Die Gleichung einer Lemniskate ist:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2) \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

wo a die halbe Axe derselben bezeichnet und die rechtwinkligen Koordinaten x und y aus dem beiden Theilen der Curve gemeinschaftlichen Punkte A (siehe die Figur) gerechnet werden. Setzt man hier $x^2 + y^2 = z^2$ und $a^2 = 1$, so dass z, die Chorde, in Theilen der halben Axe ausgedrückt ist, so wird die Gleichung:

$$z^4 = x^2 - y^2 = 2\,x^2 - z^2 = z^2 - 2\,y^2$$

ferner $$x = z\sqrt{\frac{1+z^2}{2}},\quad y = z\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}$$

$$dx = \frac{(1 + 2\,z^2)\,dz}{\sqrt{2\,(1+z^2)}} \qquad dy = \frac{(1 - 2\,z^2)\,dz}{\sqrt{2\,(1-z^2)}}$$

und daraus das Differential eines Bogens:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$$

und $$s = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{1+z^2}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

ein elliptisches Integral, aus dessen Natur Abel im zweiten und dritten Bande des Crelleschen Journals für reine und angewandte Mathematik bewiesen hat, dass man mit Hülfe des Lineals und Zirkels allein die Peripherie einer Lemniskate in m gleiche Theile theilen kann, wo m die Form hat 2^n oder $2^n + 1$, und wo die letztere Zahl zu gleicher Zeit eine Primzahl sein muss.

Die dort aufgestellten allgemeinen Vorschriften sollen hier auf die Fünftheilung der Lemniskate angewendet werden, da der Weg, auf welchem man hiezu durch die Zerfällung der elliptischen Funktionen in imaginäre Theile gelangt, von grossem Interesse ist; für die Siebzehntheilung derselben Figur jedoch sollen die Werthe durch die Auflösung einer biquadratischen Gleichung angegeben werden, indem derselbe Weg wie dort zu grosse Rechnungsschwierigkeiten darbieten würde.

Da in Folgendem die Abel schen Bezeichnungen festgehalten werden sollen, so sei, um sie mit den Legendre schen zu vergleichen, $z = \sin\vartheta$ und $1 = -k^2$, und es wird dann:

$$\int_0 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1+z^2}} = \int_0 \frac{d\vartheta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2\vartheta}}; \text{ und dieses} = \delta \ldots (3)$$

giebt z als Funktion von δ; so dass

$$\left.\begin{aligned} z &= \varphi\delta = \sin\vartheta = \sin\operatorname{am}\delta \\ \sqrt{1-z^2} &= f\delta = \sqrt{1-\varphi^2\delta} = \cos\vartheta = \cos\operatorname{am}\delta \\ \sqrt{1+z^2} &= F\delta = \sqrt{1+\varphi^2\delta} = \sqrt{1-k^2\sin^2\vartheta} = \Delta\operatorname{am}\delta \end{aligned}\right\} \ldots (4)$$

ist. Hieraus folgt unmittelbar, wenn man an die Stelle des z setzt $z\sqrt{-1}$ oder $z\,i$

$$\varphi(\delta i) = i\,\varphi\delta,\ f(\delta i) = F\delta,\ \text{und } F(\delta i) = f\delta \ \ldots (5)$$

Es sei ferner $\displaystyle\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} = \frac{\omega}{2}$, so ist für $\varphi\,\frac{\omega}{2}$ . . $z = 1$ und für $\varphi\,\omega$ wird $z = o$.

Nach den Fundamentalformeln der Addition elliptischer Transcendenten:

$$\sin\operatorname{am}(\alpha+\beta) = \frac{\sin\operatorname{am}\alpha\ \cos\operatorname{am}\beta\ \Delta\operatorname{am}\beta + \sin\operatorname{am}\beta\ \cos\operatorname{am}\alpha\ \Delta\operatorname{am}\alpha}{1 - k^2\ \sin^2\operatorname{am}\alpha\ \sin^2\operatorname{am}\beta.}$$

$$\cos\operatorname{am}(\alpha+\beta) = \frac{\cos\operatorname{am}\alpha\ \cos\operatorname{am}\beta - \sin\operatorname{am}\alpha\ \sin\operatorname{am}\beta\ \Delta\operatorname{am}\alpha\ \Delta\operatorname{am}\beta}{1 - k^2\ \sin^2\operatorname{am}\alpha\ \sin^2\operatorname{am}\beta}$$

$$\Delta\operatorname{am}(\alpha+\beta) = \frac{\Delta\operatorname{am}\alpha\ \Delta\operatorname{am}\beta - k^2\ \sin\operatorname{am}\alpha\ \sin\operatorname{am}\beta\ \cos\operatorname{am}\alpha\ \cos\operatorname{am}\beta}{1 - k^2\ \sin^2\operatorname{am}\alpha\ \sin^2\operatorname{am}\beta.}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(\alpha+\beta) &= \frac{\varphi\alpha\, f\beta\, F\beta + \varphi\beta\, f\alpha\, F\alpha}{1+\varphi^2\alpha\,\varphi^2\beta.} \\
f(\alpha+\beta) &= \frac{f\beta\, f\alpha - \varphi\alpha\,\varphi\beta\, F\alpha\, F\beta}{1+\varphi^2\alpha\,\varphi^2\beta} \\
F(\alpha+\beta) &= \frac{F\alpha\, F\beta + \varphi\alpha\,\varphi\beta\, f\alpha\, f\beta}{1+\varphi^2\alpha\,\varphi^2\beta.}
\end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; (6)$$

wird mit Rücksicht auf die Formeln (5)

$$\left.\begin{aligned}
\varphi(\alpha+\beta i) &= \frac{\varphi\alpha\, f\beta\, F\beta + i\,\varphi\beta\, f\alpha\, F\alpha}{1-\varphi^2\alpha\,\varphi^2\beta.} \\
f(\alpha+\beta i) &= \frac{f\alpha\, F\beta - i\,\varphi\alpha\,\varphi\beta\, F\alpha\, F\beta}{1-\varphi^2\alpha\,\varphi^2\beta.} \\
F(\alpha+\beta i) &= \frac{F\alpha\, f\beta + i\,\varphi\alpha\,\varphi\beta\, f\alpha\, F\beta}{1-\varphi^2\alpha\,\varphi^2\beta.}
\end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; (7)$$

Diese Gleichungen zeigen, dass die Funktionen der imaginären Veränderlichen bekannt sind, wenn die der reellen es sind. Setzt man dann $\alpha = m\,\delta$ und $\beta = \mu\,\delta$, so geben dieselben Formeln (6) eine Methode $\varphi(m\,\delta)$, $f(m\,\delta)$, $F(m\,\delta)$, $\varphi(\mu\,\delta)$, $f(\mu\,\delta)$ und $F(\mu\,\delta)$ durch die einfachen Funktionen $\varphi\,\delta$, $f\,\delta$, $F\,\delta$ auszudrücken, wenn nur m und μ ganze Zahlen sind; und mit Hülfe der Gleichungen (7) kann man jede der Funktionen $\varphi(m+\mu i)\,\delta$, $f(m+\mu i)\,\delta$, $F(m+\mu i)\,\delta$ durch die 3 Grössen $\varphi\,\delta$, $f\,\delta$ und $F\,\delta$, oder auch nur durch eine derselben z. B. $\varphi\,\delta$ angeben.

Auch überzeugt man sich leicht, dass, wenn man in den Gleichungen (6) $\alpha = \beta$ setzt und so resp. $\varphi(2\,\alpha)$ $\varphi(3\,\alpha)$ $\varphi(4\,\alpha)$ . . . $\varphi(m\,\alpha)$ entwickelt, dieses rationale oder irrationale Funktionen von $\varphi^2\alpha$ sein werden, je nach dem m eine ungerade oder gerade Zahl ist, die noch in den Faktor $\varphi\alpha$ multiplizirt sind. Da die Gleichungen (7) mit ihnen gleichartig sind, so wird auch $\varphi(m+\mu i)\,\delta = \varphi\,\delta\,.\,T$ . . . . (8), wo T eine rationale Funktion von $\varphi^2\,\delta$ ist.

Verändert man δ in $\delta\, i$, so verändert sich $\varphi\, i\,\delta$ in $i\,\varphi\,\delta$ und es wird aus (8)

$$i\,\varphi\,(m+\mu i)\,\delta = i\,\varphi\,\delta\, T^1 \quad \ldots . \quad (9)$$

wo T^1 dieselbe Funktion von $-\varphi^2\,\delta$ wie T von $\varphi^2\,\delta$ sein muss. Man muss also

$T^1 = T$ ..... (10) haben, oder es kann die Funktion T nur die Quadrate von $\varphi^2\delta$ enthalten d. h. eine rationale Funktion von $\varphi^4\delta$ sein.

Wenn wir das bisher Gesagte für $\varphi(2+i)\delta$ entwickeln, so ist aus den Formeln (7), darin $\alpha = 2\delta$ und $\beta = \delta$ gesetzt,

$$\varphi(2+i)\delta = \frac{\varphi 2\delta\, f\delta\, F\delta + i\varphi\delta\, f 2\delta\, F 2\delta}{1 - \varphi^2\delta\, \varphi^2 2\delta} \;\ldots\ldots\; (11),$$

nach (6) aber ist

$$\left.\begin{aligned} \varphi 2\delta &= \frac{2\varphi\delta\, f\delta\, F\delta}{1+\varphi^4\delta} \\ f 2\delta &= \frac{f^2\delta - \varphi^2\delta\, F^2\delta}{1+\varphi^4\delta} \\ F 2\delta &= \frac{F^2(\delta) + \varphi^2\delta\, f^2\delta}{1+\varphi^4\delta} \end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\; (12)$$

und die Substitution dieser Ausdrücke in (11) giebt:

$$\varphi(2+i)\delta = \varphi\delta\, \frac{2 - 2\varphi^8\delta + i(1 - 6\varphi^4\delta + \varphi^8\delta)}{1 - 2\varphi^4\delta + 5\varphi^8\delta}$$

woraus, $\varphi\delta = x$ gesetzt und Zähler und Nenner mit $1 - (1+2i)\,x^4$ dividirt, folgt:

$$\varphi(2+i)\delta = xi\, \frac{1 - 2i - x^4}{1 - (1-2i)\,x^4} \;\ldots\ldots\; (13)$$

Eine ganz ähnliche Form erhält $\varphi(4+i)\delta$, die sich auch durch einen solchen imaginären Faktor vereinfachen lässt und dieselbe Relation der Coeffizienten in Zähler und Nenner hat.

Es lässt sich aber jede Zahl von der Form $4m+1$ in die Summe zweier Quadrate auflösen*), so dass $4m+1 = \alpha^2+\beta^2$ gesetzt werden kann, oder $4m+1 = (\alpha+\beta i)(\alpha-\beta i)$. Um zur Fünf- und Siebzehntheilung der Lemniskate zu gelangen, darf man also nur $\varphi\,\frac{\omega}{2+i}$, $\varphi\,\frac{\omega}{2-i}$ und $\varphi\,\frac{\omega}{4+i}$, $\varphi\,\frac{\omega}{4-i}$ entwickeln, oder auch nur die beiden ersten, da die beiden zweiten Funktionen sich aus den ersten ergeben, wenn man darin für $+i$ setzt $-i$.

---

*) Legendre theor. d. nombr. pag. 178.

Da ferner $4m+1$ eine ungerade Zahl ist, also auch $\alpha^2+\beta^2$, so muss $\alpha+\beta$ eben so eine sein, also in der Gleichung

$$\varphi(\alpha+\beta i)\delta = \varphi\delta.\frac{U}{V} \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

müssen, wie oben bemerkt, U sowohl wie V rationale Funktionen von $\varphi^4\delta$ sein. Auch wird in (14) $\varphi(\alpha+\beta i)\delta = 0$ werden für $\delta = \frac{\omega}{\alpha+\beta i}$, da $\varphi\omega = 0$; weil aber für diese Annahme $\varphi\frac{\omega}{\alpha+\beta i}$ nicht $=0$ ist, so kann es nur U oder in (13) nur T sein d. h. die Wurzeln der Gleichung $U=0$ sind die Werthe für $\varphi\frac{\omega}{\alpha+\beta i}$. Man hat also aus (13), wo $\varphi\frac{\omega}{2+i} = x$ ist,

$$x^4 = 1-2i,\quad x^2 = \pm\sqrt{1-2i} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Es lässt sich aber auch beweisen, dass die zwei Wurzeln dieser Gleichung zugleich die Werthe der Ausdrücke $\varphi^2\left(\frac{\omega}{2+i}\right)$ und $\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2+i}\right)$ sind, oder dass die Gleichung (15) keine anderen Wurzeln haben kann, als $\pm\varphi\frac{\omega}{2+i}$ und $\pm\varphi\frac{2\omega}{2+i}$.

Es ist nämlich $\varphi(\alpha+\beta i)\delta = 0$, wenn man $(\alpha+\beta i)\delta = (m+\mu i)\omega$ oder $\delta = \frac{(m+\mu i)\omega}{\alpha+\beta i}$ setzt; oder, da diese Werthe nur für die Fünf- und Siebzehntheilung der Transcendente gebraucht werden, wenn $\delta = \frac{(m+\mu i)\omega}{\alpha+i}$ ist, wo α entweder 2 oder 4 bedeuten mag. Dann lässt sich immer

$$\frac{m+\mu i}{\alpha+i} = \frac{p}{\alpha+i} + k + k'i \quad \ldots\ldots \quad (16)$$

setzen, wo k und k' und p ganze Zahlen sind; und es wird dann

$$\left.\begin{aligned} m &= p+\alpha k - k' \\ \mu &= k + k'\alpha \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

sein, woraus $p = m - \alpha\mu + (\alpha^2 + 1)\, k'$ . . . . . . (18)
und k' als irgend eine unbestimmte ganze Zahl sich immer so bestimmen lässt, dass p positiv oder negativ immer kleiner als $\frac{\alpha^2+1}{2}$ ist. Aber nach der bekannten Periodizität der elliptischen Transcendenten, wie sie sich aus (6) leicht ableiten lässt, und nach den Gleichungen (5) ist:

$$ ^{*)}\quad \varphi\left(\frac{m+\mu i}{\alpha+i}\right)\omega = \varphi\left\{\left(\frac{p}{\alpha+i} + k + k^1 i\right)\omega\right\} = -1^{k+k^1}\ \varphi\,\frac{p\,\omega}{\alpha+i} $$

$$ = \varphi\left\{\pm\frac{p\,\omega}{\alpha+i}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (19) $$

d. h. wir dürfen für die Einsetzung aller Werthe von $+\infty$ bis $-\infty$ nur die Werthe der ganzen Zahlen für p von $+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$ bis $-\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}$ brauchen, oder vielmehr von $+\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$ bis $-\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$, da $\alpha^2+\beta^2$ immer eine ungerade Zahl ist.

Die Werthe dieser Eunktionen aber als die der Wurzeln der Gleichung sind auch unter sich verschieden, oder, da sie alle durch die Form:

$$ x = \varphi\,\frac{p\,\omega}{\alpha+\beta i} \quad \ldots\ldots \quad (20) $$

ausgedrückt sind, es kann nie

$$ \varphi\,\frac{p\,\omega}{\alpha+\beta i} = \varphi\,\frac{p^1\,\omega}{\alpha+\beta i} $$

sein; denn man kann nach dem Frühern immer

$$ \frac{p^1\,\omega}{\alpha+\beta i} = (-1)^{m+n}\ \frac{p^1\,\omega}{\alpha+\beta i} + (m+ni)\,\omega $$

setzen; es müsste also

*) Crelle Journ. B. II. 109.

$$\frac{p\,\omega}{\alpha+\beta i} = (-1)^{m+n} \frac{p^1\,\omega}{\alpha+\beta i} + (m+ni)\,\omega \;\ldots\ldots \quad (21)$$

sein, und dieses giebt, den zweiten Theil von (21) gleichnamig gemacht und die Zähler einander gleich gesetzt:

$$\left.\begin{cases}\beta m + n\alpha = 0 \\ p = (-1)^{m+n} p^1 + \alpha m - \beta n\end{cases}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

Da m und n willkührliche ganze Zahlen sind, so können wir sie so wählen, dass aus der ersten der Gleichungen (22)

$$\left.\begin{aligned} n &= -\beta t \\ m &= \alpha t\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

folgt, wo t noch eine ganze Zahl sein muss.

Aus dieser Relation lässt sich

$$p = (-1)^{m+n} p^1 + (\alpha^2+\beta^2)\,t.$$

d. h. $\quad \dfrac{p \pm p^1}{\alpha^2+\beta^2} = t$

leicht ableiten, was unmöglich ist, da p und p^1 immer kleiner als $\dfrac{\beta^2+\alpha^2}{2}$ und als ganze Zahlen angenommen wurden.

Es werden also diese verschiedenen Funktionen

$$\pm\,\varphi\frac{\omega}{\alpha+\beta i},\quad \pm\,\varphi\frac{2\omega}{\alpha+\beta i},\quad \varphi\frac{3\omega}{\alpha+\beta i} \text{ etc. deren Anzahl}$$

$\dfrac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$ ist, auch die Wurzeln von $U=0$ sein, wenn nachgewiesen ist, dass dieses keine gleichen Faktoren enthält.

Es war allgemein

$$\delta = \int\frac{dz}{\sqrt{1-z^4}} \quad \text{und} \quad z = \varphi\delta$$

also $\quad d\,.\,\varphi\delta = dz = d\delta\sqrt{1-z^4} \quad$ oder $\quad d\,.\,\varphi\delta = d\delta\,.\,f\delta\,.\,F\delta$

Diese Gleichung substituirt in die Differential-Gleichung (19) und durch $d\delta$ dividirt giebt:

$$d\left(V.\varphi(\alpha+\beta i)\delta\right) = d(\varphi\delta . U)$$

$$(\alpha+\beta i) . f(\alpha+\beta i)\delta . F(\alpha+\beta i)\delta . V + \frac{dV}{d\delta}\varphi(\alpha+\beta i)\delta$$

$$= f\delta . F\delta . U + \frac{dU}{d\delta}\varphi\delta.$$

Doch hat $U = 0$ nur dann gleiche Faktoren, wenn gleichzeitig $U = 0$ und $dU = 0$ ist; es müsste also in diesem Falle

$$(\alpha+\beta i).f(\alpha+\beta i)\delta.F(\alpha+\beta i).V + \frac{dV}{d\delta}\varphi(\alpha+\beta i)\delta = 0 \quad \ldots\ldots \quad (24)$$

sein. Da aber $\delta = \frac{\omega}{\alpha+\beta i}$ gesetzt war und $\varphi\omega = 0$ und $f\omega = F\omega = \pm 1$ ist, so muss aus (24) $V = 0$ sein oder U und V gleiche Faktoren enthalten, die wir aber in $\frac{U}{V}$ als nicht vorhanden voraussetzen dürfen; oder umgekehrt unter dieser Voraussetzung kann U keine gleichen Faktoren enthalten.

Um die Gleichung $U = 0$, deren Wurzeln die Werthe von

$$\varphi\frac{\omega}{\alpha+\beta i}, \pm\varphi\frac{2\omega}{\alpha+\beta i}, \ldots \pm\varphi\left\{\frac{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}}{\alpha+\beta i}\omega.\right\}$$

sind, mit Hülfe der Gaussschen Methode aufzulösen, sei ε eine primitive Wurzel von $\alpha^2+\beta^2$ oder unserer Primzahlen 5 und 17; dann wird immer

$$\varepsilon^m = \pm a_m + t(\alpha^2+\beta^2) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

gesetzt werden können, wo, wenn t eine ganze Zahl bedeutet, auch a_m eine solche ist und die verschiedenen Werthe ± 1, ± 2, ... bis $\pm\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$ haben kann, wenn man für m dieselben einsetzt.

Da nun auch

$$\left.\begin{aligned}\varphi\left(\varepsilon^{m}\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right) &= \varphi\left\{\pm a_m \frac{\omega}{\alpha+\beta i} + t\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta i}\right)\omega\right\} \\ &= \varphi\left\{\pm a_m \frac{\omega}{\alpha+\beta i} + t\,(\alpha-\beta i)\,\omega\right\} \\ &= \pm\varphi\left\{a_m \frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right\}\end{aligned}\right\} \quad \ldots (26)$$

ist, so fallen die Werthe von

$$\pm\varphi\frac{\omega}{\alpha+\beta i},\ \pm\varphi\frac{2\omega}{\alpha+\beta i},\ \ldots\ \pm\varphi\left\{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}\cdot\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right\}$$

mit den von

$$\pm\varphi\frac{\omega}{\alpha+\beta i},\ \pm\varphi\frac{\varepsilon\omega}{\alpha+\beta i},\ \pm\varphi\frac{\varepsilon^2\omega}{\alpha+\beta i}\ \ldots\ \varphi\left\{\varepsilon^{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}}\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right\}$$

allerdings in verschiedener Reihenfolge zusammen.

Es sei ferner ϑ irgend eine reelle oder imaginäre Wurzel der Gleichung

$$\vartheta^{\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}}-1=0 \quad \text{oder} \quad \vartheta^n-1=0,$$

wo $n=\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}$ ist, und, wenn $\frac{\omega}{\alpha+\beta i}=\delta$ wie früher gesetzt worden, werde durch $\psi\delta$ der Ausdruck

$$\varphi^2\delta+\varphi^2(\varepsilon\delta)\cdot\vartheta+\varphi^2(\varepsilon^2\delta)\cdot\vartheta^2\ \ldots\ \varphi^2(\varepsilon^{n-1}\delta)\cdot\vartheta^{n-1}$$

bezeichnet, so dass die Gleichung

$$\psi\delta=\varphi^2\delta+\varphi^2(\varepsilon\delta)\cdot\vartheta+\varphi^2(\varepsilon^2\delta)\cdot\vartheta^2+\ldots$$
$$+\varphi^2(\varepsilon^{n-1}\delta)\cdot\vartheta^{n-1} \quad \ldots (27)$$

als eine ganze rationale Funktion von $\varphi^2\delta$ entwickelt werden kann, die wir auch unter der Form schreiben können:

$$\psi\delta=\chi\,[\varphi^2\delta]; \quad \ldots\ldots (28)$$

so lässt sich leicht beweisen, dass immer

$$(\psi\,\delta)^n = \left(\chi\,[\varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta)]\right)^n \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

Setzt man nämlich in den Ausdruck (27) $\varepsilon^m\,\delta$ für δ, so wird er:

$$\left.\begin{aligned}\psi\,(\varepsilon^m\,\delta) = \varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta) + \varphi^2\,(\varepsilon^{m+1}\,\delta)\,.\,\vartheta + \varphi^2\,(\varepsilon^{m+2}\,\delta)\,.\,\vartheta^2 + \ldots \\ + \varphi^2\,(\varepsilon^{n-1}\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-m-1} + \varphi^2\,(\varepsilon^n\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-m} + \\ \ldots + \varphi^2\,(\varepsilon^{n+m-1}\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-1};\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

es ist aber $\varphi^2\,(\varepsilon^{n+m}\,\delta) = \varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta)$, weil

$$\varepsilon^n = (\alpha^2 + \beta^2)\,t - 1 \quad \text{und} \quad \varepsilon^{n+m} = (\alpha^2 + \beta^2)\,t\,\varepsilon^m - \varepsilon^m$$

und deshalb können wir dem Ausdrucke (30) folgende Gestalt geben:

$$\left.\begin{aligned}\psi\,(\varepsilon^m\,\delta) = \varphi^2\,\delta\,.\,\vartheta^{n-m} + \varphi^2\,(\varepsilon\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-m+1} + \varphi^2\,(\varepsilon^2\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-m+2} + \ldots \\ \varphi^2\,(\varepsilon^{m-1}\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-1} + \varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta) + \varphi^2\,(\varepsilon^{m+1}\,\delta)\,.\,\vartheta + \\ \ldots + \varphi^2\,(\varepsilon^{n-1}\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-m-1}\end{aligned}\right\}$$

oder:

$$\psi\,(\varepsilon^m\,\delta) = \vartheta^{-m}\Big(\varphi^2\,(\delta) + \varphi^2\,(\varepsilon\,\delta)\,.\,\vartheta + \varphi^2\,(\varepsilon^2\,\delta)\,.\,\vartheta^2 + \ldots \ldots \\ \varphi^2\,(\varepsilon^{n-1}\,\delta)\,.\,\vartheta^{n-1}\Big) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (31)$$

da $\vartheta^n = 1$ ist;

d. h. $\psi\,(\varepsilon^m\,\delta) = \vartheta^{-m}\,(\psi\,\delta)$

und $\qquad \psi\,\delta = \vartheta^m\,.\,\psi\,(\varepsilon^m\,\delta) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (32)$

Es ist aber $\psi\,(\varepsilon^m\,\delta)$ dieselbe Funktion von $\varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta)$ wie $\psi\,\delta$ von $\varphi^2\,\delta$, oder

$$\psi\,(\varepsilon^m\,\delta) = \chi\,[\varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta)]$$

also nach (32) $\qquad \psi\,(\delta) = \vartheta^m\,\chi\,[\varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta)]$

und dieses zur $n$ten Potenz erhoben giebt

$$(\psi\delta)^n = \left(\chi\,[\varphi^2\,(\varepsilon^m\,\delta)]\right)^n \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(33)$$

Setzt man in diese Gleichung für m der Reihe nach die ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3 . . . . $n-1$, so erhält man n Gleichungen und durch deren Addition wird

$$n(\psi\delta)^n = (\chi(\varphi^2\delta))^n + [\chi(\varphi^2(\varepsilon\delta))]^n + [\chi(\varphi^2(\varepsilon^2\delta))]^n + \ldots$$
$$\left(\chi\,[\varphi^2\,(\varepsilon^{n-1}\delta)]\right)^n \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (34)$$

wo das zweite Glied eine rationale und zu gleicher Zeit symmetrische Funktion von den Ausdrücken $\varphi^2\,\delta$, $\varphi^2\,(\varepsilon\,\delta)$, $\varphi^2\,(\varepsilon^2\,\delta)$, ... $\varphi^2\,(\varepsilon^{n-1}\delta)$ ist, d. h. eine derartige Funktion sämmtlicher Wurzeln der Gleichung $U = 0$. Da sich dann sowohl die Produkte wie die Summen der Potenzen der Wurzeln durch die gegebenen Coeffizienten dieser Gleichung ausdrücken lassen, so ist $(\psi\,\delta)^n$ durch diese bekannten Grössen gegeben und es sei demnach

$$(\psi\,\delta)^n = v \quad \text{und} \quad \psi\,\delta = \sqrt[n]{v}.$$

Wir wollen nun die n verschiedenen Wurzeln der Gleichung $\vartheta^n - 1 = 0$, von denen eine $\vartheta = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$ ist, mit 1, ϑ, ϑ^2, ϑ^3, ... ϑ^{n-1} bezeichnen, da dieselben mit ihren Potenzen zusammenfallen, und die verschiedenen Werthe der Funktion $\psi\,\delta$, wenn wir successive darin die Wurzeln ϑ, ϑ^2, ϑ^3, . . . ϑ^{n-1} setzen, mit $\sqrt[n]{v_1}$, $\sqrt[n]{v_2}$, $\sqrt[n]{v_3}$ . . . $\sqrt[n]{v_{n-1}}$ ausdrücken, so erhalten wir die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\sqrt[n]{v_1} &= \varphi^2\,\delta + \vartheta\,.\,\varphi^2\,(\varepsilon\,\delta) + \vartheta^2\,.\,\varphi^2\,(\varepsilon^2\,\delta) + \vartheta^3\,.\,\varphi^2\,(\varepsilon^3\,\delta) \ldots \vartheta^{n-1}.\,\varphi^2\,(\varepsilon^{n-1}\delta)\\
\sqrt[n]{v_2} &= \varphi^2\,\delta + \vartheta^2\,.\,\varphi^2\,(\varepsilon\,\delta) + \vartheta^4\,.\,\varphi^2\,(\varepsilon^2\,\delta) + \vartheta^6\,.\,\varphi^2\,(\varepsilon^3\,\delta) + \ldots\\
&\qquad \vartheta^{2n-2}.\,\varphi^2\,(\varepsilon^{n-1}\delta)\\
\sqrt[n]{v_3} &= \varphi^2\,\delta + \vartheta^3\,.\,\varphi^2\,(\varepsilon\,\delta) + \vartheta^6\,.\,\varphi^2\,(\varepsilon^2\,\delta) + \vartheta^9\,.\,\varphi^2\,(\varepsilon^3\,\delta) + \ldots\\
&\qquad \vartheta^{3n-3}.\,\varphi^2\,(\varepsilon^{n-1}\delta)
\end{aligned}\right\}\;(35)$$

$$\left.\begin{array}{l} \vdots \\ \sqrt[n]{v_{n-1}} = \varphi^2\,\delta + \vartheta^{n-1}\cdot\varphi^2(\varepsilon\,\delta) + \vartheta^{2n-2}\cdot\varphi^2(\varepsilon^2\,\delta) + \vartheta^{3n-3}\cdot\varphi^2(\varepsilon^3\,\delta)\cdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vartheta^{(n-1)^2}\varphi^2(\varepsilon^{n-1}\delta). \\ \qquad\text{und} \\ -p = \varphi^2\,\delta + \varphi^2(\varepsilon\,\delta) + \varphi^2(\varepsilon^2\,\delta) + \varphi^2(\varepsilon^3\,\delta) + \ldots\ \varphi^2(\varepsilon^{n-1}\delta) \end{array}\right\} \quad (35)$$

von denen die letzte als die Summe sämmtlicher Wurzeln der Gleichung $U = 0$ dem negativen Coeffizienten p des zweiten Gliedes in derselben gleich ist.

Hieraus erhält man die einzelnen Werthe von $\varphi^2(\delta)$, $\varphi^2(\varepsilon\,\delta)$, $\varphi^2(\varepsilon^2\,\delta)$ etc. auf eine einfache Weise dadurch, dass man die Coeffizienten dieser Grössen in den verschiedenen Gleichungen $= 1$ macht und addirt, indem sowohl die Summe:

$1 + \vartheta + \vartheta^2 + \vartheta^3 + \ldots\ \vartheta^{n-1}$ als auch die Summen der positiven wie negativen Potenzen dieser Grössen vermöge der Gleichung $\vartheta^n - 1 = 0$ alle gleich 0 werden. Um $\varphi^2(\varepsilon^m\,\delta)$ zu erhalten, wird die erste dieser Gleichungen durch ϑ^m, die zweite durch ϑ^{2m}, die dritte durch ϑ^{3m} u. s. w. dividirt werden müssen; dann verschwinden durch die Addition sämmtliche Glieder auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens ausser $\varphi^2(\varepsilon^m\,\delta)$ und es resultirt:

$$\varphi^2(\varepsilon^m\,\delta) = \frac{1}{n}\Big\{-p + \vartheta^{-m}\sqrt[n]{v_1} + \vartheta^{-2m}\sqrt[n]{v_2} + \vartheta^{-3m}\sqrt[n]{v_3} + \\ \ldots + \vartheta^{-(n-1)\,m}\sqrt[n]{v_{n-1}}\Big\} \;\ldots\ldots\; (36)$$

als diejenige Form, aus welcher die einzelnen Wurzeln sofort abgeleitet werden können, wenn man dem m die Werthe $0, 1, 2, \ldots\ n-1$ beilegt, und in der z. B. der Coeffizient von $\varphi^2(\varepsilon^k\,\delta)$ sein würde:

$$\vartheta^{k-m} + \vartheta^{2k-2m} + \vartheta^{3k-3m} + \ldots\ \vartheta^{(n-1)(k-m)} + 1,$$

weil $\vartheta^{(k-m)\,n} = 1$, der immer $= 0$ ist.

Es zeigt ferner die Gestalt der Gleichung (36), dass, wenn n von der Form ist $2^{\mu-1}$, d. h.

$$\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}=2^{\mu-1} \quad \text{oder} \quad \alpha^2+\beta^2=2^{\mu}+1$$

die Wurzeln der Gleichung $U=0$ nur von Quadratwurzeln abhängen.

Hat man so aus der Gleichung (36) die einzelnen Werthe von $\varphi^2\left\{\frac{\omega}{\alpha+\beta i}\right\}$, $\varphi^2\left\{\frac{2\omega}{\alpha+\beta i}\right\}, \ldots \varphi^2\left\{\frac{(n-1)\omega}{\alpha+\beta i}\right\}$ abgeleitet, so erhält man die entsprechenden für $\varphi^2\left\{\frac{\omega}{\alpha-\beta i}\right\}$, $\varphi^2\left\{\frac{2\omega}{\alpha-\beta i}\right\}, \ldots \varphi^2\left\{\frac{(n-1)\omega}{\alpha-\beta i}\right\}$, wenn man in dieselben für $+i$ setzt $-i$, und durch die Additionsformel der elliptischen Transcendenten somit den Werth für

$$\pm\varphi\left\{\frac{m\omega}{\alpha+\beta i}+\frac{m\omega}{\alpha-\beta i}\right\}, \text{ oder für } \pm\varphi\left\{\frac{2\alpha m\omega}{\alpha^2+\beta^2}\right\}.$$

Diese vorstehende Theorie der Division elliptischer Funktionen hat an der Fünftheilung der Lemniskate ihr einfachstes Beispiel. Es ist für dieselbe $\alpha=2$, $\beta=1$, $n=\frac{\alpha^2+\beta^2-1}{2}=2$ und die Wurzeln der Gleichung $\vartheta^n-1=0$ sind hier $+1$ und -1.

Wir wollen nun $\varphi^2\left\{\frac{\omega}{2+i}\right\}=\alpha^2$ und, da von $\alpha^2+\beta^2$ oder 5 die primitive Wurzel $=2$ ist, $\varphi^2\left\{\frac{2\omega}{2+i}\right\}=\alpha_{,}^2$ setzen, so wird nach (27)

$$\left.\begin{aligned}\psi\delta&=\alpha^2-\frac{\alpha^2(1-\alpha^4)}{(1+\alpha^4)^2}\\ \psi 2\delta&=\alpha_{,}^2-\frac{\alpha_{,}^2(1-\alpha_{,}^4)}{(1+\alpha_{,}^4)^2}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ (37)$$

und hieraus durch Substitution in die Gleichung (34) für die erste Wurzel $\vartheta=1$:

$$2(\psi\delta)^2=\frac{\alpha^4(\alpha^8+6\alpha^4-3)^2}{(1+\alpha^4)^4}+\frac{\alpha_{,}^4(\alpha_{,}^8+6\alpha_{,}^4-3)^2}{(1+\alpha_{,}^4)^4}\quad\ldots\ (38)$$

oder

$$2\,(\psi\,\delta)^2 = \left.\begin{array}{l} \dfrac{(1+\alpha_{,}^{4})^4\,(\alpha^{20}+12\,\alpha^{16}+30\,\alpha^{12}-36\,\alpha^{8}+9\,\alpha^{4})}{[(1+\alpha^{4})\,(1+\alpha_{,}^{4})]^4} \\ \quad + \dfrac{(1+\alpha^{4})^4\,(\alpha_{,}^{20}+12\,\alpha_{,}^{16}+30\,\alpha_{,}^{12}-36\,\alpha_{,}^{8}+9\,\alpha_{,}^{4})}{[(1+\alpha^{4})\,(1+\alpha_{,}^{4})]^4}. \end{array}\right\} \cdot (39)$$

$$= \frac{Z}{N}$$

ein Ausdruck, in welchem Zähler und Nenner rationale und symmetrische Funktionen von α^2 und $\alpha_{,}^{2}$ oder von den Würzeln der Gleichung $U = 0$ sind, die für unsern speziellen Fall schon als

$$\chi^4 - (1-2i) = 0$$

angegeben war und für welche ferner

$$\left.\begin{array}{l} \alpha^2 + \alpha_{,}^{2} = 0 \\ \alpha^2\,\alpha_{,}^{2} \quad = -\,(1-2i) \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (40)$$

ist.

Ordnet man aber die Gleichung (39) und zwar zuerst den Zähler nach den symmetrischen Verbindungen von α^2 und $\alpha_{,}^{2}$, so wird

$$2N\,(\psi\,\delta)^2 = \left.\begin{array}{l} \alpha^{20}+\alpha_{,}^{20} + 12\,(\alpha^{16}+\alpha_{,}^{16}) + 30\,(\alpha^{12}+\alpha_{,}^{12}) \\ -\,36\,(\alpha^{8}+\alpha_{,}^{8}) + 9\,(\alpha^{4}+\alpha_{,}^{4}) + 4\,\alpha^{4}\,\alpha_{,}^{4} \\ \left[\alpha^{16}+\alpha_{,}^{16}+12\,(\alpha^{12}+\alpha_{,}^{12})+30\,(\alpha^{8}+\alpha_{,}^{8})\right. \\ \left. -\,36\,(\alpha^{4}+\alpha_{,}^{4})+18\right] + 6\,\alpha^{8}\,\alpha_{,}^{8}\,\left[\alpha^{12}+\alpha_{,}^{12}\right. \\ \left. +\,12\,(\alpha^{8}+\alpha_{,}^{8})+30\,(\alpha^{4}+\alpha_{,}^{4})-72+9\left(\frac{1}{\alpha^{4}}+\frac{1}{\alpha^{4}}\right)\right] \\ +\,4\,\alpha^{12}\,\alpha_{,}^{12}\,\left[\alpha^{8}+\alpha_{,}^{8}+12\,(\alpha^{4}+\alpha_{,}^{4})+60\right. \\ \left. -\,36\left(\frac{1}{\alpha^{4}}+\frac{1}{\alpha_{,}^{4}}\right)+9\left(\frac{1}{\alpha^{8}}+\frac{1}{\alpha_{,}^{8}}\right)\right]+\alpha^{16}\,\alpha_{,}^{16}\left[\alpha^{4}+\alpha_{,}^{4}\right. \\ +\,24+36\,\left(\frac{1}{\alpha^{4}}+\frac{1}{\alpha_{,}^{4}}\right)-36\,\left(\frac{1}{\alpha^{8}}+\frac{1}{\alpha_{,}^{8}}\right) \\ \left. +\,9\left(\frac{1}{\alpha^{12}}+\frac{1}{\alpha_{,}^{12}}\right)\right] \end{array}\right\} \cdot\cdot (41)$$

oder

$$\left.\begin{aligned}2N(\psi\delta)^2 = {} & \alpha^{20}+\alpha_{,}^{20}+(\alpha^{16}+\alpha_{,}^{16})(12+4\alpha^4\alpha_{,}^4)+(\alpha^{12}+\alpha_{,}^{12})\\ & (30+57\alpha^4\alpha_{,}^4+6\alpha^8\alpha_{,}^8)+(\alpha^8+\alpha_{,}^8)(-36\\ & +146\alpha^4\alpha_{,}^4+36\alpha^8\alpha_{,}^8+4\alpha^{12}\alpha_{,}^{12})+(\alpha^4+\alpha_{,}^4)\\ & (9-90\alpha^4\alpha_{,}^4-24\alpha^8\alpha_{,}^8+78\alpha^{12}\alpha_{,}^{12}+\alpha^{16}\alpha_{,}^{16})\\ & +72\alpha^4\alpha_{,}^4-432\alpha^8\alpha_{,}^8+240\alpha^{12}\alpha_{,}^{12}+24\alpha^{16}\alpha_{,}^{16}\end{aligned}\right\} . \quad (42)$$

Aus den Gleichungen (40) ergiebt sich dieser Ausdruck als Funktion von $(\alpha^2\alpha_{,}^2)$ oder von $\alpha\alpha_{,}$; denn es ist

$$\left.\begin{aligned}\alpha^4+\alpha_{,}^4 &= -2\alpha^2\alpha_{,}^2\\ \alpha^8+\alpha_{,}^8 &= 2\alpha^4\alpha_{,}^4\\ \alpha^{12}+\alpha_{,}^{12} &= -2\alpha^6\alpha_{,}^6\\ \alpha^{16}+\alpha_{,}^{16} &= 2\alpha^8\alpha_{,}^8\\ \alpha^{20}+\alpha_{,}^{20} &= -2\alpha^{10}\alpha_{,}^{10}\end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (43)$$

und es verändert sich somit die Gleichung (42) in folgende:

$$\begin{aligned}2N(\psi\delta)^2 &= -2\alpha^{18}\alpha_{,}^{18}+32\alpha^{16}\alpha_{,}^{16}-168\alpha^{14}\alpha_{,}^{14}+320\alpha^{12}\alpha_{,}^{12}\\ &\quad -188\alpha^{10}\alpha_{,}^{10}-96\alpha^8\alpha_{,}^8+120\alpha^6\alpha_{,}^6-18\alpha^2\alpha_{,}^2,\\ &= -2\alpha^2\alpha_{,}^2\,(\alpha^{16}\alpha_{,}^{16}-16\alpha^{14}\alpha_{,}^{14}+84\alpha^{12}\alpha_{,}^{12}\\ &\quad -160\alpha^{10}\alpha_{,}^{10}+94\alpha^8\alpha_{,}^8+48\alpha^6\alpha_{,}^6-60\alpha^4\alpha_{,}^4+9)\end{aligned}$$

oder

$$(\psi\delta)^2 = -\frac{\alpha^2\alpha_{,}^2\,(\alpha^8\alpha_{,}^8-8\alpha^6\alpha_{,}^6+10\alpha^4\alpha_{,}^4-3)^2}{N.} \ldots\ldots \quad (44)$$

Auf eine ganz analoge Weise erhält man aus (27) und (34) für die zweite Wurzel $\vartheta = -1$ den Ausdruck:

$$2(\psi_{,}\delta)^2 = \frac{\alpha^4\,(\alpha^8+6\alpha^4-3)^2}{(1+\alpha^4)^4} - \frac{\alpha_{,}^4\,(\alpha_{,}^8+6\alpha_{,}^4-3)^2}{(1+\alpha_{,}^4)^4}$$

oder

$$\left.\begin{aligned}2(\psi_{,}\delta)^2 = {} & \frac{(1+\alpha_{,}^4)^4\,(\alpha^{20}+12\alpha^{16}+30\alpha^{12}-36\alpha^8+9\alpha^4)}{[(1+\alpha^4)\,(1+\alpha_{,}^4)]^2}\\ & -\frac{(1+\alpha^4)^4\,(\alpha_{,}^{20}+12\alpha_{,}^{16}+30\alpha_{,}^{12}-36\alpha_{,}^8+9\alpha_{,}^4)}{[(1+\alpha^4)\,(1+\alpha_{,}^4)]^2}\end{aligned}\right\} . \quad (45)$$

in dem sich eben so Zähler und Nenner als symmetrische und rationale Funktionen von α^2 und $\alpha_{,}^2$ oder den Wurzeln der Gleichung $U = 0$ darstellen lassen. Es wird nämlich nach ähnlicher Weise geordnet die Gleichung (45):

$$\left.\begin{aligned}2N(\psi,\delta)^2 = {} & (\alpha^{20}+\alpha_{,}^{20}) + (\alpha^{16}+\alpha_{,}^{16})(4\alpha^4\alpha_{,}^4-4) + (\alpha^{12}+\alpha_{,}^{12}) \\ & (14+9\alpha^4\alpha_{,}^4+6\alpha^8\alpha_{,}^8) + (\alpha^8+\alpha_{,}^8)(-20+156\alpha^4\alpha_{,}^4 \\ & -44\alpha^8\alpha_{,}^8+4\alpha^{12}\alpha_{,}^{12}) + (\alpha^4+\alpha_{,}^4)(25+70\alpha^4\alpha_{,}^4 \\ & +4\alpha^8\alpha_{,}^8-2\alpha^{12}\alpha_{,}^{12}+\alpha^{16}\alpha_{,}^{16}) + 200\alpha^4\alpha_{,}^4 \\ & -240\alpha^8\alpha_{,}^8+112\alpha^{12}\alpha_{,}^{12}-8\alpha^{16}\alpha_{,}^{16}\end{aligned}\right\} \quad (46)$$

und, wenn man die Summen der Potenzen von α^2 und $\alpha_{,}^2$ aus den Gleichungen (43) substituirt:

$$\begin{aligned}2N(\psi,\delta)^2 = {} & -2\alpha^{18}\alpha_{,}^{18}-8\alpha^{14}\alpha_{,}^{14}+32\alpha^{12}\alpha_{,}^{12}-28\alpha^{10}\alpha_{,}^{10} \\ & +64\alpha^8\alpha_{,}^8-168\alpha^6\alpha_{,}^6+160\alpha^4\alpha_{,}^4-50\alpha^2\alpha_{,}^2\end{aligned}$$

oder

$$(\psi,\delta)^2 = -\frac{\alpha^2\alpha_{,}^2(\alpha^8\alpha_{,}^8+2\alpha^4\alpha_{,}^4-8\alpha^2\alpha_{,}^2+5)^2}{N.} \quad \ldots\ldots (47)$$

Für den Nenner N leitet man aber:

$$\left.\begin{aligned}N & = [(1+\alpha^4)(1+\alpha_{,}^4)]^4 = (1+\alpha^4+\alpha_{,}^4+\alpha^4\alpha_{,}^4)^4 \\ & = (1-2\alpha^2\alpha_{,}^2+\alpha^4\alpha_{,}^4)^4 = (1-\alpha^2\alpha_{,}^2)^8\end{aligned}\right\} \ldots (48)$$

ab, und es ist somit aus der Verbindung von (44), (47) und (48)

$$\left.\begin{aligned}\varphi^2\left\{\frac{\omega}{2+i}\right\}+\varphi^2\left\{\frac{2\omega}{2+i}\right\} & = \psi\delta = i\frac{\alpha\alpha_{,}(\alpha^8\alpha_{,}^8-8\alpha^6\alpha_{,}^6+10\alpha^4\alpha_{,}^4-3)}{(1-\alpha^2\alpha_{,}^2)^4} \\ \varphi^2\left\{\frac{\omega}{2+i}\right\}-\varphi^2\left\{\frac{2\omega}{2+i}\right\} & = \psi_{,}\delta = i\frac{\alpha\alpha_{,}(\alpha^8\alpha_{,}^8+2\alpha^4\alpha_{,}^4-8\alpha^2\alpha_{,}^2+5)}{(1-\alpha^2\alpha_{,}^2)^4}\end{aligned}\right\} (49)$$

und hieraus:

$$\left.\begin{aligned}\varphi^2\left\{\frac{\omega}{2+i}\right\} & = \frac{i\alpha\alpha_{,}(1-\alpha^2\alpha_{,}^2+6\alpha^4\alpha_{,}^4-4\alpha^6\alpha_{,}^6+\alpha^8\alpha_{,}^8)}{(1-\alpha^2\alpha_{,}^2)^4} = i\alpha\alpha_{,} \\ \varphi^2\left\{\frac{2\omega}{2+i}\right\} & = -\frac{4i\alpha\alpha_{,}(1-\alpha^2\alpha_{,}^2-\alpha^4\alpha_{,}^4+\alpha^6\alpha_{,}^6)}{(1-\alpha^2\alpha_{,}^2)^4} \\ & = -\frac{4i\alpha\alpha_{,}(1+\alpha^2\alpha_{,}^2)}{(1-\alpha^2\alpha_{,}^2)^2}\end{aligned}\right\} . (50)$$

Dieselben Werthe von $\varphi^2\left\{\frac{\omega}{2+i}\right\}$ und $\varphi^2\left\{\frac{2\omega}{2+i}\right\}$ hätten wir eben so schon aus der Gleichung $x^4 = (1-2i)$ ableiten können, sollte diese Auflösung derselben nicht als Beispiel der oben gegebenen Methode dienen; denn es ist daraus:

$$x^2 = \varphi^2 \left\{\frac{\omega}{2+i}\right\} = \sqrt{1-2i} = i\sqrt{2i-1}$$

$$\text{und} \quad x^2 = \varphi^2 \left\{\frac{2\omega}{2+i}\right\} = \quad -i\sqrt{2i-1}$$

wo man den zweiten dieser Ausdrücke in den Gleichungen (50) wieder findet, wenn man in $\varphi^2 \left\{\frac{2\omega}{2+i}\right\}$ für $\alpha^2 \alpha_{,}^2$ den Werth $\sqrt{2i-1}$ setzt. Hierdurch wird gleichzeitig den Relationen der elliptischen Transcendenten und den der Wurzeln einer Gleichung Genüge geleistet, und es ist endlich:

$$\left.\begin{aligned} \varphi \frac{\omega}{2+i} &= \sqrt[4]{1-2i} \\ \varphi \frac{2\omega}{2+i} &= i\sqrt[4]{1-2i} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (51)$$

Verwandeln wir aber i in $-i$, so ergeben sich daraus die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varphi \frac{\omega}{2-i} &= \sqrt[4]{1+2i} \\ \varphi \frac{2\omega}{2-i} &= -i\sqrt[4]{1+2i} \end{aligned}\right\} \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (52)$$

Nach den Grundformeln (6) der elliptischen Funktionen aber ist:

$$\varphi\left(\frac{\omega}{2+i} + \frac{\omega}{2-i}\right) = \frac{\varphi\frac{\omega}{2+i}\sqrt{1-\varphi^4\left(\frac{\omega}{2-i}\right)} + \varphi\frac{\omega}{2-i}\sqrt{1-\varphi^4\frac{\omega}{2+i}}}{1+\varphi^2\left(\frac{\omega}{2+i}\right)\cdot\varphi^2\left(\frac{\omega}{2-i}\right)}$$

oder, die Werthe aus (51) und (52) substituirt:

$$\varphi\frac{4\omega}{5} = \frac{\sqrt[4]{1-2i}\;\sqrt{-2i} + \sqrt[4]{1+2i}\;\sqrt{2i}}{1+\sqrt{5}}$$

Es ist jedoch $\sqrt{-2i} = 1-i$ und $\sqrt{2i} = 1+i$, so dass

$$\varphi\,\frac{4}{5}\,\omega = \frac{(1-i)\sqrt[4]{1-2i} + (1+i)\sqrt[4]{1+2i}}{1+\sqrt{5}} \quad \ldots\ldots (53)$$

und hieraus, weil

$$\left.\begin{aligned}\sqrt[4]{1-2i} &= \sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}} \\ \sqrt[4]{1+2i} &= \sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}}\end{aligned}\right\} \ldots (54)$$

ist, folgt:

$$\left.\begin{aligned}\varphi\,\frac{4}{5}\,\omega &= \frac{2}{1+\sqrt{5}}\left\{\sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}}\right\} \\ &= \frac{2}{1+\sqrt{5}}\sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}{2}}\end{aligned}\right\} \ldots (55)$$

Ganz auf dieselbe Weise giebt uns die Gleichung:

$$\varphi\left(\frac{2\omega}{2+i} + \frac{2\omega}{2-i}\right)$$

$$= \frac{\varphi\,\frac{2\omega}{2+i}\sqrt{1-\varphi^4\left(\frac{2\omega}{2-i}\right)} + \varphi\,\frac{2\omega}{2-i}\sqrt{1-\varphi^4\left(\frac{2\omega}{2+i}\right)}}{1+\varphi^2\left(\frac{2\omega}{2+i}\right)\cdot\varphi^2\,\frac{2\omega}{2-i}}$$

für die aus (52) und (54) substituirten Werthe

$$\varphi\,\frac{8\omega}{5} = \frac{i(1-i)\sqrt{1-2i} - (i+1)\sqrt{1+2i}}{1+\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{1+\sqrt{5}}\left\{\sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}{2}}\right\}$$

$$= \frac{2}{1+\sqrt{5}} \sqrt{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (56)$$

Die beiden Ausdrücke für $\varphi\,\frac{4\omega}{5}$ und $\varphi\,\frac{8\omega}{5}$, die mit siebenstelligen Logarithmen berechnet resp. 0,52047 und 0,933522 geben, entsprechen auch der Relation der elliptischen Funktionen, dass

$$\left.\begin{aligned} \varphi\,\frac{8\omega}{5} &= \frac{2\,\varphi\,\frac{4\omega}{5}\sqrt{1-\varphi^4\,\frac{4\omega}{5}}}{1+\varphi^4\,\frac{4\omega}{5}} \\ \varphi\,\frac{4\omega}{5} &= \frac{2\,\varphi\,\frac{8\omega}{5}\sqrt{1-\varphi^4\,\frac{8\omega}{5}}}{1+\varphi^4\,\frac{8\omega}{5}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (57)$$

ist. Nun war $\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^4}}$, oder der halbe Bogen des Zweiges der Lemniskate für die positive halbe Axe und z die Chorde dieses Bogens als Funktion derselben $= 1$, d. h. $z = \varphi\,\frac{\omega}{2} = 1$; dagegen für diesen ganzen Zweig war $z = \varphi\,\omega = 0$. Es werden also für diesen Theil der Curve, wenn wir die halbe Axe a zurück substituiren, die Werthe dieser Chorden AB, AC, AD, AE, bezeichnen wir sie resp. mit z_1, z_2, z_3, z_4, die der Funktionen $\varphi\,\frac{\omega}{5}$, $\varphi\,\frac{2\omega}{5}$, $\varphi\,\frac{3\omega}{5}$, $\varphi\,\frac{4\omega}{5}$ sein, und also:

$$\left.\begin{aligned} z_1 = z_4 &= \frac{2a}{1+\sqrt{5}} \sqrt{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \\ z_2 = z_3 &= \frac{2a}{1+\sqrt{5}} \sqrt{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (58)$$

Ausdrücke, die, wie man leicht sieht, sich durch Zirkel und Lineal allein construiren lassen, da sie nur von Quadratwurzeln abhängen.

Nimmt man aber auch den Zweig für die negative halbe Axe ($-a$) hinzu, so ergeben sich aus der Periodizität der elliptischen Transcendenten so wie aus der Relation von (57) für die Fünftheilung der ganzen Figur die Chorden AC, AE, AI, AG und deren Werthe als folgende:

$$\left.\begin{aligned} AC &= \frac{2a}{1+\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}, \quad AI = \frac{-2a}{1+\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \\ AE &= \frac{2a}{1+\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt[4]{5}-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}}, \quad AG = \frac{-2a}{1+\sqrt{5}}\sqrt{\sqrt[4]{5}+\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}} \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

und somit die vollständige Lösung der Aufgabe.

Für die Siebzehntheilung derselben Curve geben die Formeln (7), darin $\alpha = 4\delta$ und $\beta = i\delta$ gesetzt:

$$\varphi\,(4+i)\,\delta = \frac{\varphi 4\delta\sqrt{1-\varphi^4 i\delta} + \varphi i\delta\sqrt{1-\varphi^4 4\delta}}{1-\varphi^2 4\delta\,.\,\varphi^2\delta} \quad \ldots\ldots \quad (60)$$

Um diesen Ausdruck als Funktion von $\varphi\delta$ zu entwickeln, benutzen wir die Gleichungen (12), nach welchen

$$\varphi 4\delta = \frac{2\varphi 2\delta\sqrt{1-\varphi^4 2\delta}}{1+\varphi^4 2\delta} \text{ und } \varphi 2\delta = \frac{2\varphi\delta\sqrt{1-\varphi^2\delta}}{1+\varphi^4\delta}$$

ist; und hieraus wird, $\varphi\delta = x$ und $\varphi 4\delta = z$ gesetzt, da $\varphi\delta = i\varphi\delta$ und $\varphi^4\,(i\delta) = \varphi^4\delta$ ist, zuerst:

$$\varphi\,(4+i)\,\delta = \frac{z\sqrt{1-x^2}\ \sqrt{1+x^2} + ix\sqrt{1-z^2}\ \sqrt{1+z^2}}{1-z^2\ x^2} \quad \ldots \quad (61)$$

Wenn aber $\varphi 2\delta$ hier y genannt wird, so dass

$$z = \frac{2y\sqrt{1-y^4}}{1+y^4} \text{ und } \sqrt{1-z^4} = \sqrt{\frac{1-12y^4+38y^8-12y^{12}+y^{16}}{(1+y^4)^4}}$$

$$= \frac{1 - 6y^4 + y^8}{(1+y^4)^2}$$

ist, woraus dann:

$$\varphi\,(4+i)\,\delta = \frac{2y\sqrt{1-y^4}\,(1+y^4)\sqrt{1-x^4} + ix\,(1-6y^4+y^8)}{(1+y^4)^2 - x^2\,.\,4y^2\,(1-y^4)} \quad . \; (62)$$

folgt, so erhalten wir durch die Substitution von

$$y = \frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4} \quad \text{und} \quad \sqrt{1-y^4} = \frac{1-6x^4+x^8}{(1+x^4)^2}$$

den Endausdruck:

$$\varphi\,(4+i)\,\delta = \frac{Z}{N} \; \ldots\ldots$$

$$\left.\begin{aligned} \text{wo} \quad Z &= 4x\,(1-x^4)\,(1+x^4)\,[(1+x^4)^4 + 16x^4\,(1-x^4)^2] \\ &\quad [1-6x^4+x^8] + ix\,[(1+x^4)^8 - 6\,(1+x^4)^4. \\ &\quad 16x^4\,(1-x^4)^2 + 2^8x^8\,(1-x^4)^4] \\ \text{und} \quad N &= [(1+x^4)^4 + 16x^4\,(1-x^4)^2]^2 - 16x^4\,(1-x^4). \\ &\quad (1-6x^4+x^8)^2\,(1+x^4)^2. \end{aligned}\right\} \ldots \; (63)$$

Auch hier hat, wie bei der Fünftheilung, der Ausdruck im Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Faktor; es ist nämlich

$$N = 1 + 24x^4 + 524x^8 - 1400x^{12} + 886x^{16} - 408x^{20} + 748x^{24} - 136x^{28} + 17x^{32}$$

oder

$$\begin{aligned} N &= [1 + 24x^4 + 124x^8 - 280x^{12} - 378x^{16} + 424x^{20} + 380x^{24} \\ &\quad - 40x^{28} + x^{32}] + [400x^8 - 1120x^{12} + 1264x^{16} - 832x^{20} \\ &\quad + 368x^{24} - 96x^{28} + 16x^{32}] \\ &= (1 + 12x^4 - 10x^8 - 20x^{12} + x^{16})^2 + (20x^4 - 28x^8 \\ &\quad + 12x^{12} - 4x^{16})^2; \end{aligned}$$

und die Summe dieser Quadrate in die imaginären Faktoren zerfällt, giebt:

$$\begin{aligned} N &= [1 + (12+20i)\,x^4 - (10+28i)\,x^8 - (20-12i)\,x^{12} \\ &\quad + (1-4i)\,x^{16}]\;[1 + (12-20i)\,x^4 - (10-28i)\,x^8 \\ &\quad - (20+12i)\,x^{12} + (1+4i)\,x^{16}] \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (64) \end{aligned}$$

Für Z aber findet man $Z = i x Z_{\prime}$, und

$$\begin{aligned}Z_{\prime} = {} & (1-4i) - (88+56i)x^4 + (92+588i)x^8 \\ & - (872+728i)x^{12} + 1990x^{16} - (872-728i)x^{20} \\ & + (92-588i)x^{24} - (88-56i)x^{28} + (1+4i)x^{32}\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}Z_{\prime} = {} & [1-4i-(20-12i)x^4-(10+28i)x^8+(12+20i)x^{12} \\ & +x^{16}]\,[1+(12-20i)x^4-(10-28i)x^8-(20+12i)x^{12} \\ & +(1+4i)x^{16}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (65)\end{aligned}$$

und somit wird, nach der Division von (64) und (65) durch den gemeinschaftlichen Faktor:

$$\varphi(4+i)\delta = \frac{xi[1-4i-(20-12i)x^4-(10+28i)x^8+(12+20i)x^{12}+x^{16}]}{1+(12+20i)x^4-(10+28i)x^8-(20-12i)x^{12}+(1-4i)x^{16}} \cdot (66)$$

ein Ausdruck, der, abgesehen von dem Faktor $x\,i$, in Zähler und Nenner symmetrisch ist in Beziehung auf x^4 und $\frac{1}{x^4}$, wie wir es auch bei $\varphi\,(2+i)\,\delta$ fanden, und der, wenn man $\delta = \frac{\omega}{4+i}$ setzt, wodurch $\varphi\,(4+i)\,\delta = 0$ und $x = \varphi\frac{\omega}{4+i}$ wird, die einzelnen Werthe von $\varphi^2\,\frac{\omega}{4+i}$, $\varphi^2\,\frac{2\omega}{4+i}$ etc. nach der oben angegebenen Methode nur durch grosse Rechnungsschwierigkeiten finden lässt.

Wir dürfen uns jedoch aus derselben nur an den Beweis erinnern, dass

$$\varphi^2\,\frac{\omega}{4+i},\quad \varphi^2\,\frac{2\omega}{4+i},\ \ldots\ldots\ \varphi^2\,\frac{8\omega}{4+i}$$

die 8 verschiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$x^{16}+(12+20i)x^{12}-(10+28i)x^8-(20-12i)x^4+(1-4i)=0 \ \ldots (67)$$

sind, da sich deren Wurzeln durch die unmittelbare Auflösung derselben leichter finden lassen.

Wir können nämlich dieselbe auch unter die Form bringen:

$$\begin{aligned}& [x^{16}+(12+20i)x^{12}-(46-116i)x^8+(148+156i)x^4+(77-36i)] \\ & \quad -[-(36-144i)x^8+(168+144i)x^4+(76-32i)] = 0\end{aligned}$$

oder

$$(x^8+(6+10i)\,x^4+9-2i)^2-(6ix^4+4+2i)^2(1-4i)=0$$

und hieraus werden leicht die Faktoren abgeleitet:

$$\left.\begin{aligned} x^8+(6+10i+6i\sqrt{1-4i})\,x^4+9-2i+(4+2i)\sqrt{1-4i}=0\\ x^8+(6+10i-6i\sqrt{1-4i})\,x^4+9-2i-(4+2i)\sqrt{1-4i}=0\end{aligned}\right\} \ldots (68)$$

Aus der ersten dieser Gleichungen folgt zur Bestimmung von x:

$$x^4+3+5i+3i\sqrt{1-4i}+\sqrt{-34+68i-(34-16i)\sqrt{1-4i}}=0$$

$$x^4+3+5i+3i\sqrt{1-4i}-\sqrt{-34+68i-(34-16i)\sqrt{1-4i}}=0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} x^4+3+5i+3i\sqrt{1-4i}+\sqrt[4]{1-4i}\,(1+4i+(2i-1)\sqrt{1-4i})=0\\ x^4+3+5i+3i\sqrt{1-4i}-\sqrt[4]{1-4i}\,(1+4i+(2i-1)\sqrt{1-4i})=0\end{aligned}\right\} \ldots (69)$$

aus der zweiten dagegen:

$$\left.\begin{aligned} x^4+(3+5i)-3i\sqrt{1-4i}+\sqrt[4]{1-4i}\,(i(1+4i)+(2+i)\sqrt{1-4i})=0\\ x^4+(3+5i)-3i\sqrt{1-4i}-\sqrt[4]{1-4i}\,(i(1+4i)+(2+i)\sqrt{1-4i})=0\end{aligned}\right\} \ldots (70)$$

Die 4 Gleichungen (69) und (70) geben dann die 8 verschiedenen Werthe von x^2 oder von $\varphi^2\left\{\frac{\omega}{4+i}\right\}$, $\varphi^2\left\{\frac{2\omega}{4+i}\right\}$, ... $\varphi^2\left\{\frac{8\omega}{4+i}\right\}$, welche, wollte man die irrationalen Formen beibehalten, in demselben Maasse komplizirt wie die bei der Fünftheilung einfach sind, wenngleich sie nur von Quadratwurzeln abhängen. Die Berechnung mit siebenstelligen Logarithmen ergab für die 16 verschiedenen Wurzeln der Gleichung (67) folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned} x_1&=\pm\sqrt[4]{-13{,}225917-20{,}307364\,i}\,,\quad x_2=\pm i\,x_1,\\ x_3&=\pm\sqrt[4]{-0{,}271813+0{,}704456\,i}\,,\quad x_4=\pm i\,x_3,\\ x_5&=\pm\sqrt[4]{0{,}094526-0{,}126507\,i}\,,\quad x_6=\pm i\,x_5,\\ x_7&=\pm\sqrt[4]{1{,}403204-0{,}270585\,i}\,,\quad x_8=\pm i\,x_7.\end{aligned}\right\} \ldots (71)$$

Verwandelt man überall in diesen Ausdrücken das Zeichen von i, so erhält man die Werthe von $\varphi^2\left\{\frac{\omega}{4-i}\right\}$, $\varphi^2\left\{\frac{2\omega}{4-i}\right\} \ldots \varphi^2\left\{\frac{8\omega}{4-i}\right\}$, und hieraus mit Anwendung der Summenformel:

$$\varphi\left\{\frac{\omega}{4+i}+\frac{\omega}{4-i}\right\}=\frac{\varphi\frac{\omega}{4+i}\sqrt{1-\varphi^4\left\{\frac{\omega}{4-i}\right\}}+\varphi\frac{\omega}{4-i}\sqrt{1-\varphi^4\left\{\frac{\omega}{4+i}\right\}}}{1+\varphi^2\left\{\frac{\omega}{4+i}\right\}\cdot\varphi^2\left\{\frac{\omega}{4-i}\right\}}$$

die verschiedenen Theile der halben Axe a als Chorden für die Siebzehntheile unserer Curve, die wir mit u_1, u_2, $u_3 \ldots u_8$ bezeichnen wollen, und bei denen die Möglichkeit einer geometrischen Construktion einleuchtend ist, da sie nur von Quadratwurzeln abhängen.

Der Gang der Rechnung wird am einfachsten, wenn man die Ausdrücke von (71) in die Form bringt:

$$x_1=\pm\sqrt[4]{a+bi}=\pm\sqrt[4]{r\,(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$$

und $(1-a)+bi=\varrho\,(\cos\psi+i\sin\psi)$,

und auf eine analoge Weise die Indiçes $_1$, $_2$, $_3$ bei x_3, x_5 und x_7 anwendet. Dann erhält man aus den zusammen gehörigen Werthen von x:

$$u_1=\pm\frac{2\sqrt[4]{r}\sqrt{\varrho}\cos\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)}{1+r}\,a=\pm\,0{,}4606045\,a.$$

$$u_2=\pm\frac{2\sqrt[4]{r}\sqrt{\varrho}\sin\left(\frac{\varphi}{4}+\frac{\psi}{2}\right)}{1+r}\,a=\pm\,0{,}7446965\,a$$

$$u_3=\pm\frac{2\sqrt[4]{r_{\prime}}\sqrt{\varrho_{\prime}}\cos\left(\frac{\varphi_{\prime}}{4}+\frac{\psi_{\prime}}{2}\right)}{1+r_{\prime}}\,a=\pm\,0{,}9479800\,a$$

$$u_4=\pm\frac{2\sqrt[4]{r_{\prime}}\sqrt{\varrho_{\prime}}\sin\left(\frac{\varphi_{\prime}}{4}+\frac{\psi_{\prime}}{2}\right)}{1+r_{\prime}}\,a=\pm\,0{,}8613340\,a.$$

$$u_5 = \pm \frac{2\sqrt[4]{r_2}\sqrt{\varrho_2}\cos\left(\frac{\varphi_2}{4}+\frac{\psi_2}{2}\right)}{1+r_2}\,a = \pm\,0{,}9940963\,a$$

$$u_6 = \pm \frac{2\sqrt[4]{r_2}\sqrt{\varrho_2}\sin\left(\frac{\varphi_2}{4}+\frac{\psi_2}{2}\right)}{1+r_2}\,a = \pm\,0{,}3093421\,a.$$

$$u_7 = \pm \frac{2\sqrt[4]{r_3}\sqrt{\varrho_3}\cos\left(\frac{\varphi_3}{4}+\frac{\psi_3}{2}\right)}{1+r_3}\,a = \pm\,0{,}1540212\,a$$

$$u_8 = \pm \frac{2\sqrt[4]{r_3}\sqrt{\varrho_3}\sin\left(\frac{\varphi_3}{4}+\frac{\psi_3}{2}\right)}{1+r_3}\,a = \pm\,0{,}6080997\,a.$$

Von diesen Ausdrücken entsprechen auch u_7, u_6, u_8, u_5, so wie u_1, u_4, u_2, u_3 der allgemeinen Relation:

$$u_6 = \frac{2u_7\sqrt{1-(u_7)^4}}{1+(u_7)^4} \text{ etc.}$$

$$\text{und} \quad u_1 = \frac{u_7\sqrt{1-(u_6)^4}+u_6\sqrt{1-(u_7)^4}}{1+(u_6)^2\,(u_7)^2}.$$

Wir haben demnach in dem positiven Theile der halben Axe der Curve

u_7	für die Theile	1 und 16.	des Bogens,
u_6	- - -	2 und 15.	- -
u_1	- - -	3 und 14.	- -
u_8	- - -	4 und 13.	- -
u_2	- - -	5 und 12.	- -
u_4	- - -	6 und 11.	- -
u_3	- - -	7 und 10.	- -
u_5	- - -	8 und 9.	- -

dagegen in der ganzen Curve ist:

$$\varphi\,\frac{\omega}{17} = 0{,}3093421\,a; \qquad \varphi\,\frac{9\,\omega}{17} = -\,0{,}1540212\,a;$$

$$\varphi\,\frac{2\,\omega}{17} = 0{,}6080997\,a; \qquad \varphi\,\frac{10\,\omega}{17} = -\,0{,}4606045\,a;$$

$$\varphi\,\frac{3\,\omega}{17} = 0{,}8613340\,a; \qquad \varphi\,\frac{11\,\omega}{17} = -\,0{,}7446965\,a;$$

$$\varphi\,\frac{4\,\omega}{17} = 0{,}9940963\,a; \qquad \varphi\,\frac{12\,\omega}{17} = -\,0{,}9479800\,a;$$

$$\varphi\,\frac{5\,\omega}{17} = 0{,}9479800\,a; \qquad \varphi\,\frac{13\,\omega}{17} = -\,0{,}9940963\,a;$$

$$\varphi\,\frac{6\,\omega}{17} = 0{,}7446965\,a; \qquad \varphi\,\frac{14\,\omega}{17} = -\,0{,}8613340\,a;$$

$$\varphi\,\frac{7\,\omega}{17} = 0{,}4606045\,a; \qquad \varphi\,\frac{15\,\omega}{17} = -\,0{,}6080997\,a;$$

$$\varphi\,\frac{8\,\omega}{17} = 0{,}1540212\,a; \qquad \varphi\,\frac{16\,\omega}{17} = -\,0{,}3093421\,a.$$

Conitz, im Juli 1846.