Ueber

die bestimmten Integrale

von der Form

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{N},$$

in denen

$$N = l + l^{\prime} \cos^2 \varphi + l^{\prime\prime} \sin^2 \varphi + 2m \cos\varphi \sin\varphi + 2m^{\prime} \sin\varphi + 2m^{\prime\prime} \cos\varphi$$

ist.

Von

A. Wichert.

CONITZ.

Gedruckt in der Buchdruckerei von F. F. Harich.

1851.

Die Integration des Ausdruckes $\int \frac{d\varphi}{N}$ giebt gleichzeitig die Werthe von

$$\int \frac{\cos\varphi \,.\, d\varphi}{N}, \int \frac{\sin\varphi \,.\, d\varphi}{N}, \int \frac{\cos^2\varphi \,.\, d\varphi}{N}, \int \frac{\sin^2\varphi \,.\, d\varphi}{N}, \text{u.} \int \frac{\cos\varphi \sin\varphi \,.\, d\varphi}{N},$$

in welchen N die angegebene Form hat:

$$N = l + l^{\prime} \cos^{\prime} \varphi + l^{\prime\prime} \sin^2 \varphi + 2\, m \cos\varphi \sin\varphi + 2\, m^{\prime} \sin\varphi + 2\, m^{\prime\prime} \cos\varphi;$$

es sollen durch Folgendes die Werthe dieser sechs Integrale in den bestimmten Grenzen von 0 bis 2π für den Fall gefunden werden, dass N für keinen reellen Werth von φ verschwindet und die Mittel angegeben werden um allgemein

$$\int \frac{\cos i\varphi \,.\, d\varphi}{N^k}, \quad \int \frac{\sin i\varphi \,.\, d\varphi}{N^k}$$

zu finden, wenn i und k ganze positive Zahlen sind. Die Methode der Lösung dieser Aufgabe ist eine dreifache, da jene Werthe einmal durch Transformation des Ausdruckes N, dann durch Zerfällung desselben in seine Faktoren und durch Reihen-Entwickelung gegeben werden können. Jede dieser Methoden wollen wir anwenden und die Identität der gefundenen Resultate nachzuweisen versuchen.

Die Integration der angegebenen sechs Ausdrücke bietet nach den gewöhnlichen Regeln der Integralrechnung keine Schwierigkeiten mehr dar, wenn N unter die Form gebracht worden

$$N = k + k^{\prime} \sin^2 \psi + k^{\prime\prime} \cos^2 \psi;$$

eine Transformation, wie wir sie von C. G. J. Jacobi im Crelleschen Journal B. 2 und 8 angegeben finden. Es sei zu dem Ende

$$\cos\varphi = \frac{y}{x}, \qquad \sin\varphi = \frac{z}{x}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dann wird

$$N = \frac{1}{x^2}\left(l\,x^2 + l^{\prime}\,y^2 + l^{\prime\prime}\,z^2 + 2\,m\,y\,z + 2\,m^{\prime}\,x\,z + 2\,m^{\prime\prime}\,y\,x\right).$$

Um diesen Ausdruck unter die Form

$$N = g - g^{\prime}\cos^2\psi - g^{\prime\prime}\sin^2\psi$$

zu bringen, sei auch für ihn

$$\cos\psi = \frac{v}{u}, \qquad \sin\psi = \frac{w}{u}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wodurch wir

$$g - g^{\prime}\cos^2\psi - g^{\prime\prime}\sin^2\psi = \frac{1}{u^2}\left(g u^2 - g^{\prime}\,v^2 - g^{\prime\prime}\,w^2\right)$$

erhalten, und es ist dann die Aufgabe dieser Transformationen keine andere, als die Gleichung der Oberflächen zweiter Ordnung auf die Hauptaxen zu reduziren. Es geschieht dieses durch die bekannte Substitution:

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha u - \beta v - \gamma w \\ y &= \alpha^{\prime} u - \beta^{\prime} v - \gamma^{\prime} w \\ z &= \alpha^{\prime\prime} u - \beta^{\prime\prime} v - \gamma^{\prime\prime} w, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

bei welcher aus der Gleichung

$$y^2 + z^2 - x^2 = v^2 + w^2 - u^2 = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

die zwischen $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ sowie zwischen $\cos\psi$ und $\sin\psi$ Statt findet, folgende zwei Systeme von Gleichungen abgeleitet werden:

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{\prime 2} + \alpha^{\prime\prime 2} - \alpha^2 &= -1 \\ \beta^{\prime 2} + \beta^{\prime\prime 2} - \beta^2 &= 1 \\ \gamma^{\prime 2} + \gamma^{\prime\prime 2} - \gamma^2 &= 1 \end{aligned}\right\} \ldots (5) \qquad \left.\begin{aligned} \alpha^{\prime}\beta^{\prime} + \alpha^{\prime\prime}\beta^{\prime\prime} - \alpha\beta &= 0 \\ \alpha^{\prime}\gamma^{\prime} + \alpha^{\prime\prime}\beta^{\prime\prime} - \alpha\gamma &= 0 \\ \beta^{\prime}\gamma^{\prime} + \beta^{\prime\prime}\gamma^{\prime\prime} - \beta\gamma &= 0 \end{aligned}\right\} \ldots (6)$$

Um nun die Grössen u, v, w durch x, y, z auszudrücken, wollen wir die erste der Gleichungen (3) mit α, die zweite mit $\alpha^{\prime}$, die dritte mit $\alpha^{\prime\prime}$ multipliziren und von der Summe der beiden letztern die erste abziehen, und dieses Verfahren wiederholen, nachdem wir die erste mit β, die zweite mit $\beta^{\prime}$, die dritte mit $\beta^{\prime\prime}$ und die erste mit γ, die zweite mit $\gamma^{\prime}$ und die drittte mit $\gamma^{\prime\prime}$ multiplizirt haben; dann erhalten wir mit Hülfe der Bedingungsgleichungen (5) und (6):

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{u} = \alpha \mathrm{x} - \alpha^{\prime} \mathrm{y} - \alpha^{\prime\prime} \mathrm{z} \\ \mathrm{v} = \beta \mathrm{x} - \beta^{\prime} \mathrm{y} - \beta^{\prime\prime} \mathrm{z} \\ \mathrm{w} = \gamma \mathrm{x} - \gamma^{\prime} \mathrm{y} - \gamma^{\prime\prime} \mathrm{z} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und aus (4) die ähnlichen Bedingungen

$$\left.\begin{array}{l} \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 = -1 \\ \beta^{\prime 2} + \gamma^{\prime 2} - \alpha^{\prime 2} = 1 \\ \beta^{\prime\prime 2} + \gamma^{\prime\prime 2} - \alpha^{\prime\prime 2} = 1 \end{array}\right\} . \;.\;. \quad (8) \qquad \left.\begin{array}{l} \beta\beta^{\prime} + \gamma\gamma^{\prime} - \alpha\alpha^{\prime} = 0 \\ \beta^{\prime}\beta^{\prime\prime} + \gamma^{\prime}\gamma^{\prime\prime} - \alpha^{\prime}\alpha^{\prime\prime} = 0 \\ \beta^{\prime\prime}\beta + \gamma^{\prime\prime}\gamma - \alpha^{\prime\prime}\alpha = 0. \end{array}\right\} . \;.\;. \quad (9)$$

Setzt man dagegen

$$\varepsilon = \alpha\,(\gamma^{\prime}\beta^{\prime\prime} - \beta^{\prime}\gamma^{\prime\prime}) + \beta\,(\alpha^{\prime}\gamma^{\prime\prime} - \gamma^{\prime}\alpha^{\prime\prime}) + \gamma\,(\beta^{\prime}\alpha^{\prime\prime} - \alpha^{\prime}\beta^{\prime\prime}), \quad \ldots \quad (10)$$

so giebt die Auflösung der Gleichungen (3)

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon u = (\beta^{\prime}\gamma^{\prime\prime} - \gamma^{\prime}\beta^{\prime\prime})x + (\gamma\beta^{\prime\prime} - \beta\gamma^{\prime\prime})y + (\beta\gamma^{\prime} - \gamma\beta^{\prime})z \\ \varepsilon v = (\gamma^{\prime\prime}\alpha^{\prime} - \alpha^{\prime\prime}\gamma^{\prime})x + (\gamma\alpha^{\prime\prime} - \alpha\gamma^{\prime\prime})y + (\gamma^{\prime}\alpha - \alpha\gamma^{\prime})z \\ \varepsilon w = (\alpha^{\prime\prime}\beta^{\prime} - \beta^{\prime\prime}\alpha^{\prime})x + (\beta^{\prime\prime}\alpha - \alpha^{\prime\prime}\beta)y + (\alpha^{\prime}\beta - \alpha\beta^{\prime})z \end{array}\right\} . \quad \ldots\ldots \quad (11)$$

und die Vergleichung der Coëffizienten der Gleichungen (7) und (11) folgende neun Bedingungsgleichungen unter den Substitutionsgrössen α, $\alpha^{\prime}$, $\alpha^{\prime\prime}$, β, $\beta^{\prime}$, $\beta^{\prime\prime}$, γ, $\gamma^{\prime}$ und $\gamma^{\prime\prime}$:

$$\left.\begin{array}{lll} \varepsilon\alpha = \beta^{\prime}\gamma^{\prime\prime} - \gamma^{\prime}\beta^{\prime\prime}; & \varepsilon\beta = \gamma^{\prime\prime}\alpha^{\prime} - \gamma^{\prime}\alpha^{\prime\prime}; & \varepsilon\gamma = \alpha^{\prime\prime}\beta^{\prime} - \beta^{\prime\prime}\alpha^{\prime} \\ -\varepsilon\alpha^{\prime} = \gamma\beta^{\prime\prime} - \beta\gamma^{\prime\prime}; & -\varepsilon\beta^{\prime} = \gamma\alpha^{\prime\prime} - \alpha\gamma^{\prime\prime}; & -\varepsilon\gamma^{\prime} = \alpha\beta^{\prime\prime} - \beta\alpha^{\prime\prime} \\ -\varepsilon\alpha^{\prime\prime} = \beta\gamma^{\prime} - \gamma\beta^{\prime}; & -\varepsilon\beta^{\prime\prime} = \gamma^{\prime}\alpha - \alpha^{\prime}\gamma; & -\varepsilon\gamma^{\prime\prime} = \alpha^{\prime}\beta - \beta^{\prime}\alpha \end{array}\right\} . \quad (12)$$

Wenn wir je drei von diesen Gleichungen quadriren so erhält man mit Rücksicht auf (5)

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon\varepsilon = (\beta^{\prime}\gamma^{\prime\prime} - \gamma^{\prime}\beta^{\prime\prime})^2 - (\gamma\beta^{\prime\prime} - \beta\gamma^{\prime\prime})^2 - (\beta\gamma^{\prime} - \gamma\beta^{\prime})^2 \\ \quad = (\beta^2 - \beta^{\prime 2} - \beta^{\prime\prime 2})(\gamma^2 - \gamma^{\prime 2} - \gamma^{\prime\prime 2}) - (\beta\gamma - \beta^{\prime}\gamma^{\prime} - \beta^{\prime\prime}\gamma^{\prime\prime})^2 = 1, \end{array}\right\} \quad (13)$$

und $\varepsilon = \pm 1$,

wo wir von diesen willkührlichen Zeichen das $+$ wählen wollen.

Wenn man nun u, v und w durch x, y, z ausgedrückt in den Ausdruck $g\,u^2 - g^{\prime}\,v^2 - g^{\prime\prime}\,w^2$ substituirt und die einzelnen Coëffizienten denen in

$lx^2 + l'y^2 + l''z^2 + 2myz + 2m'zx + 2m''xy$ gleich setzt, so erhält man folgende sechs Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{ll}
1) & g\alpha^2 - g'\beta^2 - g''\gamma^2 = l \\
2) & g\alpha'^2 - g'\beta'^2 - g''\gamma'^2 = l' \\
3) & g\alpha''^2 - g'\beta''^2 - g''\gamma''^2 = l'' \\
4) & g\alpha'\alpha'' - g'\beta'\beta'' - g''\gamma'\gamma'' = m \\
5) & -g\alpha\alpha'' + g'\beta\beta'' + g''\gamma\gamma'' = m' \\
6) & -g\alpha'\alpha + g'\beta'\beta + g''\gamma'\gamma = m'',
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

die, verbunden mit den sechs unabhängigen Bedingungs-Gleichungen zwischen den Substitutionsgrössen, von denen die übrigen nur eine Folge waren, sowohl die neun Coëffizienten der Substitution, wie die drei Grössen g, g', g'' geben.

Wir können nämlich die Gleichungen (14) folgender Massen zu je drei schreiben: 1), 6), 5); dann 6), 2), 4); dann 5), 4), 3) und erhalten:

$$\left.\begin{array}{ll}
\alpha\cdot g\alpha - \beta\cdot g'\beta - \gamma\cdot g''\gamma = l & -\alpha\cdot g\alpha' + \beta\cdot g'\beta' + \gamma\cdot g''\gamma' = m'' \\
-\alpha'\cdot g\alpha + \beta'\cdot g'\beta + \gamma'\cdot g''\gamma = m'' & \alpha'\cdot g\alpha' - \beta'\cdot g'\beta' - \gamma'\cdot g''\gamma = l' \\
-\alpha''\cdot g\alpha + \beta''\cdot g'\beta + \gamma''\cdot g''\gamma = m', & \alpha''\cdot g\alpha' - \beta''\cdot g'\beta' - \gamma''\cdot g''\gamma' = m, \\
\multicolumn{2}{c}{-\alpha\cdot g\alpha'' + \beta\cdot g'\beta'' + \gamma\cdot g''\gamma'' = m'} \\
\multicolumn{2}{c}{\alpha'\cdot g\alpha'' - \beta'\cdot g'\beta'' - \gamma'\cdot g''\gamma'' = m} \\
\multicolumn{2}{c}{\alpha''\cdot g\alpha'' - \beta''\cdot g'\beta'' - \gamma''\cdot g''\gamma'' = l''.}
\end{array}\right\} \quad . \quad (15)$$

Jedes System dieser Gleichungen kann man, cfr. (5) und (8), umkehren und es giebt dann ein neues in folgender Gestalt:

$$\left.\begin{array}{ll}
g\alpha = \alpha l + \alpha' m'' + \alpha'' m' & -g\alpha' = \alpha m'' + \alpha' l' + \alpha'' m \\
g'\beta = \beta l + \beta' m'' + \beta'' m' & -g'\beta' = \beta m'' + \beta' l' + \beta'' m \\
g''\gamma = \gamma l + \gamma' m'' + \gamma'' m', & -g''\gamma' = \gamma m'' + \gamma' l' + \gamma'' m, \\
\multicolumn{2}{c}{-g\alpha'' = \alpha m' + \alpha' m + \alpha'' l''} \\
\multicolumn{2}{c}{-g'\beta'' = \beta m' + \beta' m + \beta'' l''} \\
\multicolumn{2}{c}{-g''\gamma'' = \gamma m' + \gamma' m + \gamma'' l''.}
\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

Diese Gleichungen lassen sich so schreiben, dass die ersten, zweiten und dritten aus jedem System zusammengestellt werden können, oder dass sie die Form bekommen:

$$\left.\begin{array}{ll}(l-g)\alpha+m''\alpha'+m'\alpha''=0 & (l-g')\beta+m''\beta'+m'\beta''=0\\ m''\alpha+(l'+g)\alpha'+m\alpha''=0 & m''\beta+(l'+g')\beta'+m\beta''=0\\ m'\alpha+m\alpha'+(l''+g)\alpha''=0, & m'\beta+m\beta'+(l''+g')\beta''=0,\\ \multicolumn{2}{c}{(l-g'')\gamma+m''\gamma'+m'\gamma''=0}\\ \multicolumn{2}{c}{m''\gamma+(l'+g'')\gamma'+m\gamma''=0}\\ \multicolumn{2}{c}{m'\gamma+m\gamma'+(l''+g'')\gamma''=0.}\end{array}\right\}\quad\ldots (17)$$

Eliminirt man aus dem ersten Systeme der Gleichungen (17) die Grössen α, α', und α'', aus dem zweiten die Grössen β, β' und β'' und aus dem dritten γ, γ' und γ'', so erhält man jedes Mal dieselbe Gleichung, aus welcher g, g' und g'' bestimmt werden; oder, mit andern Worten, es sind diese drei Grössen die drei Wurzeln der kubischen Gleichung:

$$(l-x)(l'+x)(l''+x)-m^2(l-x)-m'^2(l'+x)-m''^2(l''+x)+2mm'm''=0,\quad (18)$$

die entwickelt die Form hat:

$$x^3-Ax^2+Bx-C=0,$$

und in welcher

$$\left.\begin{array}{l}A=l-l'-l''\\ B=m'^2+m''^2-m^2+l'l''-ll'-ll''\\ C=ll'l''-m^2l-m'^2l'-m''^2l''+2m'm''m\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots (19)$$

ist.

Wir wollen vorläufig die Reellität der drei Wurzeln dieser Gleichung für den Fall, dass N für keinen reellen Werth von φ verschwindet, voraussetzen und durch dieselben und die Coëffizienten von N die Substitutionsgrössen α, α' etc. ausdrücken.

Aus drei Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{array}{l}Ax+cy+bz=0\\ cx+By+az=0\\ bx+ay+Cz=0\end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (20)$$

kann man leicht aus je zweien die Proportionen entwickeln:

$$x:y:z=ac-Bb:bc-Aa:AB-c^2$$
$$x:y:z=ab-Cc:AC-b^2:bc-Aa$$
$$x:y:z=BC-a^2:ab-Cc:ac-Bb;$$

aus welchen dann, wenn die erste mit z, die zweite mit y, die dritte mit x in ihren unbekannten Theilen multiplizirt wird, resultirt:

$$x^2 : y^2 : z^2 : yz : zx : xy = BC - a^2 : AC - b^2 : AB - c^2 : bc - Aa : ca - Bb : ab - Cc. \quad (21)$$

Wenn wir dieses bei den Gleichungen (17) anwenden, bei welchen

$$\left.\begin{array}{ll} A = l - g & c = m'' \\ B = l' + g & b = m' \\ C = l'' + g & a = m \end{array}\right\}$$

ist, und in denen wir mit ϱ den konstanten Faktor bezeichnen wollen, in den α, α' und α'' multiplizirt sind; so folgen daraus die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} \varrho^2\, \alpha\alpha = (l' + g)(l'' + g) - m^2 \\ \varrho^2\, \alpha'\alpha' = (l - g)(l'' + g) - m'^2 \\ \varrho^2\, \alpha''\alpha'' = (l - g)(l' + g) - m''^2 \\ \varrho^2\, \alpha'\alpha'' = m'm'' - (l - g)\, m \\ \varrho^2\, \alpha''\alpha = m m'' - (l' + g)\, m' \\ \varrho^2\, \alpha\alpha' = m m' - (l'' + g)\, m''. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Die Grösse ϱ lässt sich aber leicht mit Hülfe der Gleichungen (5) bestimmen; denn subtrahirt man von der Summe der zweiten und dritten die erste der Gleichungen (22), so giebt dies

$$-\varrho^2 = (l - g)(l'' + g) - m'^2 + (l - g)(l' + g) - m''^2 - (l' + g)(l'' + g) + m^2. \quad (23)$$

Die Vergleichung dieses Werthes von $-\varrho^2$ mit der kubischen Gleichung (18) zeigt, dass er das Differentiale derselben ist, wenn man nach der Differentiation $x = g$ setzt; und bezeichnet man mit g, g', g'' die drei Wurzeln dieser Gleichung, so können wir derselben auch die Form geben

$$-1 \,.\, (x - g)(x - g')(x - g'') = 0;$$

deren Differentiale:

$$-1\,[(x - g')(x - g'') + (x - g'')(x - g) + (x - g')(x - g)]$$

ist, so dass wir, für $x = g$ eingesetzt, erhalten:

$$\varrho^2 = (g - g')(g - g''). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

Ein ähnliches Raisonnement giebt, wie man sich leicht überzeugen kann, aus dem zweiten Systeme der Gleichungen (17) für die Verhältnisse

$$\beta\beta : \beta'\beta' : \beta''\beta'' : \beta'\beta'' : \beta''\beta : \beta\beta'$$

dieselben Ausdrücke in g' und den Coëffizienten von N und ist ϱ' der konstante Faktor, in welchen die Substitutionsgrössen β, β' und β'' multiplizirt sind, so ist:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho'^2\beta\beta &= (l'+g')(l''+g') - m^2 \\
\varrho'^2\beta'\beta' &- (l''+g')(l-g') - m'^2 \\
\varrho'^2\beta''\beta'' &= (l-g')(l'+g') - m''^2 \\
\varrho'^2\beta'\beta'' &= m'm'' - (l-g')\,m \\
\varrho'^2\beta''\beta &= m''m - (l'+g')\,m' \\
\varrho'^2\beta\beta' &= mm' - (l''+g')\,m'',
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

wo ϱ' das Differentiale der kubischen Gleichung (18) ist, doch nach der Differentiation darin g' für x gesetzt, oder $\varrho'^2 = -(g'-g'')(g'-g)$. ..... (26)

Auf dieselbe Weise folgen aus dem dritten Systeme der Gleichungen (17), wenn ϱ'' dieselbe Beziehung zu γ, γ', γ'' hat wie ϱ zu α, α' und α'', für die Substitutionsgrössen γ, γ' und γ'' so wie für ϱ'' die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho''^2\gamma\gamma &= (l'+g'')(l''+g'') - m^2 \\
\varrho''^2\gamma'\gamma' &= (l''+g'')(l-g'') - m'^2 \\
\varrho''^2\gamma''\gamma'' &= (l-g'')(l'+g'') - m''^2 \\
\varrho''^2\gamma'\gamma'' &= m'm'' - (l-g'')\,m \\
\varrho''^2\gamma''\gamma &= mm'' - (l'+g'')\,m' \\
\varrho''^2\gamma\gamma' &= mm' - (l''+g'')\,m'',
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (27)$$

und für ϱ

$$\varrho''^2 = -(g''-g')(g''-g). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28)$$

Um nun die vorgelegten bestimmten Integrale in dieser transformirten Gestalt zu erhalten, war aus den Substitutionsgleichungen (1), (2) und (3)

$$d.\cos\varphi = d.\,\frac{\alpha' - \beta'\cos\psi - \gamma'\sin\psi}{\alpha - \beta\cos\psi - \gamma\sin\psi},$$

oder $$-\sin\varphi\,.\,d\varphi = \frac{-\alpha'' + \beta''\cos\psi + \gamma'\sin\psi}{(\alpha - \beta\cos\psi - \gamma\sin\psi)^2}\,d\psi,$$

woraus $$d\varphi = \frac{d\psi}{\alpha - \beta\cos\psi - \gamma\sin\psi}; \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

so dass

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{d\varphi}{N}&=\int\frac{\alpha-\beta\cos\psi-\gamma\sin\psi}{g-g'\cos^2\psi-g''\sin^2\psi}\,d\psi\\ \int\frac{\cos\varphi\,.\,d\varphi}{N}&=\int\frac{\alpha'-\beta'\cos\psi-\gamma'\sin\psi}{g-g'\cos^2\psi-g''\sin^2\psi}\,d\psi\\ \int\frac{\sin\varphi\,.\,d\varphi}{N}&=\int\frac{\alpha''-\beta''\cos\psi-\gamma''\sin\psi}{g-g'\cos^2\psi-g''\sin^2\psi}\,d\psi\end{aligned}\right\}\;\ldots\ldots\quad(30)$$

wird, und $\int\frac{\sin^2\varphi\,.\,d\varphi}{N}$, $\int\frac{\cos^2\varphi\,.\,d\varphi}{N}$, $\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,.\,d\varphi}{N}$ auf die ersten drei Integrale reduzirt werden können, wie dieses später nachgewiesen werden soll.

Um die Untersuchung über die Reellität der drei Wurzeln der kubischen Gleichung jetzt aufzunehmen, wollen wir den Ausdruck N in zwei reelle Faktoren zerfällen. Es sei zu dem Ende in ihm $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$, wodurch er die Gestalt bekommt

$$N=l\left\{1+\frac{l'}{l}x^2+\frac{l''}{l}y^2+\frac{2m}{l}xy+\frac{2m'}{l}y+\frac{2m''}{l}x\right\}$$

und der in Parenthese gesetzte Theil sofort in seine Faktoren $1+\alpha x+\beta y$ und $1+\alpha' x+\beta' y$ zerlegt werden könnte, wenn nicht x und y durch die Bedingungsgleichung $x^2+y^2-1=0$ mit einander verbunden wären. Wenn man jedoch dieselben mit dem Faktor λ multiplizirt und dem zu zerlegenden Ausdrucke addirt, so erhält man aus der Vergleichung der Coëffizienten der jetzt als unabhängig zu betrachtenden Variabeln auf beiden Seiten der Gleichung

$$(1+\alpha x+\beta y)(1+\alpha' x+\beta' y)=1+\frac{l'+\lambda}{l-\lambda}x^2+\frac{l''+\lambda}{l-\lambda}y^2+\frac{2m}{l-\lambda}xy+\frac{2m'}{l-\lambda}y+\frac{2m''}{l-\lambda}x\quad(31)$$

folgende fünf Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}&\alpha\alpha'=\frac{l'+\lambda}{l-\lambda},\qquad \beta\beta'=\frac{l''+\lambda}{l-\lambda},\qquad \alpha\beta'+\beta\alpha'=\frac{2m}{l-\lambda},\\ &(\alpha+\alpha')=\frac{2m''}{l-\lambda},\qquad \beta+\beta'=\frac{2m'}{l-\lambda},\end{aligned}\right\}\;.\;(32)$$

durch welche α, α', β, β' und λ bestimmt werden können.

Man findet nämlich unter α, α', β und β' folgende Bedingungsgleichung:

$$(\alpha\beta'+\beta\alpha')(\alpha+\alpha')(\beta+\beta')+4\alpha\alpha'\beta\beta'=(\alpha\beta'+\beta\alpha')^2+(\beta+\beta')^2\alpha\alpha'+(\alpha+\alpha')^2\beta\beta',$$

welche, darin aus (32) die entsprechenden Werthe gesetzt, die Form annimmt:

$$\frac{8mm'm''}{(l-\lambda)^3}+\frac{4(l'+\lambda)(l''+\lambda)}{(l-\lambda)^2}=\frac{4m^2}{(l-\lambda)^2}+\frac{4m'^2(l'+\lambda)}{(l-\lambda)^3}+\frac{4m''^2(l''+\lambda)}{(l-\lambda)^3},$$

und dieselbe kubische Gleichung von (18) ist, nachdem sie mit 4 dividirt und mit $(l-\lambda)^3$ multiplizirt worden, oder

$$2mm'm''-m^2(l-\lambda)-m'^2(l'+\lambda)-m''^2(l''+\lambda)+(l-\lambda)(l'+\lambda)(l''+\lambda)=0 \quad (33)$$

geworden ist.

Da diese Gleichung wenigstens eine reelle Wurzel haben muss, so sei dieselbe λ und dazu angewendet, die Grössen α, α', β und β' aus (32) zu bestimmen. Wir finden dann:

$$\left.\begin{aligned}
\alpha&=\frac{m''\pm\sqrt{m''^2-(l'+\lambda)(l-\lambda)}}{l-\lambda}, & \beta'&=\frac{m'\mp\sqrt{m'^2-(l''+\lambda)(l-\lambda)}}{l-\lambda},\\
\alpha'&=\frac{m''\mp\sqrt{m''^2-(l'+\lambda)(l-\lambda)}}{l-\lambda}, & \alpha\beta'&=\frac{m\pm\sqrt{m^2-(l''+\lambda)(l'+\lambda)}}{l-\lambda},\\
\beta&=\frac{m'\pm\sqrt{m'^2-(l''+\lambda)(l-\lambda)}}{l-\lambda}, & \beta\alpha'&=\frac{m\mp\sqrt{m^2-(l''+\lambda)(l'+\lambda)}}{l-\lambda}.
\end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Es sei

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt{m''^2-(l'+\lambda)(l-\lambda)}&=\sqrt{R''}\\
\sqrt{m'^2-(l''+\lambda)(l-\lambda)}&=\sqrt{R'}\\
\sqrt{m^2-(l'+\lambda)(l''+\lambda)}&=\sqrt{R},
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (35)$$

so bestimmen sich die Zeichen von $\sqrt{R''}$ und $\sqrt{R'}$ so, dass sie entgegengesetztes Zeichen haben, wenn $m'm''-m(l-\lambda)$ negativ ist, im entgegengesetzten Falle haben sie gleiche Zeichen; denn jene kubische Gleichung (33) ist auch eine Folge von

$$m'm''-m(l-\lambda)=\sqrt{R'}\,\sqrt{R''}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (36)$$

wie man sich leicht überzeugt, wenn man diese Gleichung ins Quadrat erhebt, auf beiden Seiten $m'^2m''^2$ subtrahirt und den übrigen Theil durch $(l-\lambda)$ dividirt. Ist dieses bestimmt, so ist es gleichgültig, ob man dem α oder α', dem β oder β' das positive Zeichen der Quadratwurzel giebt, weil dadurch nur die Ordnung der Faktoren verändert wird.

Auch die Grössen $\sqrt{R^{\prime}}$, $\sqrt{R^{\prime\prime}}$ und $\sqrt{R}$ lassen sich immer als reelle Grössen darstellen. Hat man eine Gleichung $u=0$ vom vierten Grade

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (37)$$

so lässt sich dieselbe durch die bekannte Substitution von $x=x^{\prime}-\frac{a}{4}$ in die Gestalt bringen

$$x^{\prime 4}+Gx^{\prime 2}+Hx^{\prime}+I=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (38)$$

wo
$$\left.\begin{aligned} G &= b-\frac{3}{8}a^2 \\ H &= \frac{a^3}{8}-\frac{ba}{2}+c \\ I &= -\frac{3a^4}{256}+\frac{ba^2}{16}-\frac{ca}{4}+d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (39)$$

ist. Die Gleichung (38) können wir nun immer in die beiden reellen Faktoren zerlegen

$$(x^{\prime 2}+px^{\prime}+q)(x^{\prime 2}-px^{\prime}+q^{\prime}),$$

wo p durch die Gleichung gegeben wird

$$p^6+2Gp^4+(G^2-4I)p^2-H^2=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (40)$$

welche, da das letzte Glied immer negativ ist, wenigstens eine positive Wurzel für p^2 d. h. p reell geben muss, durch welches q und $q^{\prime}$ lineär ausgedrückt werden.

Auch ohne das zweite Glied fortzuschaffen kann man dem Ausdrucke $u=0$ die Form geben

$$(x^2+\frac{1}{2}ax+r)^2-(sx+t)^2=0,$$

und erhält dann durch Vergleichung der Coëffizienten der Potenzen von x

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{4}a^2-s^2+2r &= b \\ ar-rst &= c \\ r^2-t^2 &= d, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (41)$$

aus welchen drei Gleichungen r, s und t durch a, b, c und d gefunden werden können. Es ist nämlich aus der ersten und dritten Gleichung

$$s^2 = -b + \tfrac{1}{4}a^2 + 2r$$
$$t^2 = r^2 - d$$

und aus der zweiten $4s^2t^2 = (ar - c)^2$, woraus zur Bestimmung von r die kubische Gleichung resultirt:

$$8r^3 - 4br^2 + (2ac - 8d)r - a^2d + 4bd - c^2 = 0. \quad \ldots \quad (42)$$

Will man diese Gleichung mit der von (40) vergleichen, so wird dieselbe, für G, H und I die Werthe aus (39) eingesetzt,

$$p^6 + (2b - \tfrac{3}{4}a^2)p^4 + (b^2 - a^2b + \tfrac{3}{16}a^4 + ca - 4d)p^2$$
$$-\left(\frac{a^6}{64} + \frac{b^2a^2}{4} + c^2 - \frac{a^4b}{8} - bac + \frac{a^3c}{4}\right) = 0.$$

Setzen wir $p^2 = p_{|}^2 + \frac{a^2}{4}$, so wird sie

$$p_{|}^6 + 2bp_{|}^4 + (b^2 + ca - 4d)p_{|}^2 + bac - a^2d - c^2 = 0,$$

und für $p_{|}^2 = p_{||}^2 - b$ gesetzt,

$$p_{||}^6 - bp_{||}^4 + (ac - 4d)p_{||}^2 + 4bd - a^2d - c^2 = 0, \quad \ldots\ldots \quad (43)$$

eine Gleichung, welche die Form von (42) erhält, wenn man darin $p_{||}^2 = 2r$ nimmt. Verfolgt man hier die Substitutionen $r = \frac{p_{||}^2}{2} = \frac{p_{|}^2 + b}{2}$, so ist $p_{|}^2 = 2r - b$. Da aber p^2 eine positive Grösse sein muss, so bleibt es auch $p_{|}^2 + \frac{a^2}{4}$, also auch $\frac{a^2}{4} + 2r - b$ oder der Werth von s^2, d. h. auch s muss reell sein und also auch t. Die direkte Zerfällung des Ausdruckes $u = o$ in zwei reelle Faktoren des zweiten Grades $(x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 + \alpha^{|} x + \beta^{|}) = 0$ führt durch die Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha + \alpha^{|} = a \\ &\beta + \beta^{|} + \alpha\alpha^{|} = b \\ &\alpha\beta^{|} + \beta\alpha^{|} = c \\ &\beta\beta^{|} = d \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (44)$$

zu der kubischen Gleichung

$$y^3 - 2by^2 + (b^2 - 4d + ca)y + da^2 - cab + c^2 = 0, \quad \ldots \quad (45)$$

in welcher $y = \alpha\alpha^{|}$ gesetzt worden, die ebenfalls auf die Gleichung (42) reduzirt werden kann, wenn man $y = y^{|} + b$ substituirt und $y^{|} = -2r$ setzt, und also reelle

Werthe für α, α', β und β' giebt, da nach demselben Schlusse $\frac{a^2}{4} - y$ eine positive Grösse sein muss.

Wir können ferner N durch $tg\frac{1}{2}\varphi$ ausdrücken, in welchem Falle N ein Ausdruck vom vierten Grade wird und nach Analogie von $u = 0$ in zwei reellen Faktoren des zweiten Grades zerlegt werden, und die Integration der gegebenen Formeln auf die Integration der Partialbrüche zurückgeführt werden kann.

Setzt man $x = tg\frac{1}{2}\varphi$, wodurch
$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi &= \frac{2x}{1+xx} \\ \cos\varphi &= \frac{1-xx}{1+xx} \\ d\varphi &= \frac{2dx}{1+xx}, \end{aligned}\right\}$$
so wird
$$N = \frac{a' + b'x + c'x^2 + d'x^3 + e'x^4}{(1+xx)^2}, \qquad (46)$$
wo die Grössen a', b', c', d' und e' so bestimmt sind, dass
$$\left.\begin{aligned} a' &= l + l' + 2m'' \\ b' &= 4m + 4m' \\ c' &= 2l - 2l' + 4l'' \\ d' &= 4m + 4m' \\ e' &= l + l' - 2m'' \end{aligned}\right\} \qquad (47)$$
wird. Um die Coëffizienten des Ausdrucks N mit denen von $u = 0$ zu vergleichen, ist $a = \frac{d'}{e'}$, $b = \frac{c'}{e'}$, $c = \frac{b'}{e'}$, $d = \frac{a'}{e'}$.

Diese wollen wir uns in die Gleichung (45) gesetzt denken und erhalten aus ihr
$$y^3 - 2\frac{c'}{e'}y^2 + \left(\frac{c'^2}{e'^2} + \frac{d'b'}{e'^2} - \frac{4a'}{e'}\right)y - \frac{d'c'b'}{e'^3} + \frac{d'^2a'}{e'^3} + \frac{b'^2}{e'^2} = 0$$
und für $y = \frac{y'}{e'}$ substituirt
$$y'^3 - 2c'y'^2 + (c'^2 - 4a'e' + b'd')y' + b'^2e' - d'c'b' + d'^2a' = 0$$
nachdem mit e'^3 multiplizirt ist.

Diese Gleichung kann aber auf unsere bekannte kubische Gleichung (18) oder (33) wieder zurückgeführt werden, wenn man in sie die Coëffizienten von N durch die Substitutionsgleichungen (47) zurück bringt, wodurch sie die Form erhält:

$$y'^3 - 4(l - l' + 2l'')\,y'^2 + [4(l - l' + 2l'')^2 - 4(l + l' + 2m'')(l + l' - 2m'')$$
$$+ 16(m'^2 - m^2)]\,y + 16(m + m')^2(l + l' - 2m'') + 16(m' - m)^2(l + l' + 2m'')$$
$$- 16(m'^2 - m^2)\,2(l - l' + 2l'') = 0$$

oder:

$$y'^3 - 4(l - l' + 2l'')\,y'^2 + 16(m'^2 + m''^2 - m^2 + l''^2 - l'l'' - ll' + ll'')\,y'$$
$$+ 64[(m^2(l + l'') + m'^2(l' - l'') + 2mm'm''] = 0.$$

In dieser Gleichung verschwinden die Zahlen-Coëffizienten, wenn $y' = 4y''$ gesetzt, durch 64 dividirt und dann $y'' = y''' + l''$ substituirt wird. Es erscheint dann die Gleichung

$$y'''^3 - (l - l' - l'')\,y'''^2 + (m'^2 + m''^2 - m^2 + l'l'' - ll' - ll'')\,y'''$$
$$- (ll'l'' - m^2 l - m'^2 l' - m''^2 l'' + 2mm'm'') = 0, \quad \ldots\ldots \quad (48)$$

die uns schon durch die frühere Transformation bekannt ist.

Aus den Substitutionsgleichungen, durch welche wir die Gleichung (45) in die Gestalt von (48) brachten, nämlich aus

$$y = \frac{y'}{e'},\quad y' = 4y'',\quad y'' = y''' + l'',\ \text{folgt}\ y = 4\,\frac{(y''' + l'')}{e'}$$

und, da die Wurzel der kubischen Gleichung, die reell ist, mit λ bezeichnet wurde, so ist $y = 4\,\frac{(\lambda + l'')}{e'}$.

Es war aber bewiesen, dass bei der Zerfällung des biquadratischen Ausdrucks $u = 0$ die Grösse $\frac{a^2}{4} - y$ immer eine positive Grösse sein muss; dieses gestaltet sich für N dahin, dass $\frac{d'^2}{4e'^2} - 4\,\frac{(\lambda + l'')}{e'}$, oder $\frac{1}{4}(d'^2 - 16(\lambda + l'')\,e')$

d. h. $4(m'^2 - 2mm' + m^2 + (l'' + \lambda)\,m'' - (l'' + \lambda)(l - \lambda) - (l' + \lambda)(l' + \lambda))$

eine positive Grösse sein muss. Wenn wir den Ausdruck so umformen

$$m'^2 - (l'' + \lambda)(l - \lambda) + m^2 - (l'' + \lambda)(l' + \lambda) - (2mm' - 2m''(l'' + \lambda)),$$

so ist derselbe ein quadratischer, da wir früher (36) gesehen haben, dass

$$mm' - m''(l'' + \lambda) = \sqrt{m'^2 - (l'' + \lambda)(l - \lambda)}\sqrt{m^2 - (l' + \lambda)(l'' + \lambda)}$$

und, da er positiv sein muss, so ist $\sqrt{R'} - \sqrt{R}$ reell, und wir können die Reellität aller drei Wurzeln der kubischen Gleichung nachweisen.

Wir hatten den Ausdruck $\frac{N}{l}$ in die beiden Faktoren zerlegt

$$1 + \alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi \text{ und } 1 + \alpha' \cos\varphi + \beta' \sin\varphi.$$

Setzt man

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha = r\cos\psi & \alpha' = r'\cos\psi' \\ \beta = r\sin\psi & \beta' = r'\cos\psi' \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

wo ψ und ψ' konstante Grössen sind, so erhält man

$$\left.\begin{array}{ll} r = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} & r' = \sqrt{\alpha'^2 + \beta^2} \\ \cos\psi = \dfrac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \cos\psi' = \dfrac{\alpha'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}} \\ \sin\psi = \dfrac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} & \sin\psi' = \dfrac{\beta'}{\sqrt{\alpha'^2 + \beta'^2}} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (50)$$

und $\frac{N}{l} = (1 + r\cos(\varphi - \psi))\ ((1 + r'(\cos\varphi - \psi')).$

Soll N für keinen reellen Werth von φ verschwinden, so darf keiner der beiden Faktoren $= 0$ werden, oder, wenn ich sie $= 0$ setze, muss $\cos(\varphi - \psi)$, wie $\cos(\varphi - \psi')$ imaginär werden, d. h. $r > 1$ und $r' > 1$ so wie $r^2 > 1$ und $r'^2 > 1$; und es muss $r^2 - 1$ so wie $r'^2 - 1$ eine positive Grösse werden, und also auch das Produkt dieser Grössen.

Das Produkt der beiden Ausdrücke ist aber mit Hülfe der beiden Gleichungen (50):

$$1 - \alpha^2 - \alpha'^2 - \beta^2 - \beta'^2 + \alpha^2\alpha'^2 + \beta^2\beta'^2 + \alpha^2\beta'^2 + \beta^2\alpha'^2;$$

und setzen wir für α, α', β und β' deren Werthe aus den Gleichungen (34), jeden multiplizirt mit $(l - \lambda)$, so wird dasselbe

$$(l-\lambda)^2 + (l'+\lambda)^2 + (l''+\lambda)^2 - 4m'^2 - 4m''^2 + 4m^2 + 2(l'+\lambda)(l-\lambda)$$
$$+ 2(l''+\lambda)(l-\lambda) - 2(l'+\lambda)(l''+\lambda)$$

und lässt sich folgender Maassen in drei Theile schreiben:

$$\left.\begin{array}{l} -3\lambda^2 - 2(l' + l'' - l)\lambda + (l'l + ll'' - l'l'' - m'^2 - m''^2 + m^2 \\ + l'^2 + l''^2 + l^2 - 2m'^2 - 2m''^2 + 2m^2 \\ + ll' + ll'' - l'l'' - m'^2 - m''^2 + m^2. \end{array}\right\} \quad . \ (51)$$

Die kubische Gleichung (48) giebt aber, wenn man die Relationen zwischen ihren Coëffizienten und Wurzeln betrachtet, die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} l - l' - l'' = \lambda + \lambda' + \lambda'' \\ m'^2 + m''^2 - m^2 + l'l'' - ll' - ll'' = \lambda\lambda' + \lambda\lambda'' + \lambda'\lambda'' \\ ll'l'' - m^2 l - m'^2 l' - m''^2 l'' + 2mm'm'' = \lambda\lambda'\lambda'' \end{array}\right\} \quad . \ . \ (52)$$

wenn λ, λ' und λ'' ihre 3 Wurzeln bedeuten. Sie zeigen uns, dass der erste Theil des Ausdruckes (51) das negative Differentiale derselben Gleichung ist, nach der Differentiation jedoch λ für x gesetzt, der zweite Theil die Summe der Quadrate der drei Wurzeln, der dritte Theil die negative Summe ihrer Verbindungen zu je zweien, oder dass jenes Produkt auch die Form haben kann:

$$-(\lambda - \lambda')(\lambda - \lambda'') + \lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 - \lambda\lambda' - \lambda\lambda'' - \lambda'\lambda''$$

d. h. $(\lambda' - \lambda''^2)$.

Da nun dieser Ausdruck positiv sein soll, so können λ' und λ'' nicht imaginär sein d. h. nicht die Form haben $u + t\sqrt{-1}$ und $u - t\sqrt{-1}$.

Um die Relation des biquadratischen Ausdrucks N mit unserer kubischen Gleichung hier gleich zusammen zu fassen, ergiebt sich, dass, wenn N für vier reelle Werthe von φ verschwinden, oder $= 0$ gesetzt, vier reelle Wurzeln haben soll, jeder der beiden Faktoren zwei reelle Wurzeln haben muss; d. h. $1 - r^2$ wie $1 - r'^2$ so wie das Produkt dieser Grössen, welches wir nach allen Umformungen als das Quadrat der Differenz zweier Wurzeln gefunden haben, muss positiv sein oder die kubische Gleichung muss drei reelle Wurzeln haben. Hat N dagegen zwei reelle und zwei imaginäre Wurzeln, so muss von beiden Faktoren $1 - r^2$ und $1 - r'^2$ der eine immer positiv der andere negativ, oder das Quadrat der Differenz zweier Wurzeln negativ sein; d. h. die kubische Gleichung hat eine reelle und zwei imaginäre Wurzeln. Diesen Zusammenhang können wir auch so aussprechen, dass die kubische Gleichung drei reelle Wurzeln hat, wenn N für keinen oder vier reelle Werthe von φ verschwindet, dagegen nur eine, wenn N für zwei reelle Werthe von $\varphi = 0$ wird.

Um nun die drei reduzirten Integrale

$$\int \frac{d\varphi}{N} = \int \frac{\alpha - \beta \cos\psi - \gamma \sin\psi}{g - g^{\prime} \cos^2\psi - g^{\prime\prime} \sin^2\psi}\, d\psi$$

$$\int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N} = \int \frac{\alpha^{\prime} - \beta^{\prime} \cos\psi - \gamma^{\prime} \sin\psi}{g - g^{\prime} \cos^2\psi - g^{\prime\prime} \sin^2\psi}\, d\psi$$

$$\int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N} = \int \frac{\alpha^{\prime\prime} - \beta^{\prime\prime} \cos\psi - \gamma^{\prime\prime} \sin\psi}{g - g^{\prime} \cos^2\psi - g^{\prime\prime} \sin^2\psi}\, d\psi$$

in ihren Grenzen von 0 bis 2π zu finden, müssen wir noch wissen, wie ψ sich verändert, wenn φ von 0 bis 2π wächst.

Es war $\alpha^{\prime}\alpha^{\prime} + \alpha^{\prime\prime}\alpha^{\prime\prime} = \beta\beta + \gamma\gamma = \alpha\alpha - 1 = \delta^2$; ferner folgt aus den Gleichungen (3), (6) und (12)

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{\prime} \cos\varphi + \alpha^{\prime\prime} \sin\varphi &= \frac{\delta^2 - \alpha(\beta \cos\psi + \gamma \sin\psi)}{\alpha - \beta \cos\psi - \gamma \sin\psi} \\ \alpha^{\prime\prime} \cos\varphi - \alpha^{\prime} \sin\varphi &= \frac{\beta \sin\psi - \gamma \cos\psi}{\alpha - \beta \cos\psi - \gamma \sin\psi}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

setzt man in dieselbe

$$\left.\begin{aligned} \alpha^{\prime} &= \delta \cos\varphi^{\prime} \\ \alpha^{\prime\prime} &= \delta \sin\varphi^{\prime} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \beta &= \delta \cos\psi^{\prime} \\ \gamma &= \delta \sin\psi^{\prime} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (54)$$

wo $\varphi^{\prime}$ und $\psi^{\prime}$ konstante Grössen sind und welche Substitution sich immer annehmen lässt, da die Quadrate dieser Grössen sich zu δ^2 ergänzen, so werden die beiden Gleichungen (53) folgende Gestalt bekommen:

$$\left.\begin{aligned} \cos(\varphi^{\prime} - \varphi) &= \frac{\delta - \alpha \cos(\psi - \psi^{\prime})}{\alpha - \beta \cos\psi - \gamma \sin\psi} = \frac{\delta - \alpha \cos(\psi - \psi^{\prime})}{\alpha - \delta \cos(\psi - \psi^{\prime})} \\ \sin(\varphi^{\prime} - \varphi) &= \frac{\sin(\psi - \psi^{\prime})}{\alpha - \beta \cos\psi - \gamma \sin\psi} = \frac{\sin(\psi - \psi^{\prime})}{\alpha - \delta \cos(\psi - \psi^{\prime})}. \end{aligned}\right\} \ . \quad (55)$$

Aus diesen beiden Ausdrücken folgt:

$$\left.\begin{aligned} 1 - \cos(\varphi^{\prime} - \varphi) &= \frac{(\alpha - \delta)(1 + \cos(\psi - \psi^{\prime}))}{\alpha - \delta \cos(\psi - \psi^{\prime})} \\ 1 + \cos(\varphi^{\prime} - \varphi) &= \frac{(\alpha + \delta)(1 - \cos(\psi - \psi^{\prime}))}{\alpha - \delta \cos(\psi - \psi^{\prime})}, \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

und aus ihnen durch Division die Gleichung

$$tg\,\tfrac{1}{2}(\varphi^{\prime}-\varphi)\,tg\,\tfrac{1}{2}(\psi-\psi^{\prime})=\frac{\alpha-\delta}{\alpha+\delta},\ \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

durch welche der Winkel ψ aus φ leicht berechnet werden kann. Auch folgt aus ihr, dass die Winkel $\frac{1}{2}(\varphi^{\prime}-\varphi)$ und $\frac{1}{2}(\psi-\psi^{\prime})$ in derselben Zeit wachsen oder abnehmen und beide zugleich um π oder 2π vermehrt werden. Wir können also in den transformirten Integralen die Grenzen ebenfalls von 0 bis 2π nehmen.

Es wird also

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{I.} & \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{N}=\int_0^{2\pi}\frac{\alpha-\beta\cos\psi-\gamma\sin\psi}{g-g^{\prime}\cos^2\psi-g^{\prime\prime}\sin^2\psi}\,d\psi \\[2ex]
\text{II.} & \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,.\,d\varphi}{N}=\int_0^{2\pi}\frac{\alpha^{\prime}-\beta^{\prime}\cos\psi-\gamma^{\prime}\sin\psi}{g-g^{\prime}\cos^2\psi-g^{\prime\prime}\sin^2\psi}\,d\psi \\[2ex]
\text{III.} & \displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\,.\,d\varphi}{N}=\int_0^{2\pi}\frac{\alpha^{\prime\prime}-\beta^{\prime\prime}\cos\psi-\gamma^{\prime\prime}\sin^2\psi}{g-g^{\prime}\cos\psi-g^{\prime\prime}\sin^2\psi}\,d\psi
\end{array}\right\}\ \ldots\ldots \quad (58)$$

Wenn man jeden der drei Ausdrücke in seinen Theilen integrirt, so sei in I. $tg\,\psi=x$ gesetzt, woraus

$$\left.\cos^2\psi=\frac{1}{1+xx},\quad \sin^2\psi=\frac{xx}{1+xx},\quad d.tg\,\psi=\frac{d\psi}{\cos^2\psi}\ \text{u.}\ d\psi=\frac{dx}{1+xx}\right\} \quad (59)$$

sich ergiebt und der erste Theil des Integrals I. erhält die Form:

$$\alpha\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(g-g^{\prime})+(g-g^{\prime\prime})\,xx}.$$

Wenn aber der Ausdruck N für keinen reellen Werth von φ verschwindet, so gilt dieses auch von $g-g^{\prime}\cos^2\psi-g^{\prime\prime}\sin^2\psi$ und es haben $g-g^{\prime}$ und $g-g^{\prime\prime}$ dasselbe Zeichen, wie man dieses auch daraus sieht, dass wenn $\psi=0$ und $=\pi$ gesetzt wird, der Ausdruck immer auf derselben Seite des Zeichens bleiben muss.

Da nun

$$\alpha \int \frac{dx}{g-g^{\text{I}}+(g-g^{\text{II}})\,xx} = \alpha \int \frac{dx}{(g-g^{\text{I}})\left(1+\frac{g-g^{\text{II}}}{g-g^{\text{I}}}\,xx\right)}$$

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{(g-g^{\text{I}})(g-g^{\text{II}})}} \int \frac{dx\sqrt{\frac{g-g^{\text{II}}}{g-g^{\text{I}}}}}{1+\frac{g-g^{\text{II}}}{g-g^{\text{I}}}\,xx},$$

nachdem ich mit $\sqrt{\frac{g-g^{\text{II}}}{g-g^{\text{I}}}}$ multiplizirt habe, so wird sein Werth

$$= \frac{\alpha}{\sqrt{(g-g^{\text{I}})\,(g-g^{\text{II}})}} \cdot arc.\left(tg = \sqrt{\frac{g-g^{\text{II}}}{g-g^{\text{I}}}}\,tg\,\psi\right)$$

und in den angegebenen Grenzen wird dieser Bogen $2\,\pi$, so dass

$$\alpha \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{g-g^{\text{I}}cos^2\psi-g^{\text{II}2}sin^2\psi} = \frac{\alpha\,2\pi}{\sqrt{(g-g^{\text{I}})(g-g^{\text{II}})}} = \frac{2\pi\sqrt{(l^{\text{I}}+g)(l^{\text{I}}+g)-m^2}}{(g-g^{\text{I}})\,(g-g^2),} \qquad (60)$$

nachem für α dessen Werth aus (22) gesetzt worden.

Um die zweiten Theile der Integralausdrücke (58) zu integriren, sei in

$$\beta \int \frac{cos\,\psi\,d\psi}{g-g^{\text{I}}\,cos^2\psi-g^{\text{II}}\,sin^2\psi}$$

x für $sin\,\psi$ gesetzt, wodurch das Integral die Form erhält

$$-\beta \int \frac{dx}{(g-g^{\text{I}})+(g^{\text{I}}-g^{\text{II}})\,xx} = \frac{-\beta}{g-g^{\text{I}}} \int \frac{dx}{1+\frac{g^{\text{I}}-g^{\text{II}}}{g-g^{\text{I}}}\,x\,x.}$$

Hier ist der doppelte Fall zu berücksichtigen, ob $g^{\text{I}}-g^{\text{II}}$ und $g-g^{\text{I}}$ dasselbe oder entgegengesetzte Zeichen haben, d. h. ob ihre Auflösung auf Kreisbogen oder Logarithmen führt. Für beide Fälle lässt sich nachweisen, dass der Ausdruck in den gegebenen Grenzen verschwindet.

1) Haben $g^{\text{I}}-g^{\text{II}}$ und $g-g^{\text{I}}$ entgegengesetzte Zeichen, so lässt sich

$$-\int \frac{dx}{1-\frac{g^{\text{II}}-g^{\text{I}}}{g-g^{\text{I}}}}\,.$$

in die beiden Theile zerlegen

$$-\frac{1}{\sqrt{\frac{g^{II}-g^{I}}{g-g^{I}}}}\left\{\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-\sqrt{\frac{g^{II}-g^{I}}{g-g^{I}}}}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+\sqrt{\frac{g^{II}-g^{I}}{g-g^{I}}}}\right\},$$

die nach der Integration geben:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{g^{II}-g^{I}}{g-g^{I}}}}\log\left(\frac{\sqrt{g-g^{I}}+x\sqrt{g^{II}-g^{I}}}{\sqrt{g-g^{I}}-x\sqrt{g^{II}-g^{I}}}\right);$$

oder es wird der zweite Theil der Ausdrücke (58), wenn $g^{I}-g^{II}$ und $g-g$ verschiedene Zeichen haben:

$$\beta\int\frac{\cos\psi\,d\psi}{g-g^{I}\cos^{2}\psi-\sin^{2}\psi}$$

$$=\frac{\sqrt{(l^{I}+g^{I})(l^{II}+g^{I})-m^{2}}}{\sqrt{(g^{I}-g)(g^{I}-g^{II})}}\log\left(\frac{\sqrt{g-g^{I}}+\sin\psi\sqrt{g^{II}-g^{I}}}{\sqrt{g-g^{I}}-\sin\psi\sqrt{g^{II}-g^{I}}}\right),$$

welcher Theil in den gegebenen Grenzen verschwinden muss.

2) Bei der zweiten Voraussetzung, dass $g^{I}-g^{II}$ und $g-g^{I}$ gleiche Zeichen haben, ist $\int\frac{dx}{1+\frac{g^{I}-g^{II}}{g-g^{I}}xx}$ auf dieselbe Form gebracht, wie der erste Theil und wir erhalten also

$$\beta\int\frac{\cos\psi\,d\psi}{g-g^{I}\cos^{2}\psi-g^{II}\sin^{2}\psi}=\frac{\beta}{\sqrt{(g-g^{I})(g^{I}-g^{II})}}\,arc\left[tg=\sqrt{\frac{g^{I}-g^{II}}{g-g^{I}}}\sin\psi\right];\quad(62)$$

der Bogen aber, dessen Tangente $=\sqrt{\frac{g^{I}-g^{II}}{g-g^{I}}}\sin\psi$ ist, wird 0 für $\psi=0$, wächst bis $\psi=90^{0}$ im Positiven, nimmt von da ab bis $\psi=180^{0}$, wo der Bogen wieder 0 wird. Eben so ist sein Wachsen auf der negativen Seite bis $\psi=270^{0}$ wird und sein Abnehmen von da ab. Es ist also der Bogen $=0$, wenn ψ von 0 bis 2π gewachsen ist.

Dasselbe Raisonnement lässt sich Schritt vor Schritt auf den dritten Theil der Integralausdrücke I. (58) anwenden und giebt auch die aus diesem Theile resulti-

6

rende Grösse $= 0$ und es ist überflüssig zu bemerken, dass auch II. und III. nur durch die Integrationen ihres ersten Theiles erhalten werden.

Somit werden die drei Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
\text{I.} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{N} = \frac{2\pi\sqrt{(l^{\prime}+g)(l^{\prime\prime}+g)-m^2}}{(g-g^{\prime})(g-g^{\prime\prime})} \\
\text{II.} &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N} = \frac{2\pi\sqrt{(l-g)(l^{\prime\prime}+g)-m^{\prime 2}}}{(g-g^{\prime})(g-g^{\prime\prime})} \\
\text{III.} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N} = \frac{2\pi\sqrt{(l-g)(l^{\prime}+g)-m^{\prime\prime 2}}}{(g-g^{\prime})(g-g^{\prime\prime})},
\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (63)$$

auf welche sich auch die drei anderen Integrale, wie dieses noch nachgewiesen werden soll, zurückführen lassen.

Obgleich der erste Theil der vorgelegten Aufgabe durch Vorstehendes in allen Theilen gelöst ist, so wollen wir doch der Vollständigkeit wegen diese Integrale durch Zerfällung des Ausdruckes $\frac{1}{N}$ in seine Partialbrüche und durch die Integration derselben aufsuchen und zeigen, wie sich diese Resultate unter die Gestalt der gegebenen bringen lassen.

Es war zu dem Zwecke:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{1}{N} &= \frac{1}{l-\lambda}\left[\frac{1}{(1+\alpha\cos\varphi+\beta\sin\varphi)(1+\alpha^{\prime}\cos\varphi+\beta^{\prime}\sin\varphi)}\right] \\
&= \frac{1}{l-\lambda}\left[\frac{1}{(1+r\cos(\varphi-\psi))(1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime}))}\right]
\end{aligned}\right\} \cdot (64)$$

und α, $\alpha^{\prime}$, β, $\beta^{\prime}$ r und $r^{\prime}$ durch die Gleichungen (34) und (50) bestimmt wurden als

$$\alpha = \frac{m^{\prime\prime}+\sqrt{m^{\prime\prime 2}-(l^{\prime}+\lambda)(l-\lambda)}}{(l-\lambda)}, \qquad \alpha^{\prime} = \frac{m^{\prime\prime}-\sqrt{m^{\prime\prime 2}-(l^{\prime}+\lambda)(l-\lambda)}}{(l-\lambda)},$$

$$\beta = \frac{m^{\prime}+\sqrt{m^{\prime 2}-(l^{\prime\prime}+\lambda)(l-\lambda)}}{l-\lambda}, \qquad \beta^{\prime} = \frac{m^{\prime}-\sqrt{m^{\prime 2}-(l^{\prime\prime}+\lambda)(l-\lambda)}}{l-\lambda},$$

$$\alpha = r\cos\psi, \qquad \alpha^{\prime} = r^{\prime}\cos\psi^{\prime}, \qquad \alpha^2+\beta^2 = r^2,$$
$$\beta = r\sin\psi, \qquad \beta^{\prime} = r^{\prime}\sin\psi^{\prime}, \qquad \alpha^{\prime 2}+\beta^{\prime 2} = r^{\prime 2}.$$

Wir wollen nun

$$\left.\begin{array}{ll} e^{i\varphi} = z, & a^{\prime} = \frac{r^{\prime}}{2}\, e^{-i\psi^{\prime}}, \\ a = \frac{r}{2}\, e^{-i\psi}, & b^{\prime} = \frac{r^{\prime}}{2}\, e^{i\psi^{\prime}}, \\ b = \frac{r}{2}\, e^{i\psi}, & \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (65)$$

setzen, wo z die Basis des natürlichen Logarithmensystems und $i = \sqrt{-1}$ ist, so wird, da

$$\left.\begin{array}{l} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \cos x \\ \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \sin x \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (66)$$

ist,

$$\frac{1}{(1 + r\cos(\varphi - \psi))(1 + r^{\prime}\cos(\varphi - \psi))} = \frac{z^2}{(z + az^2 + b)\,(z + a^{\prime}z^2 + b^{\prime})} \Big\} \quad \ldots (67)$$

Wenn man diesen Ausdruck in die beiden Partialbrüche zerlegt

$$\frac{p + qz}{z + az^2 + b} + \frac{p^{\prime} + q^{\prime}z}{z + a^{\prime}z^2 + b^{\prime}}, \Big\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (68)$$

so dienen zur Bestimmung von p, $p^{\prime}$, q und $q^{\prime}$ folgende vier Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} pb^{\prime} + bp^{\prime} = 0 \\ qb^{\prime} + bq^{\prime} + p + p^{\prime} = 0 \\ pa^{\prime} + p^{\prime}a + q + q^{\prime} = 1 \\ qa^{\prime} + aq^{\prime} = 0. \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (69)$$

Aus der ersten und vierten derselben fliesst $p = -p^{\prime}\,\frac{b}{b^{\prime}}$, und $q = -q^{\prime}\,\frac{a}{a^{\prime}}$, und dieses in die zweite und dritte gesetzt, giebt die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} q^{\prime}\,\frac{(ba^{\prime}-ab^{\prime})}{a^{\prime}}+p^{\prime}\,\frac{(b^{\prime}-b)}{b^{\prime}}&=0\\ q^{\prime}\,\frac{(a^{\prime}-a)}{a^{\prime}}-p^{\prime}\,\frac{(ba^{\prime}-ab^{\prime})}{b^{\prime}}&=1,\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(70)$$

woraus dann die Grössen p, $p^{\prime}$, q und $q^{\prime}$ sich ergeben:

$$\left.\begin{aligned} q^{\prime}&=\frac{(b^{\prime}-b)\,a^{\prime}}{(ba^{\prime}-ab^{\prime})^2+(a^{\prime}-a)(b^{\prime}-b)}\\ q&=\frac{(b-b^{\prime})\,a}{(ba^{\prime}-ab^{\prime})^2+(a^{\prime}-a)(b^{\prime}-b)}\\ p^{\prime}&=\frac{(ab^{\prime}-ba^{\prime})\,b^{\prime}}{(a^{\prime}b-b^{\prime}a)^2+(a^{\prime}-a)(b^{\prime}-b)}\\ p&=\frac{(a^{\prime}b-ab^{\prime})\,b}{(a^{\prime}b-b^{\prime}a)^2+(a^{\prime}-a)(b^{\prime}-b)}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(71)$$

Nun wollen wir die Werthe der Grössen a, $a^{\prime}$, b und $b^{\prime}$ aus (65) zurück substituiren und für e^{ix} u. e^{-ix} resp. schreiben $\cos x + i\sin x$ und $\cos x - i\sin x$, so dass

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)\,(\cos\varphi-i\sin\varphi)=1;\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(72)$$

dann wird der Nenner der Grössen p, $p^{\prime}$, q und $q^{\prime}$, wenn er mit $N^{\prime}$ bezeichnet worden

$$N^{\prime}=r^{\prime 2}+r^2-2rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})-(rr^{\prime})^2\sin^2(\psi-\psi^{\prime});\quad\ldots\quad(73)$$

sie selbst bekommen folgende Gestalt:

$$\left.\begin{aligned} q&=\frac{r^2-rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})+irr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})}{N^{\prime}}\\ q^{\prime}&=\frac{r^{\prime 2}-rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})-irr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})}{N^{\prime}}\\ \frac{p}{z}&=\frac{r^2r^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})\,(\sin(\varphi-\psi)+i\cos(\varphi-\psi))}{N^{\prime}}\\ \frac{p^{\prime}}{z}&=\frac{-r^{\prime 2}r\sin(\psi-\psi^{\prime})\,(\sin(\varphi-\psi^{\prime})+i\cos(\varphi-\psi^{\prime})).}{N^{\prime}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad(74)$$

Diese Ausdrücke wollen wir in N substituiren und zwar in der Form wie sie (68) giebt, so wird

$$\frac{l-\lambda}{N}=\frac{1}{N^{\prime}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{r^2-rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})+rr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})\,(i+r\sin(\varphi-\psi)+ir\cos(\varphi-\psi))}{1+r\cos(\varphi-\psi)}\\ \dfrac{+r^{\prime 2}-rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})-rr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})(i+r^{\prime}\sin(\varphi-\psi^{\prime})+ir^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime}))}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}\end{array}\right\}.(75)$$

Der imaginäre Theil in diesem Ausdrucke verschwindet, denn er ist

$$i\,rr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})\left[\frac{1+r\cos(\varphi-\psi)}{1+r\cos(\varphi-\psi)}-\frac{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})},\right]$$

und es bleibt also:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{l-\lambda}{N}=\dfrac{1}{N^{\prime}}\left[\dfrac{r^2-rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})}{1+r\cos(\varphi-\psi)}+\dfrac{r^{\prime 2}-rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}\right.\\ \left.+rr^{\prime}\sin(\psi-\psi^{\prime})\left\{\dfrac{r\sin(\varphi-\psi)}{1+r\cos(\varphi-\psi)}-\dfrac{r^{\prime}\sin(\varphi-\psi^{\prime})}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}\right\}\right].\end{array}\right\}\ .\ (76)$$

Wenn wir diesen Ausdruck (76) mit $d\varphi$ multipliziren, so giebt er das erste der vorgelegten Integrale $\int\frac{d\varphi}{N}$. Eine genauere Betrachtung seines zweiten Theiles zeigt aber, dass

$$\left[\frac{r\sin(\varphi-\psi)}{1+r\cos(\varphi-\psi)}-\frac{r^{\prime}\sin(\varphi-\psi^{\prime})}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}\right]d\varphi=d.\log\frac{\left[\dfrac{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}{1+r\cos(\varphi-\psi)}\right]}{d\varphi}\,d\varphi$$

oder

$$\left.\int\left[\frac{r\sin(\varphi-\psi)}{1-r\cos(\varphi-\psi}-\frac{r^{\prime}\sin(\varphi-\psi^{\prime})}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}\right]d\varphi=\log\frac{1+r^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime})}{1+r\cos(\varphi-\psi)}+C\right\}(77)$$

ist, welches in den gegebenen Grenzen von 0 bis 2π verschwindet. Es bleiben also von $\int\frac{d\varphi}{N}$ nur die beiden ersten Theile übrig, von denen der zweite sich aus dem ersten durch die Vertauschung der Indices von r und ψ ergiebt.

Hat man ein Integral von der Form: $\int\frac{dz}{a+b\cos z}$, so sei $tg\frac{1}{2}z=x$, also

$$\cos z=\frac{1-xx}{1+xx},\quad \sin z=\frac{2x}{1+xx}\ \text{und}\ dz=\frac{2dx}{1+xx};$$

so wird dadurch

$$\int\frac{dz}{a+b\cos z}=2\int\frac{dx}{a+b+(a-b)xx},$$

und ist $b < a$ und beide Grössen positiv, so erhält man:

$$\int \frac{dz}{a + b\cos z} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\, arc\,.\left(tg = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\right) + C. \quad \ldots\ldots \quad (78)$$

Nach dieser Analogie wird, wenn

$$\begin{array}{ll} a = 1 & \text{und } a^{\prime} = 1 \\ b = r & b^{\prime} = r^{\prime} \\ z = \varphi - \psi & z = \varphi - \psi^{\prime} \end{array}$$

gesetzt wird, aus dem Ausdrucke (78)

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{d\varphi}{1 + r\cos(\varphi - \psi)} = \frac{2}{\sqrt{1 - r^2}}\, arc\left(tg = \sqrt{\frac{1-r}{1+r}}\, tg\, \frac{(\varphi - \psi)}{2}\right) + C \\ \displaystyle\int \frac{d\varphi}{1 + r^{\prime}\cos(\varphi - \psi^{\prime})} = \frac{2}{\sqrt{1 - r^{\prime 2}}}\, arc\left(tg = \sqrt{\frac{1-r^{\prime}}{1+r^{\prime}}}\, tg\, \frac{(\varphi - \psi^{\prime})}{2}\right) + C \end{array}\right\}. \quad (79)$$

Die Bogen aber, dessen Tangenten resp.

$$\sqrt{\frac{1-r}{1-r}}\, tg\, \frac{\varphi - \psi}{2} \text{ und } \sqrt{\frac{1-r^{\prime}}{1+r^{\prime}}}\, tg\, \frac{(\varphi - \psi^{\prime})}{2}$$

sind, werden wenn φ von 0 bis 2π wächst, π und wir erhalten also:

$$\text{I.} = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{N} = \frac{2\pi}{(l - \lambda)\, N^{\prime}} \left\{\frac{r^2 - rr^{\prime}\cos(\psi - \psi^{\prime})}{\sqrt{1 - r^2}} + \frac{r^{\prime 2} - rr^{\prime}\cos(\psi - \psi^{\prime})}{\sqrt{1 - r^{\prime 2}}}\right\}. \quad (80)$$

Auf dieses Integral lassen sich aber

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N} \text{ und } \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N}$$

zurückführen, wie dieses in Folgendem bewiesen werden soll.

Es sei

$$P = 1 + \alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi$$
$$P^{\prime} = 1 + \alpha^{\prime}\cos\varphi + \beta^{\prime}\sin\varphi,$$

so giebt dieses:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\,.\log P}{d\varphi} = -\dfrac{\alpha\sin\varphi}{P} + \dfrac{\beta\cos\varphi}{P} \\ 1 - \dfrac{1}{P} = \dfrac{\alpha\cos\varphi}{P} + \dfrac{\beta\sin\varphi}{P} \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (81)$$

und zwei entsprechende Gleichungen zwischen α', β' und P'. Wenn wir die erste derselben mit α, die zweite mit β und wiederum die erste mit β, die zweite mit α multipliziren und im ersten Falle beide subtrahiren, im zweiten addiren, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned}\beta - \frac{\beta}{P} - \alpha\,\frac{d.\log P}{d\varphi} &= (\alpha^2+\beta^2)\,\frac{\sin\varphi}{P}\\ \alpha - \frac{\alpha}{P} + \beta\,\frac{d.\log P}{d\varphi} &= (\alpha^2+\beta^2)\,\frac{\cos\varphi}{P}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (82)$$

Diese Grössen haben wir mit $d\varphi$ zu multipliziren und in den gegebenen Grenzen zu integriren, um

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{P} \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{P}$$

zu haben.

Dieses giebt:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)} &= \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^{2\pi}d\varphi - \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)}\\ &\quad - \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^{2\pi}\frac{d.\log(1+r\cos(\varphi-\psi))}{d\varphi}\,d\varphi\\ \int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)} &= \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^{2\pi}d\varphi - \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)}\\ &\quad + \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\int_0^{2\pi}\frac{d.\log(1+r\cos(\varphi-\psi))}{d\varphi}\,d\varphi.\end{aligned}\right\} \quad (83)$$

Von diesen drei Theilen verschwindet immer der dritte in den Grenzen von 0 bis 2π, der erste wird 2π und der zweite nach Anwendung von (79) $\frac{2\pi}{\sqrt{1-r^2}}$, so dass wir auch schreiben können:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)} &= 2\pi\,\frac{\sin\psi}{r}\left\{\frac{\sqrt{1-r^2}-1}{\sqrt{1-r^2}}\right\}\\ \int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)} &= 2\pi\,\frac{\cos\psi}{r}\left\{\frac{\sqrt{1-r^2}-1}{\sqrt{1-r^2}}.\right\}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ (84)$$

Setzen wir für r und ψ jetzt $r^{\prime}$ und $\psi^{\prime}$ so erhalten wir die entsprechenden Formeln für

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}\ \text{und}\ \int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}.$$

Der zweite Theil der Ausdrücke II. und III. besteht aus Integralen von der Form

$$\int\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)},\ \int\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)},\ \text{und}\ \int\frac{\cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)}$$

und den entsprechenden, wenn man r und ψ mit $r^{\prime}$ und $\psi^{\prime}$ vertauscht. Um diese zu finden, können wir wieder die identischen Gleichungen aufnehmen

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi-\frac{\sin\varphi}{P} &= \frac{\alpha\cos\varphi\sin\varphi}{P}+\beta\,\frac{\sin^2\varphi}{P}\\ \cos\varphi-\frac{\cos\varphi}{P} &= \frac{\alpha\cos^2\varphi}{P}+\beta.\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{P}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (85)$$

und erhalten, wenn die erste mit α, die zweite mit β, dann die erste mit β und die zweite mit α multiplizirt wird, im ersten Falle durch Addition, im zweiten durch Subtraction

$$\left.\begin{aligned}\alpha\sin\varphi+\beta\cos\varphi-\alpha\,\frac{\sin\varphi}{P}-\beta\,\frac{\cos\varphi}{P} &= (\alpha^2+\beta^2)\,\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{P}+\frac{\alpha\beta}{P}\\ \beta\sin\varphi-\alpha\cos\varphi-\beta\,\frac{\sin\varphi}{P}+\alpha\,\frac{\cos\varphi}{P} &= -\frac{\alpha^2}{P}+(\alpha^2+\beta^2)\,\frac{\sin^2}{P}\\ &= \frac{\beta^2}{P}-(\alpha^2+\beta^2)\,\frac{\cos^2\varphi}{P}.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ (86)$$

Diese Ausdrücke sind mit $d\varphi$ zu multipliziren und zu integriren und wir erhalten dann

$$\left.\begin{aligned}
\int\frac{\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)} &= \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int\left(\sin\varphi+\frac{\beta}{\alpha}\cos\varphi\right)d\varphi-\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}\int\frac{\sin\varphi}{P}d\varphi \\
&\quad -\frac{\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{P}-\frac{\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\int\frac{d\varphi}{P}. \\
\int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)} &= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\Big[\alpha^2\int\frac{d\varphi}{P}+\beta\int\sin\varphi\,d\varphi-\alpha\int\cos\varphi\,d\varphi \\
&\quad +\alpha\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{P}-\beta\int\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{P}\Big] \\
\int\frac{\cos^2\varphi\,.\,d\varphi}{1+r\cos(\varphi-\psi)} &= \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\Big[\beta^2\int\frac{d\varphi}{P}-\beta\int\sin\varphi\,d\varphi+\alpha\int\cos\varphi\,d\varphi \\
&\quad -\alpha\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{P}+\beta\int\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{P}\Big].
\end{aligned}\right\}(87)$$

Drei ähnliche Gleichungen giebt die Vertauschung von r und ψ mit r^1 und ψ^1 für die Integralausdrücke

$$\int\frac{\cos\varphi\sin\varphi\,d\varphi}{1+r^1\cos(\varphi-\psi^1)},\ \int\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{1+r^1\cos(\varphi-\psi^1)},\ \int\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{1+r^1\cos(\varphi-\psi^1)}.$$

In dieser Zusammensetzung sind keine neuen Integralausdrücke hinzugekommen, die nicht schon durch die früheren (84) und (79) gegeben waren, ausser

$$\int\sin\varphi\,d\varphi \quad \text{und} \quad \int\cos\varphi\,d\varphi.$$

Beide verschwinden aber in den gegebenen Grenzen von 0 bis 2π und es lassen sich also II. und III. in allen ihren Theilen jetzt zusammensetzen.

Um

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{N}$$

auf diese Art zu entwickeln, wollen wir (76) mit $\sin\varphi\,d\varphi$ multipliziren und integriren und bei der Integration Anwendung machen von den eben entwickelten Gleichungen (79), (84) und (87), nachdem zu denselben die entsprechenden in r^1 ψ^1 gebildet worden sind.

Dieses giebt uns:

$$\text{II.} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda)\,N'} \left\{ \begin{array}{l} (r^2 - rr'\cos(\psi-\psi'))\,\dfrac{\sin\psi}{r}\,\dfrac{(\sqrt{1-r^2}-1)}{\sqrt{1-r^2}} \\[2ex] +(r'^2 - rr'\cos(\psi-\psi'))\,\dfrac{\sin\psi'}{r'}\,\dfrac{(\sqrt{1-r'^2}-1)}{\sqrt{1-r'^2}} \\[2ex] +rr'\sin(\psi-\psi') \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{r\cos\psi(\sqrt{1-r^2}\cos^2\psi + \sin^2\psi)}{\sqrt{1-r^2}\,(1+\sqrt{1-r^2})} \\[2ex] + \dfrac{r\sin^2\psi\cos\psi(\sqrt{1-r^2}-1)}{\sqrt{1-r^2}\,(1+\sqrt{1-r^2})} \\[2ex] \dfrac{-r'\cos\psi'\,(\sqrt{1-r'^2}\cos^2\psi' + \sin^2\psi')}{\sqrt{1-r'^2}\,(1+(\sqrt{1-r'^2})} \\[2ex] \dfrac{-r'\sin^2\psi'\cos\psi'(\sqrt{1-r'^2}-1)}{\sqrt{1-r^2}\,(1+\sqrt{1-r'^2})}. \end{array} \right. \end{array} \right\} \quad (88)$$

Der zweite Theil dieses Ausdruckes reduzirt sich, wie man gleich sieht, in die einfache Gestalt von:

$$rr'\sin(\psi-\psi')\left(\frac{r\cos\psi}{1+\sqrt{1-r^2}} - \frac{r'\cos\psi'}{1+\sqrt{1-r'^2}}\right);$$

oder, da

$$(1+\sqrt{1-r^2})\,(1-\sqrt{1-r^2}) = r^2$$

ist, in

$$r'\sin(\psi-\psi')\cos\psi + \frac{r^2\, r'\sin(\psi-\psi')\cos\psi}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{r'\sin(\psi-\psi)}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$-\, r\sin(\psi-\psi')\cos\psi' - \frac{r'^2\, r\sin(\psi-\psi')\cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}} + \frac{r\sin(\psi-\psi')\cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}}.$$

Von diesen Gliedern vereinigen sich mehrere mit den aus dem ersten Theile, wenn wir denselben so zerlegen:

$$r \sin\psi - r' \sin\psi \cos(\psi-\psi') - \frac{r \sin\psi}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{r' \cos(\psi-\psi')\sin\psi}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$+ r' \sin\psi' - r \sin\psi' \cos(\psi-\psi') - \frac{r' \sin\psi'}{\sqrt{1-r'^2}} + \frac{r \cos(\psi-\psi')\sin\psi'}{\sqrt{1-r'^2}},$$

und es wird jetzt:

$$\text{II.} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N'} \left\{ \begin{aligned} & \frac{r'(\cos(\psi-\psi')\sin\psi - \sin(\psi-\psi')\cos\psi)(1-\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}} \\ & + \frac{r(\cos(\psi-\psi')\sin\psi' - \sin(\psi-\psi')\cos\psi')(1-\sqrt{1-r'^2})}{\sqrt{1-r'^2}} \\ & + \frac{r\sin\psi(\sqrt{1-r^2}-1)}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{r'\sin\psi'\sqrt{1-r'^2}-1)}{\sqrt{1-r'^2}} \\ & + rr'\sin(\psi-\psi')\left(\frac{r\cos\psi}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{r'\cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}}\right) \end{aligned} \right\}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N'} \left\{ \begin{aligned} & (r'\sin\psi' - r\sin\psi)\frac{(1-\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}} + (r\sin\psi - r'\sin\psi')\frac{(1-\sqrt{1-r'^2})}{\sqrt{1-r'^2}} \\ & + rr'\sin(\psi-\psi')\left(\frac{r\cos\psi}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{r'\cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}}\right) \end{aligned} \right\}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N'} \left\{ \begin{aligned} & (r'\sin\psi' - r\sin\psi)\left(\frac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-r'^2}}\right) \\ & + rr'\sin(\psi-\psi')\left(\frac{r\cos\psi}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{r'\cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}}\right). \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (89)$$

Auf demselben Wege gelangt man aus der Gleichung (76) nach der Multiplication von $\cos\varphi\, d\varphi$ zu:

$$\text{III.} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N'} \left\{ \begin{array}{l} (r^2 - rr' \cos(\psi - \psi')) \dfrac{\cos\psi}{r} \dfrac{(\sqrt{1-r^2} - 1)}{\sqrt{1-r^2}} \\ \quad + (r'^2 - rr' \cos(\psi - \psi')) \dfrac{\cos\psi'}{r'} \dfrac{(\sqrt{1-r'^2} - 1)}{\sqrt{1-r'^2}} \\ + rr' \sin(\psi - \psi') \left\{ \begin{array}{l} - \dfrac{r \cos^2\psi \sin\psi (\sqrt{1-r^2} - 1)}{\sqrt{1-r^2}\,(1+\sqrt{1-r^2})} \\ - \dfrac{r \sin\psi (\sqrt{1-r^2} \sin^2\psi + \cos^2\psi)}{\sqrt{1-r^2}\,(1+\sqrt{1-r^2})} \\ + \dfrac{r' \cos^2\psi' \sin\psi' (\sqrt{1-r'^2} - 1)}{\sqrt{1-r'^2}\,(1+\sqrt{1-r'^2})} \\ + \dfrac{r' \sin\psi' (\sqrt{1-r'^2} \sin^2\psi' + \cos^2\psi')}{\sqrt{1-r'^2}\,(1+\sqrt{1-r'^2})} \end{array} \right\} \end{array} \right\},$$

und nach derselben Reduktion wird dieser Ausdruck:

$$\text{III.} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N'} \left\{ \begin{array}{l} - r' (\cos(\psi - \psi') \cos\psi + \sin(\psi - \psi') \sin\psi) \dfrac{(\sqrt{1-r^2} - 1)}{\sqrt{1-r^2}} \\ - r (\cos(\psi - \psi') \cos\psi' - \sin(\psi - \psi') \sin\psi') \dfrac{(\sqrt{1-r'^2} - 1)}{\sqrt{1-r'^2}} \\ + r \cos\psi \dfrac{(\sqrt{1-r^2} - 1)}{\sqrt{1-r^2}} + r' \cos\psi' \dfrac{(\sqrt{1-r'^2} - 1)}{(\sqrt{1-r'^2})} \\ \quad + rr' \sin(\psi - \psi') \left[\dfrac{r' \sin\psi'}{\sqrt{1-r'^2}} - \dfrac{r \sin\psi}{\sqrt{1-r^2}} \right] \end{array} \right\}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N'} \left\{ \begin{array}{l} (r' \cos\psi' - r \cos\psi) \left[\dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-r'^2}} \right] \\ + rr' \sin(\psi - \psi') \left[\dfrac{r' \sin\psi'}{\sqrt{1-r'^2}} - \dfrac{r \sin\psi}{\sqrt{1-r^2}} \right]. \end{array} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (90)$$

Wir wollen nun die drei Resultate zusammenstellen, die jede der beiden Methoden gegeben hat und dann untersuchen, wie die einen auf die anderen zurückgeführt werden können.

Es war aus (63), (80), (89) und (90)

$$\left.\begin{aligned}
\mathrm{I.} &= \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{N} = \frac{2\pi\sqrt{(l^{\mathrm{I}}+g)(l^{\mathrm{II}}+g)-m^2}}{(g-g^{\mathrm{I}})(g-g^{\mathrm{II}})} = \frac{2\pi}{(l-\lambda)N^{\mathrm{I}}}\Bigg[\frac{r^2-rr^{\mathrm{I}}\cos(\psi-\psi^{\mathrm{I}})}{\sqrt{1-r^2}} \\
&\qquad + \frac{r^{\mathrm{I}\,2}-rr^{\mathrm{I}}\cos(\psi-\psi^{\mathrm{I}})}{\sqrt{1-r^{\mathrm{I}\,2}}}\Bigg]. \\
\mathrm{II.} &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N} = \frac{2\pi\sqrt{(l-g)(l^{\mathrm{I}}+g)-m^{\mathrm{II}\,2}}}{(g-g^{\mathrm{I}})(g-g^{\mathrm{II}})} \\
&= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N^{\mathrm{I}}}\Bigg[(r^{\mathrm{I}}\sin\psi^{\mathrm{I}}-r\sin\psi)\left\{\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-r^{\mathrm{I}\,2}}}\right\} \\
&\qquad + rr^{\mathrm{I}}\sin(\psi-\psi^{\mathrm{I}})\left\{\frac{r\cos\psi}{\sqrt{1-r^2}}-\frac{r^{\mathrm{I}}\cos\psi^{\mathrm{I}}}{\sqrt{1-r^{\mathrm{I}\,2}}}\right\}\Bigg]. \\
\mathrm{III.} &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N} = \frac{2\pi\sqrt{(l-g)(l^{\mathrm{II}}+g)-m^{\mathrm{I}\,2}}}{(g-g^{\mathrm{I}})(g-g^{\mathrm{II}})} \\
&= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N^{\mathrm{I}}}\Bigg[(r^{\mathrm{I}}\cos\psi^{\mathrm{I}}-r\cos\psi)\left\{\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-r^{\mathrm{I}\,2}}}\right\} \\
&\qquad + rr^{\mathrm{I}}\sin(\psi-\psi^{\mathrm{I}})\left\{\frac{r^{\mathrm{I}}\sin\psi^{\mathrm{I}}}{\sqrt{1-r^{\mathrm{I}\,2}}}-\frac{r\sin\psi}{\sqrt{1-r^2}}\right\}\Bigg],
\end{aligned}\right\} \quad (91)$$

wo der allgemeine Nenner N^{I} sich ergab (73)

$$N^{\mathrm{I}} = r^{\mathrm{I}\,2} + r^2 - 2rr^{\mathrm{I}}\cos(\psi-\psi^{\mathrm{I}}) - r^2 r^{\mathrm{I}\,2}\sin^2(\psi-\psi^{\mathrm{I}})$$

oder, für r, r^{I}, $\cos\psi$, $\cos\psi^{\mathrm{I}}$, $\sin\psi$, $\sin\psi^{\mathrm{I}}$ ihre Werthe gesetzt, wie sie in den Gleichungen (50) enthalten sind,

$$N^{\mathrm{I}} = \frac{(\alpha-\alpha^{\mathrm{I}})^2 + (\beta-\beta^{\mathrm{I}})^2 - (\alpha\beta^{\mathrm{I}}-\beta\alpha^{\mathrm{I}})^2}{(l-\lambda)^2}.$$

Nach der Substitution von (34) wird der Zähler dieses Ausdruckes

$$[m^{\mathrm{II}\,2} - (l^{\mathrm{I}}+\lambda)(l-\lambda) + m^{\mathrm{I}\,2} - (l^{\mathrm{II}}+\lambda)(l-\lambda) - m^2 + (l^{\mathrm{II}}+\lambda)(l^{\mathrm{I}}+\lambda)]\,4.$$

d. h. das Differentiale unserer früheren kubischen Gleichung in ihrer geordneten Gestalt, wenn nach der Differentiation $x=\lambda$ gesetzt wird, so dass also

$$N' = \frac{(\lambda - \lambda')(\lambda - \lambda'')\,4}{(l-\lambda)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (92)$$

wird. Wir haben in dem Früheren eben so gesehen, dass

$$\pm\sqrt{(1-r^2)(1-r'^2)} = \frac{\lambda' - \lambda''}{l-\lambda};$$

es muss also auch

$$\sqrt{\beta'^2 - \alpha^2\beta'^2 - \beta^2\beta'^2}.\sqrt{\beta^2 - \alpha'^2\beta^2 - \beta'^2\beta^2} = \beta\beta'\sqrt{(1-r^2)(1-r'^2)} = \pm\frac{(\lambda''+\lambda)(\lambda'-\lambda'')}{(l-\lambda)(l-\lambda)} \quad (93)$$

und

$$\left.\begin{aligned}&(\beta\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2} + \beta'\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2})^2\\ &= \frac{4m'^2 - 2(l''+\lambda)(l-\lambda) - 4m^2 + 2(l''+\lambda)(l'+\lambda) - 2(l''+\lambda)^2 + 2(l''+\lambda)(\lambda'-\lambda'')}{(l-\lambda)^2}\end{aligned}\right\} \quad (94)$$

$$= \frac{4m'^2 - 4m^2 - 2(l''+\lambda)(l-\lambda-l'-\lambda+l''+\lambda+\lambda''-\lambda')}{(l-\lambda)^2}$$

$$= \frac{4m'^2 - 4m^2 - 4(l''+\lambda)(l''+\lambda')}{(l-\lambda)^2},$$

weil $l - l' - l'' = \lambda + \lambda' + \lambda''$ war; woraus:

$$\beta\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2} + \beta'\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} = \sqrt{4[m'^2 - m^2 - (l''+\lambda)(l''+\lambda')]}. \quad (95)$$

Auf dieselbe Weise erhalten wir:

$$\alpha'\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\ .\ \alpha\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2} = \frac{(l+\lambda)(l'+\lambda'')}{(l-\lambda)^2};$$

also

$$(\alpha'\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} + \alpha\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2})^2$$

$$= \frac{4m''^2 - 4m^2 - 2(l'+\lambda)(l-\lambda) + 2(l'+\lambda)(l'+\lambda) - 2(l'+\lambda)^2 + 2(l'+\lambda)(\lambda'-\lambda'')}{(l-\lambda)^2}$$

$$= \frac{4m''^2 - 4m^2 - 2(l'+\lambda)(l-\lambda-l''-\lambda+l'+\lambda+\lambda''-\lambda')}{(l-\lambda)^2}$$

$$= \frac{4m''^2 - 4m^2 - 4(l'+\lambda)(l'+\lambda'')}{(l-\lambda)^2},$$

woraus

$$\alpha'\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2} + \alpha\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2} = \frac{\sqrt{4(m''^2 - m^2 - (l'+\lambda)(l'+\lambda''))}}{(l-\lambda)}. \quad (96)$$

Eben so ist

$$
\begin{aligned}
&(\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}+\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2})^2\\
&=\frac{2(l-\lambda)^2-4m'^2-4m''^2+2(l'+\lambda)(l-\lambda)+2(l-\lambda)(l''+\lambda)+2(l-\lambda)(\lambda'-\lambda'')}{(l-\lambda)^2}\\
&=\frac{2(l-\lambda)(l-\lambda+l'+\lambda+l''+\lambda+\lambda'-\lambda'')-4m'^2-4m''^2}{(l-\lambda)^2},
\end{aligned}
$$

woraus

$$\sqrt{1-r^2}+\sqrt{1-r'^2}=\frac{\sqrt{4[(l-\lambda)(l-\lambda')-m'^2-m''^2]}}{(l-\lambda)}. \quad \ldots . \quad (97)$$

Es war, was die kubische Gleichung anbetraf,

$$
\begin{aligned}
&(x-\lambda)(x-\lambda')(x-\lambda'')\\
&=-1[(l-x)(l'+x)(l''+x)-m^2(l-x)-m'^2(l'+x)-m''^2(l''+x)+2mm'm''];
\end{aligned}
$$

die Differentiation dieser Gleichung giebt:

$$
\begin{aligned}
&(x-\lambda)(x-\lambda')+(x-\lambda)(x-\lambda'')+(x-\lambda')(x-\lambda'')\\
&=m'^2+m''^2-m^2+(l'+x)(l''+x)-(l-x)(l'+x)-(l''+x)(l-x),
\end{aligned}
\qquad (98)
$$

und setzen wir hier $x=-l''$, so verwandelt sich der Ausdruck in folgenden:

$$(l''+\lambda)(l''+\lambda')+(l''+\lambda)(l''+\lambda'')+(l''+\lambda')(l''+\lambda'')=m'^2+m''^2-m^2-(l+l'')(l'-l'').$$

Hieraus wird mit Hülfe der Gleichungen (19)

$$(l''+\lambda)(l''+\lambda'')=m'^2+m''^2-m^2+l''^2-l''(l'-l+\lambda+\lambda'+\lambda''+\lambda')-2l''^2-\lambda'(\lambda+\lambda''),$$

oder

$$
\left.
\begin{aligned}
&(l''+\lambda)(l''+\lambda'')\\
&=m'^2+m''^2-m^2-l''^2-\lambda'(l-l'-l''-\lambda')-l''(-\lambda'-\lambda''-l''+2\lambda'+\lambda'')\\
&=m'^2+m''^2-m^2-(l-\lambda')(l'+\lambda').
\end{aligned}
\right\}
\quad (99)
$$

Setzt man aber in die Gleichung (98) $x=-l'$, so gelangt man durch dieselbe Transformation zu dem Ausdrucke $(l'+\lambda)(l'+\lambda'')$; es wird mämlich

$$
\left.
\begin{aligned}
&(l'+\lambda)(l'+\lambda'')\\
&=m'^2+m''^2-m^2-(l'+l)(l''-l')-(l'+\lambda)(l'+\lambda')-(l'+\lambda')(l'+\lambda'')\\
&=m'^2+m''^2-m^2-l''l-l\lambda'+l''\lambda'+\lambda'^2\\
&=m'^2+m''^2-m^2-(l-\lambda')(l''+\lambda').
\end{aligned}
\right\}
\quad (100)
$$

Auf dieselbe Weise giebt $x=l$ gesetzt die Gleichung

$$\left.\begin{aligned}(l-\lambda)(l-\lambda'') &= m'^2+m''^2-m^2+(l'+l)(l''+l)-(l-\lambda')(l-\lambda'')-(l-\lambda)(l-\lambda')\\ &= m'^2+m''^2-m^2+(l'+\lambda')(l''+\lambda')\end{aligned}\right\} \quad (101)$$

Durch diese drei Formeln (99), (100) und (101) werden die drei Ausdrücke (95), (96) und (97) nun folgende:

$$\left.\begin{aligned}\beta'\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}+\beta\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2} &= \frac{2\sqrt{(l-\lambda')(l'+\lambda')-m''^2}}{(l-\lambda)}\\ \alpha'\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}+\alpha\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2} &= \frac{2\sqrt{(l-\lambda')(l''-\lambda')-m'^2}}{(l-\lambda)}\\ \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}+\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2} &= \frac{2\sqrt{(l'+\lambda')(l''+\lambda')-m^2}}{(l-\lambda)},\end{aligned}\right\} \quad (102)$$

und durch die Substitution dieser irrationalen Ausdrücke erhalten die Integrale I. II. und III. in beiden Entwickelungsmethoden dieselbe Form.

Es war nämlich

$$\text{I.} = \int_0^{2} \frac{d\varphi}{N}$$

$$= \frac{2\pi}{(l-\lambda)N'}\left\{\frac{r^2-rr'\cos(\psi-\psi')}{\sqrt{1-r^2}} - \frac{r'^2-rr'\cos(\psi-\psi')}{\sqrt{1-r'^2}}\right\}$$

$$= \frac{2\pi(l-\lambda)}{4(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda'')}\left\{\frac{-(1-r^2)+1-\alpha\alpha'-\beta\beta'}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{1-\alpha\alpha'-\beta\beta'-(1-r'^2)}{\sqrt{1-r'^2}}\right\}$$

$$= \frac{2\pi(l-\lambda)}{4(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda'')}\left\{1-\alpha\alpha'-\beta\beta'-\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-r^2}\right\}\left\{\frac{\sqrt{1-r^2}+\sqrt{1-r'^2}}{\sqrt{1-r^2}\sqrt{1-r'^2}}\right\}$$

$$= \frac{2\pi(l-\lambda)}{4(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda'')}\left\{\frac{l-\lambda-l'-\lambda-l''-\lambda-\lambda'+\lambda''}{l-\lambda}\right\}\frac{2\sqrt{(l'+\lambda')(l''+\lambda')-m^2}}{\lambda'-\lambda''},$$

und also

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{N} = \frac{2\pi\sqrt{(l'+\lambda')(l''+\lambda')-m^2}}{(\lambda'-\lambda)(\lambda'-\lambda'')}. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (103)$$

Wenn man in dem Integralausdrucke

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N}$$

für r, $r^{\prime}$, ψ und $\psi^{\prime}$ ihre Werthe in α, $\alpha^{\prime}$, β und $\beta^{\prime}$ setzt, so hat derselbe die Form:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$= \frac{2\pi}{\dfrac{4(l-\lambda)(\lambda-\lambda^{\prime})(\lambda-\lambda^{\prime\prime})}{(l-\lambda)^2}} \left\{ (\beta^{\prime}-\beta)\left(\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}\right)\right.$$

$$\left. + (\beta\alpha^{\prime}-\alpha\beta^{\prime})\left(\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} - \frac{\alpha^{\prime}}{\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}\right)\right\}.$$

Multiplizirt man den in Parenthesen eingeschlossenen Ausdruck in Zähler und Nenner mit $\beta\beta^{\prime}$, so wird er

$$(\beta\beta^{\prime 2}-\beta^2\beta^{\prime})\left\{\frac{1}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} - \frac{1}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}\right\}$$

$$+ (\beta\alpha^{\prime}-\alpha\beta^{\prime})\left\{\frac{\alpha\beta\beta^{\prime}}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} - \frac{\alpha^{\prime}\beta\beta^{\prime}}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}},\right\}$$

oder

$$[\beta^{\prime 2}-\beta\beta^{\prime}-\alpha^2\beta^{\prime 2}+\alpha\alpha^{\prime}\beta\beta^{\prime}]\left\{\frac{\beta}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}\right\}$$

$$+ [\beta^2-\beta\beta^{\prime}-\beta^{\prime 2}\beta^2+\alpha\alpha^{\prime}\beta\beta^{\prime}]\frac{\beta^{\prime}}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}.$$

Hier kann man in jedem Theile $\beta^2\beta^{\prime 2}-\beta^2\beta^{\prime 2}$ addiren und gelangt durch

$$[\beta^{\prime 2}(1-\alpha^2-\beta^2)+\beta^2\beta^{\prime 2}-\beta\beta^{\prime}+\alpha\alpha^{\prime}\beta\beta^{\prime}]\frac{\beta}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}$$

$$+ [\beta^2(1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2})+\beta^2\beta^{\prime 2}-\beta\beta^{\prime}+\alpha\alpha^{\prime}\beta\beta^{\prime}]\frac{\beta^{\prime}}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}$$

zu folgenden Transformationen:

$$[\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}+\beta^2\beta^{\prime 2}-\beta\beta^{\prime}$$

$$+\alpha\alpha^{\prime}\beta\beta^{\prime}]\left\{\frac{\beta\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}+\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}{\beta\beta^{\prime}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\sqrt{1-\alpha^{\prime 2}-\beta^{\prime 2}}}\right\},$$

d. h. nach (102) zu

$$\frac{(\lambda' - \lambda'' + l'' + \lambda - l + \lambda + l' + \lambda)\, 2\sqrt{(l-\lambda)(l'+\lambda') - m''^2}}{(l-\lambda)(\lambda' - \lambda'')},$$

und

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N} = \frac{2\pi(\lambda - \lambda'')\sqrt{(l-\lambda)(l'+\lambda') - m''^2}}{(\lambda-\lambda')(\lambda-\lambda'')(\lambda'-\lambda'')}$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{(l-\lambda)(l'+\lambda') - m''^2}}{(\lambda'-\lambda)(\lambda''-\lambda')}.$$

Dieselbe Reihe von Umformungen führt den Ausdruck

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

auf eine ähnliche einfache Form.

Es war derselbe

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N} = \frac{2\pi}{N'(l-\lambda)} \Bigg\{ (\alpha' - \alpha) \left[\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2}} \right]$$

$$+ (\beta\alpha' - \alpha\beta') \left[\frac{\beta'}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} - \frac{\beta}{\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2}} \right] \Bigg\},$$

und wird, wenn man den in Parenthesen eingeschlossenen Faktor mit $\alpha\alpha'$ im Zähler und Nenner multiplizirt, beide Theile die in

$$\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}} \text{ und } \frac{1}{\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2}}$$

multiplizirt sind, absondert und ihnen $-\alpha^2\alpha'^2 + \alpha^2\alpha'^2$ addirt,

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N} = \frac{2\pi}{N'(l-\lambda)} \Bigg\{ \Big(\alpha\alpha' \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2} + \alpha^2\alpha'^2 - \alpha\alpha'^2$$

$$+ \alpha\alpha'\beta\beta' \Big) \left\{ \frac{\alpha\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2} + \alpha'\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}}{\alpha\alpha'\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\sqrt{1-\alpha'^2-\beta'^2}} \right\}$$

$$= \frac{2\pi}{N'(l-\lambda)} \frac{(\lambda' - \lambda'' + l'' + \lambda - l + \lambda + l' + \lambda)}{(l-\lambda)} \frac{2\sqrt{(l-\lambda')(l''+\lambda') - m'^2}}{(\lambda'-\lambda'')},$$

woraus sich ergiebt

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{N}=\frac{2\pi\sqrt{(l-\lambda^{\prime})(l^{\prime\prime}+\lambda^{\prime})-m^{\prime 2}}}{(\lambda^{\prime}-\lambda^{\prime\prime})(\lambda-\lambda^{\prime})}\,.\;\ldots\ldots\ldots \quad (105)$$

Die Ausdrücke (103), (104) und (105) sind aber dieselben wie in (63), da λ, $\lambda^{\prime}$ und $\lambda^{\prime\prime}$ und g, $g^{\prime}$, $g^{\prime\prime}$ die Wurzeln derselben kubischen Gleichung sind; doch ist in (104) und (105) das Zeichen der Quadratwurzel negativ in [103] positiv zu nehmen, wenn die Ausdrücke auch in den Zeichen übereinstimmen sollen.

Um die Integrale

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi\,d\varphi}{N}\,,\quad\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{N}\,,\quad\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{N}$$

auf I., II. und III. zurück zu führen, wollen wir aus N die identische Gleichung bilden:

$$\frac{(l^{\prime}-l^{\prime\prime})}{2}\cos 2\varphi+m\sin 2\varphi=N-\frac{(l^{\prime}+2l+l^{\prime\prime})}{2}-2m^{\prime}\sin\varphi-2m^{\prime\prime}\cos\varphi.\quad . \quad (106)$$

Nachdem dieselbe differentiirt und durch $2\,d\varphi$ dividirt worden, wird sie

$$m\cos 2\varphi-\frac{l^{\prime}-l^{\prime\prime}}{2}\sin 2\varphi=\tfrac{1}{2}\frac{dN}{d\varphi}+m^{\prime\prime}\sin\varphi-m^{\prime}\cos\varphi.\;\ldots\ldots\ldots \quad (107)$$

Von den Gleichungsn (106) und (107) können wir die erste mit $\frac{(l^{\prime}-l^{\prime\prime})}{2}$, die zweite mit m multipliziren und addiren, so erhalten wir

$$\cos 2\varphi=\frac{1}{\left(\frac{(l^{\prime}-l^{\prime\prime})}{2}\right)^2+m^2}\left\{N\left\{\frac{l^{\prime}-l^{\prime\prime}}{2}\right\}-\left\{\frac{l^{\prime}-l^{\prime\prime}}{2}\right\}\left\{\frac{l^{\prime}+2l+l^{\prime\prime}}{2}+\frac{m}{2}\frac{dN}{d\varphi}\right.\right.$$
$$\left.+[m^{\prime\prime}m-m^{\prime}(l^{\prime}-l^{\prime\prime})]\sin\varphi-[m^{\prime}m+m^{\prime\prime}(l^{\prime}-l^{\prime\prime})\cos\varphi]\right\}$$

und auf ähnliche Weise:

$$\sin 2\varphi=\frac{1}{\left(\frac{(l^{\prime}-l^{\prime\prime})}{2}\right)^2+m^2}\left\{mN-m\left\{\frac{l^{\prime}+2l+l^{\prime\prime}}{2}\right\}-\left\{\frac{l^{\prime}-l^{\prime\prime}}{4}\right\}\frac{dN}{d\varphi}\right.$$
$$\left.-\left[2mm^{\prime}+m^{\prime\prime}\left\{\frac{l^{\prime}-l^{\prime\prime}}{2}\right\}\right]\sin\varphi+\left[m^{\prime}\left\{\frac{l^{\prime}-l^{\prime\prime}}{2}\right\}-2mm^{\prime\prime}\right]\cos\varphi.\right\} \quad (108)$$

Die Gleichungen (108) geben mit $d\varphi$ multiplizirt und durch N dividirt die Werthe von

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{N} \text{ und } \int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N}$$

durch schon bekannte Integrale ausgedrückt, bis auf die Form

$\int\frac{\frac{dN}{d\varphi}.d\varphi.}{N}$ Dieses ist aber $\int\frac{d.\log N d\varphi}{d\varphi}$ oder $\log N$, welches in den gegebenen Grenzen von 0 bis 2φ verschwindet; und somit sind endlich, da

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{N}+\tfrac{1}{2}\int\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{N}=\int\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{N},$$

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{d\varphi}{N}-\tfrac{1}{2}\int\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{N}=\int\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{N},$$

$$\tfrac{1}{2}\int\frac{\sin 2\varphi\, d\varphi}{N}=\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{N},$$

wird, auch die drei letzten der vorgelegten Integrale entwickelt, als

$$\left.\begin{aligned}
&\text{IV.}=\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi.d\varphi}{N}=\frac{\pi}{\left(\frac{l'-l''}{2}\right)^2+m^2}\left\{\begin{aligned}&\frac{l'-l''}{2}+\left(m^2-\frac{(l'-l'')(l+l'')}{2}\right)\text{I.}\\&-\left(m'(l'-l'')-m''m\right)\text{II.}+\left(\frac{(l'-l'')}{2}m''-mm'\right)\text{III.}\end{aligned}\right\}\\
&\text{V.}=\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi.d\varphi}{N}=\frac{\pi}{\left(\frac{l'-l''}{2}\right)^2+m^2}\left\{\begin{aligned}&-\left(\frac{l'-l''}{2}\right)+\left[m^2+\frac{(l'-l'')(l+l')}{2}\right]\text{I.}\\&-\left(m''m-m'(l'=l'')\right)\text{II.}+\left[mm'-\left(\frac{l'-l''}{2}\right)m''\right]\text{III.}\end{aligned}\right\}\\
&\text{VI.}=\int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\cos\varphi.d\varphi}{N}=\frac{\pi}{\left(\frac{l'-l''}{2}\right)^2+m^2}\left\{\begin{aligned}&m-\frac{m(l'+2l+l'')}{2}\text{I.}\\&-2\left[m'm+m''\left(\frac{l'-l''}{2}\right)\right]\text{II.}+\left[m'\left[\frac{l'-l''}{2}\right]-2mm''\right]\text{III.}\end{aligned}\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(109)$$

Die Grenzen 0 und 2π geben ferner eine bequeme Integration der gegebenen Integralausdrücke durch Reihen. Man braucht zu dem Ende nur

$$\frac{1}{1+r\cos(\varphi-\psi)} \text{ und } \frac{1}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi)}$$

in Reihen nach den Vielfachen der Bogen $(\varphi-\psi)$ und $(\varphi-\psi')$ so zu entwickeln, dass sie konvergiren.

Es sei also

$$\frac{1}{1+r\cos(\varphi-\psi)}=\frac{1}{1+\frac{r}{2}\left[e^{i(\varphi-\psi)}+e^{-i(\varphi-\psi)}\right]},$$

wo $i=\sqrt{-1}$ gesetzt worden, so wird, wenn y für $e^{i(\varphi-\psi)}$ geschrieben worden, der zu verwandelnde Ausdruck:

$$\frac{1}{1+\frac{r}{2}\left[y+\frac{1}{y}\right]}=\frac{\frac{2y}{r}}{\frac{2}{r}y+y^2+1}.$$

Wenn $-a$ und $-b$ die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$y^2+\frac{2}{r}y+1=0$ bezeichnen, so dass

$$a=\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r},\quad b=\frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r}$$

sind, so giebt die Zerfällung in die Partialbrüche

$$\frac{\alpha}{y+a} \text{ und } \frac{\beta}{y+b},\ \alpha=\frac{1+\sqrt{1-r^2}}{r\sqrt{1-r^2}}=\frac{a}{\sqrt{1-r^2}} \text{ und } \beta=\frac{-(1-\sqrt{1-r^2}}{r\sqrt{1-r^2}}=\frac{-b}{\sqrt{1-r^2}},$$

aus den beiden Gleichungen: $\left\{\begin{aligned}\alpha+\beta&=\frac{2}{r}\\ \alpha b+\beta a&=0\end{aligned}\right\}$ und es wird also

$$\frac{1}{1+r\cos(\varphi-\psi)}=\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left\{\frac{a}{y+a}-\frac{b}{y-b}\right\}.$$

Die beiden Wurzeln sind hier reziprok und also $a=\frac{1}{b}$. Entwickelt man denjenigen Theil nach absteigenden Potenzen von y, in welchem die Wurzel <1 ist, hier den zweiten Theil, da $r<1$, den zweiten nach aufsteigenden Potenzen von y so wird

$$\frac{1}{1+r\cos(\varphi-\psi)} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left\{\begin{array}{l} 1-\frac{y}{a}+\frac{y^2}{a^2}-\frac{y^3}{a^3}+\frac{y^4}{a^4}-\ldots\ldots \\ \quad -\frac{b}{y}+\frac{b^2}{y^2}-\frac{b^3}{y^3}+\frac{b^4}{y^4}-\ldots\ldots \end{array}\right\}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left\{1-b\left\{y+\frac{1}{y}\right\}+b^2\left\{y^2+\frac{1}{y^2}\right\}-b^3\left\{y^3+\frac{1}{y^3}\right\}+\ldots\ldots\right\}$$

und für y den Werth zurück substituirt,

$$\frac{1}{1+r\cos(\varphi-\psi)} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\left(\begin{array}{l} 1-2b\cos(\varphi-\psi)+2b^2(\cos^2(\varphi-\psi)) \\ \quad -2b^3\cos 3(\varphi-\psi))+\ldots\ldots \end{array}\right) \tag{110}$$

Dieselbe Entwickelung muss für den Faktor $\frac{1}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}$ eine ähnliche Reihe geben:

$$\frac{1}{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})} = \frac{1}{\sqrt{1-r^{\prime 2}}}\left(\begin{array}{l} 1-2b^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})+2b^{\prime 2}\cos 2(\varphi-\psi^{\prime}) \\ \quad -2b^{\prime 3}\cos 3(\varphi-\psi^{\prime})+\ldots\ldots \end{array}\right) \tag{111}$$

Diese Reihen wollen wir in die Ausdrücke

$$\int\frac{d\varphi}{N}, \qquad \int\frac{\sin\varphi \, . \, d\varphi}{N}, \qquad \int\frac{\cos\varphi \, . \, d\varphi}{N}$$

einführen und die Integration in den gegebenen Grenzen ausführen. Es wird dadurch nach (76)

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{N} = \frac{1}{(l-\lambda)N^{\prime}}\left(\begin{array}{l} \int_0^{2\pi}(r^2-rr^{\prime}\cos(\psi-\psi))\frac{d\varphi}{\sqrt{1-r^2}}\left\{\begin{array}{l}1-2b\cos(\varphi-\psi) \\ +2b^2\cos 2(\varphi-\psi)-\ldots\ldots\end{array}\right\} \\ +\int_0^{2\pi}(r^{\prime 2}-rr^{\prime}\cos(\psi-\psi^{\prime}))\frac{d\varphi}{\sqrt{1-r^{\prime 2}}}\left\{\begin{array}{l}1-2b^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime}) \\ +2b^{\prime 2}\cos(\varphi-\psi)-\ldots\ldots\end{array}\right\} \\ +\int_0^{2\pi} d.\,\frac{\left\{\log\frac{1+r^{\prime}\cos(\varphi-\psi^{\prime})}{1+r\cos(\varphi-\psi)}\right\}}{d\varphi}\,d\varphi, \end{array}\right)$$

wo der dritte Theil nach der oben gemachten Bemerkung verschwindet; aber auch in dem ersten und zweiten Theile haben in den gegebenen Grenzen nur diejenigen Terme Werthe, wo φ unter *sin* oder *cos* verschwindet, da im Allgemeinen sowohl

$$\int_0^{2\pi} \sin\,(p\,\varphi + p\,\psi)\,d\varphi \text{ als } \int_0^{2\pi} \cos\,(p\,\varphi \pm p\,\psi)\,d\varphi$$

verschwindet, wenn p eine ganze positive oder negative Zahl ist. Es wird deshalb

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{N} = \frac{2\pi}{N'(l-\lambda)} \left[\frac{r^2 - rr' \cos(\psi - \psi')}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{r'^2\,rr' \cos(\psi - \psi')}{\sqrt{1-r'^2}} \right], \tag{112}$$

wie wir dieses schon (80) gefunden haben.

Mit Hülfe jener Reihen wird nun aus

$$\int \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{N}$$

$$= \frac{1}{N'(l-\lambda)} \left\{ \begin{aligned} &\int \sin\varphi\,d\varphi\, \frac{[r^2 - rr' \cos(\psi - \psi') + rr' \sin(\psi - \psi')\, r \sin(\varphi - \psi)]}{\sqrt{1-r^2}}\, [1 \\ &\qquad\qquad - 2b \cos(\varphi - \psi) + 2b^2 \cos 2(\varphi - \psi) - \ldots\ldots] \\ &+ \int \sin\varphi\,d\varphi\, \frac{[r'^2 - rr' \cos(\psi - \psi') - rr' \sin(\psi - \psi')\, r' \sin(\varphi - \psi')]}{\sqrt{1-r'^2}}\, [1 \\ &\qquad\qquad - 2b' \cos(\varphi - \psi') + 2b'^2 \cos 2(\varphi - \psi') - \ldots\ldots], \end{aligned} \right.$$

und, wenn man die Produkte der trigonometrischen Funktionen in die Summen und Differenzen zerlegt und die oben gemachte Bemerkung über die Grenzen festhält:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{N} = \frac{2\pi}{N'(l-\lambda)} \left\{ \begin{aligned} &- \left[\frac{r^2 - rr' \cos(\psi - \psi')\, b \sin\psi}{\sqrt{1-r^2}} + \frac{rr' \sin(\psi - \psi')\, r \cos\psi}{2\sqrt{1-r^2}} \right. \\ &- \frac{rr' \sin(\psi - \psi')\, r b^2 \cos\psi}{2\sqrt{1-r^2}} - \frac{r' - rr \cos(\psi - \psi')\, b' \sin\psi'}{\sqrt{1-r'^2}} \\ &\left. - \frac{rr' \sin(\psi - \psi')\, r' \cos\psi'}{2\sqrt{1-r'^2}} + \frac{rr' \sin(\psi - \psi')\, r' b'^2 \cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}} \right], \end{aligned} \right.$$

und durch die Zurückführung der Werthe

$$\frac{1 - \sqrt{1-r^2}}{r} \text{ und } \frac{1 - \sqrt{1-r'^2}}{r'} \text{ für } b \text{ und } b'$$

und der Quadrate dieser Ausdrücke

$$\frac{2(1 - \sqrt{1-r^2})}{r^2} - 1 = b^2 \text{ und } \frac{2(1 - \sqrt{1-r'^2})}{r'^2} - 1 = b'^2$$

gelangt man zu

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$= \frac{2\pi}{N'(l-\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{r'(1-\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}} [\sin\psi \cos(\psi-\psi') - \sin(\psi-\psi')\cos\psi] \\ + \dfrac{r(1-\sqrt{1-r'^2})}{\sqrt{1-r'^2}} [\cos(\psi-\psi')\sin\psi' + \sin(\psi-\psi')\cos\psi'] \\ - \dfrac{r(1-\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}} \sin\psi - \dfrac{r'(1-\sqrt{1-r'^2})}{\sqrt{1-r'^2}} \sin\psi' \\ \quad + rr' \sin(\psi-\psi') \left[\dfrac{r\cos\psi}{\sqrt{1-r^2}} - \dfrac{r'\cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}} \right] \end{array} \right\} . \quad (113)$$

$$= \frac{2\pi}{N'(l-\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} (r\sin\psi - r'\sin\psi') \left[\dfrac{1}{\sqrt{1-r'^2}} - \dfrac{1}{\sqrt{1-r^2}} \right] \\ \quad + rr' \sin(\psi-\psi') \left[\dfrac{r\cos\psi}{\sqrt{1-r^2}} - \dfrac{r'\cos\psi'}{\sqrt{1-r'^2}} \right]. \end{array} \right\}$$

Dieses ist derselbe Ausdruck, wie ihn die endliche Integration (89) gegeben hat. Auf analoge Weise findet man die Identität des durch die Integration vermittelst unendlicher Reihen gefundenen Ausdruckes von

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

und des endlichen oben angegebenen (90). Es ist nämlich

$$\int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$= \frac{1}{N'(l-\lambda)} \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-r^2}} [r^2 - rr'\cos(\psi-\psi') + r^2 r' \sin(\psi-\psi')\sin(\varphi-\psi)]\, [1 \\ \qquad\qquad - 2b\cos(\varphi-\psi) + 2b^2\cos 2(\varphi-\psi) - \ldots\ldots] \\ + \displaystyle\int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-r'^2}} [r'^2 - rr'\cos(\psi-\psi') - rr'^2 \sin(\psi-\psi')\sin(\varphi-\psi)]\, [1 \\ \qquad\qquad - 2b'\cos(\varphi-\psi') + 2b'^2\cos 2(\varphi-\psi') - \ldots\ldots]. \end{array} \right\}$$

Von diesen Theilen bleiben nach den Integrationen in den bestimmten Grenzen und nach der Zerfällung der Produkte in die Summen und Differenzen der trigonometrischen Funktionen

$$\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

$$=\frac{2\pi}{N'(l-\lambda)}\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{(r^2-rr'\cos(\psi-\psi')\cos\psi.b}{\sqrt{1-r^2}}-\frac{1}{2}\dfrac{r^2 r'\sin(\psi-\psi')\sin\psi(1-b^2))}{\sqrt{1-r^2}} \\ -\dfrac{(r'^2-rr'\cos(\psi-\psi')\cos\psi' b'}{\sqrt{1-r'^2}}+\dfrac{r'^2 r\sin(\psi-\psi')\sin\psi'(1-b'^2))}{\sqrt{1-r'^2}}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{2\pi}{N'(l-\lambda)}\left\{\begin{array}{l}r'\dfrac{(1-\sqrt{1-r^2})\,[\sin(\psi-\psi')\sin\psi+\cos(\psi-\psi')\cos\psi]}{\sqrt{1-r^2}} \\ \qquad +\dfrac{r(1-\sqrt{1-r'^2})\,[\sin(\psi-\psi')\sin\psi'-\cos(\psi-\psi')\cos\psi']}{\sqrt{1-r'^2}} \\ -r\dfrac{(1-\sqrt{1-r^2})}{\sqrt{1-r^2}}\cos\psi-r'\dfrac{(1-\sqrt{1-r'^2})}{\sqrt{1-r'^2}}\cos\psi' \\ \qquad +rr'\sin(\psi-\psi')\left(\dfrac{r\sin\psi}{\sqrt{r-r^2}}-\dfrac{r'\sin\psi'}{\sqrt{1-r'^2}}\right),\end{array}\right\}$$

und hieraus

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N}=\frac{2\pi}{N'(l-\lambda)}\left\{(r\cos\psi-r'\cos\psi')\left[\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}-\frac{1}{\sqrt{1-r'^2}}\right]\right. \\ \displaystyle\qquad\qquad +rr'\sin(\psi-\psi')\left[\frac{r\sin\psi}{\sqrt{1-r^2}}-\frac{r'\sin\psi'}{\sqrt{1-r'^2}}\right].\end{array}\right\}\quad(114)$$

Wie diese Resultate in die einfache Gestalt durch die Wurzeln der kubischen Gleichung gebracht werden, ist oben schon gezeigt; wie auch, auf welche Weise von ihnen die Ausdrücke

$$\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{N},\quad \int_0^{2\pi}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{N}\quad \text{und}\quad \int_0^{2\pi}\frac{\sin\varphi\,\cos\varphi\, d\varphi}{N}$$

abhängig sind.

Nachdem wir die Auflösung der 6 vorgelegten Integrale auf dreifachem Wege gegeben und die Uebereinstimmung der Resultate nachgewiessn haben, bleibt uns noch übrig, die Mittel anzudeuten, wie auf diese Ausdrücke jedes andere Integral von der Gestalt

$$\int \frac{\sin i\varphi\, d\varphi}{N^k} \quad \text{und} \quad \int \frac{\cos i\varphi\, d\varphi}{N^k}$$

zurückgeführt werden kann, so lange i und k ganze Zahlen sind; jedoch erlaubt die Beschränktheit des Raumes bei diesem Theile der Aufgabe nur andeutungsweise zu verfahren.

Es können nämlich

$$\int \frac{\sin i\varphi\, d\varphi}{N^k} \quad \text{und} \quad \int \frac{\cos i\varphi\, d\varphi}{N^k}$$

mit Hülfe der Gleichungen, durch welche man $\sin m\varphi$ und $\cos m\varphi$ durch kleinere Vielfache von φ ausdrückt, leicht auf die Integration von

$$\int \frac{\sin \varphi\, d\varphi}{N^k}, \quad \int \frac{\cos \varphi\, d\varphi}{N^k} \quad \text{und} \quad \int \frac{d\varphi}{N^k}$$

zurückgeführt werden, wie wir dies schon bei

$$\int \frac{\sin^2 \varphi\, d\varphi}{N} \quad \text{und} \quad \int \frac{\cos^2 \varphi\, d\varphi}{N}$$

zum Theil gezeigt haben, als sie durch

$$\int \frac{\sin \varphi\, d\varphi}{N}, \quad \int \frac{\cos \varphi\, d\varphi}{N} \quad \text{und} \quad \int \frac{d\varphi}{N}$$

ausgedrückt und entwickelt wurden.

Auch der Exponent k des Nenners lässt sich durch folgendes Verfahren für diese verschiedenen Ausdrücke um die Einheit unter dem Integralzeichen verringern, oder

$$\int \frac{d\varphi}{N^k}, \text{ auf die entsprechenden Formen von } \int \frac{d\varphi}{N^{k-1}} \text{ etc.}$$

zurückführen. Es wird dieses jedes Mal erreicht werden, wenn man sich die Gleichungen bildet:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{d.\left\{\frac{1}{N^{k-1}}\right\}}{d\varphi} &= \frac{a}{N^k}+\frac{b\cos\varphi}{N^k}+\frac{c\sin\varphi}{N^k}+\frac{d\sin 2\varphi}{N^k}+\frac{e\cos 2\varphi}{N^k} \\
\frac{d\left\{\frac{\cos\varphi}{N^{k-1}}\right\}}{d\varphi} &= \frac{-\sin\varphi}{N^{k-1}}=\frac{a_1}{N^k}+\frac{b_1\cos\varphi}{N^k}+\frac{c_1\sin\varphi}{N^k}\,\frac{d_1\sin 2\varphi}{N^k}+\frac{e_1\cos 2\varphi}{N^k} \\
\frac{d\left\{\frac{\sin\varphi}{N^{k-1}}\right\}}{d\varphi} &= \frac{\cos\varphi}{N^{k-1}}+\frac{a_2}{N^k}+\frac{b_2\cos\varphi}{N^k}+\frac{c_2\sin\varphi}{N^k}+\frac{d_2\sin 2\varphi}{N^k}+\frac{e_2\cos 2\varphi}{N^k} \\
\frac{d\left\{\frac{\sin 2\varphi}{N^{k-1}}\right\}}{d\varphi} &= \frac{2\cos 2\varphi}{N^{k-1}}+\frac{a_3}{N^k}+\frac{b_3\cos\varphi}{N^k}+\frac{c_3\sin\varphi}{N^k}+\frac{d_3\sin 2\varphi}{N^k}+\frac{e_3\cos 2\varphi}{N^k} \\
\frac{d\left\{\frac{\cos 2\varphi}{N^{k-1}}\right\}}{d\varphi} &= \frac{-2\sin 2\varphi}{N^{k-1}}+\frac{a_4}{N^k}+\frac{b_4\cos\varphi}{N^k}+\frac{c_4\sin\varphi}{N^k}+\frac{d_4\sin 2\varphi}{N^k}+\frac{e_4\cos 2\varphi}{N^k}.
\end{aligned}
\right\} \quad (115)
$$

Bezeichnet man

$$\int\frac{d\varphi}{N^k}=A,\ \int\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{N^k}=B,\ \int\frac{\sin\varphi . d\varphi}{N^k}=C,\ \int\frac{\sin 2\varphi . d\varphi}{N^k}=D,\ \int\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{N^k}=E,$$

so geben jene fünf Gleichungen (115), nachdem sie mit $d\varphi$ multiplizirt worden, ein Mittel, die fünf unbekannten Grössen A, B, C, D, E durch Integralformeln, bei denen der Exponent um die Einheit verringert ist, und durch die ähnliche Formeln ohne das Integralzeichen auszudrücken; eine Aufgabe, deren Lösung nur Schwierigkeiten in der Rechnung darbietet.

Conitz, den 1. Juni 1851.

A. Wichert.