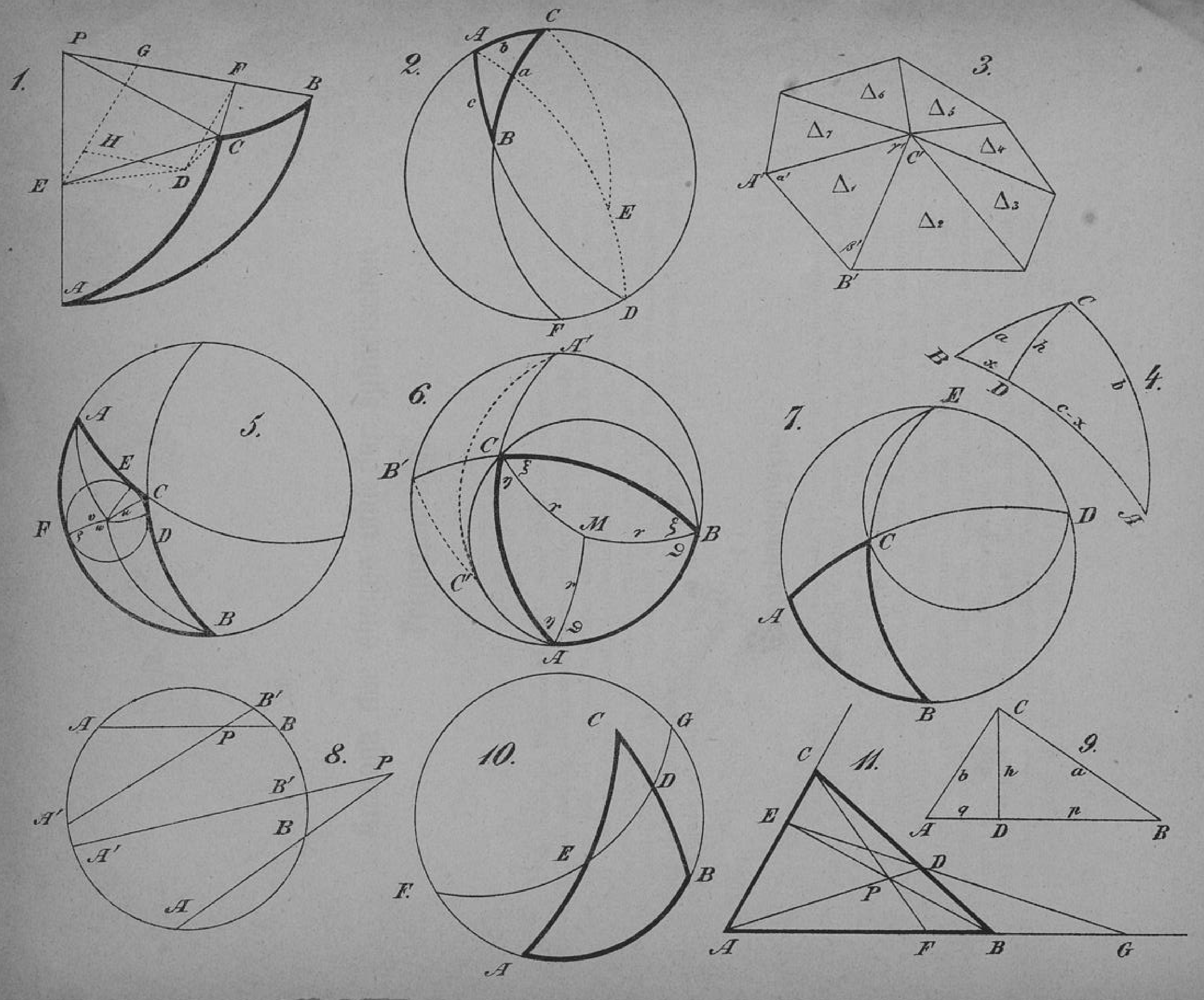
1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
9.
10.
11.

Analoga der ebenen und der sphärischen Trigonometrie.

Die sphärische Trigonometrie geht zwar über das gegenwärtige Gymnasialpensum hinaus, doch ist sie geeignet, vorgeschrittenen Schülern, welche die ebene Trigonometrie und die Stereometrie erfasst haben, eine lohnende Beschäftigung zu bieten, da dieselbe in Form von Aufgaben, welche Analoga zu den bekannten Sätzen der ebenen Trigonometrie zu suchen veranlassen, an der Hand des Lehrers in wenigen Stunden von dem Schüler verstanden wird. Die hier folgende Zusammenstellung sphärisch-trigonometrischer Sätze ist auf die angedeutete Weise entstanden. Auf Vollständigkeit macht dieselbe keinen Anspruch.

§ 1.

Hauptgleichungen.

Um eine dreiseitige körperliche Ecke P, welche durch Zusammenfalten eines Stückes Papier leicht veranschaulicht werden kann, lege man eine Kugel mit dem beliebigen Radius r. Durch die drei Kanten der körperlichen Ecke werden auf der Kugeloberfläche die drei Punkte A, B, C bestimmt; die drei Ebenen, welche in P zusammenstossen, werden in den Bogen grösster Kreise AB, AC, BC geschnitten. Jene drei Punkte sind die Ecken, die drei Bogen die Seiten des sphärischen Dreiecks. Da Kreisbogen und zugehörige Centriwinkel durch dieselbe Anzahl von Graden gemessen werden, so werden die Seiten des sphärischen Dreiecks und der körperlichen Ecke durch dieselbe Anzahl von Graden gemessen. Da man unter dem Winkel, welchen zwei krumme Linien mit einander bilden, denjenigen Winkel versteht, welcher von den zugehörigen Tangenten in dem Schnittpunkte gebildet wird, so sind die Winkel des sphärischen Dreiecks dieselben, wie die Winkel der

1

körperlichen Ecke. Man bezeichne die Winkel des sphärischen Dreiecks A B C mit α, β, γ und die den Winkeln gegenüberliegenden Seiten mit a, b, c. (Fig. 1.)

Durch den Punkt C lege man die zu PA und PB senkrechten Ebenen. Dieselben schneiden einander in der zu APB senkrechten Kante CD. In den bei D rechtwinkeligen Dreiecken CDE und CDF ist $\sphericalangle$ CED $= \alpha$ und $\sphericalangle$ CFD $= \beta$.

$$CD = CE \,.\, \sin\alpha = r \,.\, \sin b \,.\, \sin\alpha$$
$$CD = CF \,.\, \sin\beta = r \,.\, \sin a \,.\, \sin\beta$$

(1.) Folgerung: $\dfrac{\sin a}{\sin b} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}, \quad \dfrac{\sin a}{\sin c} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma}, \quad \dfrac{\sin b}{\sin c} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

Dieser Satz entspricht dem Sinussatze des ebenen Dreiecks und führt zu der Lösung der beiden Grundaufgaben:

1) Zur Bestimmung eines Dreiecks sind gegeben zwei Winkel und die dem einen von beiden gegenüberliegende Seite.
2) Zur Bestimmung eines Dreiecks sind gegeben zwei Seiten und ein Winkel, welcher der einen von beiden gegenüberliegt.

Ein Unterschied tritt nur insofern ein, als die Summe der Winkel eines sphärischen Dreiecks 180° übersteigt.

Man ziehe noch EG ∥ DF und DH ∥ FP.

$$r.\cos a = PF = PG + GF$$
$$PG = PE \cos c = r \,.\, \cos b \,.\, \cos c$$
$$GF = DH \qquad = DE \,.\, \sin c = CE \,.\, \cos\alpha \,.\, \sin c.$$
$$GF = r \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos\alpha$$
$$PG + GF = r \,.\, \cos b \,.\, \cos c + r \,.\, \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos\alpha$$

Folgerung:

(2.) $$\left\{\begin{array}{l} \cos a = \cos b \,.\, \cos c + \sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos\alpha \\ \cos b = \cos a \,.\, \cos c + \sin a \,.\, \sin c \,.\, \cos\beta \\ \cos c = \cos a \,.\, \cos b + \sin a \,.\, \sin b \,.\, \cos\gamma \end{array}\right.$$

(2.)* $$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{\cos a - \cos b \,.\, \cos c}{\sin b \,.\, \sin c} \\ \cos\beta = \dfrac{\cos b - \cos a \,.\, \cos c}{\sin a \,.\, \sin c} \\ \cos\gamma = \dfrac{\cos c - \cos a \,.\, \cos b}{\sin a \,.\, \sin b} \end{array}\right.$$

Die Gleichungen (2.) und (2.)* enthalten das Analogon zu dem Cosinussatze der ebenen Trigonometrie und führen zu der Lösung der Grundaufgaben:

3) Ein Dreieck zu bestimmen aus zwei Seiten und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel.
4) Ein Dreieck zu bestimmen aus den drei Seiten.

Drückt man DF in doppelter Weise aus, so ergiebt sich eine neue Relation zwischen gewissen Dreiecksstücken.

$$DF = CF \cos\beta = r \,.\, \sin a \,.\, \cos\beta$$
$$DF = EG - EH$$
$$EG = PE \,.\, \sin c = r \,.\, \cos b \,.\, \sin c$$
$$EH = DE \,.\, \cos c = CE \,.\, \cos\alpha \,.\, \cos c = r \,.\, \sin b \,.\, \cos c \,.\, \cos\alpha$$
$$DF = r \,.\, \cos b \,.\, \sin c - r \,.\, \sin b \,.\, \cos c \,.\, \cos\alpha$$

(3.) Folgerung: $\sin a \,.\, \cos\beta = \cos b \,.\, \sin c - \sin b \,.\, \cos c \,.\, \cos\alpha$

Mit Benützung des Sinussatzes lässt sich diese Gleichung leicht auf folgende Formen bringen:

(3.)* $$\sin\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\beta = \cos b \,.\, \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} - \cos c \,.\, \cos\alpha$$

(3.)** $$\sin\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\beta = \operatorname{cotg} b \,.\, \sin c - \cos c \,.\, \cos\alpha$$

Die letzte Gleichung enthält nur vier Dreiecksstücke. Die Bestimmung von cotg b oder cotg β durch die übrigbleibenden Stücke führt zur Aufstellung zweier Aufgaben, welche in folgenden Gleichungen ihre Lösung finden:

$$5)\left\{\begin{aligned}
\operatorname{cotg} a &= \frac{\sin\beta \,.\, \operatorname{cotg}\alpha + \cos\beta \,.\, \cos c}{\sin c} = \frac{\sin\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\alpha + \cos\gamma \,.\, \cos b}{\sin b}\\
\operatorname{cotg} b &= \frac{\sin\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\beta + \cos\alpha \,.\, \cos c}{\sin c} = \frac{\sin\gamma \,.\, \operatorname{cotg}\beta + \cos\gamma \,.\, \cos a}{\sin a}\\
\operatorname{cotg} c &= \frac{\sin\alpha \,.\, \operatorname{cotg}\gamma + \cos\alpha \,.\, \cos b}{\sin b} = \frac{\sin\beta \,.\, \operatorname{cotg}\gamma + \cos\beta \,.\, \cos a}{\sin a}
\end{aligned}\right.$$

$$6)\left\{\begin{aligned}
\operatorname{cotg}\alpha &= \frac{\sin c \,.\, \operatorname{cotg} a - \cos\beta \cos c}{\sin\beta} = \frac{\sin b \,.\, \operatorname{cotg} a - \cos\gamma \,.\, \cos b}{\sin\gamma}\\
\operatorname{cotg}\beta &= \frac{\sin c \,.\, \operatorname{cotg} b - \cos\alpha \,.\, \cos c}{\sin\alpha} = \frac{\sin a \,.\, \operatorname{cotg} b - \cos\gamma \,.\, \cos a}{\sin\gamma}\\
\operatorname{cotg}\gamma &= \frac{\sin b \,.\, \operatorname{cotg} c - \cos\alpha \,.\, \cos b}{\sin\alpha} = \frac{\sin a \,.\, \operatorname{cotg} c - \cos\beta \,.\, \cos a}{\sin\beta}
\end{aligned}\right.$$

Durch 5) sind die fehlenden Seiten zu bestimmen, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind; durch 6) die fehlenden Winkel, wenn ein Winkel und die ihn einschliessenden Seiten gegeben sind.

Das Analogon zu (3.)** für das ebene Dreieck ist unschwer zu finden.

Wenn man innerhalb der gegebenen körperlichen Ecke einen beliebigen Punkt annimmt und von demselben zu den Kanten senkrechte Ebenen fällt, so entsteht eine neue körperliche Ecke, deren Seiten die Supplemente zu den Winkeln der ersteren und deren Winkel die Supplemente zu den Seiten der ersteren sind. Diese neue körperliche Ecke heisst darum S u p p l e m e n t a r e c k e in Bezug auf die erstere. Ihr entspricht ein sphärisches Dreieck A′ B′ C′, welches Supplementardreieck zu A B C ist. Die Winkel von A′ B′ C′ seien α', β', γ', die Seiten a′, b′, c′. Es finden also folgende Gleichungen statt:

$a + \alpha' = 180^\circ$	$\cos a = -\cos \alpha'$
$b + \beta' = 180^\circ$	$\cos b = -\cos \beta'$
$c + \gamma' = 180^\circ$	$\cos c = -\cos \gamma'$
$\alpha + a' = 180^\circ$	$\cos \alpha = -\cos a'$
$\beta + b' = 180^\circ$	$\sin b = \sin \beta'$
$\gamma + c' = 180^\circ$	$\sin c = \sin \gamma'$
	u. s. w.

Die Einsetzung dieser Resultate in die unter (1.), (2.), (3.) gefundenen Gleichungen führt zu Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln des Supplementardreiecks. Dieselben gelten also unverändert auch für das Hauptdreieck. Von diesen Beziehungen ist die wichtigste diejenige, welche aus (2.) sich ergiebt, weil die übrigen wesentlich nichts Neues enthalten.

$$(4.)\qquad \begin{cases} \cos \alpha = -\cos \beta \,.\, \cos \gamma + \sin \beta \,.\, \sin \gamma \,.\, \cos a \\ \cos \beta = -\cos \alpha \,.\, \cos \gamma + \sin \alpha \,.\, \sin \gamma \,.\, \cos b \\ \cos \gamma = -\cos \alpha \,.\, \cos \beta + \sin \alpha \,.\, \sin \beta \,.\, \cos c \end{cases}$$

$$(4.)^*\qquad \begin{cases} \cos a = \dfrac{\cos \beta \,.\, \cos \gamma + \cos \alpha}{\sin \beta \,.\, \sin \gamma} \\[2ex] \cos b = \dfrac{\cos \alpha \,.\, \cos \gamma + \cos \beta}{\sin \alpha \,.\, \sin \gamma} \\[2ex] \cos c = \dfrac{\cos \alpha \,.\, \cos \beta + \cos \gamma}{\sin \alpha \,.\, \sin \beta} \end{cases}$$

In diesen beiden Formen derselben Gleichung liegt die Lösung der beiden Aufgaben:

7) Gegeben ist eine Seite und die beiden anliegenden Winkel, zu suchen der dritte Winkel.
8) Gegeben alle drei Winkel, zu suchen die Seiten.

Von den 8 aufgestellten Aufgaben fällt 6) mit 3) und 7) mit 5) hinsichtlich der gegebenen Stücke zusammen.

§ 2.

Das rechtwinkelige Dreieck.

Von den Specialitäten, welche aus den vier Gleichungssystemen in §. 1 folgen, wenn entweder eine der Seiten oder einer der Winkel 90° enthält, stellen wir nur diejenigen her, welche $\alpha = 90^\circ$ entsprechen.

Bedingung: $\alpha = 90^\circ$. Folgerung:
1) $\sin b = \sin a \,.\, \sin \beta$
2) $\cos a = \cos b \,.\, \cos c$
3) $\operatorname{cotg} a = \operatorname{cotg} c \,.\, \cos \beta$
4) $\operatorname{cotg} \beta = \operatorname{cotg} b \,.\, \sin c$
5) $\cos a = \operatorname{cotg} \beta \,.\, \operatorname{cotg} \gamma$

Von den drei Grössen, welche in irgend einer dieser Gleichungen enthalten sind, können je zwei als gegeben, die dritte als gesucht gelten. Es ist überflüssig die Aufgaben auszusprechen, welche damit in den 5 vorstehenden Gleichungen gelöst erscheinen.

§ 3.

Umformungen für die logarithmische Rechnung.

Unmittelbar für logarithmische Rechnungen bequem ist nur die Gleichung (1.) §. 1, welche den Sinussatz enthält. (2.)* und (4)* lassen dieselbe Umformung zu, durch welche man in der Ebene von dem Cosinussatze auf den Cotangentensatz gelangt.

Man bezeichne $\frac{a + b + c}{2} = p$ und demgemäss $\frac{-a + b + c}{2} = p - a$, $\frac{a - b + c}{2} = p - b$, $\frac{a + b - c}{2} = p - c$. Damit ergiebt sich aus (2.)*:

$$1 + \cos\alpha = \frac{2 . \sin\frac{-a+b+c}{2} . \sin\frac{a+b+c}{2}}{\sin b . \sin c} = \frac{2 . \sin p . \sin(p - a)}{\sin b . \sin c}$$

$$1 - \cos\alpha = \frac{2 . \sin\frac{a-b+c}{2} \sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin b . \sin c} = \frac{2 . \sin(p-b) . \sin(p-c)}{\sin b . \sin c}$$

Durch Division und Multiplication dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$(1.) \left\{ \begin{aligned} \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p . \sin(p - a)}{\sin(p - b) . \sin(p - c)}} = \sin(p-a) . \sqrt{\frac{\sin p}{\sin(p-a)\sin(p-b) . \sin(p-c)}} \\ \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p . \sin(p - b)}{\sin(p - a) . \sin(p - c)}} = \sin(p-b) . \sqrt{\frac{\sin p}{\sin(p-a) . \sin(p-b) . \sin(p-c)}} \\ \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} &= \sqrt{\frac{\sin p . \sin(p - c)}{\sin(p - a) . \sin(p - b)}} = \sin(p-c) . \sqrt{\frac{\sin p}{\sin(p-a) . \sin(p-b) . \sin(p-c)}} \end{aligned} \right.$$

$$(2.) \left\{ \begin{aligned} \sin\alpha &= \frac{2 . \sqrt{\sin p . \sin(p - a) . \sin(p - b) . \sin(p - c)}}{\sin b . \sin c} \\ \sin\beta &= \frac{2 . \sqrt{\sin p . \sin(p - a) . \sin(p - b) . \sin(p - c)}}{\sin a . \sin c} \\ \sin\gamma &= \frac{2 . \sqrt{\sin p . \sin(p - a) . \sin(p - b) . \sin(p - c)}}{\sin a . \sin b} \end{aligned} \right.$$

Man bezeichne ferner $\alpha + \beta + \gamma = 180 + 2\,\varepsilon$, wo ε also den halben sphärischen Excess bedeutet, und demgemäss:

$$\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 90^0 + \varepsilon,\ \frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2} = 90^0 - (\alpha - \varepsilon),\ \frac{\mathrm{a}-\beta+\gamma}{2} = 90^0 - (\beta - \varepsilon),\ \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2} = 90^0 - (\gamma - \varepsilon)$$

Damit ergiebt sich aus §. 1 (4.)*:

$$1 + \cos \mathrm{a} = \frac{2 . \sin (\beta - \varepsilon) . \sin (\gamma - \varepsilon)}{\sin \beta . \sin \gamma}$$

$$1 - \cos \mathrm{a} = \frac{2 . \sin \varepsilon . \sin (\alpha - \varepsilon)}{\sin \beta . \sin \gamma}$$

Durch Division und Multiplication erhält man wie oben:

$$(3.)\ \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\mathrm{a}}{2} = \sqrt{\frac{\sin \varepsilon . \sin (\alpha - \varepsilon)}{\sin (\beta - \varepsilon) \sin (\gamma - \varepsilon)}} = \sin (\alpha - \varepsilon) . \sqrt{\frac{\sin \varepsilon}{\sin (\alpha - \varepsilon) . \sin (\beta - \varepsilon) . \sin (\gamma - \varepsilon)}} \\ \operatorname{tg} \frac{\mathrm{b}}{2} = \sqrt{\frac{\sin \varepsilon . \sin (\beta - \varepsilon)}{\sin (\alpha - \varepsilon) . \sin (\gamma - \varepsilon)}} = \sin (\beta - \varepsilon) . \sqrt{\frac{\sin \varepsilon}{\sin (\alpha - \varepsilon) . \sin (\beta - \varepsilon) . \sin (\gamma - \varepsilon)}} \\ \operatorname{tg} \frac{\mathrm{c}}{2} = \sqrt{\frac{\sin \varepsilon . \sin (\gamma - \varepsilon)}{\sin (\alpha - \varepsilon) . \sin (\beta - \varepsilon)}} = \sin (\gamma - \varepsilon) . \sqrt{\frac{\sin \varepsilon}{\sin (\alpha - \varepsilon) . \sin (\beta - \varepsilon) . \sin (\gamma - \varepsilon)}} \end{cases}$$

$$(4.)\ \begin{cases} \sin \mathrm{a} = \frac{2 . \sqrt{\sin \varepsilon . \sin (\alpha - \varepsilon) . \sin (\beta - \varepsilon) . \sin (\gamma - \varepsilon)}}{\sin \beta . \sin \gamma} \\ \sin \mathrm{b} = \frac{2 . \sqrt{\sin \varepsilon . \sin (\alpha - \varepsilon) . \sin (\beta - \varepsilon) . \sin (\gamma - \varepsilon)}}{\sin \alpha . \sin \gamma} \\ \sin \mathrm{c} = \frac{2 . \sqrt{\sin \varepsilon . \sin (\alpha - \varepsilon) . \sin (\beta - \varepsilon) . \sin (\gamma - \varepsilon)}}{\sin \alpha . \sin \beta} \end{cases}$$

§ 4.

Gaussische und Neppersche Gleichungen.

Zu den Gaussischen Gleichungen gelangt man durch die bekannten Entwickelungen der ebenen Trigonometrie:

$$\cos \frac{\alpha \pm \beta}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} . \cos \frac{\beta}{2} \mp \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} = \sin \frac{\alpha}{2} . \cos \frac{\beta}{2} \pm \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}$$

Da $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$, $\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$, so hat man die im vorigen § gefundenen Werthe für $1 + \cos \alpha$ und $1 - \cos \alpha$ zu benützen und in die vorstehenden Additionstheoreme einzusetzen. Die Resultate der bekannten Rechnungen sind folgende:

$$(1.)\quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sqrt{\frac{\sin(p-a).\sin(p-b)}{\sin a.\sin b}}=\frac{\cos\frac{a+b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$(2.)\quad \cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\sqrt{\frac{\sin(p-a).\sin(p-b)}{\sin a.\sin b}}=\frac{\sin\frac{a+b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$(3.)\quad \sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}\sqrt{\frac{\sin p.\sin(p-c)}{\sin a.\sin b}}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{c}{2}}.\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$(4.)\quad \sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\sqrt{\frac{\sin p.\sin(p-c)}{\sin a.\sin b}}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{c}{2}}.\cos\frac{\gamma}{2}$$

Die Nepperschen Gleichungen sind durch Division aus den Gaussischen abzuleiten:

$$(5.)\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}.\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$$

$$(6.)\quad \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}.\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}$$

$$(7.)\quad \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

$$(8.)\quad \operatorname{tg}\frac{a-b}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.\operatorname{tg}\frac{c}{2}$$

Aus den Gaussischen Gleichungen ergeben sich leicht auch noch folgende:

$$(9.)\quad \sin^2\frac{c}{2}=\sin^2\frac{a+b}{2}.\sin^2\frac{\gamma}{2}+\sin^2\frac{a-b}{2}.\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

$$(10.)\quad \sin^2\frac{\gamma}{2}=\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}.\cos^2\frac{c}{2}+\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}.\sin^2\frac{c}{2}$$

Verwerthung finden die Nepperschen und die Gaussischen Gleichungen vor allem in den beiden Aufgaben 5) und 6) § 1: Zur Bestimmung eines Dreiecks ist eine Seite gegeben und die beiden Winkel, welche derselben anliegen. Zur Bestimmung eines Dreiecks sind zwei Seiten und der von denselben eingeschlossene Winkel gegeben. Für diese Aufgaben enthalten die Gaussischen und die Nepperschen Gleichungen die logarithmisch brauchbaren Lösungen.

B e i s p i e l. Die nördliche Breite von Konitz ist 53° 42′, die östliche Länge in Bezug auf den Meridian von Ferro 35° 14′. Die entsprechenden Angaben sind für Paris 48° 50′ 13″ und 20° 0′ 0″. Welches ist die direkte Entfernung beider Orte unter der Voraussetzung, dass die Erde eine vollkommene Kugel sei?

In dem Dreiecke Paris, Konitz, Nordpol ($\varDelta$ PKN) ist $\sphericalangle\ \nu = 15^{\circ}\ 14'$, Seite $p = 36^{\circ}\ 18'$, Seite $k = 41^{\circ}\ 9'\ 47''$.

Aus den Nepperschen Gleichungen 5) und 6)

$$\operatorname{tg} \frac{\varkappa + \varphi}{2} = \frac{\cos \frac{k - p}{2}}{\cos \frac{k + p}{2}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\nu}{2} \text{ ergeben sich: } \frac{\varkappa + \varphi}{2} = 84^{\circ}\ 2'\ 20{,}1''$$

$$\operatorname{tg} \frac{\varkappa - \varphi}{2} = \frac{\sin \frac{k - p}{2}}{\sin \frac{k + p}{2}} \cdot \operatorname{cotg} \frac{\nu}{2} \qquad \frac{\varkappa - \varphi}{2} = 26^{\circ}\ 53'\ 17{,}6''$$

$$\varkappa = 110^{\circ}\ 55'\ 37{,}7'', \qquad \varphi = 57^{\circ}\ 9'\ 2{,}5''$$

$$\operatorname{tg} \frac{n}{2} = \frac{\cos \frac{\varkappa + \varphi}{2}}{\cos \frac{\varkappa - \varphi}{2}} \cdot \operatorname{tg} \frac{k + p}{2}, \qquad \frac{n}{2} = 5^{\circ}\ 20'\ 7{,}83''$$

Bogenentfernung Paris-Konitz $10^{\circ}\ 40'\ 15{,}66'' = 160$ geographische Meilen.

§ 5.

Inhaltsbestimmungen vermittelst der Winkel.

Man bezeichne (Fig. 2) das sphärische Dreieck ABC mit $\varDelta$, zeichne zu demselben die drei Nebendreiecke und bezeichne dieselben entsprechend den Seiten, welche sie mit dem Hauptdreiecke gemeinsam haben, mit $\varDelta_a$, $\varDelta_b$, $\varDelta_c$. Nun ist $\varDelta$ ACE $= \varDelta$ BDF, d. h. $\varDelta$ BDF darf auch mit $\varDelta_b$ bezeichnet werden. Nennt man die Kugeloberfläche O, so ist unmittelbar ersichtlich:

$$\varDelta + \varDelta_a + \varDelta_b + \varDelta_c = \frac{O}{2}$$

$$\frac{\varDelta + \varDelta_a}{O} = \frac{\alpha}{360^{\circ}}, \quad \frac{\varDelta + \varDelta_b}{O} = \frac{\beta}{360^{\circ}}, \quad \frac{\varDelta + \varDelta_c}{O} = \frac{\gamma}{360^{\circ}}$$

Die Addition der drei letzten Gleichungen ergiebt mit Berücksichtigung der ersten:

$$\varDelta = \frac{O}{2} \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180^{\circ}}{360^{\circ}}$$

Der Ueberschuss der Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks über 180° heisst sphärischer Excess. Derselbe ist § 3 bereits mit 2ε bezeichnet worden. Damit wird

(1.) $\quad \varDelta = O \cdot \frac{\varepsilon^{\circ}}{360^{\circ}}$, Inhalt des sphärischen Dreiecks.

Ein sphärisches Polygon kann in Dreiecke zertheilt werden, indem man irgend einen Punkt innerhalb desselben mit allen Ecken durch grösste Kreisbogen verbindet. Ein solches Dreieck werde bezeichnet (Fig. 3) mit A'B'C' oder kurzweg mit $\varDelta_1$, seine Winkel mit α_1, β_1, γ_1. Das daran stossende Dreieck $\varDelta_2$ habe die Winkel

α_2, β_2, γ_2 u. s. w., so ist:

$$\varDelta_1 = \frac{O}{2} \cdot \frac{\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - 180^0}{360^0}$$

$$\varDelta_2 = \frac{O}{2} \cdot \frac{\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - 180^0}{360^0}$$

. . . .

. . . .

$$\varDelta_n = \frac{O}{2} \cdot \frac{\alpha_n + \beta_n + \gamma_n - 180^0}{360^0}$$

$$\varDelta_1 + \varDelta_2 + \ldots + \varDelta_n = \frac{O}{2 . 360^0} \left[(\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots + \alpha_n + \beta_n) + (\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n) - n . 180^0 \right]$$

Nun ist $\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \beta_2 + \ldots + \alpha_n + \beta_n$ die Summe der Winkel des Polygons. Diese werde mit ω bezeichnet. $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = 360^0$.

(2.) $\varDelta_1 + \varDelta_2 + \ldots + \varDelta_n = \frac{O}{2} \cdot \frac{\omega - (n - 2)\, 180^0}{360^0}$, Inhalt des sphärischen Polygons.

Dieses Resultat lässt sich verwerthen zu einem einfachen Beweise des Eulerschen Satzes hinsichtlich der Anzahl Ecken, Flächen und Kanten eines Polyeders: $E + F = K + 2$.

Um einen beliebigen Punkt innerhalb des eckigen Körpers beschreibe man eine Kugel mit einem hinlänglich grossen Radius, so dass der Körper von der Kugel vollständig eingeschlossen werde. Vom Mittelpunkte der Kugel ziehe man nach allen Ecken des Körpers die Radien bis zur Kugeloberfläche. So wird auf dieser ein Netz von Punkten bestimmt, welche sich durch grösste Kreisbogen entsprechend den Kanten des Körpers verbinden lassen. Dieses Netz besteht aus so viel Polygonen, als der Körper Flächen hatte; enthält so viel Linien, als der Körper Kanten hatte, und hat soviel Knotenpunkte, als der Körper Ecken hatte.

Die Anzahl der Polygone sei m. Das erste P_1 habe die Winkelsumme ω_1 und die Seitenzahl n_1. Das zweite P_2 habe die Winkelsumme ω_2 und die Seitenzahl n_2 u. s. w. Das m te P_m habe die Winkelsumme ω_m und die Seitenzahl n_m. Dann ist nach der gefundenen Inhaltsgleichung:

$$P_1 = \frac{O}{2} \cdot \frac{\omega_1 - (n_1 - 2)\, 180^0}{360^0}$$

$$P_2 = \frac{O}{2} \cdot \frac{\omega_2 - (n_2 - 2)\, 180^0}{360^0}$$

. . . .

. . . .

$$P_m = \frac{O}{2} \cdot \frac{\omega_m - (n_m - 2)\, 180^0}{360^0}$$

(3.) $P_1 + P_2 + \ldots + P_m = \frac{O}{2} \cdot \frac{\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_m - (n_1 + n_2 + \ldots n_m)\, 180^0 + m . 360^0}{360^0}$

Nun ist die Summe aller Polygone gleich der Kugeloberfläche:

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_m = O$$

Bezeichnet man mit E die Anzahl der Ecken des Polyeders, also der Knotenpunkte des sphärischen Netzes, so ist E . 360° die Summe aller Polygonwinkel, da um jeden Knotenpunkt die Winkelsumme 360° beträgt. Es ist somit

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_m = E \,.\, 360^0$$

Jede Polygonseite ist zwei Polygonen gemeinsam. Bezeichnet man also mit K die Anzahl der Kanten des Polyeders, d. h. auch die Anzahl der Polygonseiten des Netzes, so hat man

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = 2K$$

Die Anzahl der Flächen des Polyeders wird mit F bezeichnet; die Anzahl der Polygone des Netzes ist mit m bezeichnet worden: also ist m durch F zu ersetzen. Durch diese Substitutionen gestaltet sich Gl. (3.) so um, dass sie unmittelbar in der Form des Eulerschen Satzes $E + F = K + 2$ erscheint.

§ 6.

Inhaltsbestimmungen vermittelst der Seiten.

Nach § 5 hängt die Bestimmung des Inhalts eines sphärischen Dreiecks ab von der Bestimmung seines sphärischen Excesses. In dem Folgenden wird gezeigt werden, dass der sphärische Excess sich direct durch solche Stücke ausdrücken lässt, durch welche das Dreieck überhaupt bestimmt wird, dass man also zur Bestimmung des Excesses nicht zuvörderst die Winkel des Dreiecks zu berechnen braucht. Die jetzt aufzustellenden Gleichungen sind so ersichtliche Analogieen zu den Inhaltsformeln des ebenen Dreiecks, dass jede weitere Bemerkung darüber überflüssig ist.

I. Man gehe aus von dem bei A rechtwinkeligen Dreiecke.

$$2\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - 180^0$$

Bedingung: $\alpha = 90^0$

$$2\varepsilon = \beta + \gamma - 90^0$$

$$\sin 2\varepsilon = -\cos(\beta + \gamma) = -\cos\beta \,.\, \cos\gamma + \sin\beta \,.\, \sin\gamma$$

Nach § 2 ist $\sin\beta = \frac{\sin b}{\sin a}$, $\sin\gamma = \frac{\sin c}{\sin a}$, $\quad \sin\beta \,.\, \sin\gamma = \frac{\sin b \,.\, \sin c}{\sin^2 a}$

$$\frac{\cos\beta \,.\, \cos\gamma}{\sin\beta \,.\, \sin\gamma} = \cos a, \qquad \cos\beta \,.\, \cos\gamma = \frac{\sin b \,.\, \sin c \,.\, \cos a}{\sin^2 a}$$

$$(1.)\ \sin 2\varepsilon = \frac{\sin b \,.\, \sin c\,(1 - \cos a)}{\sin^2 a} = \frac{\sin b \,.\, \sin c(1 - \cos a)}{1 - \cos^2 a} = \frac{\sin b \,.\, \sin c}{1 + \cos b \,.\, \cos c}$$

$$(2.)\ \cos 2\varepsilon = \frac{\cos b + \cos c}{1 + \cos b \,.\, \cos c}$$

(3.) $\operatorname{tg}\varepsilon = \operatorname{tg}\frac{b}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{c}{2}$, sphärischer Excess des rechtwinkeligen Dreiecks ausgedrückt durch die beiden Katheten.

Aus (2.) folgen leicht auch noch die beiden Gleichungen

$$(4.)\quad \sin\varepsilon = \frac{\sin\frac{b}{2} \,.\, \sin\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}, \qquad (5.)\quad \cos\varepsilon = \frac{\cos\frac{b}{2} \,.\, \cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{a}{2}}$$

II. Das schiefwinkelige Dreieck.

Dasselbe ist durch die Höhe als Summe oder Differenz zweier rechtwinkeligen Dreiecke darzustellen. Gleiches gilt für seinen Excess. Für beide Fälle ist die Methode der Rechnung unverändert dieselbe. Es bezeichne $2\varepsilon'$ den sphärischen Excess des rechtwinkeligen Dreiecks DBC (Fig. 4.), $2\varepsilon''$ denjenigen des Dreiecks DAC und 2ε den sphärischen Excess des Dreiecks ABC.

Nach Gl. (3.) § 6 ist: $\operatorname{tg} \varepsilon' = \operatorname{tg} \frac{h}{2} . \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

$$\operatorname{tg} \varepsilon'' = \operatorname{tg} \frac{h}{2} . \operatorname{tg} \frac{c-x}{2}$$

Durch Addition: $\frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon' . \cos \varepsilon''} = \frac{\operatorname{tg} \frac{h}{2} . \sin \frac{c}{2}}{\cos \frac{x}{2} . \cos \frac{c-x}{2}}$

Nach (4.) und (5.): $\cos \varepsilon' = \frac{\cos \frac{h}{2} . \cos \frac{x}{2}}{\cos \frac{a}{2}}$, $\sin \varepsilon' = \frac{\sin \frac{h}{2} . \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{a}{2}}$

$$\cos \varepsilon'' = \frac{\cos \frac{h}{2} . \cos \frac{c-x}{2}}{\cos \frac{b}{2}}, \quad \sin \varepsilon'' = \frac{\sin \frac{h}{2} . \sin \frac{c-x}{2}}{\cos \frac{b}{2}}$$

$$\cos \varepsilon' . \cos \varepsilon'' = \frac{\cos^2 \frac{h}{2} . \cos \frac{x}{2} . \cos \frac{c-x}{2}}{\cos \frac{a}{2} . \cos \frac{b}{2}}$$

(6.) $$\sin \varepsilon = \frac{\sin h . \sin c}{4 . \cos \frac{a}{2} . \cos \frac{b}{2} . \cos \frac{c}{2}}$$

Nach § 2 ist $\sin h = \sin a . \sin \beta$

und nach § 3 (2.) $\sin \beta = \frac{2 \sqrt{\sin p . \sin (p-a) . \sin (p-b) . \sin (p-c)}}{\sin a . \sin c}$

(7.) $$\sin \varepsilon = \frac{\sqrt{\sin p . \sin (p-a) . \sin (p-b) . \sin (p-c)}}{2 . \cos \frac{a}{2} . \cos \frac{b}{2} . \cos \frac{c}{2}}$$

Aus Fig. 4 ergiebt sich mit Hülfe von § 2

$$\cos x = \frac{\cos a}{\cos h}, \quad \cos (c-x) = \frac{\cos b}{\cos h}$$

Die Elimination von x bietet für h folgende Gleichung:

$$\cos^2 h = \frac{\cos^2 a + \cos^2 b - 2 \cos a . \cos b . \cos c}{\sin^2 c}$$

Damit sind auch die Segmente x und c — x durch die drei Seiten ausgedrückt.

$$\cos x = \frac{\cos a}{\cos h}, \quad \sin x = \frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\cos h \cdot \sin c}$$

$$\cos(\varepsilon' + \varepsilon'') = \cos\varepsilon' \cdot \cos\varepsilon'' - \sin\varepsilon' \cdot \sin\varepsilon''$$

$$= \frac{\cos^2\frac{h}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{c-x}{2} - \sin^2\frac{h}{2} \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \sin\frac{c-x}{2}}{\cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2}}$$

$$= \frac{(1 + \cos h)\cos\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{c-x}{2} - (1 - \cos h)\sin\frac{x}{2}\sin\frac{c-x}{2}}{2 \cdot \cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2}}$$

$$\cos(\varepsilon' + \varepsilon'') = \frac{\cos\frac{c}{2} + \cos h \cos\left(\frac{c}{2} - x\right)}{2 \cdot \cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2}} = \frac{\cos\frac{c}{2} + \cos\frac{c}{2}\cos h \cos x + \sin\frac{c}{2}\cos h \sin x}{2 \cdot \cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2}}$$

(8.) $$\cos\varepsilon = \frac{1 + \cos a + \cos b + \cos c}{4 \cdot \cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2} \cdot \cos\frac{c}{2}}$$

(9.) $$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\sin h \cdot \sin c}{1 + \cos a + \cos b + \cos c} = \frac{2\sqrt{\sin p \cdot \sin(p-a) \cdot \sin(p-b) \cdot \sin c}}{1 + \cos a + \cos b + \cos c}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin\varepsilon}{1 + \cos\varepsilon} = \frac{\sin h \cdot \sin c}{1 + \cos a + \cos b + \cos c + 4\cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2} \cdot \cos\frac{c}{2}}$$

Durch Einführung der halben Winkel lässt sich der Ausdruck

$$1 + \cos a + \cos b + \cos c + 4 \cos \cos\frac{a}{2} \cdot \cos\frac{b}{2} \cdot \cos\frac{c}{2}$$

auf die logarithmisch brauchbare Form bringen:

$$8\cos\frac{p}{2} \cdot \cos\frac{p-a}{2} \cdot \cos\frac{p-b}{2} \cdot \cos\frac{p-c}{2}$$

(10.) $$\operatorname{tg}\frac{\varepsilon}{2} = \sqrt{\operatorname{tg}\frac{p}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{p-a}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{p-b}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{p-c}{2}}$$

§ 7.

Eingeschriebener Kreis.

Die Construction des inneren Berührungskreises geschieht wie in der Ebene durch Halbirung der Winkel. Die nach den Berührungspunkten hingezogenen Radien ϱ (Fig. 5) bestimmen auf den Seiten des Dreiecks ABC 6 Segmente, von denen immer je zwei an derselben Ecke liegende einander gleich sind:

$$AE = AF = \frac{-a + b + c}{2}, \quad BD = BF = \frac{a - b + c}{2}, \quad CD = CE = \frac{a + b - c}{2}$$

Nach § 2 4) und § 3 (1.) ist

$$(1.)\quad \begin{cases} \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{cotg}\varrho\,.\,\sin\,(p-a) \\ \operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{cotg}\varrho\,.\,\sin\,(p-b) \\ \operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{cotg}\varrho\,.\,\sin\,(p-c) \end{cases}$$

$$(2.)\ \operatorname{cotg}\varrho = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{\sin(p-a)} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}}{\sin(p-b)} = \frac{\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}}{\sin(p-c)} = \sqrt{\frac{\sin p}{\sin(p-a)\,.\,\sin(p-b)\,.\,\sin(p-c)}}$$

Aus den beiden ersten Gleichungen des Systems (1.) ergeben sich die vierte und die dritte der Nepperschen Gleichungen durch Division, resp. Multiplication.

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\,(p-a)}{\sin\,(p-b)}$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\,.\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} = \operatorname{cotg}^2\varrho\,.\,\sin\,(p-a)\,.\,\sin\,(p-b) = \frac{\sin p}{\sin\,(p-c)}$$

Die erste dieser Gleichungen ist nach bekannten Proportionsregeln umzugestalten in:

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\,(p-b) + \sin\,(p-a)}{\sin\,(p-b) - \sin\,(p-a)}$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}{\operatorname{tg}\frac{a-b}{2}}$$

Die zweite verlangt eine ähnliche Rechnung:

$$\frac{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\,.\,\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} + 1}{\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}\,.\,\operatorname{cotg}\frac{\beta}{2} - 1} = \frac{\sin\,p + \sin\,(p-c)}{\sin\,p - \sin\,(p-c)}$$

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{a+b}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c}{2}}$$

Es muss dem Leser üderlassen bleiben auch die beiden anderen Nepperschen Gleichungen mit den Hülfsmitteln dieses § abzuleiten.

Die Betrachtung des eingeschriebenen Kreises führt auch zu den Gaussischen Gleichungen. An dem Mittelpunkte desselben entstehen durch die nach den Ecken gezogenen Transversalen und die Radien nach den Berührungspunkten hin 6 Winkel, welche sich zu drei Paaren ordnen. Die drei verschiedenen Winkel mögen u, v, w heissen. $u + v + w = 180^0$, $\sin u = \sin\,(v + w)$.

Aus Δ AMB ist $$\frac{\sin \varrho}{\sin MA} = \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{\sin MA}{\sin c} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin(v+w)} = \frac{\sin \frac{\beta}{2}}{\sin u}$$

Durch Elimination von MA: $$\frac{\sin \varrho}{\sin c} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\sin u}$$

Aus Δ CMD: $$\frac{\sin(p-c)}{\sin \varrho} = \frac{\sin u}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

Durch Multiplication gehen ϱ und u fort und es bleibt:

$$\frac{\sin(p-c)}{\sin c} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2} \cdot \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \tag{3.}$$

Diese Relation lässt sich auf das Nebendreieck anwenden, welches die Seiten $180^0 - a$, $180^0 - b$, c und die Winkel $180^0 - \alpha$, $180^0 - \beta$, γ hat:

$$\frac{\sin p}{\sin c} = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \tag{4.}$$

Durch Addition, resp. Subtraktion von (3.) und (4.) erhält man zwei der Gaussischen Gleichungen, nämlich:

$$\frac{\sin \frac{a+b}{2}}{\sin \frac{c}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}, \quad \frac{\cos \frac{a+b}{2}}{\cos \frac{c}{2}} = \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

Die Ableitung der beiden fehlenden ist in ähnlicher Weise zu erreichen.

§ 8.

Umschriebener Kreis.

Man bezeichne in dem Dreieck ABC (Fig. 6) die durch die Radien des umschriebenen Kreises entstandenen drei verschiedenen Winkel an a, b, c mit ζ, η, ϑ.

$$\zeta = \frac{-\alpha+\beta+\gamma}{2}, \quad \eta = \frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}, \quad \vartheta = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$$

Mit Beziehung auf § 2. 3) und die kürzere Bezeichnung $\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 90^0 + \varepsilon$ erhält man die Relationen:

$$\operatorname{cotg} r = \operatorname{cotg} \frac{a}{2} \cdot \sin(\alpha-\varepsilon) = \operatorname{cotg} \frac{b}{2} \cdot \sin(\beta-\varepsilon) = \operatorname{cotg} \frac{c}{2} \cdot \sin(\gamma-\varepsilon) \tag{1.}$$

$$\operatorname{cotg} r = \sqrt{\frac{\sin \varepsilon}{\sin(\alpha-\varepsilon) \cdot \sin(\beta-\varepsilon) \cdot \sin(\gamma-\varepsilon)}} \tag{2.}$$

Wenn der Punkt C (Fig. 6) auf der Peripherie des durch ABC gelegten Kreises fortrückt, so bleibt der Theil ABM des Dreiecks ABC ungeändert oder, was dasselbe ist, $\vartheta = \frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}$ bleibt constant. In dem Nebendreieck A′B′C′ ist $\alpha' = 180^0 - \alpha$, $\beta' = 180 - \beta$, $\gamma' = \gamma$; mithin $\alpha' + \beta' + \gamma' = 360^0 - (\alpha + \beta - \gamma) = 360^0 - 2\vartheta$.

Rückt also der Punkt C auf dem um ABC gelegten Kreise fort, so bleibt dabei die Winkelsumme und damit auch der Inhalt jenes Nebendreiecks constant. Die Grundlinie A′B′ des Nebendreiecks bleibt bei dem angegebenen Fortrücken des Punktes C festliegen. Die Uebereinstimmung in dem Inhalte der Dreiecke A′B′C A′B′C′, A′B′C″ u. s. w. giebt uns den

Satz: Der Ort für die Spitzen aller Dreiecke, welche dieselbe Grundlinie AB (Fig. 7) und denselben Inhalt haben, ist der um das Nebendreieck DCE gelegte Kreis.

Aufgabe: Ein sphärisches Dreieck zu verwandeln in ein anderes, welches mit dem gegebenen die Grundlinie gemein, dagegen eine Höhe von bestimmter Grösse habe.

Auflösung. Die gegebene Höhe bestimmt einen zu der Grundlinie parallelen Kreis. Dieser schneidet den um das an der Spitze entstehende Nebendreieck gelegten Kreis in zwei Punkten. Jeder derselben kann als Spitze des gesuchten Dreiecks genommen werden.

Satz: Ist (Fig. 6) $\vartheta = 0$, d. h. geht die Grundlinie des Dreiecks durch den Mittelpunkt des umschriebenen Kreises, so ist $\alpha + \beta = \gamma$, d. h. die Summe der Winkel an der Grundlinie gleich dem Winkel an der Spitze, wie in dem rechtwinkeligen ebenen Dreieck.

§ 9.

Sehnen, Secanten, Tangenten.

Satz. Sehnen (oder Secanten) eines kleineren Kugelkreises, welche durch denselben Punkt gehen, werden durch diesen in Abschnitte von folgender Beschaffenheit getheilt: Das Product aus den Tangenten der halben Abschnitte einer Sehne (Secante) ist gleich dem Producte aus den Tangenten der halben Abschnitte der anderen. (Fig 8).

(1.) $\begin{cases} \text{Ebene:} & PA \,.\, PB = PA' \,.\, PB' \\ \text{Sphäre:} & \operatorname{tg}\frac{PA}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{PB}{2} = \operatorname{tg}\frac{PA'}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{PB'}{2} \end{cases}$

Folgerung: Sind die Abschnitte der einen Sehne einander gleich, so ist die Tangente des Viertels dieser Sehne mittlere Proportionale zwischen den Tangenten der halben Abschnitte der anderen.

(2.) $\begin{cases} \text{Ebene:} & PA^2 = PA' \,.\, PB' \\ \text{Sphäre:} & \operatorname{tg}^2\frac{PA}{2} = \operatorname{tg}\frac{PA'}{2} \,.\, \operatorname{tg}\frac{PB'}{2} \end{cases}$

Dem entspricht bei den Secanten der Fall, in welchem PA Tangente an den kleinen Kugelkreis ist. Die Form des Satzes bleibt hiefür unverändert dieselbe.

Den vorstehenden Sätzen schliessen sich noch folgende an über das bei C rechtwinkelige Dreieck, (Fig 9.):

(3.) Ebene: $h^2 = p \cdot q$, $a^2 = c \cdot p$
Sphäre: $\sin^2 h = tg\, p \cdot tg\, q$, $tg^2\, a = tg\, c \cdot tg\, p$

Satz. In jedem Sehnenviereck ist die Summe je zweier gegenüberliegender Winkel dieselbe.

Die Beweise der hier ausgesprochenen Sätze sind so einfach, dass sie keiner Andeutung bedürfen. Unter Sehnen, Secanten, Tangenten sind Theile grösster Kugelkreise zu verstehen.

§ 10.

Transversalen.

Satz 1. Eine grade Linie, welche die drei Seiten eines ebenen Dreiecks schneidet, bestimmt zwei Gruppen von je drei nicht aufeinanderfolgenden Abschnitten, deren Producte gleich sind.

In der sphärischen Trigonometrie bleibt dieser Satz insoweit ungeändert, als nur statt der Abschnitte selbst ihre Sinus eintreten. Die schneidende Linie ist hier ein grösster Kreis.

Der Beweis hiefür gestaltet sich wie in der Ebene als eine einfache Anwendung des Sinussatzes.

Fig. 10. Ebene: $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$
Sphäre: $\sin AF \cdot \sin BD \cdot \sin CE = \sin AE \cdot \sin BF \cdot \sin CD$

Folgerung: Sind D und E Halbirungspunkte der Seiten, so sind die Punkte FG, in denen der durch DE gelegte grösste Kreis die Grundlinie AB schneidet, von den Endpunkten A und B gleich weit entfernt.

Satz 2. Die Transversalen von irgend einem Punkte in der Ebene des Dreieckes nach den Ecken hin gezogen bestimmen auf den Seiten zwei Gruppen von je drei nicht aufeinanderfolgenden Abschnitten, deren Produkte gleich sind.

Für das sphärische Dreieck sind wieder nur statt der Abschnitte selbst ihre Sinus zu nehmen.

Fig. 11. Ebene: $AF \cdot BD \cdot CE = AE \cdot BF \cdot CD$
Sphäre: $\sin AF \cdot \sin BD \cdot \sin CE = \sin AE \cdot \sin . BF \cdot \sin CD$

Satz 3. (Umkehrung von 1. und 2.) Nimmt man auf den Seiten eines Dreiecks BC, CA, AB drei Punkte D, E, F an von der Beschaffenheit, dass die Producte der nicht aufeinanderfolgenden Abschnitte gleich sind, so liegen D, E, F entweder in einer graden Linie, nämlich dann, wenn eine grade Anzahl derselben (2) auf den Seiten selbst (nicht auf den Verlängerungen) liegt; oder die Strahlen AD, BE, CF schneiden sich in einem Punkte, nämlich dann, wenn eine ungrade Zahl jener drei Punkte (1 oder 3) auf den Seiten selbst liegt. Dieser Satz gilt auch für das sphärische Dreieck bis auf die Modification, dass an Stelle der Abschnitte wieder wie bisher ihre Sinus treten

Satz 4. Gehört eine ungrade Anzahl der Theilungspunkte D, E, F den Seiten selbst an (nicht ihren Verlängerungen), so schneidet die Verbindungslinie zweier

(D, E) die dritte Seite in einem Punkte (G), welcher zu ihren Endpunkten (A und B) und dem auf derselben liegenden Theilungspunkte (F) der vierte harmonische Punkt ist.

$$\begin{cases} \text{Ebene:} \quad AF : BF = AG : BG \\ \text{Sphäre:} \quad \sin AF : \sin BF = \sin AG : \sin BG \end{cases}$$

Satz 5. Wenn man von einem Punkte P in der Ebene eines Dreiecks auf die Seiten desselben Lothe fällt, so besteht zwischen den 6 Abschnitten der Seiten die Beziehung, dass die Summe der Quadrate von je drei nicht aufeinanderfolgenden dieselbe ist.

$$\text{Ebene:} \quad AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + BF^2 + CD^2$$
$$\text{Sphäre:} \quad \cos AF \,.\, \cos BD \,.\, \cos CE = \cos AE \,.\, \cos BF \,.\, \cos CD$$

Auch dieser Satz lässt sich umkehren.

Satz 6. Die drei Höhen eines sphärischen Dreiecks schneiden sich in demselben Punkte.

Es wird sich zeigen lassen, dass für die von den Höhen gebildeten Abschnitte beide Relationen bestehen:

$$\sin AF \,.\, \sin BD \,.\, \sin CE = \sin AE \,.\, \sin BF \,.\, \sin CD$$
$$\cos AF \,.\, \cos BD \,.\, \cos CE = \cos AE \,.\, \cos BF \,.\, \cos CD$$

und darum auch

$$\operatorname{tg} AF \,.\, \operatorname{tg} BD \,.\, \operatorname{tg} CE = \operatorname{tg} AE \,.\, \operatorname{tg} BF \,.\, \operatorname{tg} CD$$

§ 11.

Pythagoreischer Lehrsatz.

Der Inhalt eines ebenen Dreiecks $J = \frac{b \,.\, c \,.\, \sin \alpha}{2}$ wird bei festen Seiten b, c und dem variablen Winkel α ein Maximum, wenn $\alpha = 90^0$. Unter welchem Winkel müssen zwei gegebene Seiten b und c zu einem sphärischen Dreiecke zusammengestellt werden, damit der Inhalt desselben ein Maximum werde?

Zum Maximum werden soll $\alpha + \beta + \gamma$. Diese Summe bezeichne man mit x. Die drei Grössen α, β, γ, von denen x eine Funktion ist, sind nicht unabhängig von einander, sondern es bestehen zwischen ihnen die Gleichungen:

$$0 = \frac{\cos \beta + \cos \alpha \,.\, \cos \gamma}{\sin \alpha \,.\, \sin \gamma} - \cos b$$
$$0 = \frac{\cos \gamma + \cos \alpha \,.\, \cos \beta}{\sin \alpha \,.\, \sin \beta} - \cos c$$

Die erstere dieser Relationen zwischen α, β, γ bezeichne man mit y, die zweite mit z. Dann hat man nach einer bekannten Regel die partiellen Differentialquotienten der Funktion $x + \lambda y + \mu z$ nach α, β, γ zu nehmen und gleich Null zu setzen, um die Beziehung zwischen α, β, γ für den Fall des gesuchten Maximums zu finden.

$$(1.) \quad \frac{d\,(x + \lambda y + \mu z)}{d\alpha} = 1 + \lambda \,.\, \frac{dy}{d\alpha} + \mu \,.\, \frac{dz}{d\alpha} = 0$$
$$(2.) \quad \frac{d\,(x + \lambda y + \mu z)}{d\beta} = 1 + \lambda \,.\, \frac{dy}{d\beta} + \mu \,.\, \frac{dz}{d\beta} = 0$$
$$(3.) \quad \frac{d\,(x + \lambda y + \mu z)}{d\gamma} = 1 + \lambda \,.\, \frac{dy}{d\gamma} + \mu \,.\, \frac{dz}{d\gamma} = 0$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\alpha} = -\frac{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin\beta} = -\frac{\sin\beta\,.\cos c}{\sin\alpha\,.\sin\gamma} \\ \frac{dz}{d\alpha} = -\frac{\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma}{\sin^2\alpha\sin\beta} = -\frac{\sin\gamma\,.\cos b}{\sin\alpha\,.\sin\beta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\beta} = -\frac{\sin\beta}{\sin\alpha\,.\sin\gamma} \\ \frac{dz}{d\beta} = -\frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\,.\sin^2\beta} = -\frac{\sin\gamma\,.\cos a}{\sin\alpha\,.\sin\beta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dy}{d\gamma} = -\frac{\cos\alpha + \cos\beta\cos\gamma}{\sin\alpha\sin^2\gamma} = -\frac{\sin\beta\,.\cos a}{\sin\alpha\,.\sin\gamma} \\ \frac{dz}{d\gamma} = -\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha\,.\sin\beta} \end{cases}$$

Die Einsetzung dieser Werthe in (1.), (2.), (3.) ergiebt:

$$(4.)\qquad \begin{cases} 1 - \left(\frac{\lambda\,.\sin\beta}{\sin\,.\alpha\sin\gamma}\right).\cos c - \left(\frac{\mu\,.\sin\gamma}{\sin\alpha\,.\sin\beta}\right).\cos b = 0 \\ 1 - \left(\frac{\lambda\,.\sin\beta}{\sin\alpha\,.\sin\gamma}\right) \qquad - \left(\frac{\mu\,.\sin\gamma}{\sin\alpha\,.\sin\beta}\right).\cos a = 0 \\ 1 - \left(\frac{\lambda\,.\sin\beta}{\sin\alpha\,.\sin\gamma}\right).\cos a - \left(\frac{\mu\,.\sin\gamma}{\sin\alpha\,.\sin\beta}\right) \qquad = 0 \end{cases}$$

Daraus folgt:

$$\begin{vmatrix} 1, & \cos c, & \cos b \\ 1, & 1, & \cos a \\ 1, & \cos a, & 1 \end{vmatrix} = 0$$

d. h. (5.) $1 - \cos^2 a = \cos b - \cos a \cos b + \cos c - \cos a \cos c$,

oder (6.) $1 + \cos a = \cos b + \cos c$

Diese Gleichung ist leicht noch in folgende Form zu bringen:

$$(7.)\qquad \sin^2\frac{a}{2} = \sin^2\frac{b}{2} + \sin^2\frac{c}{2}$$

Mit Berücksichtigung von § 1 (2.) lässt sich Gl. (5.) auch folgendermassen schreiben:

$$\sin^2 a = \sin a\,.\sin c\,.\cos\beta + \sin a\,.\sin b\cos\gamma, \quad \text{oder}$$

$$\sin a = \sin c\,.\cos\beta + \sin b\cos\gamma$$

$$1 = \frac{\sin c}{\sin a}.\cos\beta + \frac{\sin b}{\sin a}.\cos\gamma = \frac{\sin\gamma\,.\cos\beta + \cos\gamma\,.\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$(8.)\qquad \sin\alpha = \sin(\beta + \gamma)$$

Hieraus ist nur der Schluss $\alpha = \beta + \gamma$ zu ziehen, da die Möglichkeit $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ bei dem sphärischen Dreiecke ausgeschlossen ist.

Nach § 8 ist die Bedingung $\alpha = \beta + \gamma$ dann erfüllt, wenn der Mittelpunkt des umschriebenen Kreises auf die Seite a fällt. Dem entsprechend sind also die gegebenen Seiten b und c zusammenzustellen, wenn der Inhalt des Dreiecks ein

Maximum sein soll. Der Winkel, unter welchem dies geschieht, ist bequem mit Hülfe der Nepperschen Gleichung:

§ 4. (5.) $$\operatorname{tg}\frac{\gamma+\beta}{2} = \frac{\cos\frac{c-b}{2}}{\cos\frac{c+b}{2}} \cdot \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$$ zu erhalten.

Für den Fall, dass $\alpha = \beta + \gamma$ ist, verwandelt sich dieselbe leicht in:

(9.) $$\cos\alpha = -\operatorname{tg}\frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{c}{2}.$$

Dr. Praetorius.