Die
Linien und Punkte
der
gleichen Potenzen bei Kreisen,
angewandt
auf das vollständige Vierseit.

Von

J. Tietz,

ordentlichem Lehrer am Königl. Gymnasium zu Conitz.

Conitz.

Gedruckt in der Buchdruckerei bei F. F. Harich.

1854.

§. 1.

Wenn die Geraden $M_1 M$ und $P O$ (Fig. 1.) auf einander senkrecht stehen, so ist für jeden Punkt P des Perpendikels $P O$

$$P O^2 = P M_1^2 - O M_1^2 \text{ und}$$
$$P O^2 = P M^2 - O M^2, \text{ folglich}$$
$$\overline{P M_1^2 - O M_1^2 = P M^2 - O M^2}, \text{ oder}$$
$$P M_1^2 - P M^2 = O M_1^2 - O M^2,$$

d. h. 1. der Unterschied der Quadrate der Abstände aller Punkte P des Perpendikels $P O$ von zwei festen Punkten M_1 und M ist eine unveränderliche Größe, nämlich gleich dem Unterschiede der Quadrate der Abstände des Fußpunktes O von den festen Punkten M_1 und M.

„Daher ist der geometrische Ort eines Punktes P, für welchen der Unterschied der Quadrate der Abstände von zwei festen Punkten M_1 und M eine gegebene Größe u^2 ist, eine Gerade $P O$, die auf der Geraden, welche die festen Punkte M_1 und M verbindet, senkrecht steht."

§. 2.

Sind daher die Punkte M_1 und M und die Größe u gegeben, und man soll den geometrischen Ort des Punktes P finden, für welchen

$$P M_1^2 - P M^2 = u^2$$

ist: so kommt es nur darauf an, den Punkt O zu finden. Hiezu aber ist

$$P M_1^2 - P M^2 = O M_1^2 - O M^2, \text{ und daher}$$
$$O M_1^2 - O M^2 = u^2,$$

woraus man sieht, daß $O M_1$, $O M$ und u die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks sind, und zwar $O M$ und u die Katheten desselben.

Daher errichte man in M (Fig. 2.) auf $M_1 M$ das Perpendikel $M N = u$, verbinde N mit M_1 und errichte im Mittelpunkte K der $M_1 N$ das Perpendikel $K O$: so ist der Schnittpunkt O dieses Perpendikels mit der Geraden $M_1 M$ der Fußpunkt des gesuchten geometrischen Ortes. Um daher diesen selbst zu finden, errichte man in O auf $M_1 M$ die Senkrechte $P O$, so ist dies der gesuchte geometrische Ort; denn zieht man $N O$, so ist nach der Konstruktion

$$ON = OM_1, \text{ daher}$$
$$u^2 = ON^2 - OM^2 = OM_1^2 - OM^2.$$

Weil aber für jeden Punkt P des Perpendikels P O

$$OM_1^2 - OM^2 = PM_1^2 - PM^2,$$

so ist für jeden Punkt P des Perpendikels P O auch

$$PM_1^2 - PM^2 = u^2,$$

und daher P O der gesuchte geometrische Ort.

Da die beiden Geraden K O und $M_1 M$ sich nur in einem Punkte O schneiden, und in dem Punkte O auf $M_1 M$ nur ein Perpendikel möglich ist: so giebt es außer P O keine zweite Linie, welche der aufgestellten Bedingung genügt.

2. „Daher giebt es keinen zweiten geometrischen Ort, der die aufgestellte Bedingung erfüllt; und jeder Punkt, welcher die obige Bedingung erfüllt, liegt in der gefundenen Ortslinie P O."

Zur Bestimmung der Lage des Punktes O ist, wenn $u < M_1 M$,

$$\sphericalangle M_1NM > \sphericalangle MM_1N, \text{ und da}$$
$$\sphericalangle MM_1N = \sphericalangle M_1NO, \text{ so ist}$$
$$\sphericalangle M_1NM > \sphericalangle M_1NO.$$

d. h. Für $u < M_1 M$ fällt N O zwischen $M_1 N$ und M N, also der Punkt O zwischen M_1 und M. Weil aber $NO > MO$ und $NO = M_1 O$, so ist auch $M_1 O > MO$. d. h. Der Punkt O liegt näher nach M als nach M_1 hin.

Nur für $u = 0$ fällt NM_1 mit $M_1 M$ zusammen, und dann wird O der Mittelpunkt von $M_1 M$.

Wenn $u = M_1 M$,

so ist

$$\sphericalangle M_1NM = \sphericalangle MM_1N, \text{ und da}$$
$$\sphericalangle MM_1N = \sphericalangle M_1NO, \text{ so ist auch}$$
$$\sphericalangle M_1NM = \sphericalangle M_1NO.$$

d. h. Für $u = M_1 M$ fällt der Punkt O mit M zusammen.

Wenn $u > M_1 M$,

so ist

$$\sphericalangle M_1NM < \sphericalangle MM_1N, \text{ und da}$$
$$\sphericalangle MM_1N = \sphericalangle M_1NO, \text{ so ist}$$
$$\sphericalangle M_1NM < \sphericalangle M_1NO.$$

d. h. Für $u > M_1 M$ fällt der Punkt O über M hinaus, in die Verlängerung von $M_1 M$.

3. „Somit fällt der Punkt O, für $u = 0$, in die Mitte zwischen M_1 und M; wächst u, so rückt O näher nach M hin, bis, für $u = M_1 M$, der Punkt O mit M zusammenfällt; wird endlich $u > M_1 M$, so fällt O über M hinaus, in die Verlängerung von $M_1 M$."

§. 3.

Aus den vorhergehenden Entwickelungen ergiebt sich sofort die Lösung folgender

Aufgabe. In einer Ebene sind zwei feste Kreise M_1 und M (Fig. 3.) gegeben: man soll den geometrischen Ort eines Punktes P unter der Bedingung finden, daß der Unterschied der Quadrate der Abstände des Punktes P von den Mittelpunkten M_1 und M der Kreise gleich ist dem Unterschiede der Quadrate der Radien, daß also

$$PM_1^2 - PM^2 = R_1^2 - R^2.$$

Konstr. Man beschreibe mit dem größeren Radius R_1 Kreise um die Punkte H und I, in welchen die Zentrallinie $M_1 M$ den kleineren Kreis schneidet; den Schnittpunkt N dieser Kreise verbinde man mit M_1 und M, errichte im Mittelpunkte K der $M_1 N$ das Perpendikel KO und errichte endlich in O die Senkrechte PO: so ist PO der gesuchte geometrische Ort.

Beweis. Es ist

$$LM : MN = MN : MQ, \text{ d. h.}$$
$$R_1 - R : MN = MN : R_1 + R, \text{ oder}$$
$$MN^2 = (R_1 + R)(R_1 - R) = R_1^2 - R^2.$$

Weil aber nach 1.

$$MN^2 = OM_1^2 - OM^2 = PM_1^2 - PM^2, \text{ so ist}$$
$$PM_1^2 - PM^2 = R_1^2 - R^2. \quad \text{w. z. b. w.}$$

Da die beiden mit R_1 um H und I beschriebenen Kreise für alle Werthe von R_1 und R sich schneiden, so ist die Aufgabe stets möglich. Ferner folgt aus 2.,

4. „daß es nur eine einzige Linie PO giebt, welche der Aufgabe genügt; und daß jeder Punkt, der die aufgestellte Bedingung erfüllt, in der Ortslinie PO liegt."

5. „Wenn die beiden Kreise M_1 und M (Fig. 4.) sich schneiden, so ist ihre gemeinschaftliche Sekante $P_1 P$ der in der vorhergehenden Aufgabe gesuchte geometrische Ort." Denn es ist

$$PM_1^2 - PM^2 = R_1^2 - R^2,$$
$$P_1M_1^2 - P_1M^2 = R_1^2 - R^2,$$
$$OM_1^2 - OM^2 = R_1^2 - R^2.$$

u. s. w.

6. „Wenn die beiden Kreise M_1 und M (Fig. 5.) sich berühren, so ist ihre gemeinschaftliche Tangente der in der vorhergehenden Aufgabe verlangte geometrische Ort." Denn es ist

$$PM_1^2 - PM^2 = OM_1^2 - OM^2 = R_1^2 - R^2.$$

7. „Wenn sich die beiden Kreise weder schneiden noch berühren, so kann die Ortslinie PO keinen der beiden Kreise treffen, sondern liegt ganz außerhalb beider Kreise."

Denn angenommen, die gedachte Ortslinie gehe durch den Punkt N der Kreislinie M_1 (Fig. 6.), so wäre

$$NM_1^2 - NM^2 = R_1^2 - R^2;$$

weil aber

$$NM_1^2 = R_1^2, \text{ so wäre auch}$$
$$NM^2 = R^2 \text{ und}$$
$$NM = R.$$

d. h. Der Punkt N läge auch in der Peripherie des Kreises M und wäre daher beiden Krei-

sen gemeinschaftlich, was der Annahme widerspricht, daß die beiden Kreise sich weder schneiden noch berühren sollen, also keinen Punkt gemein haben können.
Die vorstehende Betrachtung gilt unmittelbar auch für den Fall, daß der eine Kreis innerhalb des andern liegt.

Wenn der eine Kreis M (Fig. 6.) ganz außerhalb des andern M_1 liegt, so ist

$$\begin{aligned} M_1 M^2 &= (M_1 G + G H + H M)^2 \\ &= (R_1 \quad + U \quad + R)^2 \\ &= R_1^2 + R^2 + 2 R_1 R + 2(R_1 + R) U + U^2, \text{ daher} \\ M_1 M^2 &> R_1^2 + R^2 > R_1^2 - R^2. \end{aligned}$$

Setzen wir jetzt

$$\begin{aligned} R_1^2 - R^2 &= u^2, \text{ so ist} \\ M_1 M^2 &> u^2, \text{ d. h.} \\ M_1 M &> u. \end{aligned}$$

8. Unter dieser Bedingung aber liegt nach 3. der Schnittpunkt der gedachten Ortslinie zwischen M_1 und M; und da nach 7. die Ortslinie keinen der Kreise treffen kann, so fällt dieselbe zwischen die beiden Kreise.

§. 4.

a. Zieht man von einem beliebigen Punkte P (Fig. 7.) der Ortslinie P O nach den Kreisen M_1 und M die Tangenten P A und P B, so ist

$$\begin{aligned} P M_1^2 - P M^2 &= R_1^2 - R^2, \text{ oder} \\ P M_1^2 - R_1^2 &= P M^2 - R^2. \end{aligned}$$

Weil aber

$$\begin{aligned} P M_1^2 - R_1^2 &= P A^2 \text{ und} \\ P M^2 - R^2 &= P B^2, \text{ so ist} \\ P A^2 &= P B^2 \text{ und} \\ P A &= P B. \end{aligned}$$

9. „Die aus einem beliebigen Punkte der Ortslinie P O nach den Kreisen gezogenen Tangenten sind einander gleich."

Wenn umgekehrt

$$\begin{aligned} P A &= P B, \text{ so ist auch} \\ P A^2 &= P B^2. \end{aligned}$$

Weil aber

$$\begin{aligned} P A^2 &= P M_1^2 - R_1^2 \text{ und} \\ P B^2 &= P M^2 - R^2, \text{ so ist auch} \\ P M_1^2 - R_1^2 &= P M^2 - R^2, \text{ oder} \\ P M_1^2 - P M^2 &= R_1^2 - R^2. \end{aligned}$$

Deshalb aber liegt nach 4. der Punkt P in der Ortslinie P O.

10. „Jeder Punkt, von welchem die Tangenten nach den Kreisen M_1 und M gleich sind, liegt in der Ortslinie P O."

b. Wenn sich die beiden Kreise schneiden, und man verbindet einen Punkt P (Fig. 8.) der gemeinschaftlichen Sehne mit den Mittelpunkten M_1 und M, errichtet dann auf P M_1 und

PM in P die Perpendikel AC und BD: so sind dies die kleinsten unter allen Sehnen, welche durch den Punkt P möglich sind. — Da nun

$$PM_1^2 - PM^2 = R_1^2 - R^2, \text{ oder}$$
$$R_1^2 - PM_1^2 = R^2 - PM^2; \text{ ferner}$$
$$R_1^2 - PM_1^2 = PA^2 \text{ und}$$
$$R^2 - PM^2 = PB^2: \text{ so ist}$$
$$PA^2 = PB^2, \text{ d. h.}$$
$$AC = BD.$$

11. „Wenn sich zwei Kreise schneiden, so sind die durch einen beliebigen Punkt der gemeinschaftlichen Sehne in beiden Kreisen gezogenen kleinsten Sehnen einander gleich."

Umgekehrt überzeugt man sich leicht,

12. „daß jeder Punkt, für welchen die kleinsten Sehnen zweier sich schneidenden Kreise einander gleich sind, in der gemeinschaftlichen Sehne der Kreise liegt."

c. Zieht man durch den Punkt P (Fig. 7.) der Ortslinie PO zwei beliebige Sekanten PD und PF nach den Kreisen, so ist

$$PC \,.\, PD = PA^2 \text{ und}$$
$$PE \,.\, PF = PB^2;$$

weil aber nach 9.

$$PA^2 = PB^2, \text{ so ist}$$
$$PC \,.\, PD = PE \,.\, PF.$$

Umgekehrt, wenn

$$PC \,.\, PD = PE \,.\, PF, \text{ so ist auch}$$
$$PA^2 = PB^2.$$

Daher liegt nach 10. der Punkt P in der Ortslinie PO.

d. Zieht man ferner durch den Punkt P (Fig. 8.) der Ortslinie PO zwei beliebige Sehnen EF und GH, so ist

$$PA : PE = PF : PC, \text{ daher}$$
$$PA \,.\, PC = PA^2 = PE \,.\, PF;$$

ebenso

$$PB : PG = PH : PD, \text{ daher}$$
$$PB \,.\, PD = PB^2 = PG \,.\, PH;$$

weil aber nach 11.

$$PA^2 = PB^2, \text{ so ist}$$
$$PE \,.\, PF = PG \,.\, PH.$$

Umgekehrt, wenn

$$PE \,.\, PF = PG \,.\, PH, \text{ so ist auch}$$
$$PA^2 = PB^2 \text{ und}$$
$$PA = PB.$$

Daher liegt nach 12. der Punkt P in der Ortslinie PO.

e. Wenn man durch einen Punkt P (Fig. 7.) nach einem Kreise M_1 beliebige Sekanten PD, PH u. s. w. zieht, so ist

$$PC . PD = PG . PH = PK . PL = \text{u. s. w.}$$

Ebenso für jeden Punkt innerhalb des Kreises. Dies für alle durch P gehende Sekanten unveränderliche Produkt heißt „die Potenz des Kreises $M_{|}$ in Bezug auf den Punkt P." Hienach können wir die Resultate der Entwickelungen unter c. und d. in folgenden Sätzen aussprechen:

13. „Die Potenzen zweier Kreise $M_{|}$ und M sind in Bezug auf jeden Punkt ihrer Ortslinie PO einander gleich." Umgekehrt:

14. „Wenn die Potenzen zweier Kreise in Bezug auf einen Punkt einander gleich sind, so liegt dieser Punkt in der Ortslinie PO der beiden Kreise."

Deswegen heißt unsere Ortslinie PO „die Linie der gleichen Potenzen der Kreise $M_{|}$ und M." In Bezug auf die Punkte, welche außerhalb der Kreise liegen, heißt die Ortslinie PO auch „die Linie der gleichen Tangenten der Kreise $M_{|}$ und M."

§. 5.

Von drei beliebigen Kreisen M, $M_{|}$, $M_{||}$ (Fig. 9.), die in einer Ebene liegen, haben je zwei eine Linie gleicher Potenzen. Es sei

LO die Linie gleicher Pot. der Kreise M und $M_{|}$,
$L_{|}O_{|}$ „ „ „ „ „ „ M und $M_{||}$,
$L_{||}O_{||}$ „ „ „ „ „ „ $M_{|}$ und $M_{||}$.

Schneiden sich nun $L_{|}O_{|}$ und $L_{||}O_{||}$ in dem Punkte P, und man zieht von P beliebige Sekanten PB, $PB_{|}$ und $PB_{||}$ durch die Kreise: so ist nach 13.

$$PA . PB = PA_{||} . PB_{||} \text{ und}$$
$$PA_{|} . PB_{|} = PA_{||} . PB_{||}, \text{ daher auch}$$
$$PA . PB = PA_{|} . PB_{|},$$

d. h. Der Punkt P, in welchem sich $L_{|}O_{|}$ und $L_{||}O_{||}$ schneiden, liegt nach 14. auch in LO.

15. „Die drei Linien der gleichen Potenzen, welche zu irgend drei Kreisen einer Ebene gehören, schneiden sich in einem Punkte."

16. „Für jede drei Sekanten, welche durch P gehen, ist

$$PA . PB = PA_{|} . PB_{|} = PA_{||} . PB_{||};$$

und diese Bedingung kann außer P kein anderer Punkt erfüllen."
Das Letztere ergiebt sich unmittelbar aus 14. Es ist natürlich gleichgültig, ob der Punkt P außerhalb oder innerhalb der Kreise liegt. In Folge dieser Eigenschaft heißt P „der Punkt der gleichen Potenzen der drei Kreise."

§. 6.

Die Resultate der bisherigen Entwickelungen sind äußerst fruchtbar, und es ergeben sich daraus, als unmittelbare Folgerungen, Sätze, welche oft auf den ersten Blick in keinem Zusammenhange zu stehen scheinen. Als Beispiele nur folgende:

a. „Wenn drei Kreise in einer Ebene einander schneiden, so treffen die drei Sekanten, welche je zwei Kreisen gemein sind, in einem Punkte zusammen."

b. „Wenn von drei Kreisen in einer Ebene jeder die beiden andern berührt, so schneiden sich die drei Tangenten, welche je zwei Kreisen gemein sind, in einem Punkte."

c. „Wenn man durch einen Punkt der Linie der gleichen Potenzen zweier Kreise beliebige Sekanten durch die Kreise zieht, so liegen die vier Punkte, in welchen die Sekanten die Kreise schneiden, in einer dritten Kreislinie."

d. „Die drei Perpendikel, welche man in den Mittelpunkten auf den Seiten eines Dreiecks errichtet, schneiden sich in einem Punkte."

Die Sätze a. und b. sind spezielle Fälle von 15. Daß die Punkte C, D, E und F (Fig. 7.) in einer Kreislinie liegen, wie der Satz c. behauptet, folgt unmittelbar daraus, daß nach 13.

$$PC \cdot PD = PE \cdot PF.$$

Um den Satz d. zu beweisen, denke man sich um die Ecken des Dreiecks beliebige aber einander gleiche Kreise beschrieben, deren Radien R, R_I und R_{II} sind: so ist

$$R^2 - R_I^2 = R^2 - R_{II}^2 = R_I^2 - R_{II}^2 = u^2 = 0.$$

Unter dieser Bedingung aber gehen die drei Linien der gleichen Potenzen nach 3. durch die Mittelpunkte der Zentrallinien, d. h. durch die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks; nach 15. schneiden sie sich aber in einem Punkte.

§. 7.

Interessant und für unseren Zweck dienlich ist der spezielle Fall, wenn die drei Kreise M, M_I und M_{II} (Fig. 10.) sich in einem Punkte P schneiden, während ihre Mittelpunkte M, M_I und M_{II} mit dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte P in einer vierten Kreislinie liegen. Man ziehe die drei Linien der gleichen Potenzen PP_I, PP_{II}, PP_{III}; ziehe ferner MM_I, MM_{II} und $M_I M_{II}$; verbinde endlich P mit M, mit M_I und mit M_{II}. Wird alsdann noch P_{III} mit P_{II} und P_{III} mit P_I verbunden, so ist

$$\text{a.} \quad \sphericalangle\, PM_{II}M = \sphericalangle\, PM_I M,$$

als Peripheriewinkel auf demselben Bogen. Es ist aber

$$\text{b.} \quad \sphericalangle\, PM_{II}M = \sphericalangle\, PM_{II}O_I = \sphericalangle\, PP_{III}P_{II},$$

weil $\sphericalangle\, PM_{II}O_I$ die Hälfte des Zentriwinkels ist, der mit $\sphericalangle\, PP_{III}P_{II}$ auf demselben Bogen steht. Ebenso ist

$$\text{c.} \quad \sphericalangle\, PM_I M = \sphericalangle\, PM_I O = \sphericalangle\, PP_{III}P_I,$$

weil $\sphericalangle\, PM_I O$ die Hälfte des Zentriwinkels ist, der mit $\sphericalangle\, PP_{III}P_I$ auf demselben Bogen steht. Aus den Gleichungen a., b. und c. aber folgt, daß

$$\text{d.} \quad \sphericalangle\, PP_{III}P_{II} = \sphericalangle\, PP_{III}P_I.$$

d. h. Die Geraden $P_{III}P_{II}$ und $P_{III}P_I$ bilden mit PP_{III} gleiche Winkel. Weil aber die Punkte P_{II} und P_I auf derselben Seite der Geraden PP_{III} liegen, und zu gleichen Peripheriewinkeln gleiche Bogen gehören: so geht, in Folge der Gleichung d., die Verlängerung von $P_{III}P_{II}$ durch P_I, und die drei Punkte P_{III}, P_{II}, P_I liegen in einer Geraden. Wir haben daher folgenden Satz:

17. „Wenn sich drei Kreise in einem Punkte schneiden, und der gemeinschaftliche Schnittpunkt mit ihren Mittelpunkten in einer vierten Kreislinie liegt: so liegen die drei übrigen Schnittpunkte jener Kreise in einer geraden Linie."

Nehmen wir umgekehrt an, daß die drei Punkte P_{III}, P_{II} und P_I in einer Geraden liegen, während sich die Kreise M, M_I und M_{II} in P schneiden: so ist

$$\measuredangle\, PP_{III}P_{II} = \measuredangle\, PP_{III}P_I.$$

Weil aber

$$\measuredangle\, PP_{III}P_{II} = \measuredangle\, PM_{II}O_I = \measuredangle\, PM_{II}M \text{ und}$$
$$\measuredangle\, PP_{III}P_I = \measuredangle\, PM_IO = \measuredangle\, PM_IM, \text{ so ist auch}$$
$$\measuredangle\, PM_{II}M = \measuredangle\, PM_IM.$$

d. h. Die Punkte P, M, M_I und M_{II} liegen in einer Kreislinie, und wir können sagen:

18. „Wenn sich drei Kreise in einem Punkte schneiden, während die drei übrigen Schnittpunkte in einer Geraden liegen: so liegen die Mittelpunkte und der gemeinschaftliche Schnittpunkt in einer vierten Kreislinie."

Sind ferner O, O_I, O_{II} die Schnittpunkte der Zentrallinien mit den entsprechenden Linien der gleichen Potenzen, so ist

$$PO = OP_I,\ PO_I = O_IP_{II},\ PO_{II} = O_{II}P_{III}, \text{ folglich}$$
$$PO : PP_I = PO_I : PP_{II} = PO_{II} : PP_{III} = 1:2.$$

Wenn daher die Punkte P_{III}, P_{II}, P_I in einer Geraden liegen, so liegen auch die Punkte O_{II}, O_I und O in einer Geraden. Da aber PO_{II}, PO_I und PO senkrecht stehen auf den Seiten des Dreiecks MM_IM_{II}, so haben wir aus **17.** unmittelbar folgenden Satz:

19. „Wenn man um ein Dreieck einen Kreis beschreibt und aus einem beliebigen Punkte der Kreislinie Perpendikel fällt auf die Seiten des Dreiecks: so liegen die Fußpunkte dieser Perpendikel in einer Geraden." Ebenso erhalten wir aus **18.** folgenden Satz:

20. „Wenn die Perpendikel, welche man auf den Seiten eines Dreiecks errichtet, sich in einem Punkte schneiden, während ihre Fußpunkte in einer Geraden liegen: so liegt ihr Schnittpunkt in der dem Dreieck umschriebenen Kreislinie.

Während im Vorhergehenden die Sätze **19.** und **20.** aus **17.** und **18.** abgeleitet sind, läßt sich ebenso leicht der umgekehrte Weg einschlagen, indem man **17.** und **18.** aus **19.** und **20.** ableitet. Weil nämlich

$$\measuredangle\, M_{II}O_{II}P = \measuredangle\, M_{II}O_IP = 90^\circ,$$

so liegen die Punkte M_{II}, O_{II}, O_I, P in einer Kreislinie, und es ist

$$\alpha.\ \measuredangle\, PO_{II}O_I = \measuredangle\, PM_{II}O_I,$$

als Peripheriewinkel auf demselben Bogen. Wenn aber die Punkte P, M, M_I und M_{II} auf einer Kreislinie liegen, so ist

$$\beta.\quad \measuredangle\, PM_{II}O_{I} = \measuredangle\, PM_{II}M = \measuredangle\, PM_{I}M;$$

weil ferner auch die Punkte P, O, M_I und O_{II} auf einer Kreislinie liegen, indem

$$\measuredangle\, PO_{II}M_{I} = \measuredangle\, POM_{I} = 90^0\text{: so ist}$$

$$\gamma.\quad \measuredangle\, PM_{I}M = \measuredangle\, PM_{I}O = \measuredangle\, PO_{II}O.$$

Aus den Gleichungen α., β. und γ. folgt, daß

$$\delta.\quad \measuredangle\, PO_{II}O_{I} = \measuredangle\, PO_{II}O.$$

d. h. Die Geraden $O_{II}O_I$ und $O_{II}O$ bilden mit PO_{II} gleiche Winkel. Weil aber O_I und O auf derselben Seite von PO_{II} liegen, weil ferner die Punkte O_{II}, M_I, O, P in einer Kreislinie liegen, und weil zu gleichen Peripheriewinkeln gleiche Bogen gehören: so geht in Folge der Gleichung δ. die Verlängerung von $O_{II}O_I$ durch O, und die drei Punkte O_{II}, O_I und O liegen in einer Geraden, welches der unter **19.** ausgesprochene Satz ist. Ebenso leicht läßt sich der Satz **20.** beweisen. Dann aber hat es keine Schwierigkeit, aus **19.** und **20.** die Sätze **17.** und **18.** abzuleiten.

§. 8.

Nehmen wir einen vierten Kreis M_{IV} (Fig. 11.) hinzu, der die drei Kreise des vorhergehenden Paragraphs in ihrem gemeinschaftlichen Schnittpunkte P schneidet, und dessen Mittelpunkt gleichfalls in der Kreislinie M liegt: so liegen nach **17.**

die Punkte P_I, P_{II}, P_{III} in einer Geraden
und auch " " P_I, P^I, P^{II} " " "
" " " " P^{III}, P^I, P_{II} " " "
" " " " P^{III}, P^{II}, P_{III} " " ".

Von diesen sechs Punkten liegen daher je drei in einer Geraden, und es werden dadurch vier Gerade a, b, c, d bestimmt, die sich in sechs Punkten schneiden. „**Vier Gerade, die sich in sechs Punkten schneiden, heißen ein vollständiges Vierseit.**“ Das vollständige Vierseit hat sechs Ecken A, B, C, D, E, F (Fig. 12.) und drei Diagonalen AF, BD, CE; ferner enthält das vollständige Vierseit vier Dreiecke AED, ABC, FCD und FBE.

Betrachten wir jetzt (Fig. 11.) das vollständige Vierseit als gegeben, so sind die Kreise M_I, M_{II}, M_{III}, M_{IV} den vier Dreiecken desselben umschrieben. Der Kreis M_{II} ist dem Dreieck $P_IP^{II}P_{III}$, und der Kreis M_{III} dem Dreieck $P^{III}P_{II}P_{III}$ umschrieben. Daher liegt der Punkt P^{II} auf der Peripherie des Kreises M_{II} und innerhalb des Kreises M_{III}, andrerseits der Punkt P_{II} auf der Peripherie des Kreises M_{III} und innerhalb des Kreises M_{II}. Deshalb aber schneiden sich die Kreise M_{II} und M_{III} und haben außer dem Punkte P_{III} noch einen zweiten Punkt P gemeinschaftlich. Fällt man nun von P auf die Seiten a, b, c, d des vollständigen Vierseits Perpendikel PA, PB, PC, PD: so liegt nach **19.** sowohl B mit A und D, als auch C mit A und D in einer Geraden; weil aber durch A und D nur eine Gerade möglich ist, so liegen alle vier Punkte A, B, C, D in einer und derselben Geraden.

Wenn aber die Punkte A, B, C in einer Geraden liegen, und die Perpendikel AP, BP, CP sich in einem Punkte P schneiden: so liegt nach **20.** der Punkt P in der dem Dreieck $P_IP^IP_{II}$ umschriebenen Kreislinie, und es geht somit auch der Kreis M_I durch den Punkt P. Ebenso geht die Kreislinie M_{IV} durch den Punkt P, weil B, C, D in einer Geraden liegen, und die Perpendikel BP, CP, DP im Punkte P zusammentreffen. Die vier Kreise haben daher einen gemeinschaftlichen Schnittpunkt P.

Gehen wir jetzt noch einen Schritt weiter, so liegen nach 18. die Punkte P, M_{I}, M_{II}, M_{III} auf einer Kreislinie, weil nämlich die Kreise M_{I}, M_{II} und M_{III} sich im Punkte P schneiden, und die drei übrigen Schnittpunkte P_{I}, P_{II}, P_{III} in einer Geraden liegen. Ebenso liegen nach 18. die Punkte P, M_{IV}, M_{III}, M_{II} in einer Kreislinie, weil die Kreise M_{IV}, M_{III}, M_{II} sich in P schneiden, und die drei übrigen Schnittpunkte P^{III}, P^{II}, P_{III} in einer Geraden liegen. Daher liegt sowohl M_{I} als auch M_{IV} mit P, M_{II}, M_{III} auf einer Kreislinie; weil aber durch drei Punkte P, M_{II}, M_{III} nur eine Kreislinie möglich ist: so liegen alle fünf Punkte P, M_{I}, M_{II}, M_{III}, M_{IV} auf einer und derselben Kreislinie, und wir haben folgende Sätze:

21. „Wenn man um die vier Dreiecke eines vollständigen Vierseits Kreise beschreibt, so schneiden sich die vier Kreise in einem Punkte; und wenn man von dem gemeinschaftlichen Schnittpunkte der Kreise Perpendikel fällt auf die vier Seiten des vollständigen Vierseits, so liegen die Fußpunkte dieser Perpendikel in einer Geraden."

22. „Der Schnittpunkt der vier Kreise und ihre Mittelpunkte liegen auf einer neuen Kreislinie."

§. 9.

Konstruirt man (Fig. 13.) die Höhen der vier Dreiecke des vollständigen Vierseits, welches durch die vier Geraden a, b, c, d gebildet wird: so schneiden sich

die Höhen AL, BW, CN des Dreiecks ABC in einem Punkte P,
„ „ CG, DK, FV „ „ CDF „ „ „ P_{I},
„ „ BH, EI, FO „ „ BEF „ „ „ P_{II},
„ „ AZ, DR, EU „ „ ADE „ „ „ P_{III}.

Beschreibt man alsdann um die Mittelpunkte M_{II}, M_{I} und M der Diagonalen des vollständigen Vierseits Kreise, welche die Diagonalen zu Durchmessern haben:

so geht der Kreis M_{II} durch die Punkte B, H, R, D, W und K,
„ „ M_{I} „ „ „ C, N, I, E, G und U,
„ „ M „ „ „ A, F, Z, O, V und L.

I. Jetzt ist

α. $\Delta PWC \sim \Delta PNB$, somit
$PW : PC = PN : PB$, d. h.
a. $PW \cdot PB = PC \cdot PN$.
β. $\Delta PCL \sim \Delta PAN$, somit
$PC : PL = PA : PN$, oder
b. $PC \cdot PN = PL \cdot PA$.

Aus den Gleichungen a. und b. aber folgt, daß

$$PW \cdot PB = PC \cdot PN = PL \cdot PA;$$

und daher erfüllt nach 16. der Punkt P die Bedingung des Punktes der gleichen Potenzen der drei Kreise M_{II}, M_{I} und M.

II. Es ist

$\alpha.\ \Delta P_I K C \sim \Delta P_I G D$, somit
$P_I K : P_I C = P_I G : P_I D$, oder
c. $P_I K \,.\, P_I D = P_I C \,.\, P_I G$.
$\beta.\ \Delta P_I C V \sim \Delta P_I F G$, somit
$P_I C : P_I V = P_I F : P_I G$, oder
d. $P_I C \,.\, P_I G = P_I V \,.\, P_I F$.

Aus den Gleichungen c. und d. aber folgt, daß

$$P_I K \,.\, P_I D = P_I C \,.\, P_I G = P_I V \,.\, P_I F;$$

und daher erfüllt nach 16. auch P_I die Bedingung des Punktes der gleichen Potenzen der drei Kreise M_{II}, M_I und M.

III. Es ist

$\alpha.\ \Delta P_{II} B I \sim \Delta P_{II} E H$, somit
$P_{II} B : P_{II} I = P_{II} E : P_{II} H$, oder
e. $P_{II} B \,.\, P_{II} H = P_{II} I \,.\, P_{II} E$.
$\beta.\ \Delta P_{II} I F \sim \Delta P_{II} O E$, somit
$P_{II} I : P_{II} F = P_{II} O : P_{II} E$, oder
f. $P_{II} I \,.\, P_{II} E = P_{II} F \,.\, P_{II} O$.

Aus den Gleichungen e. und f. aber folgt, daß

$$P_{II} B \,.\, P_{II} H = P_{II} I \,.\, P_{II} E = P_{II} F \,.\, P_{II} O;$$

und daher erfüllt nach 16. auch P_{II} die Bedingung des Punktes der gleichen Potenzen der drei Kreise M_{II}, M_I und M.

IV. Endlich ist

$\alpha.\ \Delta P_{III} R E \sim \Delta P_{III} U D$, somit
$P_{III} R : P_{III} E = P_{III} U : P_{III} D$, oder
g. $P_{III} R \,.\, P_{III} D = P_{III} E \,.\, P_{III} U$.
$\beta.\ \Delta P_{III} E Z \sim \Delta P_{III} A U$, somit
$P_{III} E : P_{III} Z = P_{III} A : P_{III} U$, oder
h. $P_{III} E \,.\, P_{III} U = P_{III} Z \,.\, P_{III} A$.

Aus den Gleichungen g. und h. aber folgt, daß

$$P_{III} R \,.\, P_{III} D = P_{III} E \,.\, P_{III} U = P_{III} Z \,.\, P_{III} A;$$

und daher erfüllt nach 16. auch P_{III} die Bedingung des Punktes der gleichen Potenzen der drei Kreise M_{II}, M_I und M.

Hiernach hätten die drei Kreise M_{II}, M_I und M vier Punkte der gleichen Potenzen. Weil aber jede drei Kreise nur drei Linien der gleichen Potenzen haben, und drei Gerade wiederum nur in einem Punkte zusammentreffen können: so fallen entweder die vier Punkte P, P_I, P_{II}, P_{III} zusammen, oder die drei Linien der gleichen Potenzen. Fielen aber etwa die drei Punkte P, P_I und P_{II} zusammen, so würden auch die Perpendikel PL, $P_I K$ und $P_{II} I$ zusammenfallen, weil sie alle drei auf der Geraden b senkrecht stehen; wenn aber wiederum die Perpendikel PL, $P_I K$ und $P_{II} I$ zusammenfielen, so müßten die Punkte A, D, E, durch welche jene Lothe gehen, in einer Geraden liegen; d. h. die Geraden c und d fielen zusammen, und wir hätten kein vollständiges Vierseit mehr.

Folglich können die vier Punkte P, P_{I}, P_{II}, P_{III} nicht zusammenfallen, sondern die drei Linien der gleichen Potenzen der Kreise M_{II}, M_{I} und M fallen zusammen; die drei Kreise haben also eine gemeinschaftliche Linie der gleichen Potenzen, welche durch die vier Punkte P, P_{I}, P_{II}, P_{III} geht. Diese Punkte sind aber die Höhenpunkte der vier Dreiecke des vollständigen Vierseits.

Verbinden wir alsdann M mit M_{I} und M mit M_{II}, so steht sowohl $M M_{I}$ als auch $M M_{II}$ senkrecht auf $P P_{III}$, der gemeinschaftlichen Linie der gleichen Potenzen. Weil aber von einem Punkte auf eine Gerade nur ein Perpendikel möglich ist, so liegen die Punkte M, M_{I} und M_{II} in einer Geraden, welche senkrecht steht auf $P P_{III}$. Wir haben daher folgende Sätze:

23. „Die drei Kreise, deren Durchmesser die Diagonalen eines vollständigen Vierseits sind, haben eine gemeinschaftliche Linie der gleichen Potenzen. Wenn daher zwei dieser Kreise sich schneiden, so geht der dritte durch ihre Schnittpunkte; wenn zwei sich berühren, so berührt der dritte beide in ihrem Berührungspunkte.“

24. „Die Mittelpunkte der drei Diagonalen eines vollständigen Vierseits liegen in einer Geraden.“

25. „Die Höhenpunkte der vier Dreiecke, welche von den Seiten eines vollständigen Vierseits gebildet werden, liegen in einer andern Geraden, welche auf der vorigen senkrecht steht.“

Conitz, den 14. Mai 1854.

J. Tietz.

№. I.

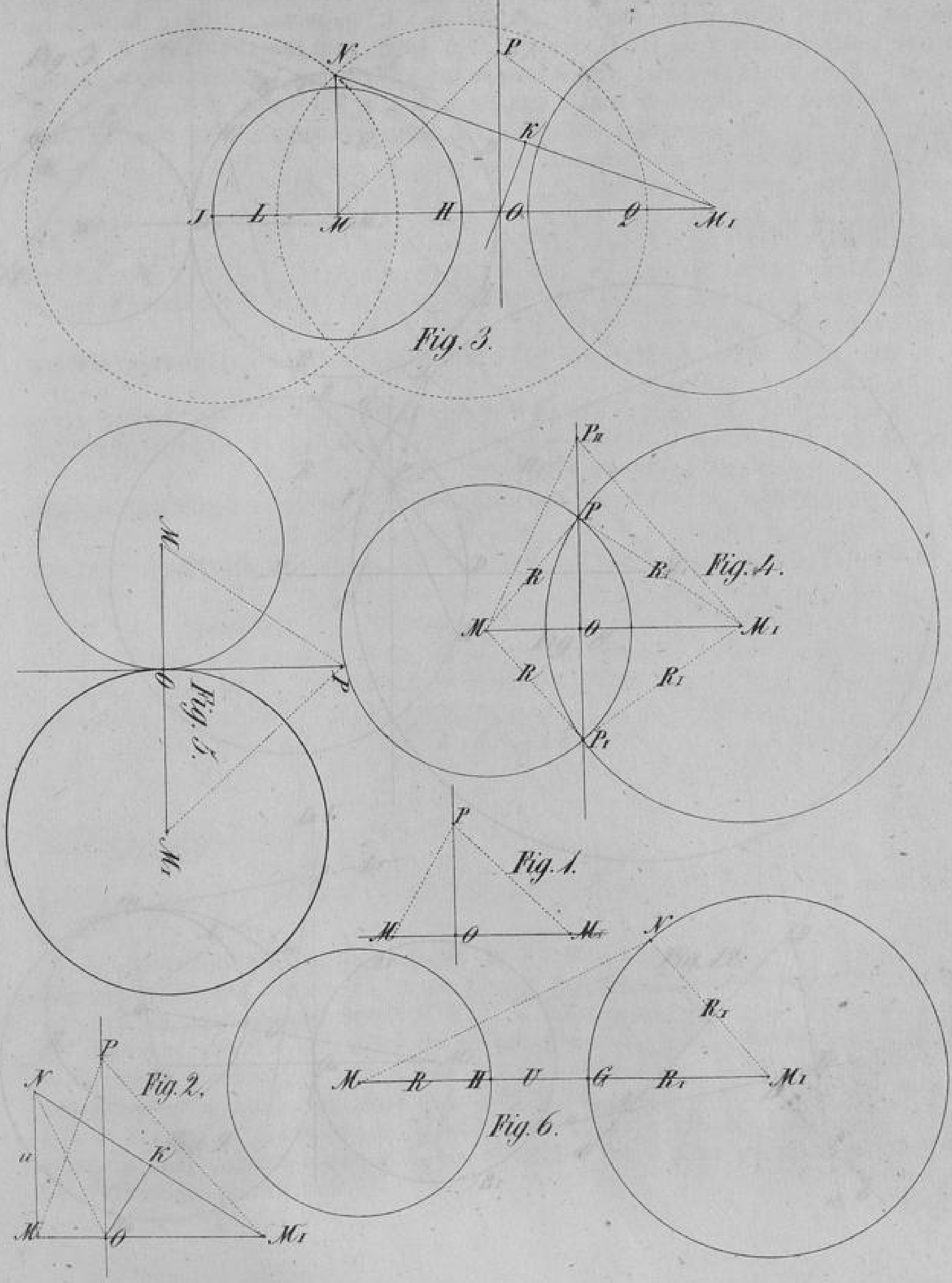


Fig. 3.

Fig. 4.

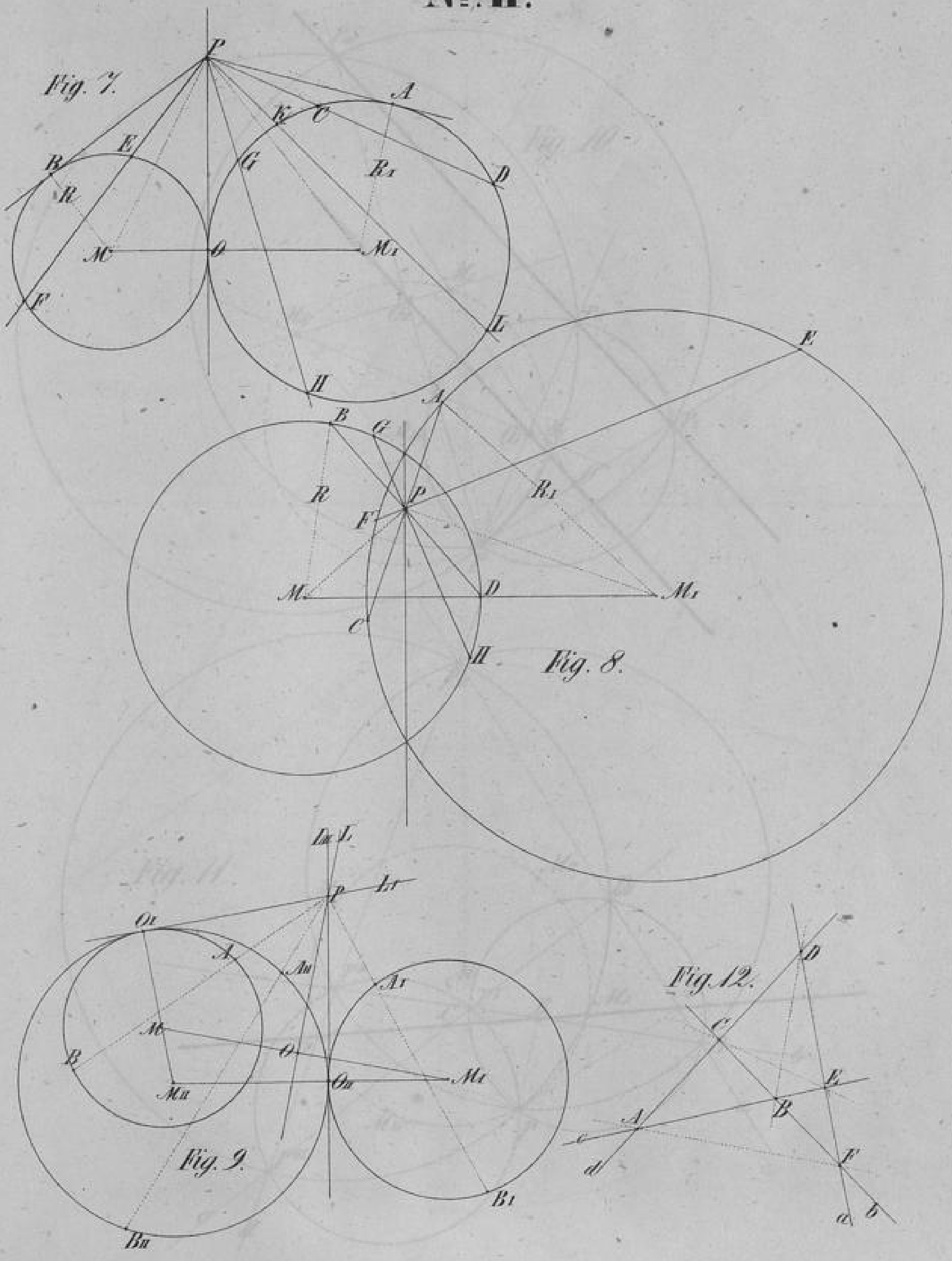
Fig. 5.

Fig. 1.

Fig. 2.

Fig. 6.

№ II.



No. III.

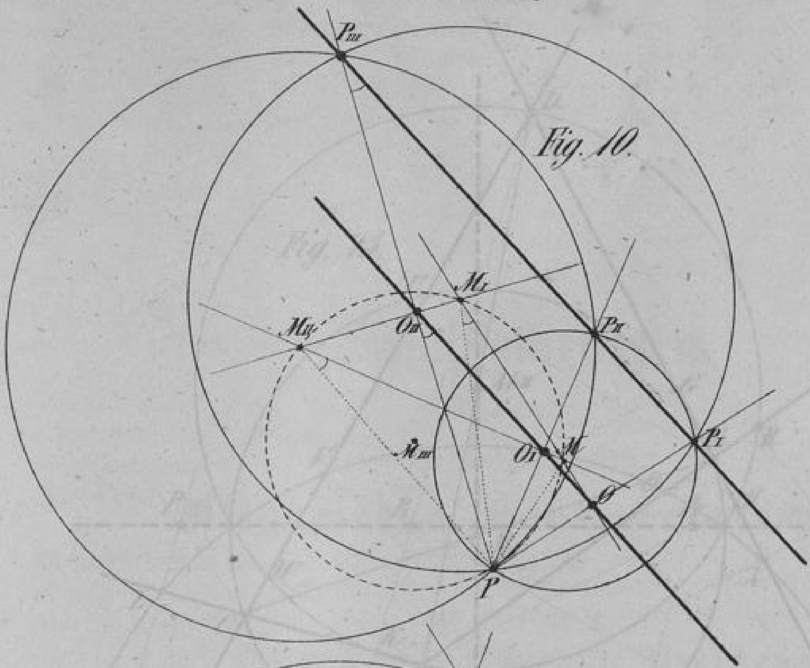


Fig. 10.

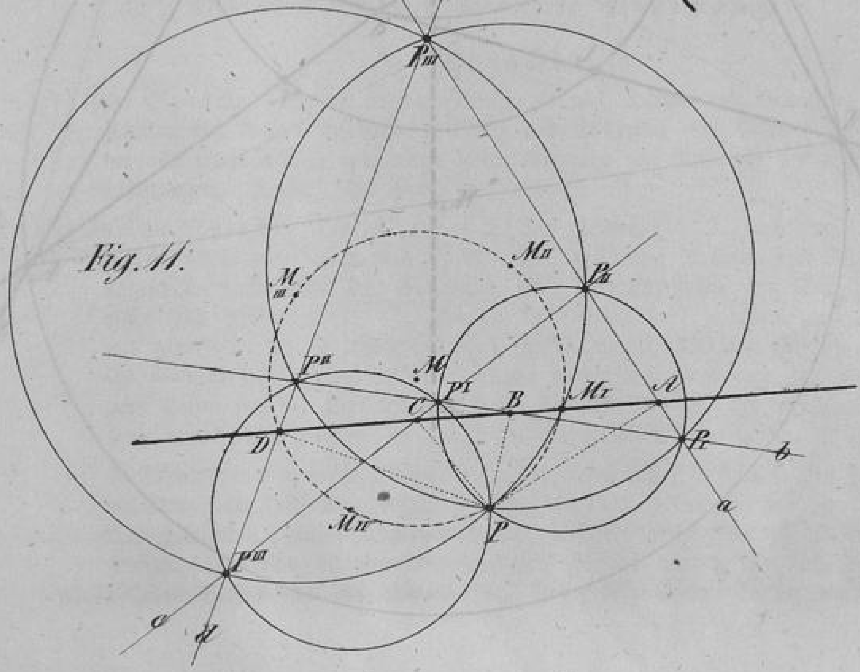


Fig. 11.

№. IV.