wird, um so näher rückt auch der Parabelpunkt K dem Punkte H, um so mehr fällt OK mit LH zusammen, um so mehr wird die Sehne HK zur Tangente in H.

3. Der Winkel LHP ist dem Winkel QHR gleich, weil jeder von beiden dem Winkel LHG gleich ist, d. h.

Satz: Jeder vom Brennpunkte P auf einen parabolischen Spiegel fallende Lichtstrahl wird parallel der Axe reflektirt; oder: Jeder parallel der Axe einfallende Lichtstrahl RH wird nach dem Brennpunkte P reflektirt.

Aufgabe 1. Durch einen gegebenen Punkt H einer Parabel eine Tangente an die Parabel zu legen.

Auflösung: Verbinde H mit dem Brennpunkte P und fälle von H auf die Leitlinie die Senkrechte HG. Die Senkrechte von H auf PG ist die gesuchte Tangente.

Bemerkung. Die Grundlinien aller jener gleichschenkeligen Dreiecke, deren Spitzen Punkte der Parabel sind, werden durch die in B auf PA errichtete Senkrechte (Scheiteltangente) halbirt. Ist der Punkt H gegeben, so liegt L also 1) auf der in B zu AP errichteten Senkrechten, 2) auf dem Kreise, der PH zum Durchmesser hat. Dieser Kreis muß jene Senkrechte berühren, weil die Verbindungslinie seines Mittelpunktes mit L parallel GH und gleich der Hälfte von GH ist.

Aufgabe 2. Von einem außerhalb der Parabel gelegenen Punkte an dieselbe eine Tangente zu legen.

Auflösung: L und H sind wegzudenken; auf LH ist jedoch irgend ein Punkt S als derjenige vorzustellen, von welchem aus die Tangente gezogen werden soll. Der Punkt L liegt dann 1) auf der Scheiteltangente, 2) auf dem Kreise, welcher SP zum Durchmesser hat. Im Allgemeinen werden sich also zwei Punkte L ergeben, d. h. von jedem Punkte außerhalb der Parabel lassen sich zwei Tangenten an dieselbe legen.

Satz: Jede Parabeltangente ist Schenkel eines rechten Winkels, dessen Scheitelpunkt auf der Scheiteltangente liegt und dessen zweiter Schenkel durch den Brennpunkt P geht.

Aufgabe 3. Eine Parabel zu construiren durch die sie einhüllenden Tangenten. Figur 13.

Auflösung: Lege ein rechtwinkeliges Dreieck so, daß der eine Schenkel des rechten Winkels durch P geht, der Scheitelpunkt auf BL liegt, und zeichne die Lage des freien Schenkels. Wiederhole die Zeichnung, indem du den Scheitelpunkt des rechten Winkels immer nur wenig auf BL weiter rücken lässest.

§ 14.

Die Gleichung der Parabel.

Wenn man die Entfernung des Brennpunktes von der Leitlinie mit p (Parameter) bezeichnet, B zum Anfangspunkte des Koordinatensystems und PA zur Abscissenaxe nimmt, so erhält man nach dem Pythagoreischen Lehrsatze:

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 \text{ oder } y^2 = 2\,p\,x$$

die Scheitelgleichung der Parabel. Figur 14.

Stelle die Gleichung der Parabel auf, indem du die Leitlinie statt der Scheiteltangente zur Ordinatenaxe nimmst.

Aufgabe 1. Die Bahn eines Körpers zu bestimmen, welcher in horizontaler Richtung mit einer Geschwindigkeit c geworfen wird. Vom Luftwiderstande wird abgesehen. Figur 15.

Auflösung: Geschwindigkeit c heißt: Der Körper will in Folge der Kraft des Stoßes c Meter in einer Secunde zurücklegen. In n Secunden wird er also nc Meter in horizontaler Richtung zurücklegen. Diese Strecke sei AB und werde mit y bezeichnet, so ist

$$1)\ y = n\,c.$$

Während dieser n Secunden wirkt die Anziehungskraft der Erde auf den fliegenden Körper ein und zieht ihn von der horizontalen Richtung abwärts x Meter. Nach dem Fallgesetze ist

$$2)\ x = {}^1\!/_2\, g\, n^2$$

Aus diesen beiden Gleichungen läßt sich n eliminiren, indem man $n = \frac{y}{c}$ in die zweite einsetzt

$$x = {}^1\!/_2\, \frac{g}{c^2} \cdot y^2$$

$$3)\ y^2 = 2\,\frac{c^2}{g} \cdot x$$

Das ist die Scheitelgleichung einer Parabel, deren Scheitel der Ausgangspunkt A und deren Parameter $\frac{c^2}{g}$ ist, wo g in runder Zahl 10 Meter bedeutet.

Aufgabe 2. Die Bahn eines Körpers zu bestimmen, welcher unter einem Winkel α zum Horizont empor geworfen wird.

Auflösung: Die Kraft des Stoßes, welche dem Körper eine Geschwindigkeit c in der durch den Winkel α bestimmten Richtung verleiht, läßt sich in eine horizontale und eine verticale Componente zerlegen. Durch jene erhält der Körper eine horizontale Geschwindigkeit $c \cdot \cos\alpha$ und durch diese eine verticale Geschwindigkeit $c \cdot \sin\alpha$. Derselbe wird also in horizontaler Richtung nach n Sekunden $n \cdot c \cdot \cos\alpha$ Meter zurückgelegt haben. Bezeichne ich diesen Weg mit y, so ist

$$1)\ y = n \cdot c \cdot \cos\alpha$$

Die Bewegung des Körpers in verticaler Richtung erfolgt unter dem Einflusse zweier einander entgegenwirkenden Kräfte: des senkrecht emporgerichteten Stoßes und der Anziehungskraft der Erde. Bezeichne ich den von ihm nach n Secunden in senkrechter Richtung zurückgelegten Weg mit x, so ist:

$$2)\ x = n \cdot c \cdot \sin\alpha - \frac{g}{2} \cdot n^2$$

Durch Elimination von n aus diesen beiden Gleichungen ergiebt sich:

$$3)\ x = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot y - \frac{g}{2\,c^2 \cdot \cos^2\alpha} \cdot y^2$$

$$\text{oder } 4)\ y^2 - \frac{2\,c^2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha}{g} \cdot y = - \frac{2\,c^2 \cdot \cos^2\alpha}{g} \cdot x$$

$$\text{oder } 5)\ \left(y - \frac{c^2 \cdot \sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)^2 = \frac{c^4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{g^2} - \frac{2\,c^2 \cdot \cos^2\alpha}{g} \cdot x$$

$$= \frac{2\,c^2 \cdot \cos^2\alpha}{g}\left(\frac{c^2 \cdot \sin^2\alpha}{2\,g} - x\right)$$

Diese Gleichung zeigt, daß die fragliche Wurflinie eine Parabel ist, bezogen auf ein Koordinatensystem, welches durch parallele Verschiebung des bisher benützten Systems entsteht.

Gleichung 4) beantwortet am bequemsten die Frage, wann die Höhe des geworfenen Körpers Null ist.

Wir setzen $x = 0$ in 4) ein:

$$0 = y\left(y - \frac{2\,c^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}\right)$$

Wenn also $x = 0$ ist, so ist entweder auch $y = 0$, Anfang der Bewegung, oder

$$y = \frac{2\,c^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c^2}{g}\sin 2\,\alpha$$

Das ist der Fall am Ende der Bewegung.

Damit ist die horizontale Wurfweite gefunden

$$y = \frac{c^2}{g} \sin 2\alpha$$

Dieselbe wird ein maximum sein, wenn $\sin 2\alpha = 1$, d. h. $\alpha = 45^0$ ist.

Um die halbe Wurfweite ist also nach Gl. 5) die y-Axe parallel verschoben.

Wenn aber für y in Gl. 5) die halbe Wurfweite eingesetzt wird, so ergiebt sich

$$x = \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{2\,g}$$

Diese Höhe hat also der Körper in der halben Wurfweite.

Es läßt sich zeigen, daß dies die höchste Höhe ist, welche der Körper erreicht. Also ist die x-Axe parallel mit sich selbst um die höchste Flughöhe des Körpers verschoben. Der Ausgangspunkt des Körpers ist eben zum Koordinatenanfange genommen worden.

Nach den Fallgesetzen ist die Gleichung für die Geschwindigkeit in verticaler Richtung

$$v = c \,.\, \sin \alpha - g\,n$$

Sobald $v = 0$ geworden ist, hat der Körper die höchste Höhe erreicht, also nach n Secunden, wo

$$n = \frac{c}{g} \,.\, \sin \alpha$$

Setzt man dieses Resultat für n in Gl. 2) ein, so erhält man:

$$x = \frac{c^2}{2\,g} \,.\, \sin^2 \alpha$$

Damit ist die Richtigkeit der obigen Behauptung erwiesen.

Daß die Bahnlinie von diesem Scheitelpunkte aus symmetrisch liegt in Bezug auf die x-Axe, bedarf keines Beweises mehr. Zum Überfluß sei darauf hingewiesen, daß nach der Scheitelgleichung jedem Werthe von x zwei gleich große, aber mit entgegengesetzten Zeichen behaftete y entsprechen. In der Mechanik wird das bekanntlich auch so gezeigt, daß man die Bahnstrecken und die Flughöhen berechnet für zwei symmetrisch in Bezug auf den Anfang und das Ende der Bewegung gelegene Zeitmomente.

Aufgabe 3. Wie ändert sich die Rechnung, wenn der Wurf abwärts unter dem Winkel α zum Horizont gerichtet ist?

§ 15.

Die Ellipse.

Aufgabe 1: Ein Dreieck zu zeichnen, für welches die Grundlinie c und die Summe der beiden Seiten $a + b$ gegeben ist.

Auflösung: Figur 16. Durch c sind die Ecken A und B bestimmt. Die gegebene Strecke a + b kann von A aus unter einem beliebigen Winkel angelegt werden. Wird der Endpunkt D mit B verbunden, so liegt die dritte Ecke C des gesuchten Dreiecks auf AD und der Mittelsenkrechten von BD.

Da der Winkel α des Dreiecks ABC beliebig genommen wurde, so erkennt man, daß die Aufgabe zahllose Auflösungen hat. Alle Punkte D, welche man erhält, liegen auf dem Kreise, welcher A zum Mittelpunkte und a + b zum Radius hat; oder auch auf dem Kreise, welcher B zum Mittelpunkte und a + b zum Radius hat. Alle Punkte C bilden eine zusammenhängende Linie, welche Ellipse heißt und sowohl in Bezug auf rechts und links, als auch in Bezug auf oben und unten symmetrisch erscheint.

Die Ellipse ist also der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, deren Summe der Entfernungen von zwei festen Punkten gleich ist. Oder auch:

Die Spitzen aller Dreiecke, für welche die Grundlinie c und die Summe der beiden Seiten a + b dieselbe ist, liegen auf einer Ellipse, für welche die Endpunkte von c die Brennpunkte sind und die Summe der Radienvektoren die gegebene Strecke a + b ist.

Aufgabe 2: Den geometrischen Ort für die Spitzen aller Dreiecke praktisch zu bestimmen, deren Grundlinie $c = 8$ m und deren Seitensumme $a + b = 10$ m ist. m sei die angewendete Maßeinheit.

Auflösung: Knüpfe einen Faden so zusammen, daß er vom Knoten bis zum Knoten zurück 18 Centimeter Länge habe; lege ihn um zwei in A und B befestigte Stifte, deren Entfernung 8 Centimeter beträgt; spanne den Faden straff durch die Spitze des Bleistifts und führe diesen so um A und B in der Zeichenebene herum bis zurück zum Ausgangspunkte.

Aufgabe 3: Ein Dreieck zu zeichnen aus der Grundlinie $c = 8$ m, der Höhe $h = 2{,}5$ m und der Summe der beiden Seiten $a + b = 10$ m.

Aufgabe 4: Durch einen gegebenen Punkt C einer Ellipse eine Tangente derselben zu zeichnen. Genau nach den bei der Parabeltangente gegebenen Erörterungen muß CE in Figur 16 die Tangente sein; denn je näher D‘ dem Punkte D genommen wird, um so näher muß E‘ an E und C‘ an C rücken. Die Sehne CC‘ muß deshalb schließlich zur Tangente in C werden.

Sonach hat man, um CE zu erhalten, AC um CB zu verlängern und von C auf BD das Loth zu fällen.

Da dieses Loth CE den entstandenen Außenwinkel halbirt und die Halbirungslinie des Winkels ACB auf CE senkrecht steht, so kann man auch den Winkel ACB halbiren und durch C eine Senkrechte zu der Halbirungslinie ziehen. Diese ist dann die gesuchte Tangente, während jene Halbirungslinie die Normale der Ellipse für den Punkt C heißt.

Da AC und BC mit der Tangente in C gleiche Winkel bilden, so folgt daraus der Satz: Alle Lichtstrahlen, welche von einem Brennpunkte einer Ellipse (eines elliptischen Spiegels) ausgehen, vereinigen sich nach der Reflexion in dem zweiten Brennpunkte.

Lassen wir den zweiten Brennpunkt weiter und weiter rücken bis ins Unendliche, so wird schließlich aus der Ellipse eine Parabel.

Aufgabe 5: Durch einen Punkt P außerhalb der Ellipse an diese eine Tangente zu legen.

Auflösung: Ich denke mir den Punkt P auf der Linie CE in Figur 16. Da PB = PD sein muß, so liegt D auf dem Kreise, welcher mit PB um P geschlagen wird, und auch auf dem Kreise, welcher die Summe der beiden Radienvektoren (a + b) zum Radius und A zum Mittelpunkte hat. Da zwei Kreise sich im Allgemeinen in zwei Punkten schneiden, so wird es zwei Punkte D, zwei Linien BD und zwei Senkrechte PE dazu, also zwei Tangenten von P an die Ellipse geben.

§ 16.

Die Gleichung der Ellipse.

Man bezeichne abweichend von dem Bisherigen AB mit 2 e und AC + CB mit 2 a. Zur Abscissenaxe wähle man AB und zum Koordinatenanfange den Halbirungspunkt von AB. Figur 18. Ein beliebig gefundener Punkt C der Ellipse habe die Ordinate y und die Abscisse x; so bestehen nach dem Pythagoreischen Lehrsatze die beiden Gleichungen:

$$AC^2 = y^2 + (e + x)^2$$
$$BC^2 = y^2 + (e - x)^2$$
$$AC + BC = \sqrt{y^2 + (e + x)^2} + \sqrt{y^2 + (e - x)^2} = 2\,a,$$

also $\sqrt{y^2 + (e + x)^2} = 2\,a - \sqrt{y^2 + (e - x)^2}$

Erheben wir diese Gleichung ins Quadrat, so ergiebt sich nach allen Vereinfachungen:

$$a\sqrt{y^2 + (e - x)^2} = a^2 - e\,x$$

Auch diese Gleichung ist ins Quadrat zu erheben und dann so zu ordnen:

$$(a^2 - e^2)\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,(a^2 - e^2)$$

$$\text{oder } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - e^2} = 1$$

Bilde ich mir ein rechtwinkeliges Dreieck AME aus der Hypotenuse a und der Kathete e und nenne die zweite Kathete b, so ist $b^2 = a^2 - e^2$ und damit die gesuchte Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Die Form dieser Gleichung zeigt die erwähnte doppelte Symmetrie, da jedem positiven oder negativen x zwei an Größe gleiche, an Vorzeichen verschiedene y entsprechen.

Für $y = 0$ ist $x = \pm a$; für $x = 0$ ist $y = \pm b$, a heißt die große, b die kleine Halbaxe der Ellipse.

Aufgabe: Ein Dreieck trigonometrisch zu bestimmen durch die Grundlinie $c = 8$ m, die Höhe $h = 2{,}5$ m und die Summe der Seiten $s = 10$ m.

Auflösung: Nach den in der Ellipsengleichung gebrauchten Bezeichnungen ist

$$a = 5 \text{ m}, \qquad e = 4 \text{ m}$$

deshalb $b = 3$ m. Dazu ist für den dritten Punkt des Dreiecks gegeben $y = 2{,}5$ m. Setze ich diese Zahlen in die Gleichung der Ellipse ein, so finde ich x und habe damit diese Aufgabe zurückgeführt auf die Berechnung eines Dreiecks durch die Höhe und die Höhensegmente der Grundlinie.

§ 17.

Ellipse und Kreis verglichen.

Die Gleichung der Ellipse läßt sich in folgender Form schreiben:

$$1)\quad y^2 = \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2) = \frac{b^2}{a^2}(a + x)(a - x)$$

Zeichnet man (Figur 18) über der großen Axe der Ellipse als Durchmesser einen Kreis und verlängert die Ordinate CH eines beliebigen Punktes C der Ellipse bis zu der Peripherie des Kreises und nennt die Ordinate des so erhaltenen Punktes Y, so besteht die Gleichung:

$$2)\quad Y^2 = (a + x)(a - x)$$

Durch Division von 1) und 2) erhält man

$$3)\quad \frac{y^2}{Y^2} = \frac{b^2}{a^2} \text{ oder } \frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$$

Die Ordinaten aller so einander entsprechenden Punkte C und C' stehen also in demselben Verhältniß wie die kleine Halbaxe zur großen Halbaxe der Ellipse.

Für irgend einen Kreis mit dem Radius a (MF = MG = a) wird man Punkte der zugehörigen Ellipse, deren große Halbaxe a, deren kleine Halbaxe b sein soll, finden, indem man die Ordinaten des Kreises in dem Verhältniß $\frac{b}{a}$ verkürzt. Das wird, wie Fig. 18 zeigt, bequem geschehen, indem man mit b um M einen Kreis beschreibt und durch den Punkt K, in welchem MC' diesen Kreis schneidet, eine Parallele zur Abscissenaxe zieht. Der Schnittpunkt derselben mit der Ordinate C'H ist der gesuchte Ellipsenpunkt C.

Satz 1: Die Ellipse kann angesehen werden als entstanden durch senkrechte Projektion eines Kreises, dessen Radius a ist, auf eine mit der Ebene des Kreises einen gewissen Winkel φ bildende Ebene.

Beweis: Figur 19. Die Kante beider Ebenen oder der zu dieser Kante parallele Durchmesser des Kreises wird zur Abscissenaxe genommen. Der dazu senkrechte Radius a verkürzt sich dann zu $a \,.\, \cos\varphi = b$ und jede Ordinate des Kreises Y zu $Y \,.\, \cos\varphi = y$, also wird $\frac{y}{Y} = \cos\varphi = \frac{b}{a}$

In der Projektionslehre wird auf Grund dessen gezeigt, daß der Inhalt jeder beliebigen ebenen Figur durch jene Projektion sich verändert in das Produkt ihres Inhalts mit dem Cosinus des Neigungswinkels φ. Es sei hier daran erinnert, daß bei der Projektion eines Dreiecks, dessen Grundlinie c der Kante der beiden Ebenen parallel ist, c ungeändert bleibt, die Höhe h aber sich verkürzt zu $h \,.\, \cos\varphi$. Der Inhalt des ursprünglichen Dreiecks ist $\triangle = \frac{c\,h}{2}$, der Inhalt seiner Projektion $\triangle_{,} = \frac{c\,h\,\cos\varphi}{2}$ Also $\triangle_{,} = \triangle \,.\, \cos\varphi$. Die übrigen Schlußglieder jener Gedankenreihe sind leicht zu ergänzen. Da nun der Inhalt des Kreises $a^2\pi$ ist, so ist der Inhalt der durch Projektion desselben entstandenen Ellipse $a^2\pi \,.\, \cos\varphi = a^2\pi \,.\, \frac{b}{a} = a\,b\,\pi$.

Satz 2: Der Inhalt einer Ellipse ist gleich dem Inhalte eines Kreises, dessen Radius die mittlere Proportionale zwischen ihren beiden Halbaxen ist.

Beschreibt man über der kleinen Axe der Ellipse als Durchmesser einen Kreis und nimmt die Punkte D und L, jenen auf der Ellipse, diesen auf dem Kreise so, daß beide dieselbe Ordinate y haben, so gilt für D die Gleichung der Ellipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\text{oder 1)}\quad x^2 = \frac{a^2}{b^2}(b^2 - y^2) = \frac{a^2}{b^2}(b + y)(b - y)$$

Bezeichnet man die Abscisse des Punktes L mit X, so gilt

$$\text{2)}\quad X^2 = (b + y)(b - y)$$

$$\text{also 3)}\quad \frac{x^2}{X^2} = \frac{a^2}{b^2} \text{ oder } \frac{x}{X} = \frac{a}{b}$$

Satz 3: Wenn man die Ordinaten eines Kreises, dessen Radius b ist, so verlängert, daß die verlängerten Ordinaten zu den ursprünglichen stets das Verhältniß $\frac{a}{b}$ haben, so gehören die entstehenden Endpunkte einer Ellipse an, deren kleine Axe 2 b ist.

Satz 4: Durch Verlängerung oder Verkürzung der Ordinaten eines Kreises in constantem Verhältniß entsteht eine Ellipse.

Satz 5: Durch senkrechte Projektion einer Ellipse, so daß die kleine Axe der gemeinschaftlichen Kante beider Ebenen parallel ist, entsteht ein Kreis, dessen Durchmesser 2 b ist, falls der Neigungswinkel φ der beiden Ebenen der Gleichung $\cos \varphi = \frac{b}{a}$ genügt.

Satz 6: Jede Ebene, welche durch den Durchmesser des Grundkreises eines Kreiscylinders gelegt wird, schneidet die Cylinderfläche in einer Ellipse.

Aufgabe 1: Bestimme die Axen der Ellipse zu Satz 6.

Aufgabe 2: Zeige, daß jeder schief zur Axe des Kreiscylinders gelegte Durchschnitt eine Ellipse sein muß.

Satz 7: Figur 20. Wenn man durch C die Parallele CE zu C'M zieht, so ist das über der Abscissenaxe liegende Stück CD derselben gleich der kleinen Halbaxe b und DE = a — b.

Beweis:

$$\frac{CD}{C'M} = \frac{y}{Y} = \frac{b}{a}$$

Da aber C'M = a ist, so ist CD = b.

Satz 8: Bewegt sich eine Linie DE von constanter Länge mit ihren Endpunkten auf den Schenkeln eines rechten Winkels, so beschreibt jeder Punkt C derselben eine Ellipse, deren eine Halbaxe CD, die andere CE ist.

Aufgabe 3: Mit Benützung des Satzes 8 eine Ellipse zu zeichnen.

§ 18.

Die Hyperbel.

Aufgabe 1: Ein Dreieck zu zeichnen, für welches die Grundlinie c und der Unterschied der beiden Seiten a — b gegeben ist, z. B. c = 8 m, a — b = 5 m.

Auflösung: Durch c sind A und B bestimmt. Die gegebene Strecke a — b kann von B aus unter einem beliebigen Winkel an AB angelegt werden. Wird der Endpunkt D mit A verbunden, so liegt C auf BD und der Mittelsenkrechten von AD. Fig. 21.

Es giebt unzählige Punkte D und deshalb auch unzählige Punkte C.

Die Punkte D liegen auf dem Kreise, welcher B zum Mittelpunkt und a — b zum Radius hat.

Kommt es nur auf die absolute Länge dieses Unterschiedes, nicht auf das Vorzeichen an, so läßt sich die rechts vom Punkte B aus durchgeführte Construction auch links vom Punkte A aus machen, ebenso an beiden Seiten unterhalb wie oberhalb. Daraus ergiebt sich, daß die Linie, welche alle Punkte C enthält, sowohl durch AB (die Abscissenaxe) als auch durch die Mittelsenkrechte zu AB in symmetrische Zweige zerschnitten wird. Diese Linie heißt Hyperbel.

Die Hyperbel ist also der geometrische Ort aller derjenigen Punkte, deren Unterschied der Entfernungen von zwei festen Punkten gleich ist. Oder auch: Die Spitzen aller Dreiecke, für welche die Grundlinie c und der Unterschied der beiden Seiten d (a — b oder b — a) ungeändert bleibt, liegen auf einer Hyperbel, für welche die Endpunkte von c die Brennpunkte sind und der Unterschied der Radienvektoren die gegebene Strecke d.

Das von den Tangenten der Ellipse Gesagte gilt hier analog.

Aufgabe 2: Durch den Punkt C einer Hyperbel eine Tangente zu legen.

Auflösung: Figur 21. D liegt auf dem Kreise, welcher mit d, der Differenz der beiden Radienvektoren, um B, und auf dem Kreise, welcher mit CA um C beschrieben wird. Diese beiden Kreise müssen sich in D berühren. Die durch C zu AD gezogene Senkrechte ist die gesuchte Tangente.

Aufgabe 3: Durch einen Punkt P außerhalb der Hyperbel an diese eine Tangente zu legen.

Auflösung: Der Punkt P werde auf CE gedacht. Da PD = PA sein muß, so sind für D wieder zwei Kreise vorhanden. Die Senkrechte von P auf AD ist die gesuchte Tangente. Zwei Auflösungen, da sich zwei Punkte D ergaben.

§ 19.

Asymptoten der Hyperbel.

Die Construktion des Hyperbelpunktes C versagt, sobald die Mittelsenkrechte von AD parallel BD wird. Das ist der Fall, sobald statt D der Punkt H gewählt wird, in welchem die von A aus an den mit d um B beschriebenen Kreis gelegte Tangente diesen Kreis berührt. In diesem Falle schneiden sich BH und die Mittelsenkrechte von AH im Unendlichen, d. h. diese Mittelsenkrechte ist die Tangente des äußersten Punktes der Hyperbel. Sie heißt Asymptote. Dieselbe muß durch den Halbirungspunkt M von AB gehen, da sie parallel BH ist und durch den Halbirungspunkt von AH geht. Der Winkel, welchen die Asymptote MI mit der Abscissenaxe bildet, ist der Winkel ABH. Aus dem rechtwinkeligen Dreiecke ABH, dessen Hypotenuse c, die eine Kathede d, die andre $\sqrt{c^2 - d^2}$ ist, ergiebt sich für jenen Winkel:

$$\tang \varphi = \frac{\sqrt{c^2 - d^2}}{d}$$

Für c wird wie bei der Ellipse 2 e und für d 2 a gesetzt, so erhält man

$$\tang \varphi = \frac{\sqrt{e^2 - a^2}}{a}$$

a pflegt man die halbe große Axe der Hyperbel zu nennen, $\sqrt{e^2 - a^2} = b$ die halbe kleine Axe.

$$MA = MB = e$$
$$MI = a, \; AI = b$$

Der Halbirungspunkt von AF in Figur 21 sei G. Es ist

$$MF = 2\,a - e$$
$$FA = e - MF = 2\,e - 2\,a$$
$$AG = GF = e - a$$
$$GF + MF = a$$

Errichtet man also in G die Senkrechte auf GM, so ist die Strecke derselben bis zur Asymptote GL = b und LM = e.

Der Punkt G heißt Scheitelpunkt der Hyperbel. Die Senkrechte in G auf AM ist die erste aller Tangenten, die Asymptote die letzte. Die Schnittpunkte aller Tangenten der Hyperbel mit der Abscissenaxe bewegen sich also von G bis M. Figur 22.

Es bedarf kaum des Hinweises, daß noch eine zweite Asymptote vorhanden ist, welche in Bezug auf das Axensystem zu der ersteren in symmetrischer Lage sich befindet, und daß beide durch M fortlaufen. Schon die Gleichung

$$\tang \varphi = \frac{\sqrt{e^2 - a^2}}{a} = \pm \frac{b}{a}$$

genügt, das zu erkennen.

§ 20.

Die Gleichung der Hyperbel.

Wie in § 16 für die Ellipse hat man hier

$$AC - BC = \sqrt{y^2 + (e + x)^2} - \sqrt{y^2 + (e - x)^2} = 2\,a$$

Genau durch dieselbe Rechnung wie dort erhält man hier

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{e^2 - a^2} = 1$$

$$\text{oder} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Diese Gleichung der Hyperbel zeigt, daß jedem Werthe von y, sowohl dem positiven als auch dem negativen, zwei reelle gleiche x mit entgegengesetztem Zeichen entsprechen, da $x^2 = \frac{a^2}{b^2}(y^2 + b^2)$ ist.

Die Hyperbel ist also, wie schon gezeigt worden, symmetrisch in Bezug auf jede der beiden Koordinatenaxen.

Da hingegen $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$ ist, so wird nicht jedem beliebigen x ein reelles y entsprechen, sondern nur jedem x, welches größer als a ist.

Für $x = 0$ ist $y = \pm b\sqrt{-1}$, d. h. die Ordinatenaxe wird von der Hyperbel nicht getroffen.

Für $y = 0$ ist $x = \pm a$, d. h. die Abscissenaxe wird von der Hyperbel in den beiden Scheitelpunkten getroffen.

Nach § 19 hängt von $\frac{b}{a}$ der Neigungswinkel φ ab, da $\tang \varphi = \frac{b}{a}$ ist. $\frac{b}{a}$ kann nun ein echter Bruch, ein unechter Bruch oder auch 1 sein. In dem letzten Falle bilden die Asymptoten mit einander den Winkel 90^0. Dann heißt die Hyperbel gleichseitig und es ist $e = a\sqrt{2}$, d. h. die Diagonale desjenigen Quadrats, dessen Seite a ist.

Aufgabe: Zur trigonometrischen Berechnung eines Dreiecks ist gegeben die Grundlinie $c = 13$ m, die Höhe $h = 8$ m und der Unterschied der beiden Seiten $d = 5$ m.

Nachträgliche Bemerkung: Die ersten 6 Figuren setzen Kroquier - Papier voraus. Das ist in dem Steindruck übersehen worden.

Konitz, 31. December 1893.

J. Praetorius.